Todo lo que usted quiso saber sobre problemas semilineales y no se atrevió a preguntar a Ireneo

Lucio Boccardo (Roma 1)

Recent Trends in Nonlinear Partial Differential Equations
Salamanca, 15.2.2007

1. Semi lineal

- Ω abierto, acotado de $I\!R^N$, $N > 2$,
- $M : \Omega \times I\!R \to I\!R^{N^2}$: $\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi, \quad |M(x)| \leq \beta, \quad \forall \xi \in I\!R^N$,
- $0 < \theta < 1$.

El problema

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) : -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = |u|^{\theta-1}u$$

ha sido el punto de salida del itinerario realizado para llegar a la existencia de una solución del problema concavo-convexo

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) : -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = \lambda|u|^{\theta-1}u + |u|^{p-1}u$$

$\forall p > 1$, para algún $\lambda > 0$ ([1]). De otro lado, dado $a > 0$, si u es solución del problema

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) : -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = a\frac{u}{|x|^2} + u|u|^{\theta-1}$$

entonces $u \in L^m(\Omega)$, $\forall m < m_a \equiv N\dfrac{\alpha(N-2) + \sqrt{\alpha^2(N-2)^2 - 4a\alpha}}{2a}$ ([10]). Por tanto, como en [3], la presencia del término $a\dfrac{u}{|x|^2}$ en el miembro derecho de la ecuación hace perder sumabilidad a la solución u.

Por contrapartida, en el problema

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) : -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) + u|u|^{p-1} = a\frac{u}{|x|^2} + f(x)$$

el término $a\dfrac{u}{|x|^2}$ *no molesta*. En efecto, como en el caso $a = 0$ ([8]), hay existencia ([11]) de solución $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, para todo $q < \frac{2p}{p+1}$.

2. Casi lineal

Aún más importante es el efecto regularizante del término de orden uno en el problema (modelo)

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u)) + u|\nabla u|^2 = a\dfrac{u}{|x|^2} + f(x) & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Como en [7], donde $a = 0$, este problema tiene, aunque f pertenezca sólo a $L^1(\Omega)$ ([4]), solución de energía finita para cualquier $a > 0$.

Referencias

[1] L. Boccardo, M. Escobedo, I. Peral: A Dirichlet problem involving critical exponent. Nonlinear Anal. TMA, 24 (1995), 1639-1648.

[2] L. Boccardo, I. Peral, J.L. Vázquez: The N-Laplacian elliptic equation: variational versus entropy solutions. J. Math. Anal. Appl. 201 (1996), 671–688.

[3] L. Boccardo, L. Orsina, I. Peral: A remark on existence and optimal summability of solutions of elliptic problems involving Hardy potential. Discrete and Continuous Dynamical Systems. 16 (2006), 513–523.

[4] B. Abdellaoui, L. Boccardo, I. Peral, A. Primo: Quasilinear elliptic equations with natural growths. Preprint.

[5] L. Boccardo, T. Gallouet: Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data; J. Funct. Anal. 87 (1989), 149-169.

[6] L. Boccardo, T. Gallouet: Nonlinear elliptic equations with right hand side measures; Comm. P.D.E. 17 (1992), 641-655.

[7] L. Boccardo, T. Gallouet: Strongly nonlinear elliptic equations having natural growth terms and L^1 data; Nonlinear Anal TMA 19 (1992), 573-579.

[8] L. Boccardo, T. Gallouet, J.L. Vázquez: Nonlinear elliptic equations in $\mathbf{R}^N$ without growth restrictions on the data. J. Diff. Eq. 105 (1993), 334-363.

[9] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouet, R. Gariepy, M. Pierre, J.L. Vázquez: An L^1 theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations, Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, 22 (1995), 241-273.

[10] L. Boccardo: No publicado.

[11] L. Boccardo: No publicado.