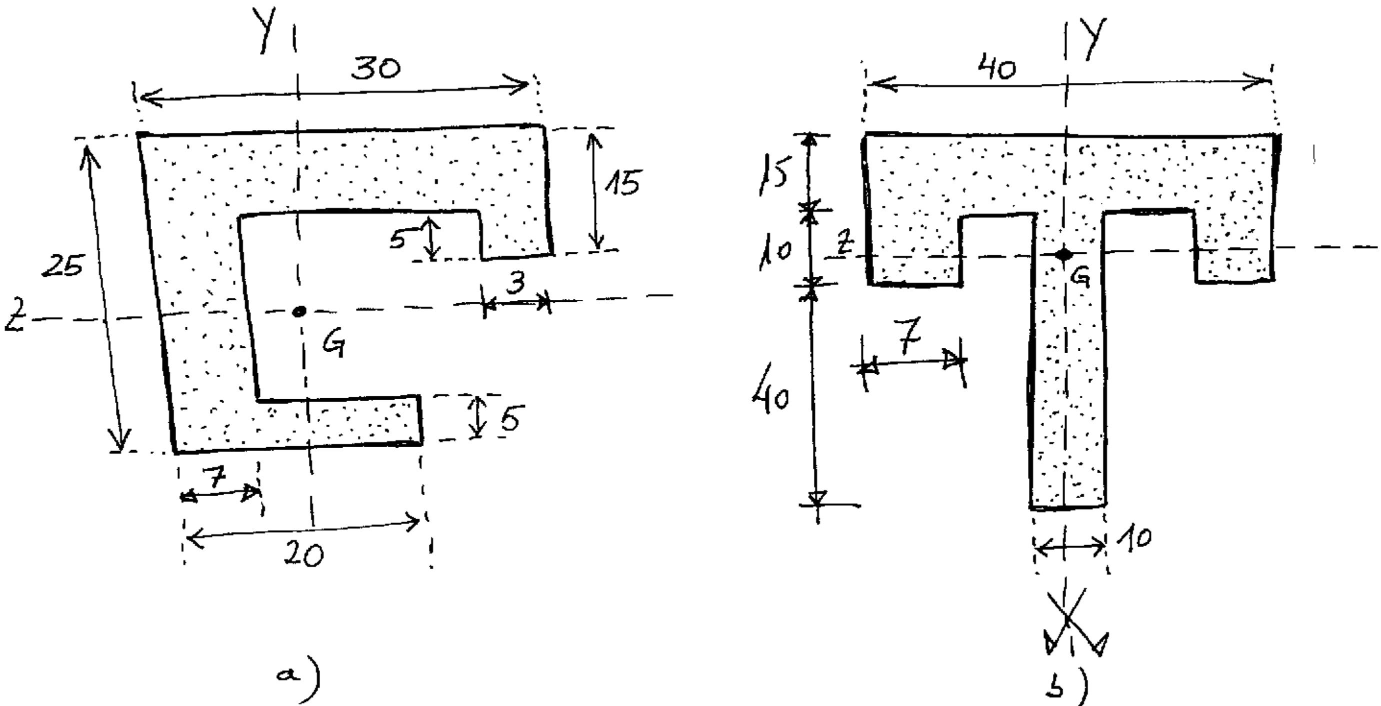
EJERCICIO 16

Hallar la posición del centro de gravedad de las siguientes figuras. Calcular los momentos de inercia de las mismas respecto de los ejes Y y Z indicados.

