Análisis de un sistema elíptico bajo condiciones de contorno que dependen de parámetros

Jorge García-Melián & José Sabina

Departamento de Análisis Matemático,
Universidad de La Laguna, SPAIN

y

Julio Rossi

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires, ARGENTINA

San José (Almería), Septiembre de 2007

1.Introducción. Estudio global de las soluciones positivas del sistema

$$\begin{cases} \Delta u = a(x)u^p v^q & x \in \Omega \qquad \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u \qquad x \in \partial\Omega \\ \Delta v = b(x)u^r v^s & x \in \Omega \qquad \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \mu v \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado de clase $C^{2,\alpha}$,

- $a, b \in C(\overline{\Omega})$, $a(x) \geq 0$, $b(x) > 0$ en $\overline{\Omega}$,

- $p > 1, s > 1, q, r > 0$,

- λ, μ parámetros reales.

Dos peculiaridades del problema:

- Dependencia de las condiciones con respecto a los parámetros λ, μ.

- $a(x)$ puede anularse en todo un subdominio $\Omega_0 \subset \Omega$. Supondremos: o bien $a > 0$ en Ω o bien,

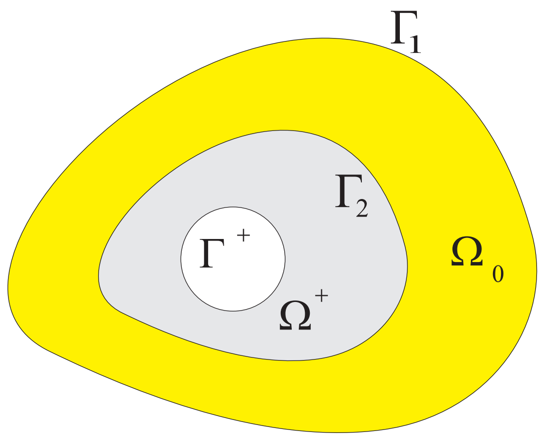
$$\{x \in \Omega : a(x) = 0\} = \overline{\Omega}_0,$$

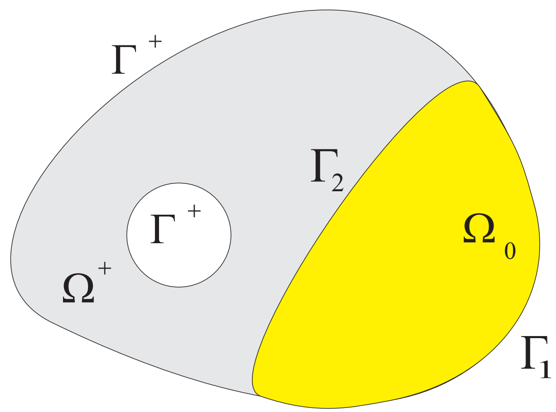
$\Omega_0 \subset \Omega$ de clase $C^{2,\alpha}$ con:

$$\Gamma_2 = \partial\Omega_0 \cap \Omega, \qquad \Gamma_1 = \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega.$$

Hipótesis **(H)** (técnica):

$$\overline{\Gamma}_2 = \Gamma_2 \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma_2 \subset \Omega.$$





$$\Omega^+ := \{x \in \Omega : a(x) > 0\}, \qquad \Gamma^+ = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega.$$

- Ω^+ puede tener varias componentes conexas.

2. Antecedentes. El problema:

$$\begin{cases} \Delta u = a(x)u^p & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $a \in C(\overline{\Omega})$ cumpliendo (H), $p > 1$.

- J. García-M, J. Rossi, J. Sabina, NoDEA (2005), Proceedings Equadiff 2005, Preprint 2006 (ICM).

