Existencia y no existencia de solución para ecuaciones elípticas casilineales singulares

Pedro J. MARTÍNEZ-APARICIO
pedrojma@ugr.es

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Granada

San José, 17-19 Septiembre, 2007

Autores

- D. Arcoya (Universidad de Granada, España)
- J. Carmona (Universidad de Almería, España)
- T. Leonori (Seconda Università di Roma “Tor Vergata” , Italia)
- F. Petitta (Università di Roma “La Sapienza” , Italia)

Problema

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w(x) + g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 = a(x), \;\; x \in \Omega \\ \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P)$$

donde

- Ω dominio abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$

Problema

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w(x) + g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 = a(x), \ x \in \Omega \\ \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P)$$

donde

- Ω dominio abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$
- $0 \leq a$

Problema

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w(x) + g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 = a(x), \ \ x \in \Omega \\ \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P)$$

donde

- Ω dominio abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$
- $0 \leq a$
- $g : \Omega \times (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory

Problema

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w(x) + g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 = a(x), \;\; x \in \Omega \\ \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P)$$

donde

- Ω dominio abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$
- $0 \leq a$
- $g : \Omega \times (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory

Modelo más simple:

$$g(x, s) = \frac{1}{s^\gamma}, \quad \gamma > 0$$

Definición de solución

Si $0 \leq a \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$, $g : \Omega \times (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory, decimos que w es solución de

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w(x) + g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 = a(x), \;\; x \in \Omega \\ \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P)$$

Definición de solución

Si $0 \le a \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$, $g : \Omega \times (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory, decimos que w es solución de

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w(x) + g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 = a(x), \;\; x \in \Omega \\ \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P)$$

si $g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y

$$\int_\Omega \nabla w(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_\Omega g(x, w(x)) \overbrace{|\nabla w(x)|^2}^{\in L^1(\Omega)} \varphi(x) dx = \int_\Omega a(x) \varphi(x) dx$$

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Problema

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w(x) + g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 = a(x), \;\; x \in \Omega \\ \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P)$$

Motivación Física

- Problemas estocásticos de control
  P.L. Lions, '80, A. Bensoussan, J. Freshe y U. Mosco '82
- Patrones de crecimiento en frentes de solidificación (crecimiento de tumores)
  M. Kardar, G. Parisi y Y.C. Zhang '86,
- H. Berestycki, S. Kamin y G. Sivashinsky '01 (frentes de crecimiento de llamas de fuego)
- Flujo en una roca porosa fisurada permeable

$$g(w) = \frac{1}{w}$$

G.I. Barenblatt, M. Bertsch, A.E. Chertock y V.M. Prostokishin, '00

Crecimiento Natural

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w(x) + g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 = a(x), \;\; x \in \Omega \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P)$$

Crecimiento Natural

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w(x) + g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 = a(x), \ x \in \Omega \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right. \qquad (P)$$

- Ecuación (P) es invariante mediante el cambio no lineal de variables del tipo $w = H(u)$. Kazdan y Kramer, '78.

Crecimiento Natural

$$
\begin{array}{c}
-\Delta w(x) + g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 = a(x), \ x \in \Omega \\
w \in H_0^1(\Omega)
\end{array}
\qquad (P)
$$

- Ecuación (P) es invariante mediante el cambio no lineal de variables del tipo $w = H(u)$. Kazdan y Kramer, '78.

No ocurre en el caso de ecuaciones semilinales!.

Crecimiento Natural

$$\begin{array}{c} -\Delta w(x) + g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 = a(x), \ x \in \Omega \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{array} \qquad (P)$$

- Ecuación (P) es invariante mediante el cambio no lineal de variables del tipo $w = H(u)$. Kazdan y Kramer, '78.
- Contraejemplos Serrin, '69 si el crecimiento de ∇w es supercuadrático.

Crecimiento Natural

$$\begin{aligned} -\Delta w(x) + g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 = a(x),\ x \in \Omega \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \qquad (P)$$

- Ecuación (P) es invariante mediante el cambio no lineal de variables del tipo $w = H(u)$. Kazdan y Kramer, '78.
- Contraejemplos Serrin, '69 si el crecimiento de ∇w es supercuadrático.
- Cálculo de Variaciones: ecuación de Euler asociada al funcional

$$J(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega A(x, w)|\nabla w|^2 - \int_\Omega a(x) w, \quad w \in H_0^1(\Omega)$$

$$-\mathrm{div}(A(x, w)\nabla w) + \frac{1}{2}A'_w(x, w)|\nabla w|^2 = a(x), \quad x \in \Omega$$

Trabajos de D. Arcoya L. Boccardo y L. Orsina.

