Equivalencia radial entre la ecuación de los medios porosos y la ecuación del p-Laplaciano

Ariel Sánchez

En colaboración con Razvan G. Iagar y Juan Luis Vázquez.

Ecuación radial de los MP:

$$u_t = r^{1-n}\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}|u|^{m-1}u_r). \quad (1)$$

Ecuación radial del PL:

$$\bar{u}_t = \bar{r}^{1-\bar{n}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r}^{\bar{n}-1}|\bar{u}_{\bar{r}}|^{p-2}\bar{u}_{\bar{r}}). \quad (2)$$

Theorem 1. *Si* $0 < n < 2$*, entonces las soluciones radiales* u *y* $\bar{u}$ *de los MP y del PL, respectivamente, están relacionadas por la siguiente transformación:*

$$\bar{u}_{\bar{r}}(\bar{r}, t) = D_1 r^{\frac{2n-2}{m+1}} u(r, t) \tag{3}$$

siendo $D_1 = \left(\frac{(mn-n+2)^2}{m(m+1)^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}$*, donde la relación entre los parámetros es*

$$p = m + 1, \quad \bar{n} = \frac{(n-2)(m+1)}{n - mn - 2} \tag{4}$$

y entre las de la variable independiente
$\bar{r} = r^{(mn-n+2)/(m+1)}$.

Theorem 2. *Si $n > 2$, entonces las soluciones radiales u y $\bar{u}$ de los MP y del PL, respectivamente, están relacionadas por la siguiente transformación:*

$$\bar{u}_{\bar{r}}(\bar{r}, t) = D_2 r^{\frac{2}{m+1}} u(r, t), \tag{5}$$

siendo $D_2 = \left(\frac{(2m)^2}{m(m+1)^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}$ donde la relación entre los parámetros es

$$p = m + 1, \quad \bar{n} = \frac{(n-2)(m+1)}{2m} \tag{6}$$

y entre las de la variable independiente
$\bar{r} = r^{2m/(m+1)}$.

Autosemejantes

$$\begin{cases} u(r,t) = t^{-\alpha} f(rt^{-\beta}), \quad \text{(Tipo I)} \\ u(r,t) = (T-t)^{\alpha} f(r(T-t)^{\beta}), \quad \text{(Tipo II)} \\ u(r,t) = e^{-\alpha t} f(xe^{-\beta t}), \quad \text{(Tipo III)} \end{cases}$$

Medio Poroso

$$\eta^{1-n}(\eta^{n-1}|f|^{m-1}f')' + \alpha f + \beta \eta f' = 0, \qquad (7)$$

donde $(m-1)\alpha + 2\beta = \varepsilon$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 \text{ para Tipo I} \\ -1 \text{ para Tipo II} \\ 0 \text{ para Tipo III} \end{cases}$$

P-Laplaciano

$$\eta^{1-n}(\eta^{n-1}|f'|^{p-2}f')' + \alpha f + \beta \eta f' = 0, \qquad (8)$$

donde $(p-2)\alpha + p\beta = \varepsilon$

Plano de fase MP

Ahora introducimos las variables:

$$X = \eta f'/f, \qquad Y = \eta^2 |f|^{1-m}. \tag{9}$$

las funciones $X(r)$ y $Y(r)$ satisface el sistema EDO (ver por ejemplo el libro de JLV):

$$\begin{cases} \dot{X} = (2-n)X - mX^2 - (\alpha + \beta X)Y, \\ \dot{Y} = (2 + (1-m)X)Y, \end{cases} \tag{10}$$

donde over-dot indica la derivada respecto a $r = \log \eta$.

Nuevo plano de fases

Hacemos

$$\Phi = \frac{2 + (1-m)X}{\sqrt{|b|}}, \qquad \Psi = Y/|b|, \tag{11}$$

donde $b = 2n(m - m_c)/(m-1) \neq 0$
$(m \neq m_c := (n-2)/n)$.

Con estas variables el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} \dot{\Psi} = \Psi\Phi, \\ \dot{\Phi} = c_1\Phi^2 - c_2\Psi\Phi - c_3\Phi + \varepsilon\Psi + \mathrm{sgn}(b), \end{cases} \tag{12}$$

hemos reemplazado r por $r_1 = \sqrt{|b|}r$. Y las constantes c_i están dadas por

$$\begin{aligned} c_1 &= \tfrac{m}{m-1}, \quad c_2 = \beta\sqrt{|b|}, \\ c_3 &= \tfrac{(n+2)(m-m_s)}{(m-1)\sqrt{|b|}}, \quad m_s = \tfrac{n-2}{n+2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Phase-plane for the PLE.

Con el cambio de variable

$$X = -\eta^2 |f'|^{1-p} f', \quad Y = -\eta |f'|^{-p} f' f, \tag{14}$$

obtenemos

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{2-p}{p-1} X \left(\gamma - n + \alpha Y - \beta |X|\right) \\ \dot{Y} = -\alpha Y^2 + nY + \beta Y |X| - |X|, \end{cases} \tag{15}$$

donde over-dot indica la derivada respecto a $r = \log \eta$.

