

Standing waves for some linear and nonlinearly coupled nonlinear Schrödinger equations

Eduardo Colorado

Universidad de Granada

San José-Níjar, Almería, Sept. 2007

Sistemas de ecuaciones no lineales de tipo Schrödinger.

- Sistemas con acoplamiento lineal.

$$(S_L) \equiv \begin{cases} -\Delta u + u = u^3 + \lambda v, & u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ -\Delta v + v = v^3 + \lambda u, & v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

- Sistemas con acoplamiento no lineal.

$$(S_{NL}) \equiv \begin{cases} -\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^3 + \beta u v^2, & u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ -\Delta v + \lambda_2 v = \mu_2 v^3 + \beta u^2 v, & v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

- Aplicaciones en Óptica.

Sistemas de ecuaciones no lineales de tipo Schrödinger.

[AA] N. Akhmediev, A. Ankiewicz. *“Solitons, nonlinear pulses and beams”*.
Chapman & Hall, London, 1997.

[AC1] A. Ambrosetti, E. C. *Bound and Ground States of Coupled Nonlinear Schrödinger Equations*.
C. R. Math. Acad. Sci. Paris (2006).

[AC2] A. Ambrosetti, E. C. *Standing Waves of Some Coupled Nonlinear Schrödinger Equations*.
J. Lond. Math. Soc. (2007).

[ACR] A. Ambrosetti, E. C., D. Ruiz *Multi-bump solitons to linearly coupled systems of Nonlinear Schrödinger equations*.
Calc. Var. Partial Differential Equations (2007).

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Problema

$$(S_{NL}) \equiv \begin{cases} -\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 & = \mu_1 u_1^3 + \beta u_2^2 u_1, & u_1 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ -\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 & = \mu_2 u_2^3 + \beta u_1^2 u_2, & u_2 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

donde $N = 2, 3$, $\lambda_j, \mu_j > 0$, $j = 1, 2$, y $\beta \in \mathbb{R}$.

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Problema

$$(S_{NL}) \equiv \begin{cases} -\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 & = \mu_1 u_1^3 + \beta u_2^2 u_1, & u_1 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ -\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 & = \mu_2 u_2^3 + \beta u_1^2 u_2, & u_2 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

donde $N = 2, 3$, $\lambda_j, \mu_j > 0$, $j = 1, 2$, y $\beta \in \mathbb{R}$.

Significado Físico: Óptica no lineal.

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Problema

$$(S_{NL}) \equiv \begin{cases} -\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 &= \mu_1 u_1^3 + \beta u_2^2 u_1, & u_1 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ -\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 &= \mu_2 u_2^3 + \beta u_1^2 u_2, & u_2 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

donde $N = 2, 3$, $\lambda_j, \mu_j > 0$, $j = 1, 2$, y $\beta \in \mathbb{R}$.

Significado Físico: Óptica no lineal.

Si $\mathbf{E}(x, z) \equiv$ denota la envoltura compleja de un campo eléctrico, los rayos de luz planos y estacionarios propagándose en la dirección del eje z se describen por una ecuación no lineal de tipo Schrödinger (NLS):

$$i \mathbf{E}_z + \mathbf{E}_{xx} + \kappa |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} = 0.$$

Si \mathbf{E} es la suma de dos ondas polarizadas a izq.-derecha, $a_1 E_1 - a_2 E_2$ llegamos al sistema:

$$\begin{cases} i (E_1)_z + (E_1)_{xx} + (a_1^2 |E_1|^2 + a_2^2 |E_2|^2) E_1 &= 0, \\ i (E_2)_z + (E_2)_{xx} + (a_1^2 |E_1|^2 + a_2^2 |E_2|^2) E_2 &= 0. \end{cases}$$

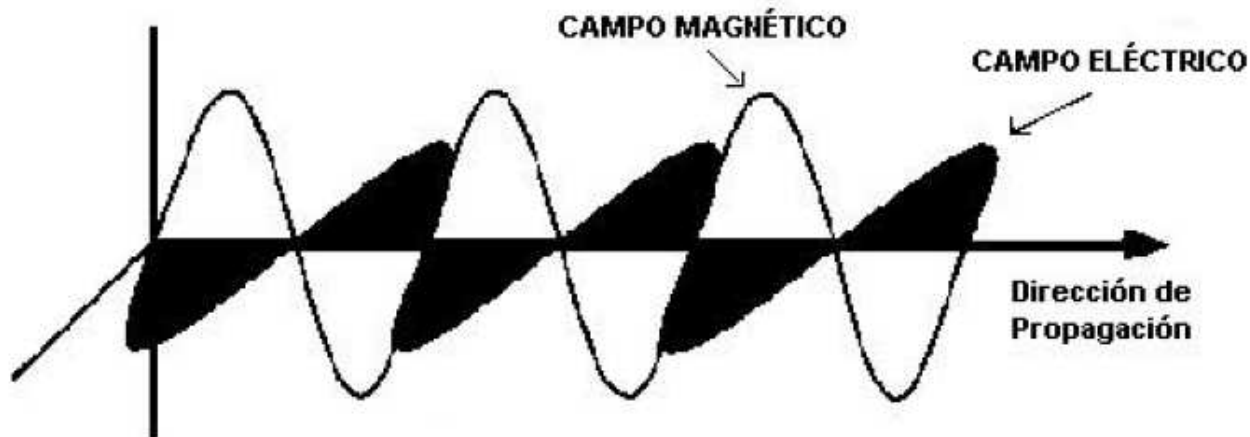
Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Problema

$$(S_{NL}) \equiv \begin{cases} -\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 & = \mu_1 u_1^3 + \beta u_2^2 u_1, & u_1 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ -\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 & = \mu_2 u_2^3 + \beta u_1^2 u_2, & u_2 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

donde $N = 2, 3$, $\lambda_j, \mu_j > 0$, $j = 1, 2$, y $\beta \in \mathbb{R}$.

Significado Físico: Óptica no lineal.



Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Problema

$$(S_{NL}) \equiv \begin{cases} -\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 &= \mu_1 u_1^3 + \beta u_2^2 u_1, & u_1 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ -\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 &= \mu_2 u_2^3 + \beta u_1^2 u_2, & u_2 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

donde $N = 2, 3$, $\lambda_j, \mu_j > 0$, $j = 1, 2$, y $\beta \in \mathbb{R}$.

Significado Físico: Óptica no lineal.

$$\begin{cases} i(E_1)_z + (E_1)_{xx} + (a_1^2|E_1|^2 + a_2^2|E_2|^2)E_1 &= 0, \\ i(E_2)_z + (E_2)_{xx} + (a_1^2|E_1|^2 + a_2^2|E_2|^2)E_2 &= 0. \end{cases}$$

Buscando ondas estacionarias, $E_j(z, x) = e^{i\lambda_j z} u_j(x)$, con $\lambda_j > 0$ y $u_j(x)$ soluciones reales del sistema

$$\begin{cases} -(u_1)_{xx} + \lambda_1 u_1 &= (a_1^2 u_1^2 + a_2^2 u_2^2) u_1, \\ -(u_2)_{xx} + \lambda_2 u_2 &= (a_1^2 u_1^2 + a_2^2 u_2^2) u_2. \end{cases}$$

Si notamos β el coeficiente de acoplamiento y $\mu_j > 0$ los coeficientes de u_j^3 :

$$\begin{cases} -u_1'' + \lambda_1 u_1 &= \mu_1 u_1^3 + \beta u_2^2 u_1, \\ -u_2'' + \lambda_2 u_2 &= \mu_2 u_2^3 + \beta u_1^2 u_2. \end{cases}$$

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

- Restricción natural (variedad de Nehari \mathcal{M}).

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

- Restricción natural (variedad de Nehari \mathcal{M}).
- Índice de Morse de soluciones semi-triviales.

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

- Restricción natural (variedad de Nehari \mathcal{M}).
- Índice de Morse de soluciones semi-triviales.
- Técnicas variacionales (teoría de puntos críticos).
- Resultados de existencia:
 1. Existencia de Bound States.
 2. Existencia de Ground States.

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

- Restricción natural (variedad de Nehari \mathcal{M}).
- Índice de Morse de soluciones semi-triviales.
- Técnicas variacionales (teoría de puntos críticos).
- Resultados de existencia:
 1. Existencia de Bound States.
 2. Existencia de Ground States.

[LW] T-C. Lin & J. Wei. Comm. Math. Phys. 2005.

[MMP] L. Maia, E. Montefusco & B. Pellacci. Jour. Diff. Eqns. 2007.

[B] B. Sirakov. Comm. Math. Phys. 2007.

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Soluciones semitriviales:

$$\mathbf{u}_1 = (U_1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, U_2),$$

donde por un lado, U es la solución positiva y radial de $-\Delta u + u = u^3$ y

$U_j(x) = \sqrt{\frac{\lambda_j}{\mu_j}} U(\sqrt{\lambda_j} x)$, es la solución de $-\Delta u + \lambda_j u = \mu_j u^3$.

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Notación:

$$F(\mathbf{u}) = F(u_1, u_2) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_1^4 + \mu_2 u_2^4) dx,$$

$$G(\mathbf{u}) = G(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_1^2 u_2^2 dx,$$

$$\Phi(\mathbf{u}) = \Phi(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 - F(\mathbf{u}) - \beta G(\mathbf{u}).$$

$$\Psi(\mathbf{u}) = (\Phi'(\mathbf{u})|\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2 - 4F(\mathbf{u}) - 4G(\mathbf{u}).$$

Sean $E = W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $\mathbb{E} = E \times E$, $H = W_{radial}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y $\mathbb{H} = H \times H$.

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Notación:

$$F(\mathbf{u}) = F(u_1, u_2) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_1^4 + \mu_2 u_2^4) dx,$$

$$G(\mathbf{u}) = G(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_1^2 u_2^2 dx,$$

$$\Phi(\mathbf{u}) = \Phi(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 - F(\mathbf{u}) - \beta G(\mathbf{u}).$$

$$\Psi(\mathbf{u}) = (\Phi'(\mathbf{u})|\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2 - 4F(\mathbf{u}) - 4G(\mathbf{u}).$$

Sean $E = W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $\mathbb{E} = E \times E$, $H = W_{radial}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y $\mathbb{H} = H \times H$.