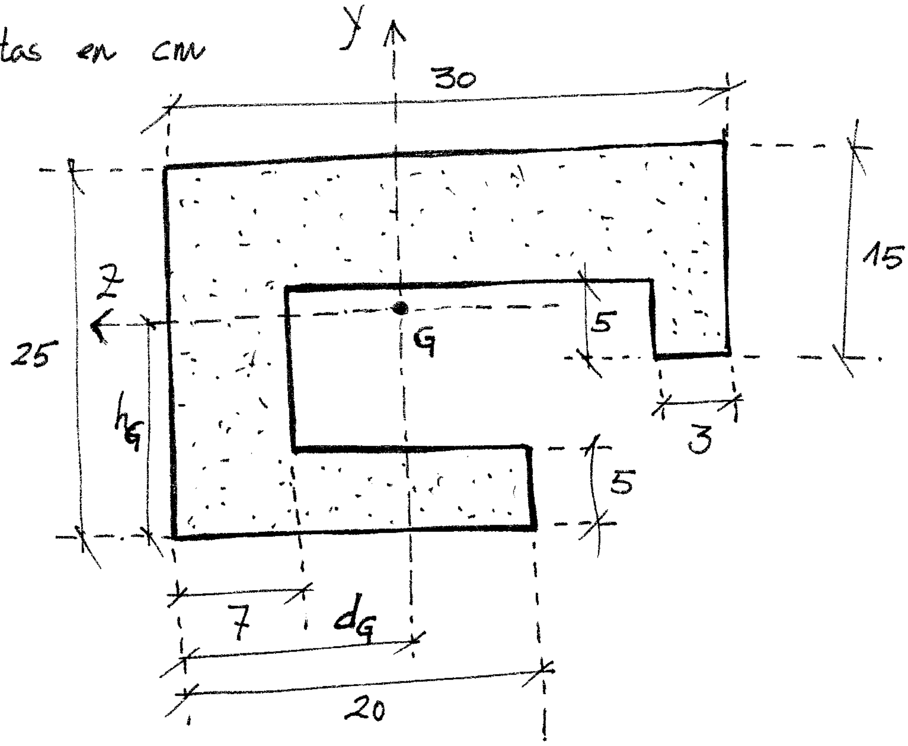
[[COTAS EN cm]]



(NOTA: La posición de G en las dos figuras anteriores es únicamente aproximada)

EJERCICIO 16 — SOLUCIÓN

a) Cotas en cm



$$A = 5\cdot\underbrace{(20-7)}_{13} + 7\cdot 25 + \underbrace{(30-7)}_{23}\cdot\underbrace{(15-5)}_{10} + 3\cdot 5 = 485 \text{ cm}^2$$

$$d_G = \frac{\sum A_i d_i}{A} = \frac{13\cdot 5\cdot\left(7+\frac{13}{2}\right) + 7\cdot 25\cdot\frac{7}{2} + 23\cdot 10\cdot\left(7+\frac{23}{2}\right) + 3\cdot 5\cdot\left(30-\frac{3}{2}\right)}{485} =$$

$$= 12'73 \text{ cm}$$

$$h_G = \frac{\sum A_i h_i}{A} = \frac{13\cdot 5\cdot\frac{5}{2} + 7\cdot 25\cdot\frac{25}{2} + 23\cdot 10\cdot\left(25-\frac{10}{2}\right) + 3\cdot 5\cdot\left(25-10-\frac{5}{2}\right)}{485} =$$

