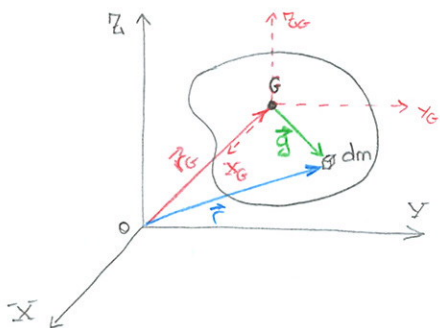


8. TEOREMAS DE STEINER

8.1. PRIMER TEOREMA DE STEINER.



$$\vec{r} = \vec{r}_G + \vec{g}$$

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_M \vec{r}^2 dm = \int_M (\vec{r}_G + \vec{g})^2 dm = \\ &= \int_M (\vec{r}_G^2 + \vec{g}^2 + 2\vec{r}_G \vec{g}) dm = \\ &= \int_M \vec{r}_G^2 dm + \int_M \vec{g}^2 dm + 2 \int_M \vec{r}_G \vec{g} dm \end{aligned}$$

$$I_0 = \vec{r}_G^2 \int_M dm + \int_M \vec{g}^2 dm + 2\vec{r}_G \int_M \vec{g} dm$$

$$\int_M dm = M \equiv \text{masa total}$$

$$\int_M \vec{g}^2 dm = I_G \equiv \text{momento inercia respecto al centro de masa } G$$

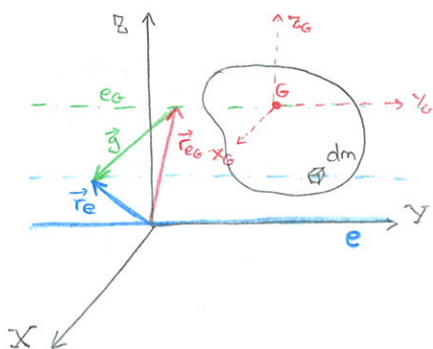
$$\int_M \vec{g} dm \equiv \text{momento estático del sistema respecto al centro de masa} \quad \vec{0} = \frac{\int_M \vec{g} dm}{\int_M dm}$$

$$I_0 = I_G + \vec{r}_G^2 M$$

$$I_0 = I_G + M r_G^2$$

"El momento de inercia respecto al centro de masa, G , es mínimo."

8.2. SEGUNDO TEOREMA DE STEINER



(Pero que el dibujo se vea mejor luego $Y \equiv e$)

$$\vec{r}_e = \vec{r}_G + \vec{g}$$

$$\begin{aligned} I_e &= \int_M \vec{r}_e^2 dm = \int_M (\vec{r}_G + \vec{g})^2 dm = \\ &= \int_M (\vec{r}_G^2 + \vec{g}^2 + 2\vec{r}_G \vec{g}) dm = \\ &= \int_M \vec{r}_G^2 dm + \int_M \vec{g}^2 dm + 2 \int_M \vec{r}_G \vec{g} dm = \\ &= \vec{r}_G^2 \int_M dm + \int_M \vec{g}^2 dm + 2\vec{r}_G \int_M \vec{g} dm \end{aligned}$$

$$\int_M dm = M \equiv \text{masa total}$$

$$\int_M \vec{g}^2 dm = I_{eG} \equiv \text{momento de inercia respecto al eje } e_G \text{ que pasa por } G$$

$$\int_M \vec{g} dm \equiv \text{momento estático del sistema respecto de un eje que pasa por el centro de masa, es un vector nulo.}$$

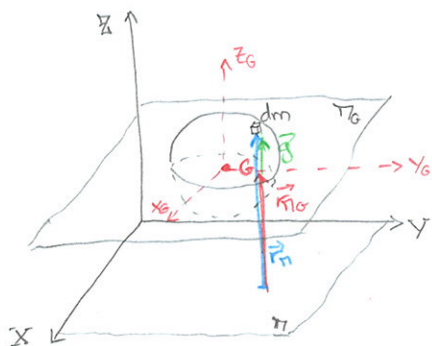
$$I_e = I_{eG} + M \vec{r}_G^2$$

$$I_e = I_{eG} + M d^2$$

d = distancia entre los ejes e y e_G

"De todos los ejes paralelos, el que pasa por el centro de masa es el que tiene un momento de inercia mínimo."