Resultados previos

L. Boccardo, F. Murat y J.P. Puel '82,'83,...

$$\left.\begin{array}{c} g:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ \text{Carathéodory} \\ g(x,s)s\geq 0 \\ a\in L^q(\Omega),\quad q>\frac{N}{2} \end{array}\right\}\Longrightarrow \exists\ \text{sol. } w.$$

Resultados previos

L. Boccardo, F. Murat y J.P. Puel '82,'83,...

$$\left.\begin{array}{c} g:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \text{ Carathéodory} \\ {\color{red} g(x,s)s\geq 0} \\ a\in L^q(\Omega), \quad q>\frac{N}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \text{ sol. } w.$$

Ferone y Murat '98

$$\left.\begin{array}{c} g \text{ acotada y Carathéodory} \\ a\in L^{N/2}(\Omega) \text{ ``pequeña''} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \text{ sol. } w.$$

Resultados previos

- Brezis y Nirenberg, '97
($g(x,s)s \geq 0$, para $|s| >> 0$)

- Boccardo, Segura de León y C. Trombetti, '01

- Porretta y Segura de León, '06

- Abdellaoui, Dall'Aglio y Peral, '06

- Arcoya y M-A., aparecerá en Rev. Mat. Iberoamericana

- Giachetti y Murat, en preparación. El caso $g(x,s) = -\frac{1}{s^\alpha}$.

Existencia de solución para $-\Delta w(x) + g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 = a(x),\ x \in \Omega$

Teorema

$g : \Omega \times (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *Carath.*, $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *t. q.*

$$\left.\begin{array}{c} \sqrt{h} \in L^1, \quad 0 < h \searrow \ \textit{cerca de cero} \\[2ex] 0 \leq g(x,s) \leq h(s), \quad \forall s > 0, \quad a.e\ x \in \Omega \\[2ex] a \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)\ y\ \inf_{\Omega_0} a > 0, \quad \forall \Omega_0 \subset\subset \Omega \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \exists\ sol\ w \in H_0^1(\Omega), \\[2ex] g(x,w)|\nabla w|^2 \in L^1(\Omega) \end{array}$$

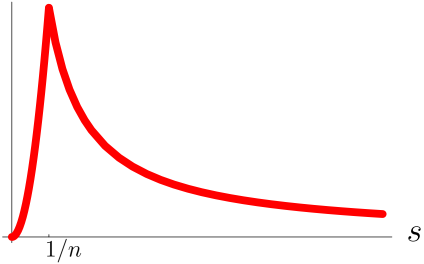
Esquema de la prueba

Problemas aproximados

$$g_n(x,s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0 \\ nh(\frac{1}{n})\frac{s}{h(s)}g(x,s), & 0 < s \leq \frac{1}{n} \\ g(x,s), & \frac{1}{n} \leq s \end{cases}$$

Esquema de la prueba
Problemas aproximados

$$g_n(x,s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0 \\ nh(\frac{1}{n})\frac{s}{h(s)}g(x,s), & 0 < s \leq \frac{1}{n} \\ g(x,s), & \frac{1}{n} \leq s \end{cases}$$



$$g_n(x,s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0 \\ nh(\frac{1}{n})\frac{s}{h(s)}g(x,s), & 0 < s \leq \frac{1}{n} \\ g(x,s), & \frac{1}{n} \leq s \end{cases}$$

$$g_n(x,s) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x,s), \quad \forall s > 0 \text{ y para a.e. } x \in \Omega,$$

$$g_n(x,s) \leq g(x,s), \quad \forall s > 0, \text{ para a.e. } x \in \Omega, \quad \forall n >> 0,$$

$$g_n(x,s)s \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Problemas aproximados

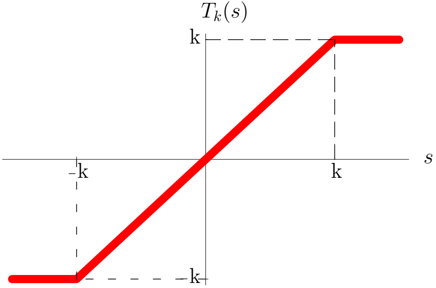
$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w_n(x) + g_n(x, w_n(x)) \dfrac{|\nabla w_n(x)|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n(x)|^2} = a_n(x), \;\; x \in \Omega \\ w_n \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P_n)$$

donde $a_n(x) = T_n(a(x))$

Problemas aproximados

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w_n(x) + g_n(x, w_n(x)) \dfrac{|\nabla w_n(x)|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n(x)|^2} = a_n(x), \;\; x \in \Omega \\ w_n \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P_n)$$