Problema de autovalores auxiliar:

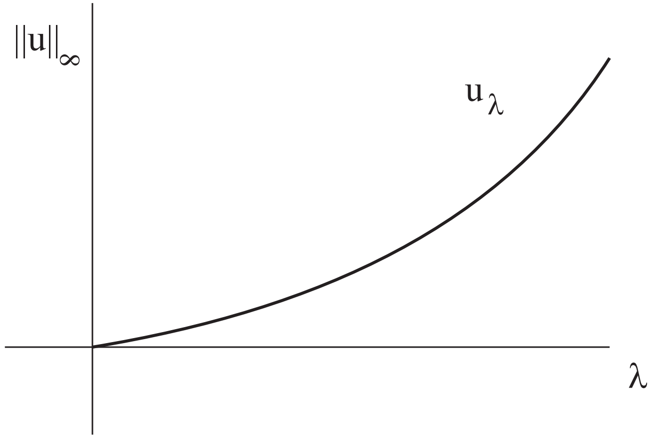
$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & x \in \Omega_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \boxed{\lambda} u \quad \boxed{x \in \Gamma_1}, & u = 0 \quad \boxed{x \in \Gamma_2}. \end{cases}$$

- λ_1 el autovalor principal, $\lambda_1 = \infty$ si $\Gamma_1 = \emptyset$.

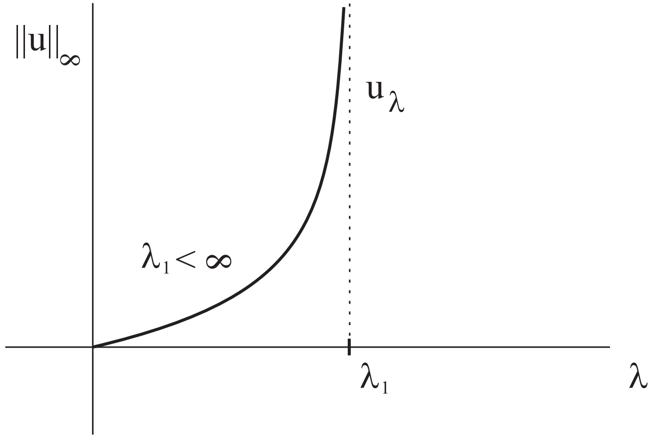
Resultados:

1) Sólo existen soluciones positivas para

$$0 < \lambda < \lambda_1 \leq \infty.$$



a > 0 o $\lambda_1 = \infty$



Ω_0 no vacio $\lambda_1 < \infty$

2) La solución positiva es única: $u = u_\lambda(x) \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Atractor global de las soluciones no negativas (parabólico). u_λ es creciente y regular en λ mientras:

$$u_\lambda \sim \left(\frac{\lambda}{a^*}\right)^{\frac{1}{p-1}} \qquad \lambda \to 0.$$

3) Si $\lambda_1 < \infty$ entonces $\lim_{\lambda \to \lambda_1} u_\lambda = \infty$ uniformemente en $\overline{\Omega}_0$. En Ω^+, $\lim_{\lambda \to \lambda_1} u_\lambda = u_\infty$, $u = u_\infty$ la solución minimal de

$$\begin{cases} \Delta u = au^p & x \in \Omega^+ \\ u = \infty & x \in \Gamma_2 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u & x \in \Gamma^+, \end{cases} \quad \text{ó de} \quad \begin{cases} \Delta u = au^p & x \in \Omega^+ \\ u = \infty & x \in \Gamma_2, \end{cases}$$

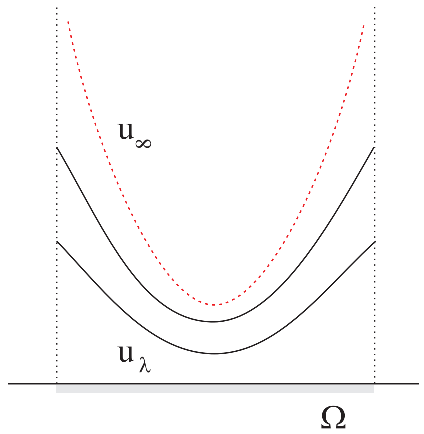
dependiendo de si $\Gamma^+ \neq \emptyset$ o $\Gamma^+ = \emptyset$.

