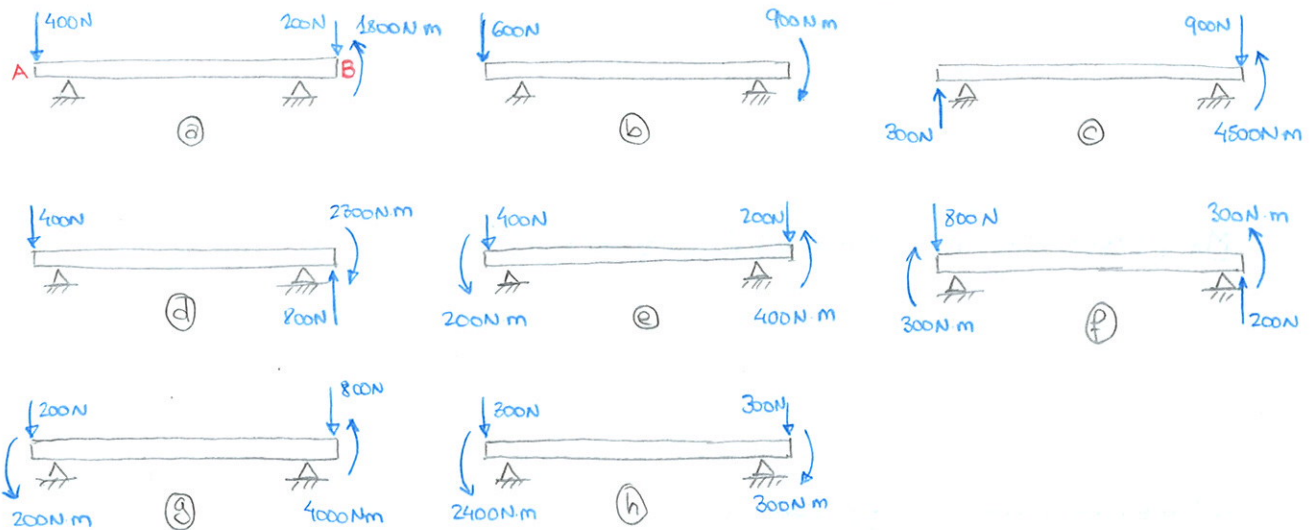


PROBLEMA 1 [3.101 Beer and Johnston (9^a ed.)]

Una viga de 4m de longitud se somete a una variedad de cargas.

a) Reemplace cada tipo de carga por un sistema equivalente fuerza-par en el extremo A de la viga.

b) ¿Qué sistemas de cargas son equivalentes?

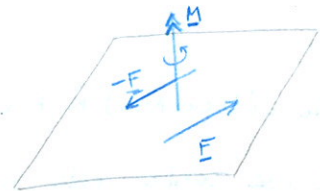
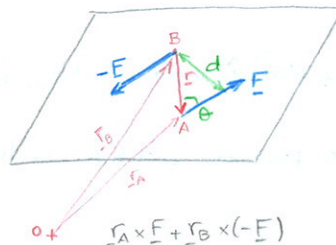


MOMENTO DE UN PAR

Par: Dos fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos.

Momento del par: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$M = r F \sin \theta = F d$$



El momento $\vec{M}$ de un par es

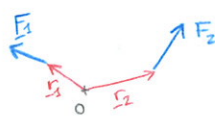
$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F})$$

un vector libre ya que puede ser aplicado en cualquier punto.

REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA FUERZA Y UN PAR

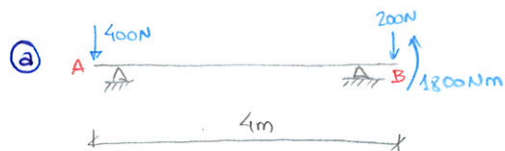
$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

$$M_O^R = \sum M_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$



EJE CENTRAL

Es el lugar geométrico de los puntos del espacio en los que el vector momento resulta ser el vector momento mínimo. El momento mínimo tiene la dirección de la resultante.