Definición. Decimos que $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ es un “bound state” no trivial de (S_{NL}) si \mathbf{u} es un punto crítico no trivial de Φ . Un “ground state” de (S_{NL}) es un “bound state” $\mathbf{u} > 0$ tal que su energía es minimal entre todos los “bound states” no triviales, es decir,

$$\Phi(\mathbf{u}) = \min\{\Phi(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{E} \setminus \{0\}, \Phi'(\mathbf{v}) = 0\}.$$

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Variedad de Nehari:

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{H} \setminus \{0\} : \Psi(\mathbf{u}) = (\Phi'(\mathbf{u})|\mathbf{u}) = 0\}.$$

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Variedad de Nehari:

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{H} \setminus \{0\} : \Psi(\mathbf{u}) = (\Phi'(\mathbf{u})|\mathbf{u}) = 0\}.$$

Restricción Natural

Proposición. $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$ es punto crítico no trivial de Φ si y solo si $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ y es punto crítico Φ restringido a \mathcal{M} .

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Variedad de Nehari:

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{H} \setminus \{0\} : \Psi(\mathbf{u}) = (\Phi'(\mathbf{u})|\mathbf{u}) = 0\}.$$

Restricción Natural

Proposición. $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$ es punto crítico no trivial de Φ si y solo si $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ y es punto crítico Φ restringido a \mathcal{M} .

- \mathcal{M} es una restricción natural.
- Una ventaja: la variedad de Nehari es tal que Φ es acotado inferiormente sobre \mathcal{M} .

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Variedad de Nehari:

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{H} \setminus \{0\} : \Psi(\mathbf{u}) = (\Phi'(\mathbf{u})|\mathbf{u}) = 0\}.$$

Restricción Natural

Proposición. $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$ es punto crítico no trivial de Φ si y solo si $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ y es punto crítico Φ restringido a \mathcal{M} .

- \mathcal{M} es una restricción natural.
- Una ventaja: la variedad de Nehari es tal que Φ es acotado inferiormente sobre \mathcal{M} .

Lema. Φ satisface la condición de Palais-Smale sobre \mathcal{M} .

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Variedad de Nehari:

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{H} \setminus \{0\} : \Psi(\mathbf{u}) = (\Phi'(\mathbf{u})|\mathbf{u}) = 0\}.$$

Restricción Natural

Proposición. $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$ es punto crítico no trivial de Φ si y solo si $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ y es punto crítico Φ restringido a \mathcal{M} .

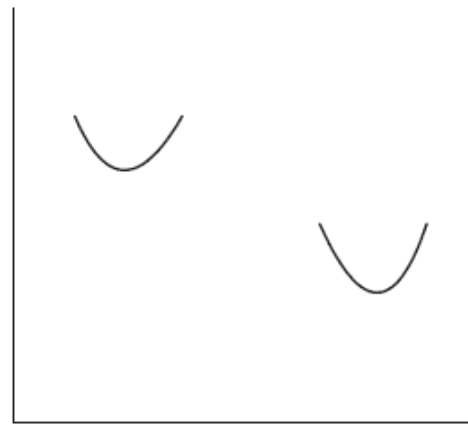
- \mathcal{M} es una restricción natural.
- Una ventaja: la variedad de Nehari es tal que Φ es acotado inferiormente sobre \mathcal{M} .

Lema. Φ satisface la condición de Palais-Smale sobre \mathcal{M} .

Observación. Proposición + Lema $\Rightarrow \min\{\Phi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathcal{M}\}$ se alcanza, obteniendo una solución del sistema S_{NL} .

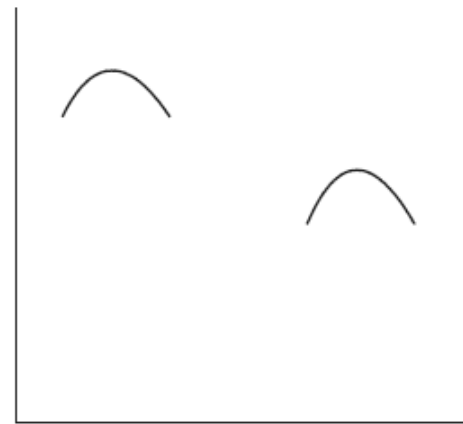
Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Evaluación del índice de Morse de u_j



$$\beta < \Lambda$$

mínimos sobre \mathcal{M}

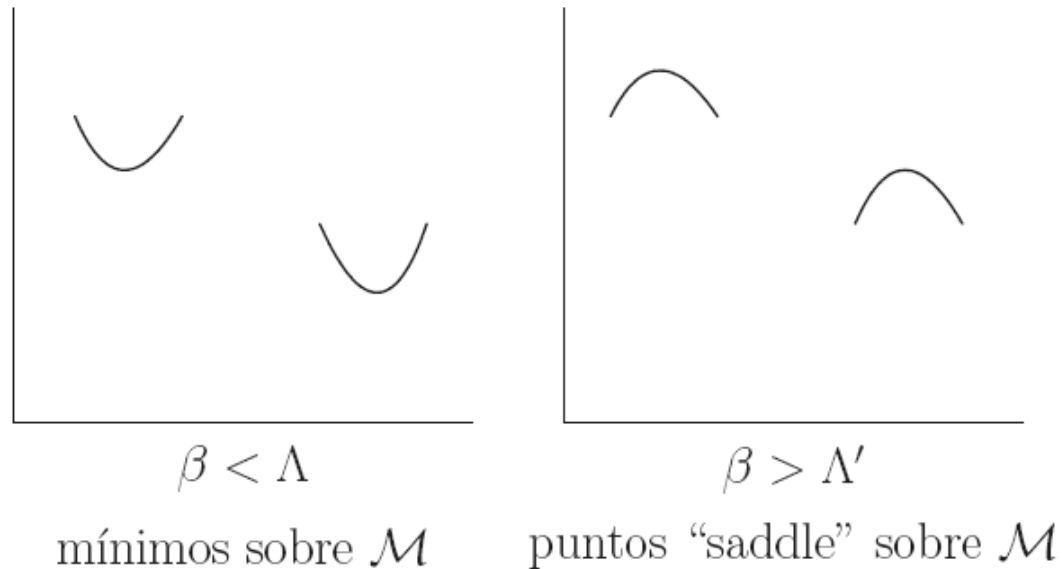


$$\beta > \Lambda'$$

puntos "saddle" sobre \mathcal{M}

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

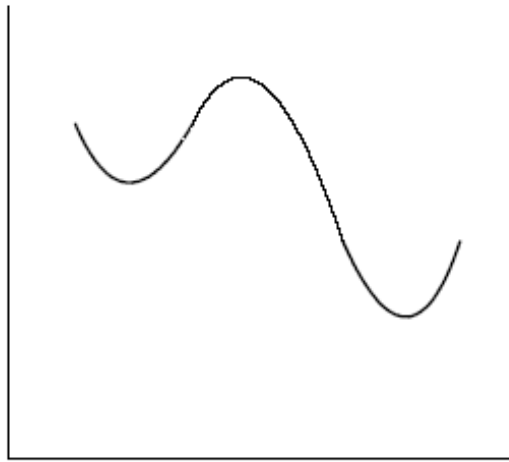
Evaluación del índice de Morse de u_j



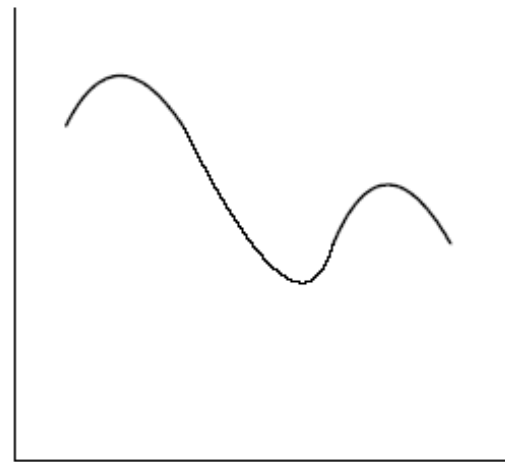
Teorema (Ambrosetti-C.)

- (i) $\forall \beta < \Lambda$, u_j , $j = 1, 2$, son puntos de mínimo local del funcional Φ sobre \mathcal{M} .
- (ii) Si $\beta > \Lambda'$ entonces u_j son puntos "saddle" de Φ sobre \mathcal{M} . En particular, $\inf_{\mathcal{M}} \Phi < \min\{\Phi(u_1), \Phi(u_2)\}$.

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

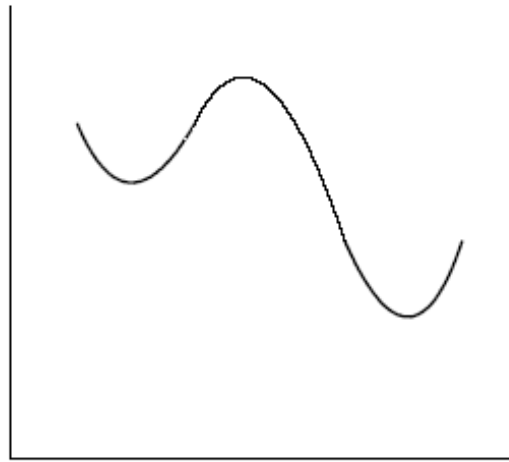


$\beta < \Lambda$
mountain pass sobre \mathcal{M}



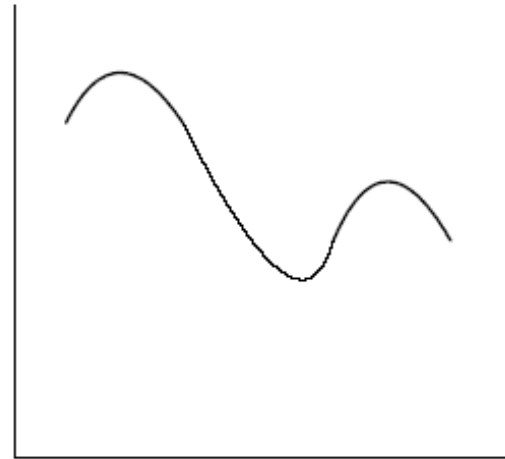
$\beta > \Lambda'$
mínimo sobre \mathcal{M}

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.



$$\beta < \Lambda$$

mountain pass sobre \mathcal{M}



$$\beta > \Lambda'$$

mínimo sobre \mathcal{M}

Lema (Ambrosetti-C.)