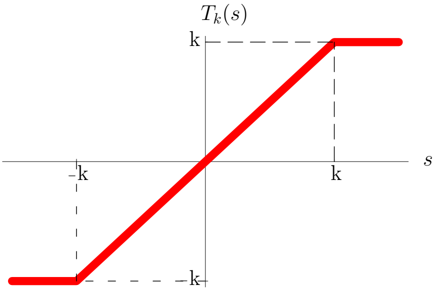
donde $a_n(x) = T_n(a(x))$



Problemas aproximados

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w_n(x) + g_n(x, w_n(x)) \dfrac{|\nabla w_n(x)|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n(x)|^2} = a_n(x), \ \ x \in \Omega \\ w_n \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P_n)$$

donde $a_n(x) = T_n(a(x))$



BMP$\Rightarrow \exists w_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ solución de (P_n)

Problemas aproximados

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w_n(x) + g_n(x, w_n(x)) \dfrac{|\nabla w_n(x)|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n(x)|^2} = a_n(x), \;\; x \in \Omega \\ w_n \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P_n)$$

Lema

w_n verifica:

1. *Si $\mathscr{S}$ denota la mejor constante de Sobolev, entonces $\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \mathscr{S}^{-1}\|a\|_{2N/(N+2)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, podemos suponer, pasando a una subsucesión, que $w_n \rightharpoonup w$ en $H_0^1(\Omega)$.*
2. *$w_n \in C(\overline{\Omega})$ y $w_n(x) > 0$ para cada $x \in \Omega$.*

Problemas aproximados

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w_n(x) + g_n(x, w_n(x)) \dfrac{|\nabla w_n(x)|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n(x)|^2} = a_n(x), \ \ x \in \Omega \\ w_n \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P_n)$$

$\{w_n\}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$

Problemas aproximados

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w_n(x) + g_n(x, w_n(x)) \dfrac{|\nabla w_n(x)|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n(x)|^2} = a_n(x), \;\; x \in \Omega \\ w_n \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P_n)$$

$\{w_n\}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$

$\varphi = w_n$ función test

$$\int |\nabla w_n|^2 + \int g_n(x, w_n(x)) \frac{|\nabla w_n(x)|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n(x)|^2} = \int a_n w_n$$

Problemas aproximados

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w_n(x) + g_n(x, w_n(x)) \dfrac{|\nabla w_n(x)|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n(x)|^2} = a_n(x), \;\; x \in \Omega \\ w_n \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P_n)$$

$\{w_n\}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$

$$\|\nabla w_n\|_2^2 = \int_\Omega |\nabla w_n|^2 \, dx \leq \int |\nabla w_n|^2 + \int \overbrace{g_n(x, w_n) \frac{n|\nabla w_n(x)|^2}{n + |\nabla w_n(x)|^2} w_n}^{\geq 0} = \int a_n w_n$$

Problemas aproximados

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w_n(x) + g_n(x, w_n(x)) \dfrac{|\nabla w_n(x)|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla w_n(x)|^2} = a_n(x), \;\; x \in \Omega \\ w_n \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P_n)$$

$\{w_n\}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$

desigualdades de Hölder y Sovolev

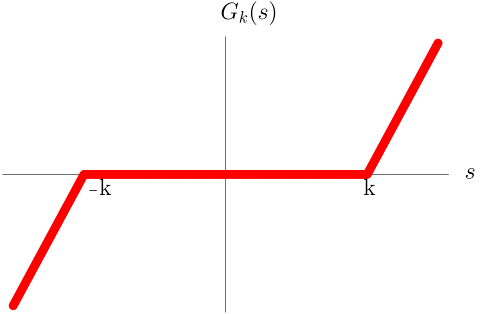
$$\|\nabla w_n\|_2^2 \le \int a_n w_n \le \|a\|_{\frac{2N}{N+2}} \|w_n\|_{2^*} \le \mathscr{S}^{-1} \|a\|_{\frac{2N}{N+2}} \|\nabla w_n\|_2$$

Problemas aproximados

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta w_n(x) + g_n(x, w_n(x))\dfrac{|\nabla w_n(x)|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla w_n(x)|^2} = a_n(x),\ \ x \in \Omega \\ w_n \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (P_n)$$

$$w_n \in C(\overline{\Omega})$$

$\varphi = G_k(w_n)$ función test



Cota a priori por debajo para w_n

Proposición

$$\forall \Omega_0 \subset\subset \Omega \quad \exists c_{\Omega_0} > 0 \ s.\ t.\ w_n \geq c_{\Omega_0}, \quad \forall x \in \Omega_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Prueba.
$\phi = e^{-H(w_n)}\varphi$ función test, $(0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\Omega))$
$g_n(x,s) \leq h(s)$

Cota a priori por debajo para w_n

Proposición

$$\forall \Omega_0 \subset\subset \Omega \quad \exists c_{\Omega_0} > 0 \ s.\ t.\ w_n \geq c_{\Omega_0}, \quad \forall x \in \Omega_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Prueba.
$\phi = e^{-H(w_n)}\varphi$ función test, $(0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\Omega))$
$g_n(x,s) \leq h(s)$

$$\int_\Omega \nabla w_n(-h(w_n))\nabla w_n e^{-H(w_n)}\varphi + \int_\Omega \nabla w_n e^{-H(w_n)}\nabla\varphi + \int_\Omega h(w_n)|\nabla w_n|^2 e^{-H(w_n)}\varphi$$
$$\geq \int_\Omega a_n e^{-H(w_n)}\varphi,$$