Vamos a calcular el sistema fuerza-par en A, vamos a trabajar en 3D

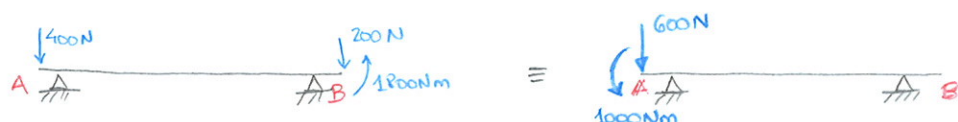
$$\underline{R} = \sum \underline{F} = -(400\text{N})\hat{j} - (200\text{N})\hat{j} = -(600\text{N})\hat{j}$$

$$\underline{M}_A = \sum (\underline{r} \times \underline{F}) = \underline{M}_B + \underline{AB} \wedge \underline{F}_B = (1800\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k} + (4\hat{j})\hat{j} \times (-200\text{N})\hat{j}$$

$$\underline{AB} = B - A = (4, 0, 0) - (0, 0, 0) = 4\hat{i}$$

$$(4\text{m})\hat{i} \times (-200\text{N})\hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \end{vmatrix} = (-800\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k}$$

$$\underline{M}_A = (1800\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k} - (800\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k} = (1000\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k}$$



Calculamos ahora el eje central:

$$\underline{M}_C = \underline{M}_A + \underline{CA} \wedge \underline{R} = (1000\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k} + [(-x)\hat{i} + (-y)\hat{j} - z\hat{k}] \times (-600\text{N})\hat{j}$$

$$\underline{CA} = A - C = -x\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{k}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -x & -y & -z \\ 0 & -600 & 0 \end{vmatrix} = 600x\hat{k} - 600z\hat{i}$$

$$\underline{M}_C = (1000\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k} + (-600z\text{ N}\cdot\text{m})\hat{i} + (600x\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k} = (-600z\text{ N}\cdot\text{m})\hat{i} + (1000 + 600x\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k}$$

El eje central está formado por los puntos en los que el momento es paralelo

a la resultante:

$$\underbrace{\frac{-600z}{0}}_{(a)} = \underbrace{\frac{0}{-600}}_{(b)} = \underbrace{\frac{1000+600x}{0}}_{(c)}$$

$$(a) = (b) \quad z = 0$$

$$(b) = (c) \quad 1000 + 600x = 0 \quad x = \frac{-5}{3}\text{ m}$$

Trabaja en pares en 2D



$$M_A = M_B + d F_B = 1800 \text{ Nm} + 4 \text{ m} (-200 \text{ N}) = 1000 \text{ Nm} \quad \uparrow$$

$$\underline{M}_A = (1000 \text{ Nm}) \hat{k}$$

$$R_x = 0$$

$$R_y = -400 \text{ N} - 200 \text{ N} = -600 \text{ N}$$

$$\underline{R} = -(600 \text{ N}) \hat{j}$$

Cálculo del eje central: $M_c = 0$

$$M_A = M_c + x R_y - y R_x$$

$$1000 \text{ Nm} = x (-600 \text{ N}) \quad x = -\frac{5}{3} \text{ m}$$



b)



$$\underline{R} = \sum \underline{F} = -(600 \text{ N}) \hat{j}$$

$$\underline{M}_A = \underline{M}_B + \underline{AB} \times \underline{F}_B = -(900 \text{ Nm}) \hat{k}$$

Eje central:

$$\underline{M}_c = \underline{M}_A + \underline{CA} \times \underline{R} = (-900 \text{ Nm}) \hat{k} + [-x \hat{i} - y \hat{j} - z \hat{k}] \times (-600 \text{ N}) \hat{j}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -x & -y & -z \\ 0 & -600 & 0 \end{vmatrix} = 600x \hat{k} - 600z \hat{i}$$

$$\underline{M}_c = (-600z) \hat{i} + (-900 + 600x) \hat{k}$$

$$\frac{-600z}{0} = \frac{0}{-600} = \frac{-900 + 600x}{0}$$

$$z = 0$$

$$-900 + 600x = 0 \quad x = \frac{3}{2} \text{ m}$$

Comprobamos el cálculo en 2D:

$$R_x = 0$$

$$R_y = -600 \text{ N}$$

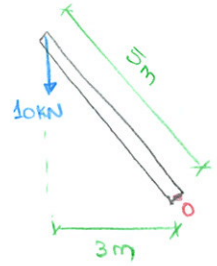
$$M_A = M_B + d F_B = -900 \text{ Nm} \quad \rightarrow$$

$$\text{Eje central: } M_A = M_c + x R_y - y R_x$$

$$-900 = x (-600) \quad x = \frac{3}{2} \text{ m}$$

PROBLEMA 2

Se considera una barra de 5 m de longitud sometida a una fuerza de 10 kN en el extremo. Calcular:

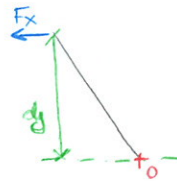


- Momento respecto a O.
- Fuerza horizontal para que se produzca el mismo momento.
- Fuerza mínima para que se produzca el mismo momento.
- ¿A qué distancia debe aplicarse una fuerza de 20 kN (vertical hacia abajo) para que se produzca el mismo momento?
- Descomponer la fuerza de 10 kN en dos fuerzas, una paralela al eje de la barra y otra perpendicular, y calcular el momento de dichas fuerzas.

a) $M_O = F d_x = 10 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m} \uparrow$

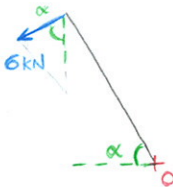
b) $M_O = F_y \cdot y = F_x \cdot 4 \text{ m} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$F_x = \frac{30}{4} = 7.5 \text{ kN}$$

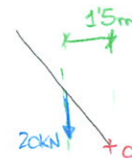


- c) Como que la fuerza sea mínima, permonezca de el momento, la distancia ha de ser máxima; o lo que es lo mismo, la fuerza ha de ser perpendicular a la barra.

$$M_O = F \cdot 5 = 30 \text{ kN} \cdot \text{m} ; F = 6 \text{ kN}$$



d) $M_O = F_y \cdot x$ $30 \text{ kN} \cdot \text{m} = -20 \text{ kN} \cdot x$ $x = -\frac{3}{2} = -1.5 \text{ m}$



e) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ $\sin \alpha = \frac{3}{5}$



$$N = F \cos \alpha = 10 \text{ kN} \cdot \frac{4}{5} = 8 \text{ kN}$$

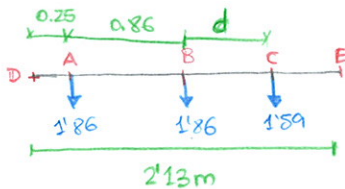
$$V = F \sin \alpha = 10 \text{ kN} \cdot \frac{3}{5} = 6 \text{ kN}$$

$$M_O = V \cdot 5 + N \cdot 0 = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

PROBLEMA 3 [3.106 Beer and Johnston (9ª ed.)]

Tres lámparas de escenario se colocan sobre el tubo mostrado en la figura.

El peso de las lámparas en A y B es de 1'86 kg, mientras que la lámpara C pesa 1'59 kg. a) Si $d = 64$ cm, determine la distancia desde D hasta la línea de acción de la resultante de los pesos de las tres lámparas. b) Determine el valor de d si la resultante de los pesos deba pasar por el punto medio del tubo.



a)

$$R_y = -2 \cdot 1'86 + 1'59 = -5'31 \text{ Kp} \downarrow$$

$$M_D = M_0 - 0'25 \cdot 1'86 - (0'25 + 0'86) 1'86 - (0'25 + 0'86 + d) 1'59 = -0'465 - 2'065 - 2'783$$

$$M_D = -5'313 \text{ Kp} \cdot \text{m}$$

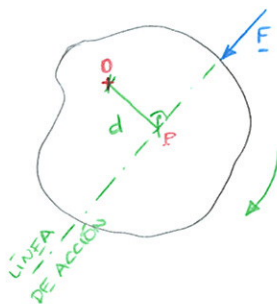
$$M_D = M_0 + x \cdot (-5'31) = -5'313 \quad x = \frac{5'313}{5'31} = 1 \text{ m}$$

$$b) \quad M_D = -0'465 - 2'065 - (0'25 + 0'86 + d) \cdot 1'59 = \frac{2'13}{2} \cdot (-5'31)$$

$$-2'53 + \frac{2'13}{2} \cdot 5'31 = (0'25 + 0'86 + d) 1'59$$

$$1'11 + d = 1'966 \quad d = 0'855 \text{ m}$$

MOMENTO DE UNA FUERZA EN EL PLANO



$$M_o = F \cdot d$$

$$[F] = \text{N}$$

$$[d] = \text{m}$$

$$[M] = \text{N} \cdot \text{m}$$



$$M_o = \underline{OP} \times F = r \times F$$