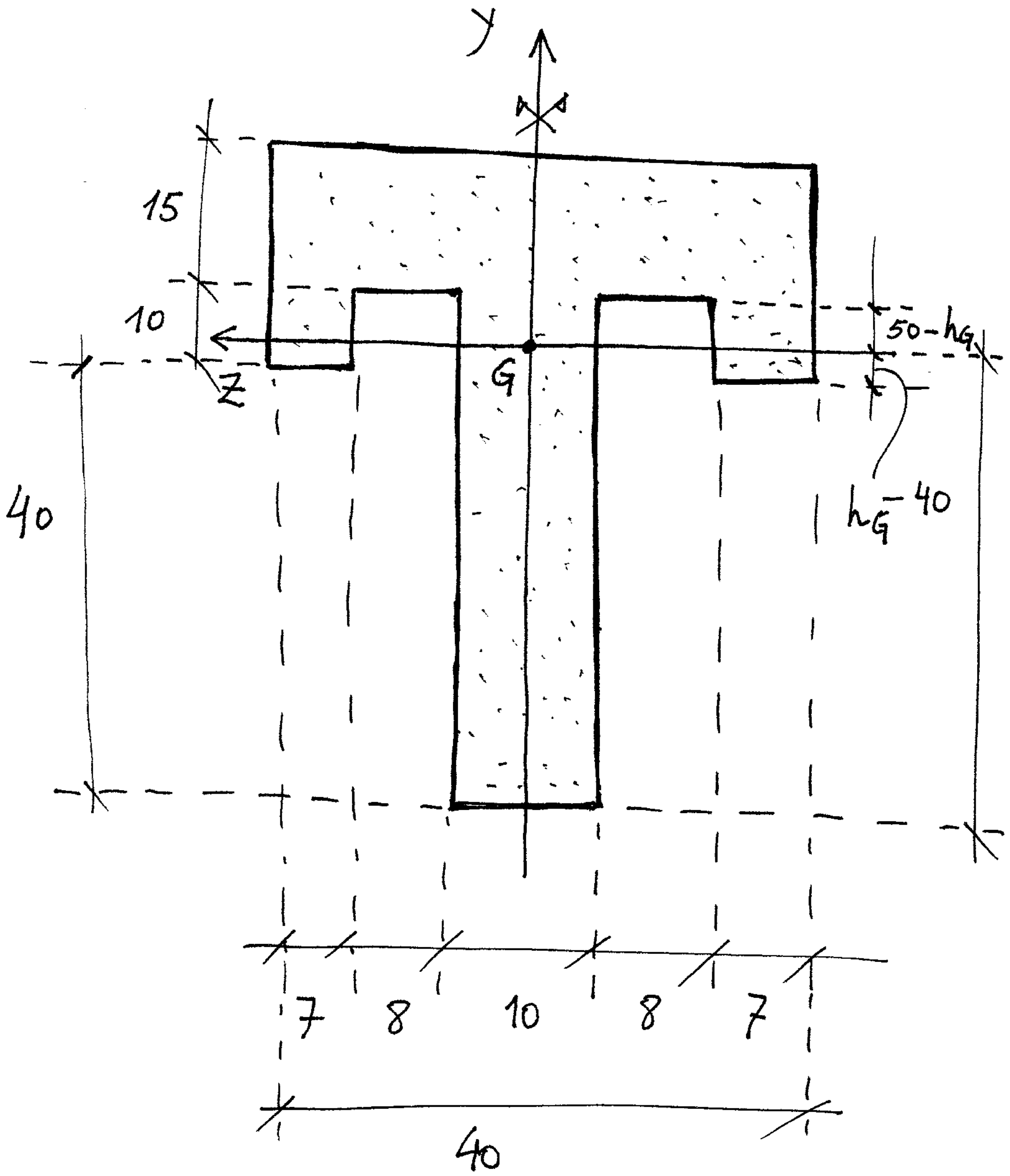
$$= 14'72 \text{ cm}$$

$$I_z = \frac{1}{3}\left[\left(20\cdot h_G^3 - 13\,(h_G-5)^3\right) + \left(30\cdot(25-h_G)^3 - (30-7-3)(25-10-h_G)^3\right) + \right.$$

$$\left. + 3\cdot\left(15-(25-h_G)\right)^3\right] = 28252'7 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{3}\left[25 \cdot d_G^3 - 10 \cdot (d_G - 7)^3 + 5 \cdot (20 - d_G)^3 + 15\,(30 - d_G)^3 - 5 \cdot (30 - 3 - d_G)^3\right] = 38115'5 \ \text{cm}^4$$

b) Por ser la figura simétrica respecto de su eje vertical, en dicho eje se encontrará el centro de gravedad G. Hallemos su altura h_G respecto de la base:



$h_G = 42'98$

$$A = 10 \cdot 40 + 40 \cdot (10+15) - 2 \cdot 8 \cdot 10 = 1240 \text{ cm}^2$$

$$h_G = \frac{\sum A_i h_i}{A} = \frac{10 \cdot 40 \cdot \frac{40}{2} + 40 \cdot 25 \cdot \left(40 + \frac{25}{2}\right) - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \left(40 + \frac{10}{2}\right)}{1240} = 42'98 \text{ cm}$$

Para hacer los momentos de inercia podemos usar rectángulos llenos y rectángulos huecos que se apoyen en los ejes, o bien siempre rectángulos llenos, para lo cual hay veces en que es necesario utilizar la fórmula $\frac{1}{12} bh^3$ y luego aplicar Steiner.

