Caracterización de los conjuntos convexos calibrables en R^N respecto a normas anisotrópicas

V. Caselles, A. Chambolle, S. Moll, M. Novaga

En este trabajo damos una caracterización de los conjuntos calibrables respecto al perímetro anisotrópico en R^N, extendiendo los resultados conocidos para $N = 2$ [3] y para el perímetro euclídeo [4, 2, 1].

El perímetro anisotrópico P_φ en R^N se define como

$$P_\varphi(E) := \int_{\partial E} \varphi^0(\nu^E)\ d\mathcal{H}^{N-1}, \qquad E \subseteq R^N,$$

donde ν^E es la normal unitaria exterior al la frontera ∂E de E y φ^0 (la tensión de superfície) es una norma en R^N.

Sea F un conjunto convexo en R^2. En [3] se prueba la siguiente equivalencia:

(a) F es φ-calibrable, es decir, existe un campo vectorial $\xi \in L^\infty(F, R^2)$, con $(\xi(x)) \leq 1$ c.p.p. en F (donde es la norma dual de φ^0), tal que

$$\begin{aligned} -\xi &= \lambda_F^\varphi := \frac{P_\varphi(F)}{|F|} \quad \text{en } F, \\ \xi \cdot \nu^F &= -\varphi^0(\nu^F) \quad \text{en } \partial F, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\nu^F(x)$ denota la normal exterior unitaria a ∂F en el punto $x \in \partial F$.

(b) F es una solución del problema

$$\min_{X \subseteq F}\ P_\varphi(X) - \lambda_F^\varphi |X|. \tag{2}$$

(c) Se cumple

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \partial F}\ \kappa_F^\varphi(x) \leq \lambda_F^\varphi\,, \tag{3}$$

donde $\kappa_F^\varphi(x)$ denota la curvatura anisotrópica de ∂F en el punto x.

La caracterización de la calibrabilidad de un conjunto convexo en R^2 respecto al perímetro euclídeo fue demostrada por Giusti en [4]. La extensión del resultado anterior para el perímetro eucídeo y $N \geq 3$ ha sido demostrada en [1]. En este trabajo extendemos la caracterización anterior al caso anisotrópico para un conjunto convexo en R^N que satisfazca una condición de regularidad respecto a la anisotropía.

References

[1] F. Alter, V. Caselles, A. Chambolle, A characterization of convex calibrable sets in ^{N}. Math. Ann. **332**, 329-366 (2005).

[2] G. Bellettini, V. Caselles, M. Novaga, The Total Variation Flow in R^N. J. Differential Equations **184**, 475-525 (2002).

[3] G. Bellettini, M. Novaga, M. Paolini, Characterization of facet–breaking for nonsmooth mean curvature flow in the convex case. Interfaces and Free Boundaries **3**, 415-446 (2001).

[4] E. Giusti, On the equation of surfaces of prescribed mean curvature. Existence and uniqueness without boundary conditions. Invent. Math. **46**, 111-137 (1978).