- (i) Si $\beta < \Lambda$, entonces Φ tiene un punto crítico \mathbf{u}^* de tipo “mountain-pass” sobre \mathcal{M} . Se verifica $\Phi(\mathbf{u}^*) > \max\{\Phi(\mathbf{u}_1), \Phi(\mathbf{u}_2)\}$. Además, si $\beta \in (0, \Lambda)$, entonces $\mathbf{u}^* > 0$.
- (ii) Si $\beta > \Lambda'$ entonces Φ tiene un mínimo global $\tilde{\mathbf{u}}$ sobre \mathcal{M} , $\Phi(\tilde{\mathbf{u}}) < \min\{\Phi(\mathbf{u}_1), \Phi(\mathbf{u}_2)\}$.

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Teorema (Ambrosetti-C.)

1. Si $\beta < \Lambda$, entonces (S_{NL}) tiene un “bound state” radial u^* tal que $u^* \neq u_j$, $j = 1, 2$.
Además, si $\beta \in (0, \Lambda)$, entonces $u^* > 0$.
2. Si $\beta > \Lambda'$ entonces (S_{NL}) tiene un “ground state” radial $\tilde{u} > 0$.

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Teorema (Ambrosetti-C.)

1. Si $\beta < \Lambda$, entonces (S_{NL}) tiene un “bound state” radial \mathbf{u}^* tal que $\mathbf{u}^* \neq \mathbf{u}_j$, $j = 1, 2$.
Además, si $\beta \in (0, \Lambda)$, entonces $\mathbf{u}^* > 0$.
2. Si $\beta > \Lambda'$ entonces (S_{NL}) tiene un “ground state” radial $\tilde{\mathbf{u}} > 0$.

Ideas de la prueba: 1. Por el Lema (i), $\mathbf{u}^* \in \mathcal{M}$ es punto crítico de tipo “mountain-pass”.
Para probar que $\mathbf{u}^* > 0$ cuando $\beta \in (0, \Lambda)$ introducimos el funcional:

$$\Phi^+(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 - \mathbf{F}(\mathbf{u}^+) - \beta \mathbf{G}(\mathbf{u}^+),$$

donde $\mathbf{u}^+ = (u_1^+, u_2^+)$ y $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Trabajando en la Variedad de Nehari correspondiente, el principio del máximo prueba $\mathbf{u}^* > 0$.

Sistemas (NLS): Acoplamiento no lineal.

Teorema (Ambrosetti-C.)

1. Si $\beta < \Lambda$, entonces (S_{NL}) tiene un “bound state” radial \mathbf{u}^* tal que $\mathbf{u}^* \neq \mathbf{u}_j$, $j = 1, 2$. Además, si $\beta \in (0, \Lambda)$, entonces $\mathbf{u}^* > 0$.
2. Si $\beta > \Lambda'$ entonces (S_{NL}) tiene un “ground state” radial $\tilde{\mathbf{u}} > 0$.

Ideas de la prueba: 1. Por el Lema (i), $\mathbf{u}^* \in \mathcal{M}$ es punto crítico de tipo “mountain-pass”. Para probar que $\mathbf{u}^* > 0$ cuando $\beta \in (0, \Lambda)$ introducimos el funcional:

$$\Phi^+(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 - \mathbf{F}(\mathbf{u}^+) - \beta \mathbf{G}(\mathbf{u}^+),$$

donde $\mathbf{u}^+ = (u_1^+, u_2^+)$ y $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Trabajando en la Variedad de Nehari correspondiente, el principio del máximo prueba $\mathbf{u}^* > 0$.

2. De nuevo por el Lema (ii) obtenemos un punto crítico $\tilde{\mathbf{u}}$ de Φ , el mínimo de Φ restringido a \mathcal{M} .

Para probar que es un “ground state”, se utiliza la Simetrización de Schwarz junto a un argumento de contradicción.

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

$$(S_L) \equiv \begin{cases} -\Delta u_1 + u_1 & = & u_1^3 + \beta u_2, & u_1 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ -\Delta u_2 + u_2 & = & u_2^3 + \beta u_1, & u_2 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

Motivados por:

[AA] N. Akhmediev, A. Ankiewicz, *Novel soliton states and bifurcation phenomena in nonlinear fiber couplers.* Phys. Rev. Lett. 1993.

La propagación de pulsos ópticos en una fibra no lineal “dual-core” puede describirse en términos de dos ecuaciones no lineales de tipo Schrödinger (NLSE's). El sistema está dado por:

$$\begin{cases} i\phi_z + \phi_{xx} + |\phi|^2\phi + K\psi & = 0, \\ i\psi_z + \psi_{xx} + |\psi|^2\psi + K\phi & = 0, \end{cases}$$

donde $\phi(x, z)$ y $\psi(x, z)$ son funciones complejas y K es un coeficiente normalizado de acoplamiento entre los dos núcleos.

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

Motivados por:

[AA] N. Akhmediev, A. Ankiewicz, *Novel soliton states and bifurcation phenomena in nonlinear fiber couplers.* Phys. Rev. Lett. 1993.

La propagación de pulsos ópticos en una fibra no lineal “dual-core” puede describirse en términos de dos ecuaciones no lineales de tipo Schrödinger (NLSE's). El sistema está dado por:

$$\begin{cases} i\phi_z + \phi_{xx} + |\phi|^2\phi + K\psi & = 0, \\ i\psi_z + \psi_{xx} + |\psi|^2\psi + K\phi & = 0, \end{cases}$$

donde $\phi(x, z)$ y $\psi(x, z)$ son funciones complejas y K es un coeficiente normalizado de acoplamiento entre los dos núcleos.

Las soluciones “pulse-like” ($\frac{d|\phi|}{dz} = \frac{d|\psi|}{dz} = 0$) estacionarias pueden representarse en la forma:

$$\phi(x, z) = \hat{u}_1(x)e^{i\omega z}, \quad \psi(x, z) = \hat{u}_2(x)e^{i\omega z},$$

donde $\hat{u}_i, i = 1, 2$ son funciones reales, $\omega > 0$.

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

Motivados por:

[AA] N. Akhmediev, A. Ankiewicz, *Novel soliton states and bifurcation phenomena in nonlinear fiber couplers.* Phys. Rev. Lett. 1993.

La propagación de pulsos ópticos en una fibra no lineal “dual-core” puede describirse en términos de dos ecuaciones no lineales de tipo Schrödinger (NLSE’s). El sistema está dado por:

$$\begin{cases} i\phi_z + \phi_{xx} + |\phi|^2\phi + K\psi & = 0, \\ i\psi_z + \psi_{xx} + |\psi|^2\psi + K\phi & = 0, \end{cases}$$

donde $\phi(x, z)$ y $\psi(x, z)$ son funciones complejas y K es un coeficiente normalizado de acoplamiento entre los dos núcleos.

Las soluciones “pulse-like” ($\frac{d|\phi|}{dz} = \frac{d|\psi|}{dz} = 0$) estacionarias pueden representarse en la forma:

$$\phi(x, z) = \hat{u}_1(x)e^{i\omega z}, \quad \psi(x, z) = \hat{u}_2(x)e^{i\omega z},$$

donde $\hat{u}_i, i = 1, 2$ son funciones reales, $\omega > 0$. Tomando $\beta = K/\omega$ y $u_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\hat{u}_i\left(\frac{x}{\sqrt{\omega}}\right)$, $i = 1, 2$, resulta

$$\begin{cases} -u_1'' + u_1 & = u_1^3 + \beta u_2, \\ -u_2'' + u_2 & = u_2^3 + \beta u_1, \end{cases}$$

que adopta la forma unidimensional correspondiente al sistema inicial (S_L).

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

Dado el sistema

$$\begin{cases} -u_1'' + u_1 &= u_1^3 + \beta u_2, \\ -u_2'' + u_2 &= u_2^3 + \beta u_1, \end{cases}$$

buscamos la existencia de **“bound states”**, es decir, soluciones (u, v) , con $u, v \in W^{1,2}(\mathbb{R})$.

Sea

$$U_\alpha(x) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\cosh(\sqrt{\alpha}x)}$$

la solución par y positiva de $-u'' + \alpha u = u^3$, $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$.

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

Dado el sistema

$$\begin{cases} -u_1'' + u_1 &= u_1^3 + \beta u_2, \\ -u_2'' + u_2 &= u_2^3 + \beta u_1, \end{cases}$$

buscamos la existencia de “**bound states**”, es decir, soluciones (u, v) , con $u, v \in W^{1,2}(\mathbb{R})$.

Sea

$$U_\alpha(x) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\cosh(\sqrt{\alpha}x)}$$

la solución par y positiva de $-u'' + \alpha u = u^3$, $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$.

• Para $\beta = 0$: $(0, 0)$, $(\pm U_1, 0)$, $(0, \pm U_1)$.

• Para $\beta > 0$, en **[AA]** se dan dos familias de soluciones:

$(U_{1-\beta}, U_{1-\beta})$, $(-U_{1-\beta}, -U_{1-\beta})$ para $0 \leq \beta \leq 1$, (estados simétricos),

$(U_{1+\beta}, -U_{1+\beta})$, $(-U_{1+\beta}, U_{1+\beta})$ para $0 \leq \beta$, (estados antisimétricos).

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

Dado el sistema

$$\begin{cases} -u_1'' + u_1 &= u_1^3 + \beta u_2, \\ -u_2'' + u_2 &= u_2^3 + \beta u_1, \end{cases}$$

buscamos la existencia de “**bound states**”, es decir, soluciones (u, v) , con $u, v \in W^{1,2}(\mathbb{R})$.

Sea

$$U_\alpha(x) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\cosh(\sqrt{\alpha}x)}$$

la solución par y positiva de $-u'' + \alpha u = u^3$, $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$.

• Para $\beta = 0$: $(0, 0)$, $(\pm U_1, 0)$, $(0, \pm U_1)$.