En la figura a), la primera, usamos rectángulos llenos y huecos, y siempre con la fórmula de $\frac{1}{3} bh^3$ porque se apoyaban en los ejes. Ahora vamos a usar la de $\frac{1}{3} bh^3$ y la de ($\frac{1}{12} bh^3$ + "Steiner") para mostrar que también se puede hacer así, de forma que sólo se usan rectángulos llenos, pero no huecos:

$$I_z = \frac{1}{3} 10 \cdot h_G^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} 7 \cdot (h_G - 40)^3 + \frac{1}{3} 7 \cdot (50 - h_G)^3 \right) +$$

$$+ \frac{1}{3} 10 \cdot (50 - h_G)^3 + \frac{1}{12} 40 \cdot 15^3 + 40 \cdot 15 \cdot \left((50 - h_G) + \frac{15}{2} \right)^2 =$$

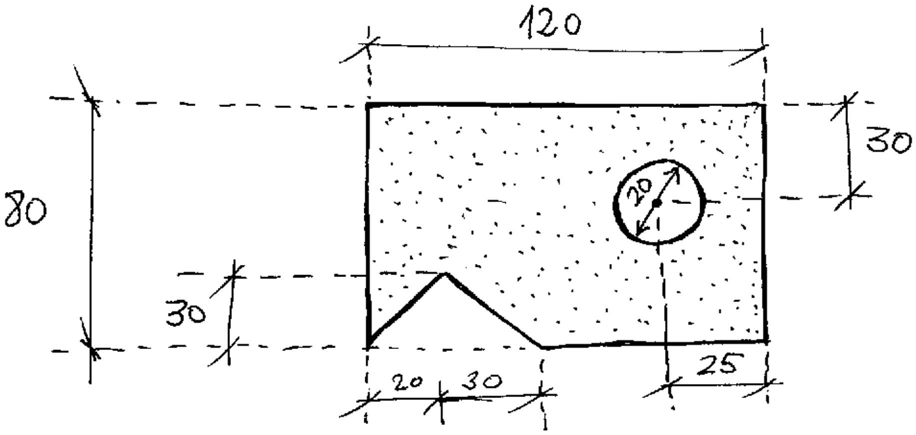
$$= 405293 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} (40+10) \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^3 + \frac{1}{3} 15 \cdot \left(7 + 8 + \frac{10}{2}\right)^3 + \frac{1}{12} 10 \cdot 7^3 + \right.$$

$$\left. + 10 \cdot 7 \cdot \left(\frac{7}{2} + 8 + \frac{10}{2} \right)^2 \right) = 122853'3 \text{ cm}^4$$