Cota a priori por debajo para w_n

$$\int_\Omega \nabla w_n e^{-H(w_n)} \nabla \varphi \geq \int_\Omega a_n e^{-H(w_n)} \varphi.$$

Cota a priori por debajo para w_n

$$\int_\Omega \nabla w_n e^{-H(w_n)} \nabla \varphi \geq \int_\Omega a_n e^{-H(w_n)} \varphi.$$

Cambio de variable $u_n := \psi(w_n) \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$, donde

$$\psi(t) = \int_t^1 e^{-H(s)} ds \searrow \text{ y } H(s) = \int_1^s h(t) dt,$$

Cota a priori por debajo para w_n

$$\int_\Omega \nabla w_n e^{-H(w_n)} \nabla\varphi \geq \int_\Omega a_n e^{-H(w_n)} \varphi.$$

Cambio de variable $u_n := \psi(w_n) \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, donde

$$\psi(t) = \int_t^1 e^{-H(s)} ds \searrow \text{ y } H(s) = \int_1^s h(t) dt,$$

$$-\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi \geq \int_\Omega a_n e^{-H(w_n)} \varphi,$$

Cota a priori por debajo para w_n

$$\int_\Omega \nabla w_n e^{-H(w_n)} \nabla \varphi \geq \int_\Omega a_n e^{-H(w_n)} \varphi.$$

Cambio de variable $u_n := \psi(w_n) \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$, donde

$$\psi(t) = \int_t^1 e^{-H(s)} ds \searrow \ \text{y} \ H(s) = \int_1^s h(t) dt,$$

$$-\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi \geq \int_\Omega a_n e^{-H(w_n)} \varphi,$$

u_n satisface

$$\Delta u_n \geq a_n e^{-H(w_n)} \geq \min_{\Omega_0} a_n e^{-H(w_n)}$$

Cota a priori por debajo para w_n

$$\int_\Omega \nabla w_n e^{-H(w_n)} \nabla\varphi \geq \int_\Omega a_n e^{-H(w_n)} \varphi.$$

Cambio de variable $u_n := \psi(w_n) \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$, donde

$$\psi(t) = \int_t^1 e^{-H(s)} ds \searrow \text{ y } H(s) = \int_1^s h(t)dt,$$

$$-\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi \geq \int_\Omega a_n e^{-H(w_n)} \varphi,$$

u_n satisface

$$\Delta u_n \geq a_n e^{-H(w_n)} \geq \min_{\Omega_0} a_n e^{-H(w_n)}$$

Keller-Osserman $\exists C_{\Omega_0} > 0$ t.q. $u_n \leq C_{\Omega_0}$

Cota a priori por debajo para w_n

$$\int_\Omega \nabla w_n e^{-H(w_n)} \nabla\varphi \geq \int_\Omega a_n e^{-H(w_n)}\varphi.$$

Cambio de variable $u_n := \psi(w_n) \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, donde

$$\psi(t) = \int_t^1 e^{-H(s)}ds \searrow \text{ y } H(s) = \int_1^s h(t)dt,$$

$$-\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi \geq \int_\Omega a_n e^{-H(w_n)}\varphi,$$

u_n satisface

$$\Delta u_n \geq a_n e^{-H(w_n)} \geq \min_{\Omega_0} a_n e^{-H(w_n)}$$

Keller-Osserman $\exists C_{\Omega_0} > 0$ t.q. $u_n \leq C_{\Omega_0}$

$$w_n \geq \psi^{-1}(-C_{\Omega_0}) = c_0 > 0 \text{ a.e.} \quad x \in \Omega_0.$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega)$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega)$$

$$w_n(x) \longrightarrow w(x) \quad \text{a.e. } x \in \Omega$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega)$$

$$\psi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \psi \geq 0, \quad \operatorname{supp} \psi \subset \Omega_0 \subset\subset \Omega$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega)$$

$$\psi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \psi \geq 0, \quad \operatorname{supp}\psi \subset \Omega_0 \subset\subset \Omega$$

Por la Proposición:

$$\exists c_0 > 0 \text{ t. q. } w_n(x) \geq c_0, \text{ a.e. } x \in \Omega_0.$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega)$$

$$\psi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \psi \geq 0, \quad \operatorname{supp} \psi \subset \Omega_0 \subset\subset \Omega$$

Por la Proposición:

$$\exists c_0 > 0 \text{ t. q. } w_n(x) \geq c_0, \text{ a.e. } x \in \Omega_0.$$

$$g_n(x, w_n) \leq g(x, w_n) \leq c, \text{ a.e. } x \in \Omega_0.$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega)$$

$$\psi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \psi \geq 0, \quad \operatorname{supp} \psi \subset \Omega_0 \subset\subset \Omega$$