8.3. TERCER TEOREMA DE STEINER



$$\vec{r}_n = \vec{r}_{nG} + \vec{g}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_M \vec{r}_n^2 dm = \int_M (\vec{r}_{nG} + \vec{g})^2 dm = \\ &= \int_M (\vec{r}_{nG}^2 + \vec{g}^2 + 2\vec{r}_{nG} \cdot \vec{g}) dm = \\ &= \int_M \vec{r}_{nG}^2 dm + \int_M \vec{g}^2 dm + 2 \int_M \vec{r}_{nG} \cdot \vec{g} dm = \\ &= \vec{r}_{nG}^2 \int_M dm + \int_M \vec{g}^2 dm + 2 \vec{r}_{nG} \cdot \int_M \vec{g} dm \end{aligned}$$

$$\int_M dm = M \equiv \text{masa total}$$

$$\int_M \vec{g}^2 dm = I_{nG} \equiv \text{momento de inercia respecto al plano } \pi_G$$

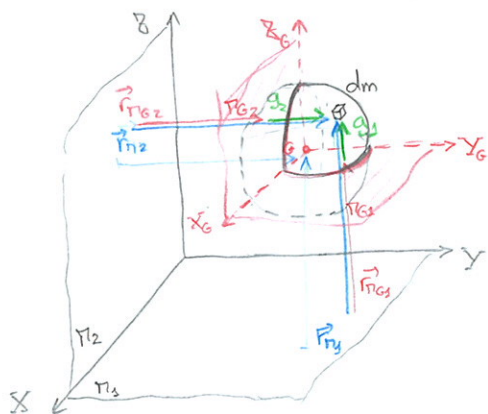
$\int_M \vec{g} dm \equiv$ momento estático del sistema respecto de un plano que pasa por el centro de masa, es el vector nulo.

$$I_n = I_{nG} + \vec{r}_{nG}^2 M$$

$$I_n = I_{nG} + M d_n^2$$

"De todos los planos paralelos, el que pasa por el centro de masa es el que tiene un momento de inercia mínimo."

8.4. CUARTO TEOREMA DE STEINER.



$$\vec{r}_{n1} = \vec{r}_{nG1} + \vec{g}_1$$

$$\vec{r}_{n2} = \vec{r}_{nG2} + \vec{g}_2$$

$$\begin{aligned} P_{n1n2} &= \int_M \vec{r}_{n1} \cdot \vec{r}_{n2} dm = \\ &= \int_M (\vec{r}_{nG1} + \vec{g}_1) \cdot (\vec{r}_{nG2} + \vec{g}_2) dm = \\ &= \int_M \vec{r}_{nG1} \cdot \vec{r}_{nG2} dm + \int_M \vec{r}_{nG1} \cdot \vec{g}_2 dm + \\ &\quad + \int_M \vec{r}_{nG2} \cdot \vec{g}_1 dm + \int_M \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 dm \end{aligned}$$

$$P_{n1n2} = \vec{r}_{nG1} \cdot \vec{r}_{nG2} \int_M dm + \int_M \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 dm + \vec{r}_{nG1} \cdot \int_M \vec{g}_2 dm + \vec{r}_{nG2} \cdot \int_M \vec{g}_1 dm$$

$$\int_M dm = M \equiv \text{masa total del sistema}$$

$$\int_M \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 dm = P_{nG1nG2} \equiv \text{producto de inercia del sistema respecto de los planos } \pi_{G1} \text{ y } \pi_{G2}$$

$\int_M \vec{g}_1 dm$ = momento estático del sistema respecto de un plano que pasa por el centro de masa, es nulo.

$$\int_M \vec{g}_2 dm = \vec{0}$$

$$P_{\pi_1 \pi_2} = P_{\pi_{o_1} \pi_{o_2}} + M \vec{g}_2 \cdot \vec{r}_{o_2}$$

$$P_{\pi_1 \pi_2} = P_{\pi_{o_1} \pi_{o_2}} + M d_1 d_2$$