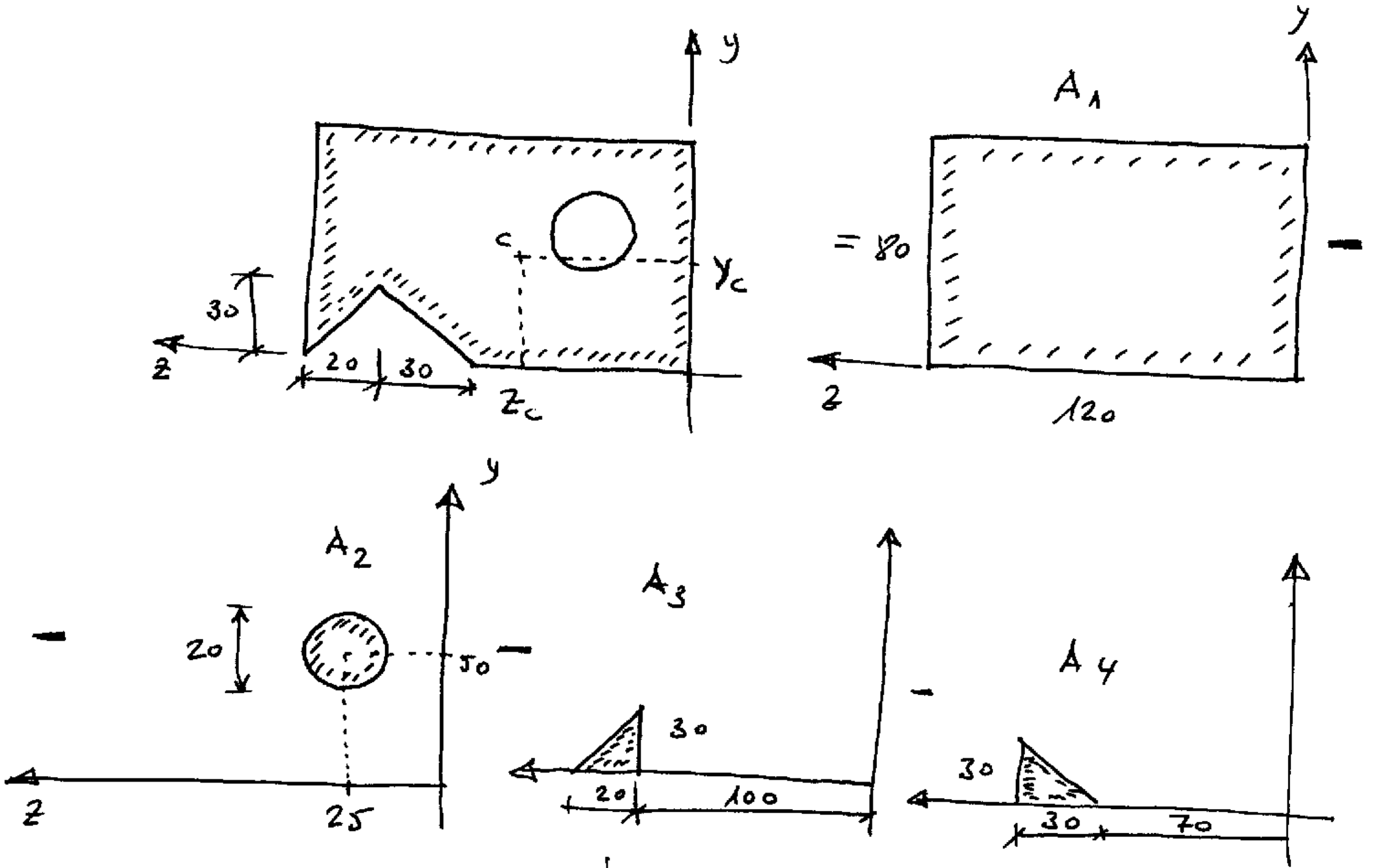
EJERCICIO 17

Hallar la posición del centro de gravedad de la figura siguiente [[COTAS EN mm]]



EJERCICIO 17 SOLUCIÓN.

La forma de resolverlo será similar al ejercicio 4 de la pág CG16 del tema CENTROS DE GRAVEDAD Y CENTROIDES DE CUERPOS BIDIMENSIONALES.



COMPONENTE	AREA(mm)	Y_{ci} (MM)	Z_{ci}(mm)	$Y_{ci}A_i$(mm^3)	$Z_{ci}A_i$ (mm^3)
RECTÁNG. (A_1)	9600	40	60	384e3	576e3
CIRCULO (A_2)	−314,16	50	25	−15 708	−7854
TRIANG. IZQ(A_3)	−300	10	106,67	−3000	−32 001
TRIANG. DCHA (A_4)	−450	10	90	−4500	−40 500
	8535,84 = A			360792 = m_z	495645 = m_y

$$Y_c = \frac{m_z}{A} = \frac{360792}{8535,84} = 42,27\,mm; \quad Z_c = \frac{m_y}{A} = \frac{495645}{8535,84} = 58,07\,mm$$