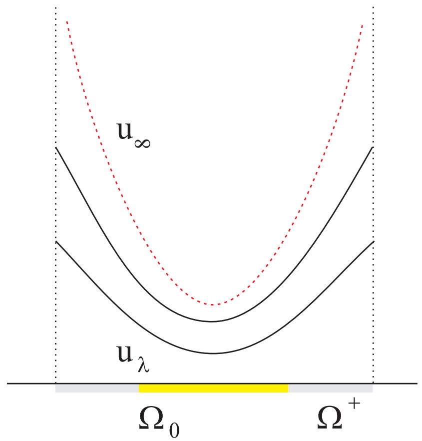
4) Si $\lambda_1 = \infty$ entonces $\lim_{\lambda \to \infty} u_\lambda = u_\infty$, $u = u_\infty$ solución (minimal) de:

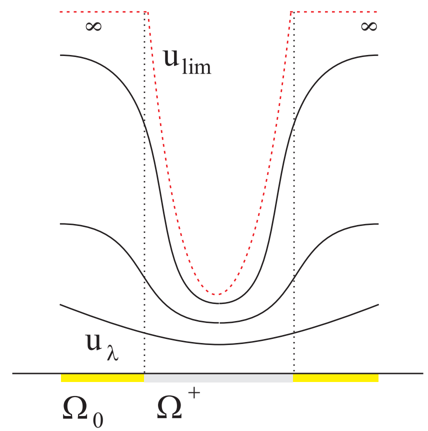
$$\begin{cases} \Delta u = au^p & x \in \Omega \\ u = \infty & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

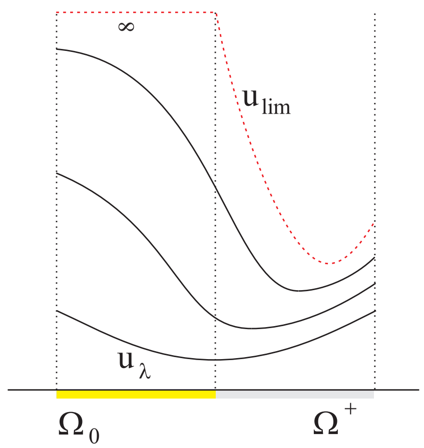
Además:

$$C_1\left(d+\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{-\alpha} \le u_\lambda \le C_2\left(d+\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{-\alpha}, \qquad \alpha = \frac{2}{p-1}.$$









3. Resultados. Consideramos:

$$\begin{cases} \Delta u = a(x) u^p v^q \qquad x \in \Omega & \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u \qquad x \in \partial\Omega \\ \Delta v = b(x) u^r v^s \qquad x \in \Omega & \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \mu v \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

en el régimen:

$$\delta := (p-1)(s-1) - qr > 0 \qquad\qquad p > 1,\ q > 1.$$

- J. García-M., J. Rossi, JDE (2004): soluciones "grandes"($\delta \geq 0$).

- J. García-M., R. Letelier, J. Sabina, Proc. Roy. Soc. Edinburgh (2006): soluciones "grandes"($\delta < 0$).

3.1. Existencia, Unicidad. Si $a(x)$ cumple (H) y se satisface la relación: $\delta := (p-1)(s-1) - qr > 0$ el problema:

$$\begin{cases} \Delta u = a(x) u^p v^q \qquad x \in \Omega & \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u \qquad x \in \partial\Omega \\ \Delta v = b(x) u^r v^s \qquad x \in \Omega & \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \mu v \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

• Sólo admite soluciones positivas si:

$$0 < \lambda < \lambda_1 \leq \infty \qquad \mu > 0.$$

• La solución positiva $u = u_{\lambda,\mu}$, $v = v_{\lambda,\mu}$ es única, $u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu} \in H^1 \cap L^\infty$.

• [Compensación] $u_{\lambda,\mu}$ creciente en λ, decreciente en μ, $v_{\lambda,\mu}$ creciente en μ, decreciente en λ.

• $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$ globalmente atractiva.

3.2. *Comportamiento* $\lambda, \mu \sim 0$.