Por la Proposición:

$$\exists c_0 > 0 \text{ t. q. } w_n(x) \geq c_0, \text{ a.e. } x \in \Omega_0.$$

$$g_n(x, w_n) \leq g(x, w_n) \leq c, \text{ a.e. } x \in \Omega_0.$$

$\gamma >> 0$ t. q. $\varphi_\gamma(s) := s e^{\gamma s^2}$ satisface

$$\varphi_\gamma'(s) - c|\varphi_\gamma(s)| = e^{\gamma s^2}\left[1 + 2\gamma s^2 - c|s|\right] \geq \frac{1}{2}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$\times \varphi_\gamma(T_k(w_n) - T_k(w))\psi(x)$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$$\times\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi(x)$$

$$\int \nabla w_n \nabla(T_k(w_n)-T_k(w))\varphi'_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi +$$
$$\int g_n(x,w_n)\frac{n|\nabla w_n|^2}{n+|\nabla w_n|^2}\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi$$

$$+\int \nabla w_n \nabla\psi\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w)) = \int a_n\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$$\times\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi(x)$$

$$\int_{\Omega_0}\nabla w_n\nabla(T_k(w_n)-T_k(w))\varphi'_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi+$$

$$\int_{\Omega_0} g_n(x,w_n)\frac{n|\nabla w_n|^2}{n+|\nabla w_n|^2}\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi$$

$$+\int_{\Omega_0}\nabla w_n\nabla\psi\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))=\int_{\Omega_0} a_n\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$$\times \varphi_\gamma(T_k(w_n) - T_k(w))\psi(x)$$

$$\int_{\Omega_0} \nabla w_n \nabla (T_k(w_n) - T_k(w))\varphi'_\gamma(T_k(w_n) - T_k(w))\psi +$$

$$\int_{\Omega_0} g_n(x, w_n)\frac{n|\nabla w_n|^2}{n + |\nabla w_n|^2}\varphi_\gamma(T_k(w_n) - T_k(w))\psi$$

$$= -\int_{\Omega_0} \nabla w_n \nabla \psi \varphi_\gamma(T_k(w_n) - T_k(w)) + \int_{\Omega_0} a_n \varphi_\gamma(T_k(w_n) - T_k(w))\psi$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$$\times\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi(x)$$

$$\int_{\Omega_0}\nabla w_n\nabla(T_k(w_n)-T_k(w))\varphi'_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi+$$

$$\int_{\Omega_0} g_n(x,w_n)\frac{n|\nabla w_n|^2}{n+|\nabla w_n|^2}\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi$$

$$=-\int_{\Omega_0}\underbrace{\nabla w_n}_{\rightharpoonup\nabla w}\underbrace{\nabla\psi\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))}_{\xrightarrow{L^2}\nabla\psi\varphi_\gamma(0)=0}+\int_{\Omega_0}\underbrace{a_n\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi}_{\xrightarrow{L^2}a\varphi_\gamma(0)\psi=0}$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$$\times\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi(x)$$

$$\int_{\Omega_0}\nabla w_n\nabla(T_k(w_n)-T_k(w))\varphi_\gamma'(T_k(w_n)-T_k(w))\psi+$$

$$\int_{\Omega_0} g_n(x,w_n)\frac{n|\nabla w_n|^2}{n+|\nabla w_n|^2}\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi$$

$$=-\int_{\Omega_0}\nabla w_n\nabla\psi\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))+\int_{\Omega_0} a_n\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi\leq\varepsilon(n)$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$$\times\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi(x)$$

$$\int_{\Omega_0}\nabla w_n\nabla(T_k(w_n)-T_k(w))\varphi'_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi+$$

$$\int_{\Omega_0}g_n(x,w_n)\frac{n|\nabla w_n|^2}{n+|\nabla w_n|^2}\varphi_\gamma(T_k(w_n)-T_k(w))\psi\leq\varepsilon(n)$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$\times \varphi_\gamma(T_k(w_n) - T_k(w))\psi(x)$

$$\int_{\Omega_0} |\nabla(T_k(w_n) - T_k(w))|^2 \Big[\varphi_\gamma'(T_k(w_n) - T_k(w)) - c\left|\varphi_\gamma(T_k(w_n) - T_k(w))\right|\Big]\psi$$

$$\leq \varepsilon(n)$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$$\times \varphi_\gamma(T_k(w_n) - T_k(w))\psi(x)$$

$$\int_{\Omega_0} |\nabla(T_k(w_n) - T_k(w))|^2 \psi \leq \varepsilon(n)$$

Convergencia de las soluciones aproximadas

$$\times \varphi_\gamma(T_k(w_n) - T_k(w))\psi(x)$$

$$\int_{\Omega_0} |\nabla(T_k(w_n) - T_k(w))|^2 \psi \leq \varepsilon(n)$$

$$+$$

$$\int_{\Omega} |\nabla G_k(w_n)|^2 \leq \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0$$

$$\Downarrow$$

$$w_n \to w \text{ en } H^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

Paso al límite

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0 \qquad \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega_0 \subset\subset \Omega$$