• Para $\beta > 0$, en **[AA]** se dan dos familias de soluciones:

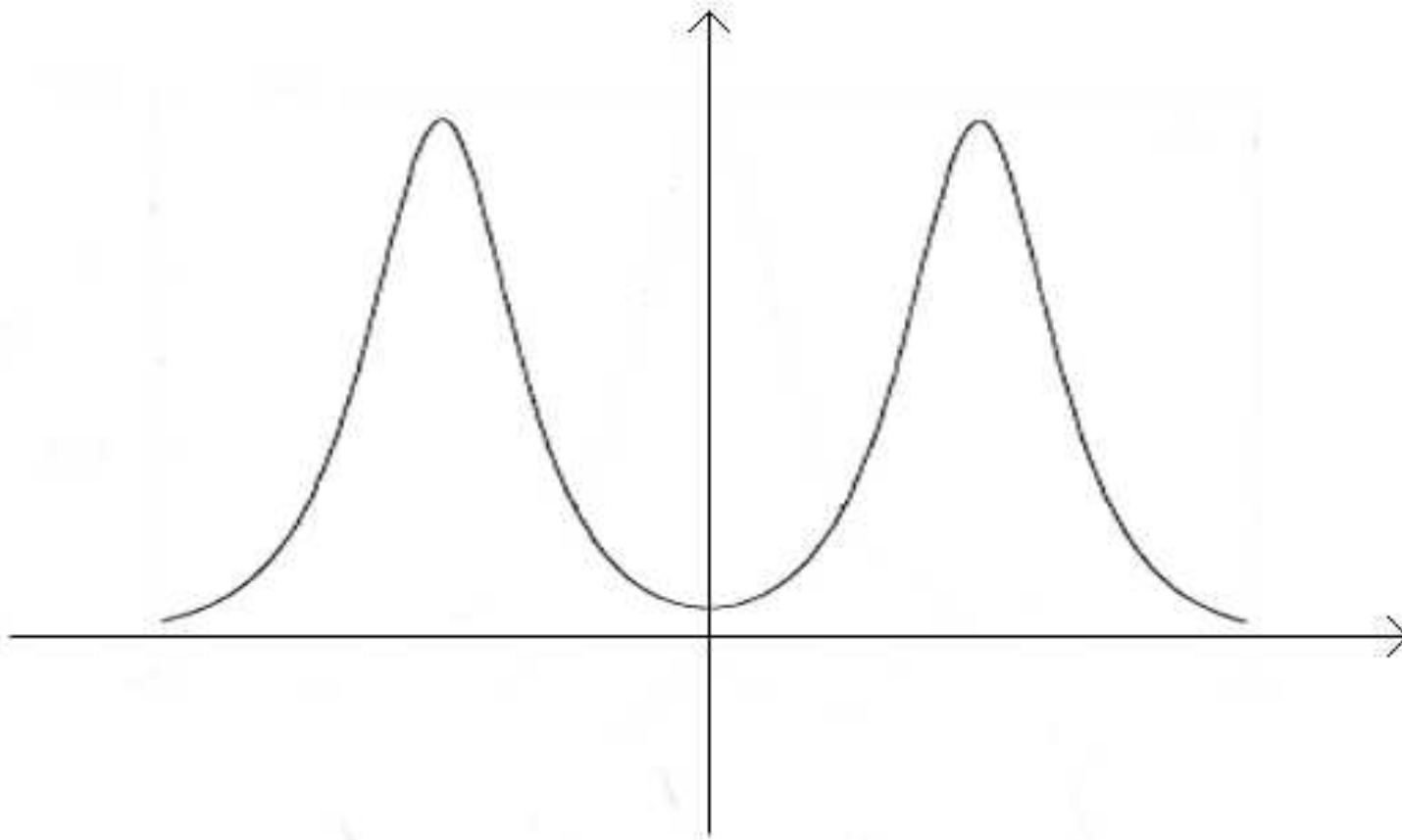
$(U_{1-\beta}, U_{1-\beta})$, $(-U_{1-\beta}, -U_{1-\beta})$ para $0 \leq \beta \leq 1$, (estados simétricos),

$(U_{1+\beta}, -U_{1+\beta})$, $(-U_{1+\beta}, U_{1+\beta})$ para $0 \leq \beta$, (estados antisimétricos).

Demostramos existencia de nuevas soluciones para $\beta = \varepsilon > 0$ pequeño.

Además, una de sus componentes es un “multi-bump”.

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.



Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

- Estamos interesados en las propiedades del sistema (S_L) que no posee una simple ecuación NLS.

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

- Estamos interesados en las propiedades del sistema (S_L) que no posee una simple ecuación NLS.
- La existencia de soluciones “multi-bump” (en una ecuación) requiere la presencia de un potencial adecuado dependiente de x que rompa la invarianza simétrica de la ecuación NLS. Por ejemplo, en ecuaciones del tipo

$$-\varepsilon^2 \Delta u + u + V(x)u = u^3,$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, bajo la hipótesis que V tenga varios puntos críticos, los picos de la solución convergen a los puntos críticos de V .

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

- Estamos interesados en las propiedades del sistema (S_L) que no posee una simple ecuación NLS.
- La existencia de soluciones “multi-bump” (en una ecuación) requiere la presencia de un potencial adecuado dependiente de x que rompa la invarianza simétrica de la ecuación NLS. Por ejemplo, en ecuaciones del tipo

$$-\varepsilon^2 \Delta u + u + V(x)u = u^3,$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, bajo la hipótesis que V tenga varios puntos críticos, los picos de la solución convergen a los puntos críticos de V .

- En sistemas vemos que esto no es necesario, a pesar de tener un sistema autónomo.

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

- Estamos interesados en las propiedades del sistema (S_L) que no posee una simple ecuación NLS.
- La existencia de soluciones “multi-bump” (en una ecuación) requiere la presencia de un potencial adecuado dependiente de x que rompa la invarianza simétrica de la ecuación NLS. Por ejemplo, en ecuaciones del tipo

$$-\varepsilon^2 \Delta u + u + V(x)u = u^3,$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, bajo la hipótesis que V tenga varios puntos críticos, los picos de la solución convergen a los puntos críticos de V .

- En sistemas vemos que esto no es necesario, a pesar de tener un sistema autónomo.
- En concreto, para $\beta = \varepsilon$ pequeño, encontramos nuevas soluciones, con una componente “multibump”.

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

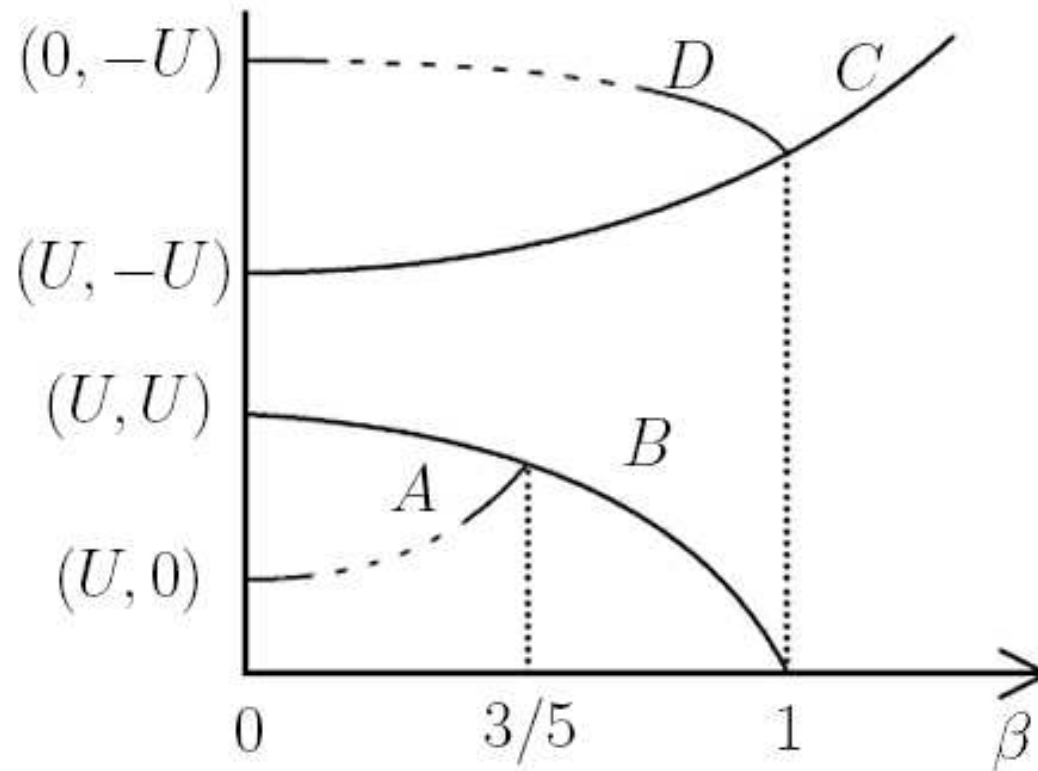
- Estamos interesados en las propiedades del sistema (S_L) que no posee una simple ecuación NLS.
- La existencia de soluciones “multi-bump” (en una ecuación) requiere la presencia de un potencial adecuado dependiente de x que rompa la invarianza simétrica de la ecuación NLS. Por ejemplo, en ecuaciones del tipo

$$-\varepsilon^2 \Delta u + u + V(x)u = u^3,$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, bajo la hipótesis que V tenga varios puntos críticos, los picos de la solución convergen a los puntos críticos de V .

- En sistemas vemos que esto no es necesario, a pesar de tener un sistema autónomo.
- En concreto, para $\beta = \varepsilon$ pequeño, encontramos nuevas soluciones, con una componente “multibump”.
- Este hecho fue estudiado numéricamente en [AA] (en dimensión $N = 1$), pero faltaba una prueba analítica, que la hemos dado para $N = 1$, además hemos estudiado los casos de dimensiones $N = 2, 3$.

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.



A = Soluciones Asimétricas.

B = Soluciones Simétricas.

C = Soluciones Antisimétricas.

D = Soluciones "Multi-bump".

