CRECIMIENTO ÓPTIMO DE SOLUCIONES RADIALES ESTABLES DE ECUACIONES SEMILINEALES ELÍPTICAS.

SALVADOR VILLEGAS

Abstract. Estudiamos el comportamiento asintótico de soluciones radiales estables de $-\Delta u = f(u)$ en Ω, donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ y Ω es un dominio (posiblemente no acotado) de $\mathbb{R}^N$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, Cabré y Capella [1] demostraron que cualquier solución radial acotada no constante estable verifica $N > 10$ (una condición de nodegeneración es impuesta si $9 \leq N \leq 10$: para todo $s_0 \in \mathbb{R}$ existen números reales $q \geq 0$ y $a > 0$ (que pueden depender de s_0) tales que $\lim_{s \to s_0} |f'(s)| \, |s - s_0|^{-q} = a \in (0, \infty)$. Esta condición se satisface, por ejemplo, si f es una función analítica no constantemente cero.) En esta charla demostraremos que esta condición de no degeneración no es necesaria para la obtención de este resultado. Además cualquier solución de este tipo verifica $|u(r) - u_\infty| \geq M r^{-N/2+\sqrt{N-1}+2}$ para todo $r \geq 1$, para algún $M > 0$, donde $u_\infty = \lim_{r \to \infty} u(r)$. Incluso es posible demostrar que cualquier solución radial (no necesariamente acotada) estable satisface $|u(r)| \geq M r^{-N/2+\sqrt{N-1}+2}$ si $N \neq 10$, y $|u(r)| \geq M \log(r)$ si $N = 10$; para todo $r \geq r_0$, para ciertos $M, r_0 > 0$. Este resultado es óptimo en cualquier dimensión $N \geq 1$, pero hay una sutil diferencia entre los casos $N \geq 2$ y $N = 1$. En el primer caso existen soluciones radiales estables verificando $\lim\limits_{r \to \infty} u(r)/r^{-N/2+\sqrt{N-1}+2} = 1$ si $N \neq 10$, y $\lim_{r \to \infty} u(r)/\log(r) = 1$ si $N = 10$. En el caso $N = 1$ damos una caracterización de las soluciones pares no constantes estables, de la que se deduce que $\lim_{r \to \infty} |u(r)|/r^{3/2} = +\infty$ para tales funciones. Este exponente es óptimo puesto que, dado $s > 3/2$, es posible encontrar soluciones pares estables satisfaciendo $u(r) = r^s$ para todo $r \geq 1$. De hecho, las técnicas utilizadas en ambos casos son completamente diferentes. Todos estos resultado están contenidos en [3].

Por otra parte, también tratamos el caso en el que Ω es la bola unidad de $\mathbb{R}^N$. Demostramos resultados óptimos sobre el comportamiento cerca del origen de las soluciones radiales no constantes estables. Estos resultados están contenidos en [4] responden y responden en gran medida a algunas cuestiones planteadas en [2].

The author has been supported by the MEC Spanish grants MTM2005-01331 and MTM2006-09282.

References

[1] X. Cabré, A. Capella, *On the stability of radial solutions of semilinear elliptic equations in all of* $\mathbb{R}^n$*,* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338 (2004) 769-774.

[2] X. Cabré, A. Capella, *Regularity of radial minimizers and extremal solutions of semilinear elliptic equations,* J. Funct. Anal. 238 (2006) 709-733.

[3] S. Villegas, *Asymptotic behavior of stable radial solutions of semilinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$*,* J. Math. Pures Appl. (2007).

[4] S. Villegas, *Sharp estimates for semi-stable radial solutions of semilinear elliptic equations,* Preprint.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain.

E-mail address: `svillega@ugr.es`