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla \varphi}_{\Big\downarrow} + \underbrace{\int_\Omega g_n(x, w_n) \frac{n|\nabla w_n|^2}{n + |\nabla w_n|^2} \varphi}_{\Big\downarrow} = \underbrace{\int_\Omega a_n \varphi}_{\Big\downarrow}$$

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \varphi \qquad \int_\Omega g(x, w) |\nabla w|^2 \varphi \qquad \int_\Omega a \varphi$$

Remarks

- Si $a \in L^1(\Omega) \Rightarrow w \in W_0^{1,q}(\Omega),\ \forall q < \frac{N}{N-1}$.

Remarks

- Si $a \in L^1(\Omega) \Rightarrow w \in W_0^{1,q}(\Omega), \ \forall q < \frac{N}{N-1}$.

  $\|w_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq cte$

  Espacios de Marcinkiewicz

$$M^p(\Omega,\mu) = \left\{ w : w \ \ \mu - \text{medible}, \quad \exists c > 0, \quad \mu\left(\{|w| > t\}\right) \leq ct^{-p} \quad \forall t > 0 \right\}$$

$$\|w\|_{M^p(\Omega,\mu)} = \inf\left\{ c : \quad \mu\left(\{|w| > t\}\right) \leq ct^{-p} \quad \forall t > 0 \right\}$$

Remarks

- Si $a \in L^1(\Omega) \Rightarrow w \in W_0^{1,q}(\Omega), \ \forall q < \frac{N}{N-1}$.

  $\|w_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq cte$

  Espacios de Marcinkiewicz

  $$M^p(\Omega,\mu) = \left\{ w : w \ \ \mu-\text{medible}, \quad \exists c > 0, \quad \mu\big(\{|w| > t\}\big) \leq ct^{-p} \quad \forall t > 0 \right\}$$

  $$\|w\|_{M^p(\Omega,\mu)} = \inf\left\{ c : \quad \mu\big(\{|w| > t\}\big) \leq ct^{-p} \quad \forall t > 0 \right\}$$

- Si $a \in L^1(\Omega)$, $\exists s_0, \mu > 0$ t. q. $g(x,s) \geq \mu$ si $s \geq s_0 \Rightarrow w \in H_0^1(\Omega)$

  .

No existencia de solución para $-\mathrm{div}\left(M(x,w)\nabla w\right) + g(x,w)|\nabla w|^2 = a(x)$

No existencia de solución para $-\mathrm{div}\,(M(x,w)\nabla w) + g(x,w)|\nabla w|^2 = a(x)$

$$\begin{aligned} \alpha|\xi|^2 \le M(x,s)\xi\cdot\xi, \quad \forall (s,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \quad \text{a.e } x\in\Omega. \\ |M(x,s)| \le \beta, \quad \forall s\in\mathbb{R}, \quad \text{a.e } x\in\Omega. \end{aligned}$$

No existencia de solución para $-\mathrm{div}\,(M(x,w)\nabla w) + g(x,w)|\nabla w|^2 = a(x)$

$$\alpha|\xi|^2 \le M(x,s)\xi\cdot\xi, \quad \forall (s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \quad \text{a.e } x\in\Omega.$$
$$|M(x,s)| \le \beta, \quad \forall s\in\mathbb{R}, \quad \text{a.e } x\in\Omega.$$

Teorema

$g:\Omega\times(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ *Carath.*, $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *t. q.*

$$\left.\begin{array}{c}
\sqrt{h}\notin L^1_{loc}[0,+\infty) \\[2ex]
0\le h(s)\le g(x,s), \quad \forall s>0, \quad a.e.\ x\in\Omega \\[2ex]
lim_{s\to 0^+}\sqrt{h(s)}\ e^{\int_1^s \sqrt{h(t)}dt} = b\ge 0 \\[2ex]
\lambda_1(a(x)) > \dfrac{h(1)+\beta}{\alpha}
\end{array}\right\} \Longrightarrow \nexists\ sol\ w\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$$

No existencia de solución para $-\mathrm{div}\,(M(x,w)\nabla w) + g(x,w)|\nabla w|^2 = a(x)$

Teorema

$g : \Omega \times (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *Carath., $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ t. q.*

$$\left.\begin{array}{c} \sqrt{h} \notin L^1_{loc}[0,+\infty) \\ \\ 0 \le h(s) \le g(x,s), \quad \forall s > 0, \quad a.e\ x \in \Omega \\ \\ lim_{s\to 0^+} \sqrt{h(s)}\ e^{\int_1^s \sqrt{h(t)}dt} = b \ge 0 \\ \\ \lambda_1(a(x)) > \dfrac{h(1)+\beta}{\alpha} \end{array}\right\} \Longrightarrow \nexists\ sol\ w \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

Remark:

- Si $\limsup_{s\to+\infty} h(s) < \infty \Rightarrow \nexists 0 < w \in H^1_0(\Omega)$

Idea de la prueba

Sea $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una solución.