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

Dado el sistema ($N = 1$)

$$(P_1) \equiv \begin{cases} -u_1'' + u_1 & = u_1^3 + \varepsilon u_2, \\ -u_2'' + u_2 & = u_2^3 + \varepsilon u_1, \end{cases}$$

Teorema 1 [Ambrosetti-C.-Ruiz] Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, el sistema (P_1) tiene una solución $(u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}) \in W^{1,2}(\mathbb{R}) \times W^{1,2}(\mathbb{R})$ tal que $u_{1,\varepsilon} \sim U(x + \xi_\varepsilon) + U(x - \xi_\varepsilon)$, $u_{2,\varepsilon} \sim -U(x)$, donde

$$\frac{\log(1/\varepsilon)}{1 + \delta} < \xi_\varepsilon < \log(1/\varepsilon),$$

para un $\delta \in (0, 1)$ fijado.

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

Dado el sistema ($N = 1$)

$$(P_1) \equiv \begin{cases} -u_1'' + u_1 & = u_1^3 + \varepsilon u_2, \\ -u_2'' + u_2 & = u_2^3 + \varepsilon u_1, \end{cases}$$

Teorema 1 [Ambrosetti-C.-Ruiz] Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, el sistema (P_1) tiene una solución $(u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}) \in W^{1,2}(\mathbb{R}) \times W^{1,2}(\mathbb{R})$ tal que $u_{1,\varepsilon} \sim U(x + \xi_\varepsilon) + U(x - \xi_\varepsilon)$, $u_{2,\varepsilon} \sim -U(x)$, donde

$$\frac{\log(1/\varepsilon)}{1 + \delta} < \xi_\varepsilon < \log(1/\varepsilon),$$

para un $\delta \in (0, 1)$ fijado.

- Para $\varepsilon = 1$ coinciden con los estados antisimétricos.

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

Dado el sistema ($N = 1$)

$$(P_1) \equiv \begin{cases} -u_1'' + u_1 & = u_1^3 + \varepsilon u_2, \\ -u_2'' + u_2 & = u_2^3 + \varepsilon u_1, \end{cases}$$

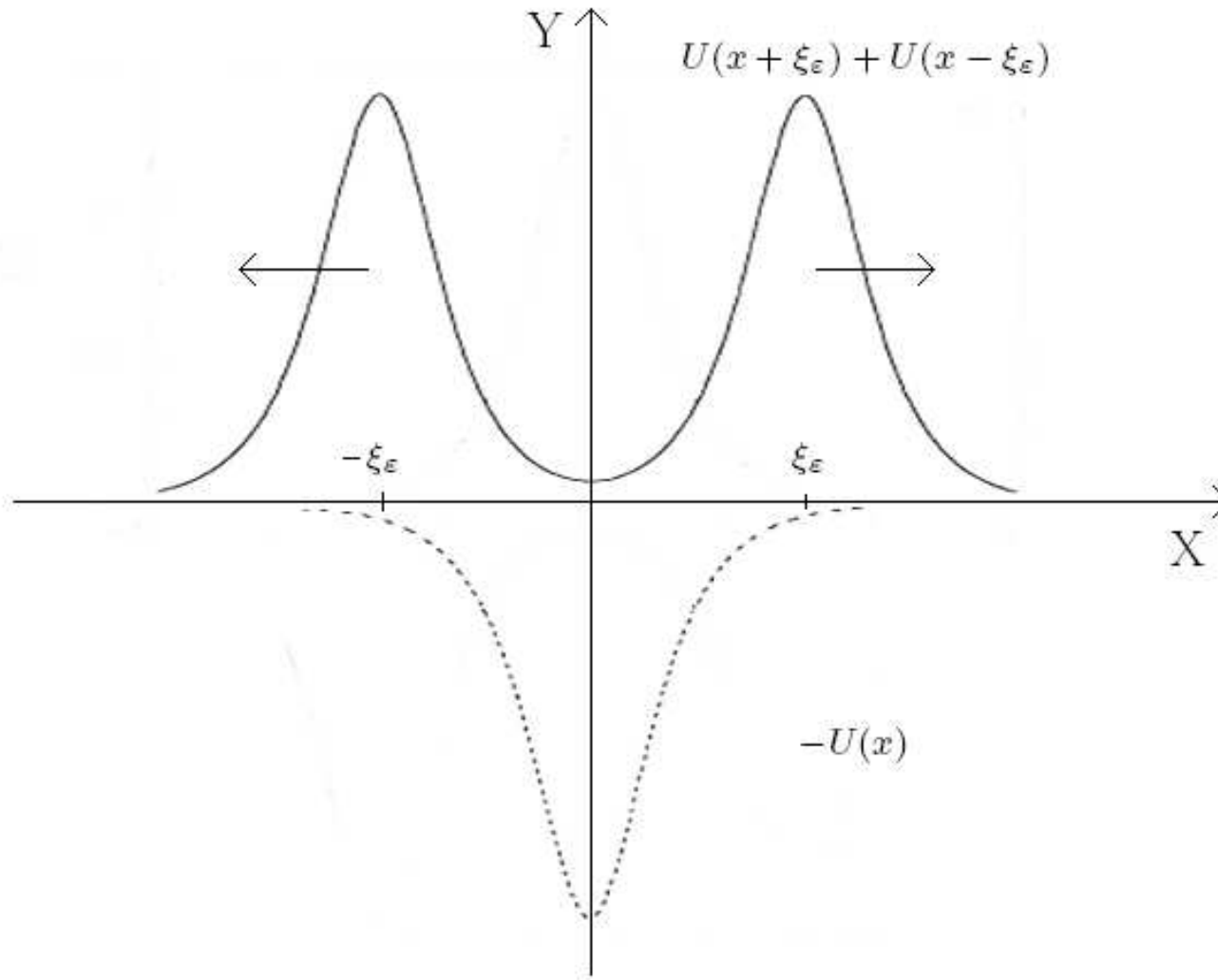
Teorema 1 [Ambrosetti-C.-Ruiz] Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, el sistema (P_1) tiene una solución $(u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}) \in W^{1,2}(\mathbb{R}) \times W^{1,2}(\mathbb{R})$ tal que $u_{1,\varepsilon} \sim U(x + \xi_\varepsilon) + U(x - \xi_\varepsilon)$, $u_{2,\varepsilon} \sim -U(x)$, donde

$$\frac{\log(1/\varepsilon)}{1 + \delta} < \xi_\varepsilon < \log(1/\varepsilon),$$

para un $\delta \in (0, 1)$ fijado.

- Para $\varepsilon = 1$ coinciden con los estados antisimétricos.
- Sospechamos que estas soluciones $(u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon})$ se pueden continuar para $0 < \varepsilon < 1$.

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.



Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

Dado el sistema ($N = 2, 3$)

$$(S_L) \equiv \begin{cases} -\Delta u_1 + u_1 & = & u_1^3 + \varepsilon u_2, \\ -\Delta u_2 + u_2 & = & u_2^3 + \varepsilon u_1, \end{cases}$$

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

Dado el sistema ($N = 2, 3$)

$$(S_L) \equiv \begin{cases} -\Delta u_1 + u_1 & = u_1^3 + \varepsilon u_2, \\ -\Delta u_2 + u_2 & = u_2^3 + \varepsilon u_1, \end{cases}$$

Además de la existencia de soluciones anteriores con $N = 1$, probamos la existencia de nuevas soluciones con más máximos.

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

Dado el sistema ($N = 2, 3$)

$$(S_L) \equiv \begin{cases} -\Delta u_1 + u_1 & = u_1^3 + \varepsilon u_2, \\ -\Delta u_2 + u_2 & = u_2^3 + \varepsilon u_1, \end{cases}$$

Sea \mathcal{P} un politopo regular (polígono regular en \mathbb{R}^2 ó sólido platónico en \mathbb{R}^3).

Sean p_1, \dots, p_m los vértices de \mathcal{P} , con lados s y radio r .

$$(I) \quad s = \min\{|p_i - p_j| : i \neq j\} > r = |p_1|.$$

Lo verifican los polígonos regulares de menos de 6 lados, resp. los sólidos platónicos salvo el dodecaedro.

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

Dado el sistema ($N = 2, 3$)

$$(S_L) \equiv \begin{cases} -\Delta u_1 + u_1 & = u_1^3 + \varepsilon u_2, \\ -\Delta u_2 + u_2 & = u_2^3 + \varepsilon u_1, \end{cases}$$

Sea \mathcal{P} un politopo regular (polígono regular en \mathbb{R}^2 ó sólido platónico en \mathbb{R}^3).

Sean p_1, \dots, p_m los vértices de \mathcal{P} , con lados s y radio r .

$$(I) \quad s = \min\{|p_i - p_j| : i \neq j\} > r = |p_1|.$$

Lo verifican los polígonos regulares de menos de 6 lados, resp. los sólidos platónicos salvo el dodecaedro.

POLIEDRO REGULAR	HEXAEDRO REGULAR	TETRAEDRO REGULAR	DODECAEDRO REGULAR	ICOSAEDRO REGULAR	OCTAEDRO REGULAR
MODELO					
CARAS	6 cuadrados	4 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros	8 triángulos equiláteros
RADIO DE LA ESFERA CIRCUNSCRIPTA	$\frac{\sqrt{3}}{2} s$	$\frac{\sqrt{6}}{4} s$	$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} s$	$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} s$	$\frac{\sqrt{2}}{2} s$

Sistemas (NLS): Acoplamiento lineal.

Dado el sistema ($N = 2, 3$)

$$(S_L) \equiv \begin{cases} -\Delta u_1 + u_1 & = u_1^3 + \varepsilon u_2, \\ -\Delta u_2 + u_2 & = u_2^3 + \varepsilon u_1, \end{cases}$$

Sea \mathcal{P} un politopo regular (polígono regular en \mathbb{R}^2 ó sólido platónico en \mathbb{R}^3).

Sean p_1, \dots, p_m los vértices de \mathcal{P} , con lados s y radio r .

$$(I) \quad s = \min\{|p_i - p_j| : i \neq j\} > r = |p_1|.$$

Lo verifican los polígonos regulares de menos de 6 lados, resp. los sólidos platónicos salvo el dodecaedro.

