TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

¿Cómo medimos sobre un esfera?

1. Introducción. 6
2. Los orígenes de la Trigonometría Esférica 7
3. Vectores y puntos en 3D 9
   Definición 1 10
   Definición 2 10
   Definición 3 11
3.1. Distancias y ángulos en 3D 11
   Definición 4 11
   Ejemplo 1 11
   Lema 1 12
   Definición 5 12
   Definición 6 12
   Ejemplo 2 13
3.2. Perpendicularidad en 3D 14
   Definición 7 14

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
Página 1 de 53
Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

	Teorema 1	14
	Definición 8	14
	Definición 9	14
	Lema 2	15
	Ejemplo 3	15
3.3.	Producto vectorial en 3D	16
	Definición 10	16
	Lema 3	17
	Definición 11	17
	Ejemplo 4	17
	Ejemplo 5	17
	Ejemplo 6	18
3.4.	Propiedades del producto vectorial	18
3.5.	Producto triple escalar en 3D	19
	Definición 12	19
	Lema 4	19
	Definición 13	20
	Ejemplo 7	20
	Ejemplo 8	20
	Lema 5	21
	Ejemplo 9	21
	Ejemplo 10	21
4.	Coordenadas esféricas	22

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Definición 14 22
Ejemplo 11 22
Definición 15 22
Definición 16 23
Definición 17 24
Lema 6 25
Definición 18 25
Definición 19 25
Ejemplo 12 26
Ejemplo 13 26
Ejemplo 14 26
4.1. Elementos esféricos 27
Definición 20 27
Definición 21 27
Definición 22 27
Ejemplo 15 27
Ejemplo 16 28
4.2. Triángulos esféricos 29
Definición 23 29
Definición 24 29
Ejemplo 17 30
Definición 25 31
4.3. Propiedades de un triángulo esférico 32

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Lema 7 33
Lema 8 34
Definición 26 34
Lema 9 34
Definición 27 34
4.4. Área de un triángulo esférico 35
Definición 28 35
Teorema 2 36
Ejemplo 18 36
Ejemplo 19 37
Ejemplo 20 37
5. Fórmulas trigonométricas 38
Teorema 3 39
Teorema 4 39
Teorema 5 40
Teorema 6 41
5.1. Fórmulas auxiliares de la trigonometría esférica 42
5.2. Triángulos esféricos equiláteros 43
Definición 29 43
Ejemplo 21 44
Ejemplo 22 44
6. Cálculo del azimut directo e inverso entre dos puntos. 45
6.1. Azimut cartográfico 45

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

6.2. Azimut verdadero 46
Ejemplo 23 47
7. Ejercicios. 48
Ejercicio 1 48
Ejercicio 2 48
Ejercicio 3 48
Ejercicio 4 48
Ejercicio 5 48
Ejercicio 6 48
Ejercicio 7 48
Ejercicio 8 48
Ejercicio 9 49
Ejercicio 10 49
Ejercicio 11 49
Ejercicio 12 49
Ejercicio 13 49
8. Test de repaso. 50

Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

1. Introducción.

El planeta en el que vivimos tiene la forma aproximada de una esfera. En una noche despejada, todos los cuerpos, estrellas, Luna y planetas, parecen brillar y moverse sobre la negra superficie de una gran bóveda que nos envuelve.

Los antiguos consideraron que esta bóveda era como una gigantesca esfera, que giraba a lo largo del día y en cuyo centro estaba la Tierra.

Con la observación no era posible calcular las distancias que nos separaban de las estrellas, pero si determinar su posición y sus distancias relativas.

Dado su enorme valor práctico, este esquema se ha conservado, definiéndose la esfera celeste como una esfera de radio arbitrario centrada en la Tierra.

La esfera celeste no se mueve, aunque tiene un movimiento aparente que es consecuencia del movimiento de rotación de la Tierra.

Todos los ángulos y distancias se miden sobre la superficie de una esfera y por tanto las medidas en una esfera y sus propiedades. O sea, la trigonometría y la geometría de una esfera, se han estudiado desde la antigüedad.

Así como la Trigonometría Plana se dedica al estudio de las medidas de ángulos y lados de los triángulos planos, la Trigonometría Esférica estudia las mismas medidas y relaciones, pero en triángulos esféricos, es decir triángulos construidos sobre la superficie de una esfera[1].

Es mejor introducir la Trigonometría Plana para después abordar la Esférica. Pero no es éste el camino que siguió en su desarrollo histórico.

Desde la antigüedad, la mayoría de las civilizaciones se plantearon determinar la posición de los cuerpos celestes y de predecir sus trayectorias. Poder medir el paso del tiempo durante la noche. Hallar métodos seguros de navegación. Dibujar mapas y realizar los cálculos necesarios para un calendario.

Todo esto supone, cuantificar la astronomía. Es decir, convertir en una ciencia lo que hasta entonces había sido una mera disciplina descriptiva.

2. Los orígenes de la Trigonometría Esférica

Se considera a Hiparco de Nicea (180-125 a.C.) como al padre de la Trigonometría, del que sólo se conserva su Comentario sobre los Phaenomeana de Eudoxo y Aratus, un tratado sobre las cuerdas en un círculo.

La mayoría de lo que se conoce de los trabajos de Hiparco se encuentra en los escritos de Menelao de Alejandría (100 d.C.), que fue el primero en definir lo que era un triángulo esférico en su tratado Sphaerica[2].

[1]Aunque, los lados de un triángulo esférico deben ser arcos de círculo máximo.
[2]En su versión árabe consta de tres libros.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

En dicha obra se pueden encontrar las demostraciones de un gran número de teoremas, la mayoría basados en su célebre Teorema de Menelao.