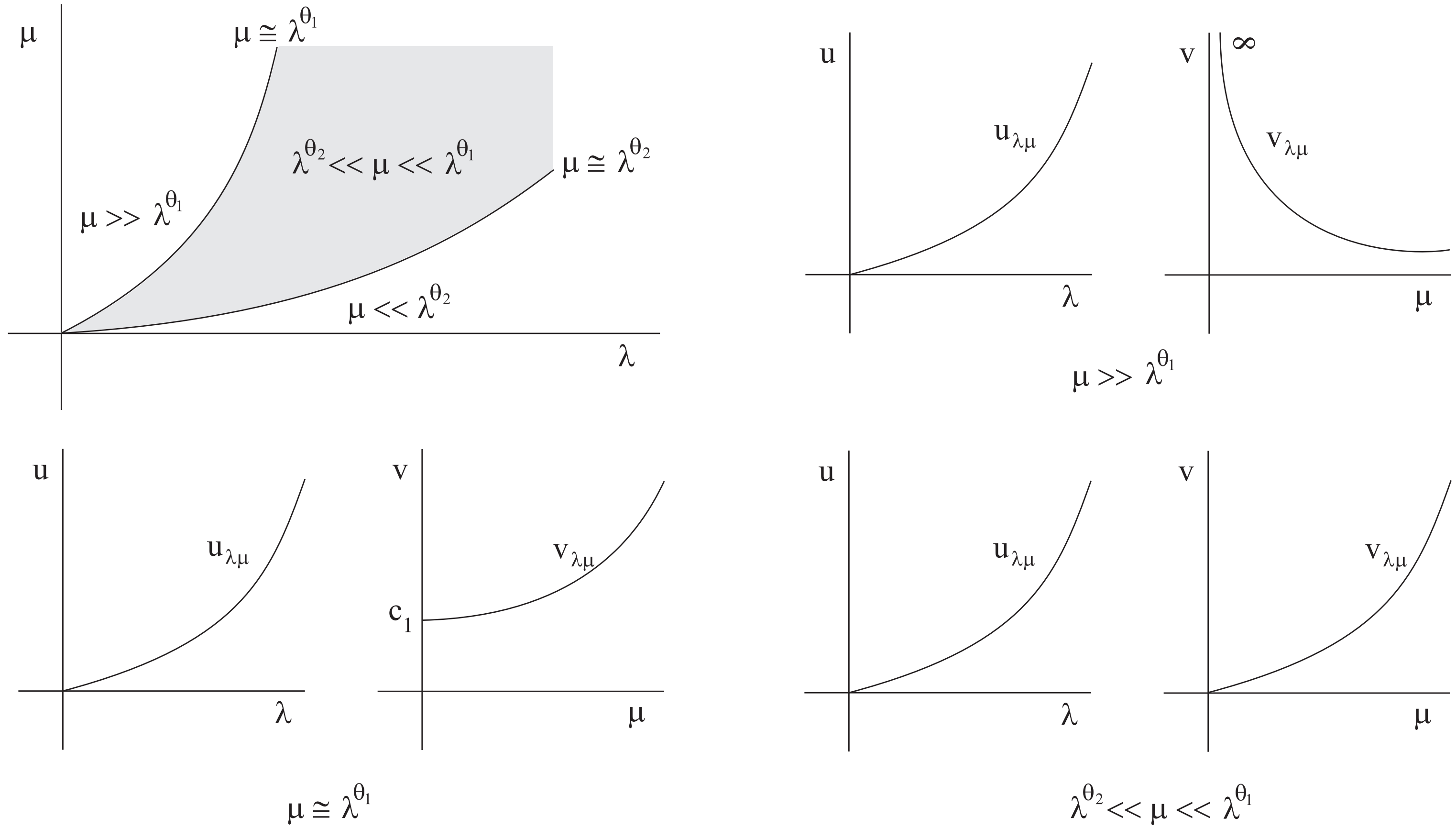
- $\mu > 0$: $\text{lím}_{\lambda \to 0} (u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) = (0, \infty)$.

- $\lambda > 0$: $\text{lím}_{\mu \to 0} (u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) = (\infty, 0)$.