Teorema 2 [Ambrosetti-C.-Ruiz] Sea \mathcal{P} un politopo regular verificando (I). Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, el sistema (S_L) tiene una solución

$(u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}) \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_{2,\varepsilon} \sim -U(x)$, mientras que $u_{1,\varepsilon}$ es un multibump con máximos localizados cerca de ξp_i , con ξ verificando:

$$\xi \in T_\varepsilon := \left(\frac{\log(1/\varepsilon)}{s - r + \delta}, \frac{\log(1/\varepsilon)}{s - r} \right), \quad (0.5)$$

donde $\delta \in (0, 1)$ es una constante fijada. Ahora U denota la única solución radial y positiva en $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ de $-\Delta u + u = u^3$.

Método perturbativo

- Dado un funcional $\Phi_\varepsilon \in C^2(H, \mathbb{R})$ (H un espacio de Hilbert), suponemos que existe una variedad regular $Z \subset H$ tal que

$$\|\Phi'_\varepsilon(z)\| \rightarrow 0, \text{ para } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{uniformemente en } z \in Z. \quad (\text{A1})$$

Método perturbativo

- Dado un funcional $\Phi_\varepsilon \in C^2(H, \mathbb{R})$ (H un espacio de Hilbert), suponemos que existe una variedad regular $Z \subset H$ tal que

$$\|\Phi'_\varepsilon(z)\| \rightarrow 0, \text{ para } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{uniformemente en } z \in Z. \quad (\text{A1})$$

- La idea consiste en probar que para $0 < \varepsilon \ll 1$, Φ_ε tiene un punto crítico cerca de algún punto $z^* \in Z$.

Método perturbativo

- Dado un funcional $\Phi_\varepsilon \in C^2(H, \mathbb{R})$ (H un espacio de Hilbert), suponemos que existe una variedad regular $Z \subset H$ tal que

$$\|\Phi'_\varepsilon(z)\| \rightarrow 0, \text{ para } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{uniformemente en } z \in Z. \quad (\text{A1})$$

- Para ello, consideramos el espacio tangente a Z en z , $T_z Z$. Denotamos el complemento ortogonal: $W = (T_z Z)^\perp$. Entonces buscamos puntos críticos de la forma $z + w$, donde $w \in W$.

Método perturbativo

- Dado un funcional $\Phi_\varepsilon \in C^2(H, \mathbb{R})$ (H un espacio de Hilbert), suponemos que existe una variedad regular $Z \subset H$ tal que

$$\|\Phi'_\varepsilon(z)\| \rightarrow 0, \text{ para } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{uniformemente en } z \in Z. \quad (\text{A1})$$

- Ecuación auxiliar:

$$P\Phi'_\varepsilon(z + w) = 0, \quad (\text{Aux})$$

donde P denota la proyección sobre W .

Método perturbativo

- Dado un funcional $\Phi_\varepsilon \in C^2(H, \mathbb{R})$ (H un espacio de Hilbert), suponemos que existe una variedad regular $Z \subset H$ tal que

$$\|\Phi'_\varepsilon(z)\| \rightarrow 0, \text{ para } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{uniformemente en } z \in Z. \quad (\text{A1})$$

- Ecuación auxiliar:

$$P\Phi'_\varepsilon(z + w) = 0, \quad (\text{Aux})$$

donde P denota la proyección sobre W .

- Para resolver la ecuación auxiliar, suponemos que existe $\gamma > 0$ tal que $P\Phi''_\varepsilon(z)$ es invertible $\forall z \in Z$, con

$$\|[P\Phi''_\varepsilon(z)]^{-1}\| \leq \gamma, \quad \text{uniformemente en } z \in Z. \quad (\text{A2})$$

Método perturbativo

- Dado un funcional $\Phi_\varepsilon \in C^2(H, \mathbb{R})$ (H un espacio de Hilbert), suponemos que existe una variedad regular $Z \subset H$ tal que

$$\|\Phi'_\varepsilon(z)\| \rightarrow 0, \text{ para } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{uniformemente en } z \in Z. \quad (\text{A1})$$

- Ecuación auxiliar:

$$P\Phi'_\varepsilon(z + w) = 0, \quad (\text{Aux})$$

donde P denota la proyección sobre W .

- Para resolver la ecuación auxiliar, suponemos que existe $\gamma > 0$ tal que $P\Phi''_\varepsilon(z)$ es invertible $\forall z \in Z$, con

$$\|[P\Phi''_\varepsilon(z)]^{-1}\| \leq \gamma, \quad \text{uniformemente en } z \in Z. \quad (\text{A2})$$

- Denotando $B_{\varepsilon, \gamma} = \{w \in W : \|w\| \leq 2\gamma\|\Phi'_\varepsilon(z)\|\}$ y suponiendo que

$$\|\Phi''_\varepsilon(z + w) - \Phi''_\varepsilon(z)\| \rightarrow 0, \text{ para } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ uniformemente en } z \in Z \text{ con } w \in B_{\varepsilon, \gamma}, \quad (\text{A3})$$

Método perturbativo

- Definimos la aplicación $S_\varepsilon : B_{\varepsilon,\gamma} \rightarrow W$ por:

$$S_\varepsilon(w) = w - [P\Phi''_\varepsilon(z)]^{-1}(P\Phi'_\varepsilon(z + w)).$$

Cada punto fijo de S_ε nos da una solución de la ecuación (Aux): $P\Phi'_\varepsilon(z + w) = 0$.

Método perturbativo

- Definimos la aplicación $S_\varepsilon : B_{\varepsilon,\gamma} \rightarrow W$ por:

$$S_\varepsilon(w) = w - [P\Phi''_\varepsilon(z)]^{-1}(P\Phi'_\varepsilon(z + w)).$$

Cada punto fijo de S_ε nos da una solución de la ecuación (Aux): $P\Phi'_\varepsilon(z + w) = 0$.

Lema 1. Para $0 < \varepsilon \ll 1$, la aplicación S_ε verifica $S_\varepsilon(B_{\varepsilon,\gamma}) \subset B_{\varepsilon,\gamma}$ y es una contracción. Como consecuencia, $\exists! w_{\varepsilon,z} \in B_{\varepsilon,\gamma}$ tal que $S_\varepsilon(w_{\varepsilon,z}) = w_{\varepsilon,z}$.

Método perturbativo

- Definimos la aplicación $S_\varepsilon : B_{\varepsilon,\gamma} \rightarrow W$ por:

$$S_\varepsilon(w) = w - [P\Phi''_\varepsilon(z)]^{-1}(P\Phi'_\varepsilon(z + w)).$$

Cada punto fijo de S_ε nos da una solución de la ecuación (Aux): $P\Phi'_\varepsilon(z + w) = 0$.

Lema 1. Para $0 < \varepsilon \ll 1$, la aplicación S_ε verifica $S_\varepsilon(B_{\varepsilon,\gamma}) \subset B_{\varepsilon,\gamma}$ y es una contracción. Como consecuencia, $\exists! w_{\varepsilon,z} \in B_{\varepsilon,\gamma}$ tal que $S_\varepsilon(w_{\varepsilon,z}) = w_{\varepsilon,z}$.

- En particular, $\|w_{\varepsilon,z}\| \leq 2\gamma\|\Phi'_\varepsilon(z)\| \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Finalmente, se considera el funcional reducido

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon(z) = \Phi_\varepsilon(z + w_{\varepsilon,z}), \quad z \in Z.$$

Método perturbativo

- Definimos la aplicación $S_\varepsilon : B_{\varepsilon,\gamma} \rightarrow W$ por:

$$S_\varepsilon(w) = w - [P\Phi_\varepsilon''(z)]^{-1}(P\Phi_\varepsilon'(z + w)).$$

Cada punto fijo de S_ε nos da una solución de la ecuación (Aux): $P\Phi_\varepsilon'(z + w) = 0$.

Lema 1. Para $0 < \varepsilon \ll 1$, la aplicación S_ε verifica $S_\varepsilon(B_{\varepsilon,\gamma}) \subset B_{\varepsilon,\gamma}$ y es una contracción. Como consecuencia, $\exists! w_{\varepsilon,z} \in B_{\varepsilon,\gamma}$ tal que $S_\varepsilon(w_{\varepsilon,z}) = w_{\varepsilon,z}$.

- En particular, $\|w_{\varepsilon,z}\| \leq 2\gamma\|\Phi_\varepsilon'(z)\| \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Finalmente, se considera el funcional reducido

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon(z) = \Phi_\varepsilon(z + w_{\varepsilon,z}), \quad z \in Z.$$

Lema 2. Si $z \in Z$ es un punto crítico de $\tilde{\Phi}_\varepsilon$, entonces $u_\varepsilon := z + w_{\varepsilon,z}$ es un punto crítico de Φ_ε .

Método perturbativo

- Definimos la aplicación $S_\varepsilon : B_{\varepsilon,\gamma} \rightarrow W$ por:

$$S_\varepsilon(w) = w - [P\Phi''_\varepsilon(z)]^{-1}(P\Phi'_\varepsilon(z+w)).$$

Cada punto fijo de S_ε nos da una solución de la ecuación (Aux): $P\Phi'_\varepsilon(z+w) = 0$.

Lema 1. Para $0 < \varepsilon \ll 1$, la aplicación S_ε verifica $S_\varepsilon(B_{\varepsilon,\gamma}) \subset B_{\varepsilon,\gamma}$ y es una contracción. Como consecuencia, $\exists! w_{\varepsilon,z} \in B_{\varepsilon,\gamma}$ tal que $S_\varepsilon(w_{\varepsilon,z}) = w_{\varepsilon,z}$.

- En particular, $\|w_{\varepsilon,z}\| \leq 2\gamma\|\Phi'_\varepsilon(z)\| \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Finalmente, se considera el funcional reducido

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon(z) = \Phi_\varepsilon(z + w_{\varepsilon,z}), \quad z \in Z.$$

Lema 2. Si $z \in Z$ es un punto crítico de $\tilde{\Phi}_\varepsilon$, entonces $u_\varepsilon := z + w_{\varepsilon,z}$ es un punto crítico de Φ_ε .

[AM] A. Ambrosetti, A. Malchiodi: Perturbation methods and semilinear elliptic problems on \mathbb{R}^N . Prog. Math. **240**, (2005).