Ahora hacemos

$$\Psi = a|X|, \quad \Phi = -\frac{p-2}{(p-1)\sqrt{|b|}}\left(\gamma - n + \alpha Y - \beta|X|\right),$$

donde

$$a = \frac{1}{|b|(p-1)}, \; b = \frac{p(n+1)(p-p_c)}{(p-2)(p-1)}, \text{ donde } p_c = \frac{2n}{n+1},$$

y obtenemos

$$\begin{cases} \dot{\Psi} = \Psi\Phi, \\ \dot{\Phi} = c_1\Phi^2 - c_2\Psi\Phi - c_3\Phi + \varepsilon\Psi + \mathrm{sgn}(b), \end{cases} \tag{16}$$

hemos reemplazado r por $r_1 = \sqrt{|b|}r$. Y la constantes c_i están dadas por

$$\begin{aligned} c_1 &= \tfrac{p-1}{p-2}, \quad c_2 = \beta\sqrt{|b|}, \\ c_3 &= \tfrac{(n+2)(p-p_s)}{(p-2)\sqrt{|b|}}, \quad p_s = \tfrac{2n}{n+2}. \end{aligned} \tag{17}$$

$$MP\left\{\begin{array}{l} c_1=\frac{m}{m-1}, \quad c_2=\beta\sqrt{|b|}, \\ \\ c_3=\frac{(n+2)(m-m_s)}{(m-1)\sqrt{|b|}}, \quad m_s=\frac{n-2}{n+2}. \end{array}\right.$$

$$PL\left\{\begin{array}{l} \bar{c}_1=\frac{p-1}{p-2}, \quad \bar{c}_2=\beta\sqrt{|\bar{b}|}, \\ \\ \bar{c}_3=\frac{(\bar{n}+2)(p-p_s)}{(p-2)\sqrt{|\bar{b}|}}, \quad p_s=\frac{2\bar{n}}{\bar{n}+2}. \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= c_1 \Rightarrow p=m+1, \\ \bar{c}_3 &= c_3 \Rightarrow \bar{n}_1=\frac{(m+1)(n-2)}{2m}, \quad \bar{n}_2=\frac{(m+1)(n-2)}{n-2-mn}, \\ \bar{c}_2 &= c_2 \Rightarrow \bar{\beta}_1=\frac{2m}{m+1}\beta, \qquad \bar{\beta}_2=\frac{mn-n+2}{m+1}\beta. \end{aligned}$$

$$\frac{b}{\bar{b}}=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{(mn-n+2)^2}{(m+1)^2}, & \text{si} \quad n<2, \\ \\ \dfrac{4m^2}{(m+1)^2}, & \text{si} \quad n>2. \end{array}\right.$$

Relacines entre las soluciones autosemejantes

Si $\bar{\Psi} = \Psi$ y $\bar{\Phi} = \Phi$

Proposition 1. *Supongamos que* $0 < n < 2$ *y* $\bar{\alpha} \neq 0$*. Entonces los perfiles autosemejantes de MP y PL satisfacen*

$$\bar{f}'(\bar{\eta}) = D_1 \eta^{\frac{2n-2}{m+1}} f(\eta) \tag{18}$$

y

$$\bar{f}(\bar{\eta}) = -\tfrac{mn-n+2}{m+1} \eta^{n-1} \tfrac{D_1}{\bar{\alpha}} (|f(\eta)|^{m-1} f'(\eta) + \beta \eta f(\eta)), \tag{19}$$

donde $\bar{\eta} = \eta^{(mn-n+2)/(m+1)}$.

Proposition 2. *Supongamos que* $n > 2$ *y* $\bar{\alpha} \neq 0$*. Entonces los perfiles autosemejantes de MP y PL satisfacen*

$$\bar{f}'(\bar{\eta}) = D_2 \eta^{\frac{2}{m+1}} f(\eta) \tag{20}$$

y

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{\eta}) &= -\tfrac{2m}{m+1} \tfrac{D_2}{\bar{\alpha}} (\eta |f(\eta)|^{m-1} f'(\eta) + \beta \eta^2 f(\eta) \\ &+ \tfrac{n-2}{m} |f(\eta)|^{m-1} f(\eta)), \end{aligned} \tag{21}$$

donde $\bar{\eta} = \eta^{(2m)/(m+1)}$.