- $\lambda, \mu \to 0$:

$$\lim_{\lambda,\mu \to 0} (u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) = \begin{cases} (0,\infty) & \mu \gg \lambda^{\theta_1} \\ (0, c_1) & \mu \approx \lambda^{\theta_1} \\ (0,0) & \lambda^{\theta_2} \ll \mu \ll \lambda^{\theta_1} \\ (c_2, 0) & \mu \approx \lambda^{\theta_2} \\ (\infty, 0) & \mu \ll \lambda^{\theta_2}, \end{cases}$$

$$\theta_1 = \frac{r}{p-1}\,, \qquad \theta_2 = \frac{s-1}{q} \qquad (\theta_1 < \theta_2).$$



- Estimación asintótica $(\lambda, \mu \to 0)$:

$$(u_{\lambda,\mu})^{\delta} \sim \left(\frac{\lambda}{a^*}\right)^{s-1} \left(\frac{b^*}{\mu}\right)^{q} , \qquad (v_{\lambda,\mu})^{\delta} \sim \left(\frac{\mu}{b^*}\right)^{p-1} \left(\frac{a^*}{\lambda}\right)^{r} .$$

3.3. *Perfil* $\lambda \to \infty$. Suponemos $\mu > 0$ fijo y $\lambda_1 = \infty$ $(a > 0$ en $\partial\Omega)$.

1) [Coexistencia para $\lambda \to \infty$]: Si

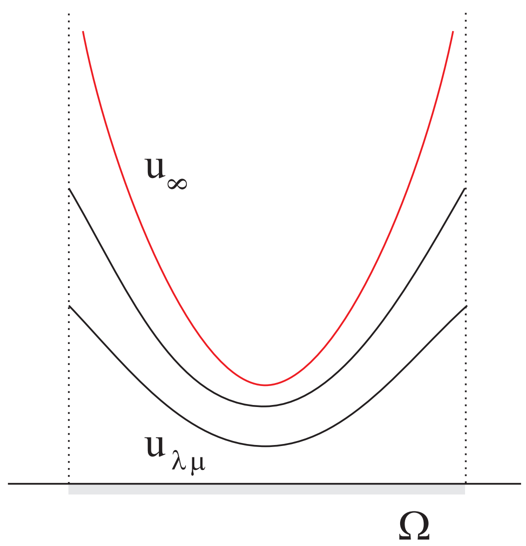
$$0 < r < \frac{p-1}{2},$$

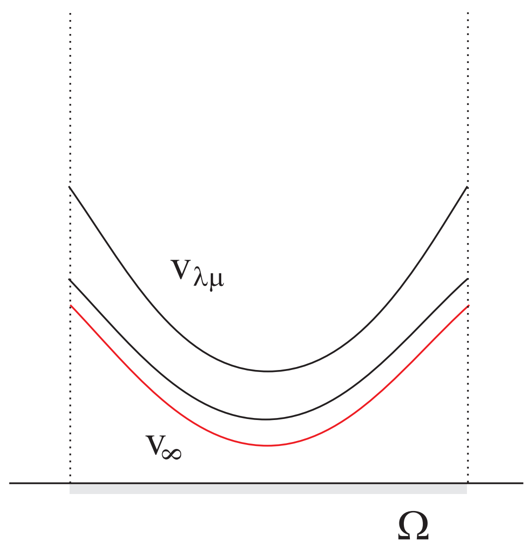
entonces

$$\lim_{\lambda \to \infty} (u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) = (u_\infty, v_\infty) \qquad (C^{1,\gamma}(\Omega)),$$

(u_∞, v_∞) la *única* solución de

$$\begin{cases} \Delta u = a u^p v^q & x \in \Omega \qquad u = \infty \quad x \in \partial\Omega \\ \Delta v = b u^r v^s & x \in \Omega \qquad \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \mu v \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$





2) [Extinción en $\lambda \to \infty$]: En el rango complementario

$$r \geq \frac{p-1}{2},$$

$$\lim u_{\lambda,\mu} = \infty \qquad \lim v_{\lambda,\mu} = 0,$$

uniformemente en Ω cuando $\lambda \to \infty$.

3.4. Perfil $\lambda \to \lambda_1$. Ahora $\lambda_1 < \infty$, $a = o(d)$ cerca de Γ_2. El problema de autovalores:

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & x \in \Omega^+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \boxed{\mu} u & \boxed{x \in \Gamma^+}, \qquad u = 0 \quad \boxed{x \in \Gamma_2}. \end{cases}$$

permite introducir el valor μ^+, $\mu^+ = \infty$ si $\Gamma^+ = \emptyset$.