Sistema EDO's

Buscamos soluciones de

$$\begin{cases} -u_1'' + u_1 - u_1^3 = \varepsilon u_2, \\ -u_2'' + u_2 - u_2^3 = \varepsilon u_1. \end{cases} \quad (0.6)$$

en el espacio de Hilbert $\mathbb{H} = X \times X$, con $X = \{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}) : u(x) = u(-x)\}$ con la norma

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} (|u'|^2 + u^2) dx.$$

Sistema EDO's

Buscamos soluciones de

$$\begin{cases} -u_1'' + u_1 - u_1^3 = \varepsilon u_2, \\ -u_2'' + u_2 - u_2^3 = \varepsilon u_1. \end{cases} \quad (0.7)$$

en el espacio de Hilbert $\mathbb{H} = X \times X$, con $X = \{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}) : u(x) = u(-x)\}$ con la norma

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} (|u'|^2 + u^2) dx.$$

Estas soluciones son puntos críticos del funcional

$$\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{u}) = I(u_1) + I(u_2) - \varepsilon \Psi(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2),$$

donde

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} u^4 dx, \quad \Psi(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}} u_1 u_2 dx.$$

Sistema EDO's

Comenzamos definiendo la variedad $Z \subset \mathbb{H}$:

$$Z = \{\mathbf{z}_\xi := (U(x + \xi) + U(x - \xi), -U) \mid \xi \in T_\varepsilon\},$$

con

$$T_\varepsilon = \left(\frac{\log(1/\varepsilon)}{1 + \delta}, \log(1/\varepsilon) \right),$$

siendo $0 < \delta < 1$ una constante fija.

Sistema EDO's

Comenzamos definiendo la variedad $Z \subset \mathbb{H}$:

$$Z = \{\mathbf{z}_\xi := (U(x + \xi) + U(x - \xi), -U) \mid \xi \in T_\varepsilon\},$$

con

$$T_\varepsilon = \left(\frac{\log(1/\varepsilon)}{1 + \delta}, \log(1/\varepsilon) \right),$$

siendo $0 < \delta < 1$ una constante fija.

Notamos

$$U_\xi(x) = U(x + \xi), \quad U_{-\xi}(x) = U(x - \xi), \quad z_\xi(x) = U_\xi(x) + U_{-\xi}(x).$$

En particular, los elementos de Z tienen la forma

$$\mathbf{z}_\xi := (z_\xi, -U) \quad \text{con} \quad \xi \in T_\varepsilon.$$

Sistema EDO's. Estudio de la ecuación auxiliar.

Lema 3. (i) Se verifica (A1). Precisamente, existen $\varepsilon_0 > 0$ y $C > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$:

$$\|\Phi'_\varepsilon(\mathbf{z}_\xi)\| \leq C\varepsilon, \quad \forall \xi \in T_\varepsilon.$$

(ii) $\exists \gamma > 0$ tal que para $0 < \varepsilon \ll 1$ y $\xi \in T_\varepsilon$, $P\Phi''_\varepsilon(\mathbf{z}_\xi)$ es uniformemente invertible y verifica $\|[P\Phi''_\varepsilon(\mathbf{z}_\xi)]^{-1}\| \leq \gamma$. Es decir, se verifica (A2).

Sistema EDO's. Estudio de la ecuación auxiliar.

Lema 3. (i) Se verifica (A1). Precisamente, existen $\varepsilon_0 > 0$ y $C > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$:

$$\|\Phi'_\varepsilon(\mathbf{z}_\xi)\| \leq C\varepsilon, \quad \forall \xi \in T_\varepsilon.$$

(ii) $\exists \gamma > 0$ tal que para $0 < \varepsilon \ll 1$ y $\xi \in T_\varepsilon$, $P\Phi''_\varepsilon(\mathbf{z}_\xi)$ es uniformemente invertible y verifica $\|[P\Phi''_\varepsilon(\mathbf{z}_\xi)]^{-1}\| \leq \gamma$. Es decir, se verifica (A2).

Lema 4. Existen constantes $C, \underline{C}, \overline{C} > 0$ tales que

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon(\xi) = C - a_{\varepsilon,\xi} e^{-2\xi} + b_{\varepsilon,\xi} \varepsilon \xi e^{-\xi} + O(\varepsilon^2), \quad \forall \xi \in T_\varepsilon, \varepsilon \sim 0,$$

donde $a_{\varepsilon,\xi}, b_{\varepsilon,\xi} \in [\underline{C}, \overline{C}]$.

Sistema EDO's. Estudio de la ecuación auxiliar.

Lema 3. (i) Se verifica (A1). Precisamente, existen $\varepsilon_0 > 0$ y $C > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$:

$$\|\Phi'_\varepsilon(\mathbf{z}_\xi)\| \leq C\varepsilon, \quad \forall \xi \in T_\varepsilon.$$

(ii) $\exists \gamma > 0$ tal que para $0 < \varepsilon \ll 1$ y $\xi \in T_\varepsilon$, $P\Phi''_\varepsilon(\mathbf{z}_\xi)$ es uniformemente invertible y verifica $\|[P\Phi''_\varepsilon(\mathbf{z}_\xi)]^{-1}\| \leq \gamma$. Es decir, se verifica (A2).

Lema 4. Existen constantes $C, \underline{C}, \overline{C} > 0$ tales que

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon(\xi) = C - a_{\varepsilon,\xi} e^{-2\xi} + b_{\varepsilon,\xi} \varepsilon \xi e^{-\xi} + O(\varepsilon^2), \quad \forall \xi \in T_\varepsilon, \varepsilon \sim 0,$$

donde $a_{\varepsilon,\xi}, b_{\varepsilon,\xi} \in [\underline{C}, \overline{C}]$.

Ideas demostración: Como la norma de Φ''_ε está uniformemente acotada,

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{z} + \mathbf{w}) = \Phi_\varepsilon(\mathbf{z}_\xi) + \Phi'_\varepsilon(\mathbf{z})[w_{\varepsilon,\xi}] + O(\|w_{\varepsilon,\xi}\|^2).$$

Sistema EDO's. Estudio de la ecuación auxiliar.

Lema 3. (i) Se verifica (A1). Precisamente, existen $\varepsilon_0 > 0$ y $C > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$:

$$\|\Phi'_\varepsilon(\mathbf{z}_\xi)\| \leq C\varepsilon, \quad \forall \xi \in T_\varepsilon.$$

(ii) $\exists \gamma > 0$ tal que para $0 < \varepsilon \ll 1$ y $\xi \in T_\varepsilon$, $P\Phi''_\varepsilon(\mathbf{z}_\xi)$ es uniformemente invertible y verifica $\|[P\Phi''_\varepsilon(\mathbf{z}_\xi)]^{-1}\| \leq \gamma$. Es decir, se verifica (A2).

Lema 4. Existen constantes $C, \underline{C}, \overline{C} > 0$ tales que

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon(\xi) = C - a_{\varepsilon,\xi} e^{-2\xi} + b_{\varepsilon,\xi} \varepsilon \xi e^{-\xi} + O(\varepsilon^2), \quad \forall \xi \in T_\varepsilon, \varepsilon \sim 0,$$

donde $a_{\varepsilon,\xi}, b_{\varepsilon,\xi} \in [\underline{C}, \overline{C}]$.

Ideas demostración: Como la norma de Φ''_ε está uniformemente acotada,

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{z} + \mathbf{w}) = \Phi_\varepsilon(\mathbf{z}_\xi) + \Phi'_\varepsilon(\mathbf{z})[w_{\varepsilon,\xi}] + O(\|w_{\varepsilon,\xi}\|^2).$$

Después se desprecian los términos de orden ε^2 utilizando el decaimiento y propiedades de $U, U_\xi, U_{-\xi}$ y sus productos.

Sistema EDO's. Invertibilidad de $\Phi''_\varepsilon(z_\xi)$, (A2).

Lema 5. Para ε suficientemente pequeño, el funcional reducido $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ tiene un punto crítico $\xi^*(\varepsilon) \in T_\varepsilon$.

Sistema EDO's. Invertibilidad de $\Phi''_\varepsilon(z_\xi)$, (A2).

Lema 5. Para ε suficientemente pequeño, el funcional reducido $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ tiene un punto crítico $\xi^*(\varepsilon) \in T_\varepsilon$.

Ideas demostración: Sea $f(\xi) = -c_1 e^{-2\xi} + c_2 \varepsilon \xi e^{-\xi}$, $c_1, c_2 > 0$. Un cálculo elemental muestra que f tiene un punto de crítico $\xi^*(\varepsilon) = \xi_\varepsilon$ (un pto. de máximo) verificando