Caso $\bar{\alpha} = 0$

$$\bar{\eta}^{1-\bar{n}}((|\bar{f}'(\bar{\eta})|)^{p-2}\bar{f}'(\bar{\eta})\bar{\eta}^{\bar{n}-1})' + \frac{1}{p}\bar{\eta}\bar{f}'(\bar{\eta}) = 0.$$

$$\bar{f}'(\bar{\eta}) = \bar{\eta}^{\frac{1-\bar{n}}{p-1}} \left(C - \frac{p-2}{p(\bar{n}(p-2)+p)} \bar{\eta}^{\frac{\bar{n}(p-2)+p}{p-1}} \right)_{+}^{\frac{1}{p-2}}.$$

Difusión lenta, Tipo I

Medio Poroso

Soluciones de Barenblatt

$$B_C(x,t) = t^{-\alpha}\left(C - k(\frac{|x|}{t^{\beta}})^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \qquad (22)$$

$\alpha = \frac{n}{n(m-1)+2}, \quad \beta = \frac{1}{n(m-1)+2}, \quad k = \frac{m-1}{2(n(m-1)+2)}.$

Soluciones del tipo dipolo

$$\begin{aligned} &Z_C(x,t) = t^{-\alpha}U(xt^{-\beta}),\\ &U(\eta) = \pm|\eta|^{\frac{2-n}{m}}\left(C - \tfrac{m-1}{2(n(m-1)+2)}|\eta|^{n+\frac{2-n}{m}}\right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \end{aligned} \qquad (23)$$

$\alpha = \frac{1}{m}$, $\beta = \frac{1}{2m}$

Existencia de una sucesión de exponentes

$$\alpha_1 = \frac{n}{n(m-1)+2} < \alpha_2 = \frac{1}{m} < \alpha_3 < \ldots \uparrow \frac{1}{m-1},$$

P-Laplaciano

$$U_C(x,t) = t^{-\alpha}\left(C - k(\frac{|x|}{t^{\beta}})^{\frac{p}{p-1}}\right)_+^{\frac{p-1}{p-2}}, \qquad (24)$$

donde

$$\alpha = \frac{n}{n(p-2)+p}, \quad \beta = \frac{1}{n(p-2)+p}, \quad k = \frac{p-2}{p}\beta^{\frac{1}{p-1}}.$$

Theorem 3. *Sea $p > 2$. (a) Para todo $\bar{n} \in (0,p)$, existe una sucesión de exponentes*

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\bar{n}}{\bar{n}(p-2)+p} < \bar{\alpha}_2 < \bar{\alpha}_3 < ..... \uparrow \frac{1}{p-2} \qquad (25)$$

tal que la EPL en dimensión $\bar{n}$ tiene una solución autosemejante con soporte compacto del TipoI si y sólo si $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_k$ para algún entero positivo k. Además la solución correspondiente al exponente $\bar{\alpha}_k$ tiene exactamente $k-1$ cambios de signo. (b) Para todo $\bar{n} \in [p,\infty)$, las soluciones correspondientes a a_{2k} se hacen infinito en 0, mientras que los términos a_{2k+1} corresponde a perfiles pares no singulares.

Difusión rápida, Tipo II

Solución singular MP

$$U(x,t;T) = c_m\Big(\frac{T-t}{|x|^2}\Big)^{1/(1-m)}, \quad c_m^{1-m} = 2\Big(n - \frac{2}{1-m}\Big).$$

Solución singular PL

$$\bar{u}(\bar{r},t) = c_p(T-t)^{\frac{1}{2-p}}\Big(\frac{1}{\bar{r}^{p/(p-1)}}\Big)^{\frac{p-1}{2-p}}, \quad c_p^{\frac{2-p}{p-1}} = \frac{p(-\bar{n}(p-2)-p)^{\frac{1}{p-1}}}{2-p}.$$

Theorem 4. *Para todo $p \in (1, p_c)$, existe una única $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(p)$ y una única solución autosemejante de la forma*

$$\bar{u}(x,t) = (T-t)^{\bar{\alpha}_0} \bar{f}(x(T-t)^{\bar{\beta}_0}) \tag{26}$$

con

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}(2-p)-p}, \quad \bar{\beta}_0 = \frac{1}{\bar{\gamma}(2-p)-p}, \tag{27}$$

tal que el perfil $\bar{f}$ es acotado y decae en el infinito como $\bar{\eta}^{-(\bar{n}-p)/(p-1)}$.

Theorem 5. *Los exponentes anómalos $\bar{\alpha}_0$ y $\bar{\beta}_0$ son ambos funciones analiticas de p. Además*

$$\lim_{p\to 1} \bar{\alpha}_0 = 1, \quad \lim_{p\to 1} \bar{\beta}_0 = 0, \quad \lim_{p\to p_c} \bar{\alpha}_0 = \infty, \quad \lim_{p\to p_c} \bar{\beta}_0 = \infty \tag{28}$$

siendo $\bar{\alpha}_0$ una función creciente en p, pero no asi $\bar{\beta}_0$.

Loewner-Nirenberg

Medio poroso $\beta = 0$, $\alpha = 1/(1-m) = (n+2)/4$

$$f(\eta; C) = \Big(C + \frac{\eta^2}{4nC}\Big)^{-\frac{n+2}{2}}, \qquad (29)$$

P-Laplaciano $\bar{\beta} = 0$, $\bar{\alpha} = 1/(2-p) = (n+2)/4$

$$\bar{f}(\bar{\eta}; C) = \frac{4n}{n+2}\Big(\frac{4n^3 C}{n^2-4}\Big)^{\frac{n-2}{4}}\big(1 + C\bar{\eta}^{\frac{2n}{n-2}}\big)^{-\frac{n}{2}} \qquad (30)$$