1) [Extinción en $\lambda \to \lambda_1$]: Para $\mu \leq \mu^+$,

$$\lim u_{\lambda,\mu} = \infty \qquad \lim v_{\lambda,\mu} = 0,$$

uniformemente en Ω cuando $\lambda \to \lambda_1$.

2) [Coexistencia parcial $\lambda \to \lambda_1$]: Si $\mu > \mu^+$,

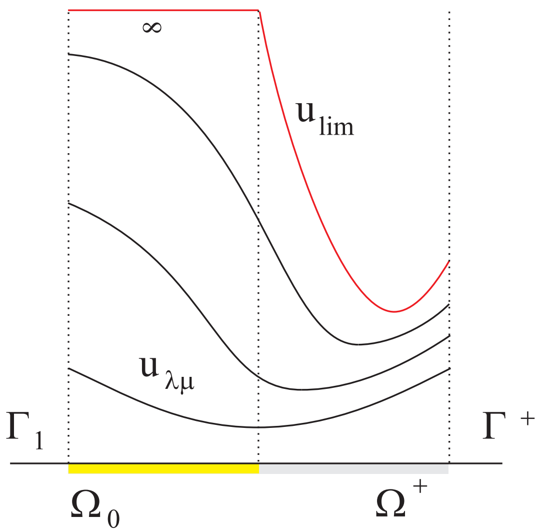
$$\lim_{\lambda \to \lambda_1} u_{\lambda,\mu} = \infty \qquad \lim_{\lambda \to \lambda_1} v_{\lambda,\mu} = 0 \quad \text{uniformemente en } \Omega_0.$$

Si además existe $\sigma > 0$

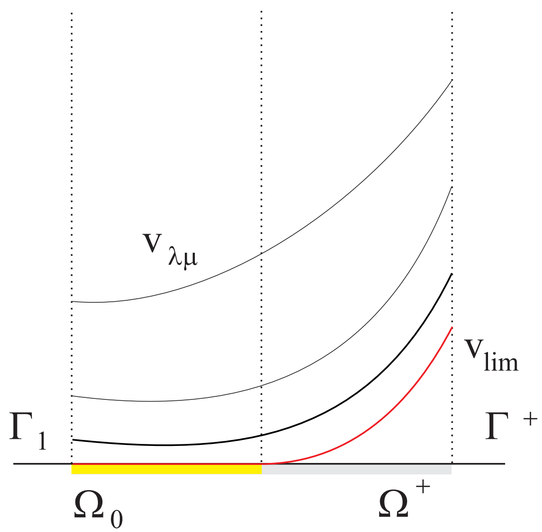
$$C_1 d^\sigma \leq a(x) \leq C_2 d^\sigma \qquad\qquad d = dist(x, \Gamma_2),$$

entonces $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) \to (u,v)$ en $C^{1,\gamma}(\Omega^+)$, (u,v) solución de:

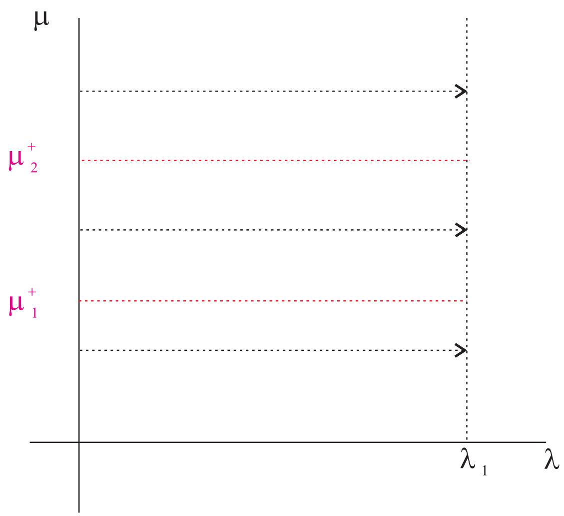
$$\begin{cases} \Delta u = a u^p v^q \quad x \in \Omega^+, & u = \infty \quad x \in \Gamma_2 \quad \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda_1 u \quad x \in \Gamma^+ \\ \Delta v = b u^r v^s \quad x \in \Omega^+, & v = 0 \quad x \in \Gamma_2 \quad \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \mu v \quad x \in \Gamma^+. \end{cases}$$