Idea de la prueba

Sea $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una solución.
Para una cierta $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$, escogemos $v = \varphi(w)$ como función test

Idea de la prueba

Sea $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una solución.
Para una cierta $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$, escogemos $v = \varphi(w)$ como función test

$$\int_\Omega M(x,w)\nabla w \cdot \nabla w\, \varphi'(w) + \int_\Omega h(w)|\nabla w|^2 \varphi(w) \le \int_\Omega a(x)\varphi(w).$$

Idea de la prueba

Sea $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una solución.
Para una cierta $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$, escogemos $v = \varphi(w)$ como función test

$$\int_\Omega M(x,w)\nabla w \cdot \nabla w\, \varphi'(w) + \int_\Omega h(w)|\nabla w|^2 \varphi(w) \leq \int_\Omega a(x)\varphi(w)$$

$$+ - \frac{1}{\beta}\int_\Omega M(x,w)\nabla w \cdot \nabla w h(w)\varphi(w)$$

Idea de la prueba

Sea $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una solución.
Para una cierta $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$, escogemos $v = \varphi(w)$ como función test

$$\int_\Omega M(x,w)\nabla w \cdot \nabla w \underbrace{\left[\varphi'(w) + \frac{h(w)}{\beta}\varphi(w)\right]}_{\geq 0}$$

$$+\int_\Omega \underbrace{\left[I - \frac{M(x,w)}{\beta}\right]}_{\geq 0} \nabla w \cdot \nabla w \, h(w)\varphi(w) \leq \int_\Omega a(x)\varphi(w).$$

Idea de la prueba

Sea $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una solución.
Para una cierta $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$, escogemos $v = \varphi(w)$ como función test

$$\int_\Omega M(x,w)\nabla w \cdot \nabla w \underbrace{\left[\varphi'(w) + \frac{h(w)}{\beta}\varphi(w)\right]}_{\geq 0}$$

$$+\int_\Omega \underbrace{\left[I - \frac{M(x,w)}{\beta}\right]}_{\geq 0} \nabla w \cdot \nabla w \, h(w)\varphi(w) \leq \int_\Omega a(x)\varphi(w).$$

$$\alpha \int_\Omega |\nabla \sigma(w)|^2 = \alpha \int_\Omega |\nabla w|^2 [\sigma'(w)]^2 \leq \int_\Omega a(x)\varphi(w)$$

Idea de la prueba

Sea $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una solución.
Para una cierta $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$, escogemos $v = \varphi(w)$ como función test

$$\int_\Omega M(x,w)\nabla w \cdot \nabla w \underbrace{\left[\varphi'(w) + \frac{h(w)}{\beta}\varphi(w)\right]}_{\geq 0}$$

$$+ \int_\Omega \underbrace{\left[I - \frac{M(x,w)}{\beta}\right]}_{\geq 0} \nabla w \cdot \nabla w\, h(w)\varphi(w) \leq \int_\Omega a(x)\varphi(w).$$

$$\alpha \int_\Omega |\nabla \sigma(w)|^2 = \alpha \int_\Omega |\nabla w|^2 [\sigma'(w)]^2 \leq \int_\Omega a(x)\varphi(w)$$

$\varphi(s) \leq (h(1) + \beta)[\sigma(s)]^2, \quad \forall s > 0$

Idea de la prueba

Sea $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una solución.
Para una cierta $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$, escogemos $v = \varphi(w)$ como función test

$$\int_\Omega M(x,w)\nabla w \cdot \nabla w \underbrace{\left[\varphi'(w) + \frac{h(w)}{\beta}\varphi(w)\right]}_{\geq 0}$$

$$+ \int_\Omega \underbrace{\left[I - \frac{M(x,w)}{\beta}\right]}_{\geq 0} \nabla w \cdot \nabla w \, h(w)\varphi(w) \leq \int_\Omega a(x)\varphi(w).$$

$$\alpha \int_\Omega |\nabla \sigma(w)|^2 = \alpha \int_\Omega |\nabla w|^2 [\sigma'(w)]^2 \leq \int_\Omega a(x)\varphi(w)$$

$$\alpha \int_\Omega |\nabla \sigma(w)|^2 = \alpha \int_\Omega |\nabla w|^2 [\sigma'(w)]^2 \leq \int_\Omega a(x)\varphi(w) \leq (h(1) + \beta) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2$$

