Crecimiento óptimo de soluciones radiales estables de ecuaciones semilineales elípticas

Salvador Villegas

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Granada

Primer Encuentro de la Red de Ecuaciones Parabólicas y Elípticas No Lineales
San José-Níjar, Almería. 17-19 Septiembre 2007

Artículos

- S. Villegas, *Asymptotic behavior of stable radial solutions of semilinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Pures Appl. 88 (2007) 241–250.

- S. Villegas, *Sharp estimates for semi-stable radial solutions of semilinear elliptic equations*, Preprint.

$$-\Delta u = f(u) \;\; \text{en } \mathbb{R}^N$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ y consideraremos soluciones $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

Definición Una solución u es estable si

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 - f'(u)\, v^2\right) dx \geq 0$$

para cualquier $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ con soporte compacto.

Precedentes

Cabré y Capella demostraron que si $N \leq 10$ no existen soluciones radiales acotadas no constantes estables (una condición de nodegeneración es impuesta si $9 \leq N \leq 10$: para todo $s_0 \in \mathbb{R}$ existen números reales $q \geq 0$ y $a > 0$ (que pueden depender de s_0) tales que $\lim_{s \to s_0} |f'(s)||s - s_0|^{-q} = a$.)

Además, en cualquier dimensión $N \geq 11$, dan un ejemplo de solución radial acotada no constante estable.

Theorem (V.)

Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ y u una solución radial acotada no constante estable. Entonces

i) $N > 10$

ii) *Existe $M > 0$ tal que*

$$|u(r) - u_\infty| \geq M r^{-N/2+\sqrt{N-1}+2} \quad \forall r \geq 1,$$

donde $u_\infty = \lim_{r\to\infty} u(r)$.

Theorem (V.)

Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ *y* u *una solución radial acotada no constante estable. Entonces*

i) $N > 10$

ii) *Existe* $M > 0$ *tal que*

$$|u(r) - u_\infty| \geq M r^{-N/2+\sqrt{N-1}+2} \quad \forall r \geq 1,$$

donde $u_\infty = \lim_{r\to\infty} u(r)$.

Theorem (V.)

Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ *y* u *una solución radial no constante estable (no necesariamente acotada). Entonces existen* $M, r_0 > 0$ *tales que*

$$|u(r)| \geq \begin{cases} M r^{-N/2+\sqrt{N-1}+2} & \forall r \geq r_0, \ \text{si } N \neq 10 \\ M \log r & \forall r \geq r_0, \ \text{si } N = 10 \end{cases}$$

Lemma (Cabré-Capella)

Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ *y* u *una solución radial estable. Entonces*

$$(N-1)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_r^2\mu^2}{r^2}dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} u_r^2|\nabla\mu|^2 dx$$

para cualquier $\mu \in (H^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^N)$ *con soporte compacto.*

Lemma (Cabré-Capella)

Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ y u una solución radial estable. Entonces

$$(N-1)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_r^2\mu^2}{r^2}dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} u_r^2|\nabla\mu|^2 dx$$

para cualquier $\mu \in (H^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^N)$ con soporte compacto.

Lemma (V.)

Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ y u una solución radial no constante estable. Entonces existe $K > 0$ tal que

$$\int_r^\infty \frac{ds}{s^{N-1}u_r(s)^2} \leq Kr^{-2\sqrt{N-1}} \quad \forall r \geq 1.$$

Lemma (V.)

Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ y u una solución radial no constante estable. Entonces existe $M' > 0$ tal que

$$|u(2r) - u(r)| \geq M' r^{-N/2+\sqrt{N-1}+2} \quad \forall r \geq 1.$$

Ejemplo

Example (V.)

Para cada $N \geq 2$, definimos la familia $\{u_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^N)$ de funciones radiales como

$$\begin{aligned} u_\alpha(r) &= \sqrt{1+r^2}^{\,\alpha} \qquad \forall r \geq 0\,, \qquad\qquad \text{si } \alpha \neq 0. \\ u_0(r) &= \log\sqrt{1+r^2} \quad \forall r \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Entonces,

$$u_\alpha \text{ es estable } \Leftrightarrow \alpha \geq -N/2 + \sqrt{N-1} + 2.$$

Theorem (V.)

Sea $N = 1$ y u una solución par no constante. Entonces, u es estable si y solo si $u'(x) \neq 0 \ \forall x \neq 0$ y

$$\int_1^\infty \frac{dt}{u'(t)^2} \leq \frac{1}{u''(0)} \left(\int_0^1 \frac{u''(t) - u''(0)}{u'(t)^2} dt + \frac{1}{u'(1)} \right)$$

Theorem (V.)

Sea $N = 1$ *y* u *una solución par no constante. Entonces,* u *es estable si y solo si* $u'(x) \neq 0 \ \forall x \neq 0$ *y*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{u'(t)^2} \leq \frac{1}{u''(0)} \left(\int_0^1 \frac{u''(t) - u''(0)}{u'(t)^2} dt + \frac{1}{u'(1)} \right)$$

Theorem (V.)

Sea $N = 1$ *y* u *una solución par no constante estable. Entonces*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{|u(r)|}{r^{3/2}} = +\infty$$