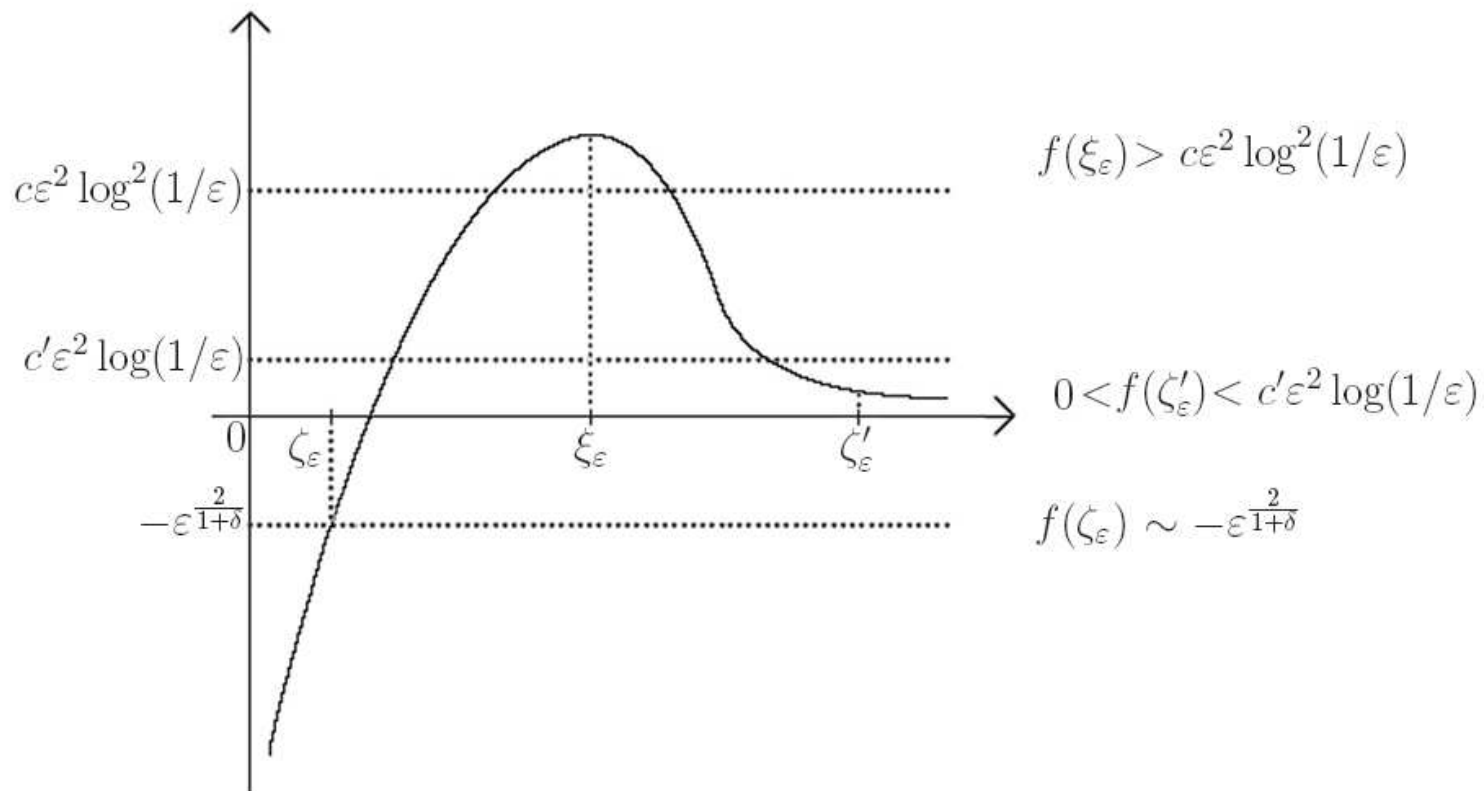
$$\frac{e^{-\xi_\varepsilon}}{\xi_\varepsilon - 1} = \frac{c_2}{2c_1} \varepsilon. \text{ Tomando } \zeta_\varepsilon = -\frac{\log \varepsilon}{1+\delta}, \zeta'_\varepsilon = -\log \varepsilon$$

Sistema EDO's. Invertibilidad de $\Phi''_\varepsilon(z_\xi)$, (A2).

Lema 5. Para ε suficientemente pequeño, el funcional reducido $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ tiene un punto crítico $\xi^*(\varepsilon) \in T_\varepsilon$.

Ideas demostración: Sea $f(\xi) = -c_1 e^{-2\xi} + c_2 \varepsilon \xi e^{-\xi}$, $c_1, c_2 > 0$. Un cálculo elemental muestra que f tiene un punto de crítico $\xi^*(\varepsilon) = \xi_\varepsilon$ (un pto. de máximo) verificando

$$\frac{e^{-\xi_\varepsilon}}{\xi_\varepsilon - 1} = \frac{c_2}{2c_1} \varepsilon. \text{ Tomando } \zeta_\varepsilon = -\frac{\log \varepsilon}{1+\delta}, \zeta'_\varepsilon = -\log \varepsilon$$



Sistema EDP's.

Observaciones:

- Si uno trata de repetir los argumentos precedentes para encontrar soluciones con k “bumps” en una componente y h negativos en la otra, el funcional reducido no tiene puntos críticos.

Sistema EDP's.

Observaciones:

- Si uno trata de repetir los argumentos precedentes para encontrar soluciones con k “bumps” en una componente y h negativos en la otra, el funcional reducido no tiene puntos críticos.
- No solo eso, también fallan los anteriores argumentos en el caso del sistema de EDP's.

Sistema EDP's.

Observaciones:

- Si uno trata de repetir los argumentos precedentes para encontrar soluciones con k “bumps” en una componente y h negativos en la otra, el funcional reducido no tiene puntos críticos.
- No solo eso, también fallan los anteriores argumentos en el caso del sistema de EDP's.
- Para solventar ese problema, la idea consiste en aproximar mejor la variedad inicial, de forma que nos permita obtener un funcional reducido con puntos críticos.

Sistema EDP's.

Observaciones:

- Si uno trata de repetir los argumentos precedentes para encontrar soluciones con k “bumps” en una componente y h negativos en la otra, el funcional reducido no tiene puntos críticos.
- No solo eso, también fallan los anteriores argumentos en el caso del sistema de EDP's.
- Para solventar ese problema, la idea consiste en aproximar mejor la variedad inicial, de forma que nos permita obtener un funcional reducido con puntos críticos.

Concretamente, obtenemos:

$$\begin{aligned}V_\varepsilon &= U + \varepsilon w_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} w_2 + \dots \\v_\varepsilon &= \varepsilon \tilde{w}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \tilde{w}_2 + \dots\end{aligned}$$

donde para calcular $w_k, \tilde{w}_k, k = 1, 2, \dots$, vamos tomando las derivadas de:

$$\begin{cases} -\Delta V_\varepsilon + V_\varepsilon - V_\varepsilon^3 &= \varepsilon v_\varepsilon, \\ -\Delta v_\varepsilon + v_\varepsilon - v_\varepsilon^3 &= \varepsilon V_\varepsilon, \end{cases}$$

y sustituyendo de manera iterativa.

Sistema EDP's.

Si m es el número de vértices del politopo \mathcal{P} , dados $i \in \{1 \dots m\}$, $\varepsilon > 0$ pequeño y $\xi \in T_\varepsilon = \left(\frac{\log(1/\varepsilon)}{s-r+\delta}, \frac{\log(1/\varepsilon)}{s-r} \right)$, definimos:

$$V_i(x) = V_{\varepsilon, \xi}^i(x) = V_\varepsilon(x - \xi p_i), \quad v_i(x) = v_{\varepsilon, \xi}^i(x) = v_\varepsilon(x - \xi p_i),$$

$$z_1 = z_1(\varepsilon, \xi) := V_{\varepsilon, \xi}^1 + \dots + V_{\varepsilon, \xi}^m - v_\varepsilon$$

y

$$z_2 = z_2(\varepsilon, \xi) := v_{\varepsilon, \xi}^1 + \dots + v_{\varepsilon, \xi}^m - V_\varepsilon.$$

Sistema EDP's.

Si m es el número de vértices del politopo \mathcal{P} , dados $i \in \{1 \dots m\}$, $\varepsilon > 0$ pequeño y $\xi \in T_\varepsilon = \left(\frac{\log(1/\varepsilon)}{s-r+\delta}, \frac{\log(1/\varepsilon)}{s-r} \right)$, definimos:

$$V_i(x) = V_{\varepsilon, \xi}^i(x) = V_\varepsilon(x - \xi p_i), \quad v_i(x) = v_{\varepsilon, \xi}^i(x) = v_\varepsilon(x - \xi p_i),$$

$$z_1 = z_1(\varepsilon, \xi) := V_{\varepsilon, \xi}^1 + \dots + V_{\varepsilon, \xi}^m - v_\varepsilon$$

y

$$z_2 = z_2(\varepsilon, \xi) := v_{\varepsilon, \xi}^1 + \dots + v_{\varepsilon, \xi}^m - V_\varepsilon.$$

Con ello definimos la variedad de soluciones aproximadas

$$Z = \{\mathbf{z}_{\varepsilon, \xi} = (z_1(\varepsilon, \xi), z_2(\varepsilon, \xi)) : \xi \in T_\varepsilon\}.$$

Sistema EDP's.

Si m es el número de vértices del politopo \mathcal{P} , dados $i \in \{1 \dots m\}$, $\varepsilon > 0$ pequeño y $\xi \in T_\varepsilon = \left(\frac{\log(1/\varepsilon)}{s-r+\delta}, \frac{\log(1/\varepsilon)}{s-r} \right)$, definimos:

$$V_i(x) = V_{\varepsilon,\xi}^i(x) = V_\varepsilon(x - \xi p_i), \quad v_i(x) = v_{\varepsilon,\xi}^i(x) = v_\varepsilon(x - \xi p_i),$$

$$z_1 = z_1(\varepsilon, \xi) := V_{\varepsilon,\xi}^1 + \dots + V_{\varepsilon,\xi}^m - v_\varepsilon$$

y

$$z_2 = z_2(\varepsilon, \xi) := v_{\varepsilon,\xi}^1 + \dots + v_{\varepsilon,\xi}^m - V_\varepsilon.$$

Con ello definimos la variedad de soluciones aproximadas

$$Z = \{\mathbf{z}_{\varepsilon,\xi} = (z_1(\varepsilon, \xi), z_2(\varepsilon, \xi)) : \xi \in T_\varepsilon\}.$$

El funcional reducido es

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon(\xi) = C_\varepsilon - a_{\varepsilon,\xi} \xi^{\frac{1-N}{2}} e^{-s\xi} + b_{\varepsilon,\xi} \varepsilon \xi^{\frac{3-N}{2}} e^{-r\xi} + o(\varepsilon^{\frac{s}{s-r}}), \quad \forall \xi \in T_\varepsilon, \varepsilon \sim 0,$$

donde C_ε es independiente de ξ y $a_{\varepsilon,\xi}, b_{\varepsilon,\xi} \in [\underline{C}, \overline{C}]$, para $\underline{C}, \overline{C} > 0$.

Sistema EDP's.

Finalmente, las soluciones del **Teorema 2**, $(u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon})$ que bifurcan de puntos de Z tienen el siguiente comportamiento asintótico:

$$u_{1,\varepsilon} \sim z_1(\varepsilon, \xi) = V_{\varepsilon,\xi}^1 + \cdots + V_{\varepsilon,\xi}^m - v_\varepsilon \sim \sum U(\cdot + \xi p_i),$$

$$u_{2,\varepsilon} \sim z_2(\varepsilon, \xi) = v_{\varepsilon,\xi}^1 + \cdots + v_{\varepsilon,\xi}^m - V_\varepsilon \sim -U.$$