Idea de la prueba

Sea $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una solución.
Para una cierta $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$, escogemos $v = \varphi(w)$ como función test

$$\int_\Omega M(x,w)\nabla w \cdot \nabla w \underbrace{\left[\varphi'(w) + \frac{h(w)}{\beta}\varphi(w)\right]}_{\geq 0}$$

$$+ \int_\Omega \underbrace{\left[I - \frac{M(x,w)}{\beta}\right]}_{\geq 0} \nabla w \cdot \nabla w \, h(w)\varphi(w) \leq \int_\Omega a(x)\varphi(w).$$

$$\alpha \int_\Omega |\nabla \sigma(w)|^2 = \alpha \int_\Omega |\nabla w|^2 [\sigma'(w)]^2 \leq \int_\Omega a(x)\varphi(w)$$

$$\alpha \int_\Omega |\nabla \sigma(w)|^2 \leq (h(1) + \beta) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2$$

Idea de la prueba

Sea $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una solución.
Para una cierta $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$, escogemos $v = \varphi(w)$ como función test

$$\int_\Omega M(x,w)\nabla w \cdot \nabla w \underbrace{\left[\varphi'(w) + \frac{h(w)}{\beta}\varphi(w)\right]}_{\geq 0}$$

$$+\int_\Omega \underbrace{\left[I - \frac{M(x,w)}{\beta}\right]}_{\geq 0} \nabla w \cdot \nabla w\, h(w)\varphi(w) \leq \int_\Omega a(x)\varphi(w).$$

$$\alpha \int_\Omega |\nabla\sigma(w)|^2 = \alpha \int_\Omega |\nabla w|^2[\sigma'(w)]^2 \leq \int_\Omega a(x)\varphi(w)$$

$$\alpha\lambda_1(a(x)) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2 \leq (h(1)+\beta) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2$$

Idea de la prueba

Let $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ be a solution.
For a suitable $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ with $\varphi(0) = 0$, we choose $v = \varphi(w)$ as test function

$$\alpha \lambda_1(a(x)) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2 \leq (h(1) + \beta) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2$$

Idea de la prueba

Let $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ be a solution.
For a suitable $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ with $\varphi(0) = 0$, we choose $v = \varphi(w)$ as test function

$$\alpha \lambda_1(a(x)) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2 \leq (h(1) + \beta) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2$$

$$\frac{h(1) + \beta}{\alpha} < \lambda_1(a(x))$$

Idea de la prueba

Let $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ be a solution.
For a suitable $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ with $\varphi(0) = 0$, we choose $v = \varphi(w)$ as test function

$$\alpha \lambda_1(a(x)) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2 \leq (h(1) + \beta) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2$$

$$\frac{h(1) + \beta}{\alpha} < \lambda_1(a(x)), \quad \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2 = 0,$$

Idea de la prueba

Let $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ be a solution.
For a suitable $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ with $\varphi(0) = 0$, we choose $v = \varphi(w)$ as test function

$$\alpha \lambda_1(a(x)) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2 \leq (h(1) + \beta) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2$$

$$\frac{h(1) + \beta}{\alpha} < \lambda_1(a(x)), \quad \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2 = 0, \quad \sigma(w) = 0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

Idea de la prueba

Let $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ be a solution.
For a suitable $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ with $\varphi(0) = 0$, we choose $v = \varphi(w)$ as test function

$$\alpha \lambda_1(a(x)) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2 \leq (h(1) + \beta) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2$$

$$\frac{h(1)+\beta}{\alpha} < \lambda_1(a(x)), \quad \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2 = 0, \quad \sigma(w) = 0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

$$\Downarrow$$

$$w \equiv 0$$

Idea de la prueba

Let $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ be a solution.
For a suitable $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ with $\varphi(0) = 0$, we choose $v = \varphi(w)$ as test function

$$\alpha \lambda_1(a(x)) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2 \leq (h(1) + \beta) \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2$$

$$\frac{h(1)+\beta}{\alpha} < \lambda_1(a(x)), \quad \int_\Omega a(x)[\sigma(w)]^2 = 0, \quad \sigma(w) = 0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

$$\Downarrow$$

$$w \equiv 0$$

contradice que $w > 0$ in Ω

Remarks

- $\Lambda > 0$, $\gamma > 2$ y $\dfrac{\Lambda}{s^{\gamma}} \le g(x,s), \quad \forall s > 0,$ a.e. $x \in \Omega.$

Remarks

- $\Lambda > 0$, $\gamma > 2$ y $\dfrac{\Lambda}{s^\gamma} \leq g(x,s), \quad \forall s > 0,$ a.e. $x \in \Omega.$

- $\gamma = 2,\ h_R(s) = \dfrac{\Lambda R}{s^\gamma}$, no hay solución para

$$\lambda_1(a(x)) > \frac{\Lambda R^2 + R\beta}{\alpha}.$$