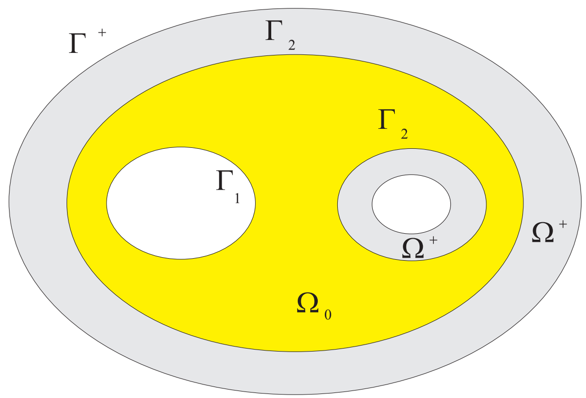
∞
u_{lim}
$u_{\lambda\mu}$
Γ_1
Γ^+
Ω_0
Ω^+



$v_{\lambda\mu}$
v_{lim}
Γ_1
Γ^+
Ω_0
Ω^+



μ
μ_2^+
μ_1^+
λ_1
λ



Γ^+
Γ_2
Γ_2
Γ_1
Ω^+
Ω^+
Ω_0

3.4. *Comportamiento* $\lambda, \mu \to \infty$. Consideramos $a = 1$, $b = 1$

$$\begin{cases} \Delta u = u^p v^q & x \in \Omega \qquad \partial u/\partial \nu = \lambda u \qquad x \in \partial\Omega \\ \Delta v = u^r v^s & x \in \Omega \qquad \partial v/\partial \nu = \mu v \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

• J. García-M., J. Rossi (2004): condiciones de tipo blow-up.

1) Para $\boxed{r < (p-1)/2, q < (s-1)/2}$, $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) \to (u_\infty, v_\infty)$, $\lambda, \mu \to \infty$, (u_∞, v_∞) la solución de

$$\begin{cases} \Delta u = u^p v^q & x \in \Omega \qquad u_{|\partial\Omega} = \infty \\ \Delta v = u^r v^s & x \in \Omega \qquad v_{|\partial\Omega} = \infty. \end{cases}$$

2) $\boxed{r < p-1, q < s-1}$, $\lim_{\lambda,\mu\to\infty}(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) = (u_\infty, v_\infty)$ si:

$$C_1\lambda \le \mu \le C_2\lambda \qquad (C_1, C_2 > 0,\ \lambda \ge \lambda_0).$$

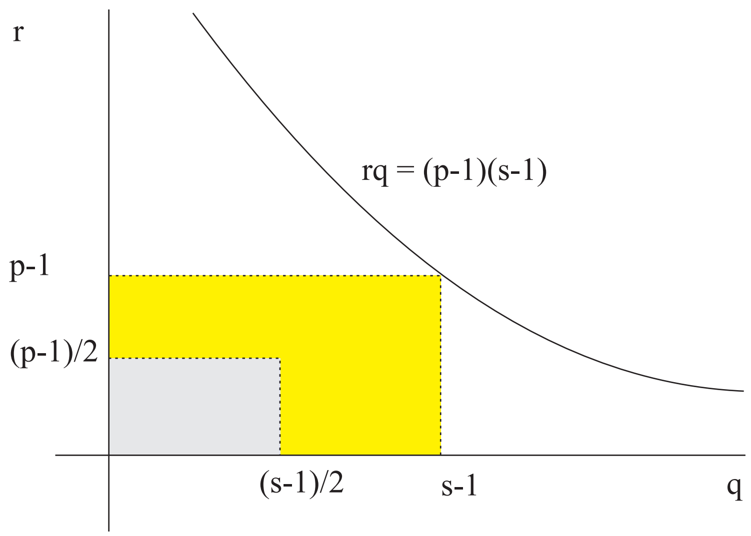
3) $\boxed{(p-1)/2 < r \le p-1}$, Ω radialmente simétrico, si:

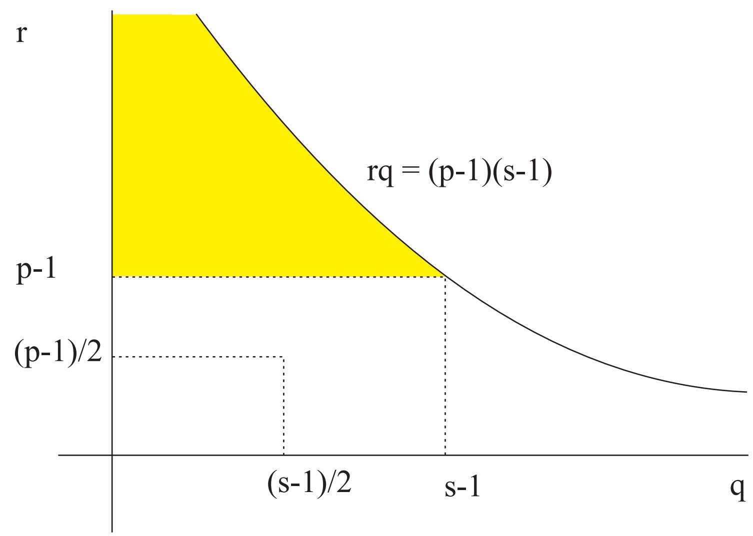
$$\mu = C\lambda^\theta \qquad C > 0,\ 0 < \theta < \frac{2r}{p-1} - 1,$$

entonces $\lim_{\lambda,\mu\to\infty}(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) = (\infty, 0)$.

4) $\boxed{r > p-1}$, $\lim_{\lambda,\mu\to\infty}(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) = (\infty, 0)$ si:

$$\mu \le C\lambda \qquad (C > 0,\ \lambda \ge \lambda_0).$$


r
rq = (p-1)(s-1)
p-1
(p-1)/2
(s-1)/2
s-1
q


r
rq = (p-1)(s-1)
p-1
(p-1)/2
(s-1)/2
s-1
q

4. Algunos problemas singulares.

4.1. Condición de flujo. Se considera:

$$\begin{cases} \Delta u = b(x)u^s & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \mu u & x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u = b(x)u^s & x \in \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = \infty, \end{cases}$$

donde $b \in C(\Omega)$, $b > 0$,

$$b(x) \leq Cd(x)^{-\tau} \qquad \tau < 1.$$

Existe una única $u_\mu \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $u_\mu \to u_\infty$ cuando $\mu \to \infty$.

4.2. Problema mixto flujo-blow-up. Se trata de:

$$\begin{cases} \Delta u = a(x)u^p & x \in \Omega \\ u = \infty & x \in \Gamma_2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u & x \in \Gamma_1, \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado regular, Γ_1, Γ_2 cerradas, disjuntas, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. $a = a(x)$ continua en $\Omega \cup \Gamma_1$ cumple ($d = dist(x, \Gamma_2)$):

$$C_1 d^{-\tau} \leq a(x) \leq C_2 d^{-\tau} \qquad \tau < 2.$$

El problema admite una única solución u que cumple:

$$D_1 d^{-\gamma} \leq u(x) \leq D_2 d^{-\gamma} \qquad \gamma = \frac{2-\tau}{p-1}.$$

• M. Chuaqui, C. Cortázar, M. Elgueta, J. García-M. (2004)

4.3. Problema mixto Dirichlet singular. Para $\mu > \mu_1$

$$\begin{cases} \Delta u = b(x)u^s & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \Gamma_2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \mu u & x \in \Gamma_1, \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado regular, Γ_1, Γ_2 como antes, b continua en $\Omega \cup \Gamma_1$ es singular en Γ_2 con un orden arbitrario:

$$C_1 d^{-\tau} \le b(x) \le C_2 d^{-\tau} \qquad d = dist(x, \Gamma_2),$$

admite una solución positiva fuerte. Para $\tau \neq s+1$ es única y

$$D_1 d^{\theta} \le b(x) \le D_2 d^{\theta} \qquad \theta = \text{máx}\{1, \frac{\tau-2}{s-1}\}.$$