Pero la gran figura de la antigüedad fue sin duda, Claudio Ptolomeo (85-165 d.C.), que legó una monumental obra en 13 libros, el Almagesto, en la que se propuso fundamentar la astronomía sobre la aritmética y la geometría.

Para la resolución de triángulos se apoya en el Teorema de Menelao y dió a la Trigonometría Esférica una sólida estructura que duró más de 1.000 años.

En occidente, la Trigonometría no se introdujo hasta el s. XII, a través de los árabes. Hay que destacar a Nasir Al-Din (1201-1274), que fue el primero en considerar a la Trigonometría como independiente de la Astronomía.

A fines del siglo X, los árabes conocían ya las 6 funciones trigonométricas y habían demostrado teoremas fundamentales de la Trigonometría Esférica.

El objetivo fundamental era, aparte de la medición del tiempo, la posibilidad de encontrar, desde cualquier lugar, la dirección a la Meca.

En España la Trigonometría aparece en el año 1.000. La figura más destacada fue Al-Jayyani (989-?), algebrista hispano-árabe al que se atribuye la obra el Libro de los arcos desconocidos sobre una esfera.

El avance más importante en occidente tuvo lugar en el s. XV con la figura de Johan Müller (1436-1476), más conocido como Regiomontano, astrónomo alemán, que tradujo el Almagesto de Ptolomeo.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Creó, en su tratado De Triangulis Omnimodis (1464), una metodología para resolver de forma sistemática los triángulos planos y esféricos.

Y tuvo un gran acierto cuando descubrió un cometa, que 270 años después sería redescubierto como el cometa Halley. Pero también cometió un error cuando defendió, con absoluta intransigencia, que la Tierra no se movía.

La Trigonometría Esférica llegó a constituirse en una rama independiente de las Matemáticas, con un cuerpo teórico propio, y un objetivo práctico.

Con los teoremas se obtenían fórmulas y con ellas se resolvían problemas para la Astronomía, el cálculo del tiempo, la agrimensura o la navegación.

El problema con el que se encontraban las aplicaciones prácticas eran los engorrosos e interminables cálculos que debían realizarse.

Hay que considerar el descubrimiento de los logaritmos por John Napier (1550-1617) como esencial para la Trigonometría Esférica. Un verdadero avance, que sólo fue superado con la aparición de los ordenadores.

3. Vectores y puntos en 3D

Por definición, el espacio tridimensional (3D) es el conjunto de ternas

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}}$$

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

donde las 3 coordenadas son números reales.

Definición 1. *Llamamos* **puntos** *o* **vectores** *a esas ternas según las usemos. Con mayúsculas será punto,* $P = (a_1, a_2, a_3)$*, o* $u = (x_1, x_2, x_3)$ *será vector .*

Siempre declaramos si una terna la usamos como punto o como vector[3].
Y debemos respetar las siguientes reglas:

1) Está permitida la suma de 2 vectores, dando otro vector $w = u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$. No está permitida la suma de dos puntos.

2) Está permitida la suma de un punto mas un vector dando otro punto $Q = P + u = (a_1 + x_1, a_2 + x_2, a_3 + x_3)$

3) Está permitida la multiplicación escalar, de un número real por un vector $w = \lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, o por un punto $Q = \lambda P = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$

Todas las propiedades se deducen de estas reglas y de algunas definiciones. Así, por 2), dados dos puntos cualesquiera $P = (a_1, a_2, a_3)$ y $Q = (b_1, b_2, b_3)$, existe un único **vector diferencia** $Q - P = u = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Definición 2. *Se denota* $u = PQ$ *y se dice que se apoya en los puntos* P *y* Q*.* P *se le llama origen y* Q *punto final, ya que se comprueba* $Q = P + PQ$*.*

De la definición, se deduce $(a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) = P - Q = -(Q - P) = -u$. O sea, si intercambiamos los puntos obtenemos el vector opuesto, $-u = QP$.

---

[3] Lo que importa es como las manipulamos algebraicamente. O sea, su aritmética.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Como existe el punto o vector cero, $O = (0,0,0)$. Cualquier vector $u = (x_1, x_2, x_3) = OU = U - O$. O sea, siempre está apoyado en el punto origen y él mismo, $U = (x_1, x_2, x_3)$, considerado como punto.

También, está apoyado en cualquier otro punto $P = (a_1, a_2, a_3)$. Ya que, por **2**), existe el punto $Q = P + u$ y se tiene $u = (P + u) - P = Q - P = PQ$[4].

Definición 3. *Un vector tiene una* **longitud**, *también llamada* **norma** *o* **módulo**, *que es siempre mayor o igual que cero*[5] $\boxed{\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$

3.1. Distancias y ángulos en 3D.

Por la existencia del vector diferencia, dados dos puntos $P = (a_1, a_2, a_3)$ y $Q = (b_1, b_2, b_3)$

Definición 4. *Se llama distancia entre P y Q a* $\boxed{d(P,Q) = \|PQ\| = \|Q - P\|}$

Por ej., como 3 puntos en 3D, definen un triángulo en el espacio, se tiene

Ejemplo 1. *Dados, $O = (0,0,0)$, $P = (1,0,1)$ y $Q = (0,1,1)$, las distancias de sus lados son $\|OP\| = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$. Análogamente, $\|OQ\| = \sqrt{2}$ y el tercer lado es $\|PQ\| = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{3}$.*

---

[4] A veces, se dice que u es un **vector libre** que se apoya en cualquier punto.

[5] Ya que se toma la raíz cuadrada positiva de un número positivo.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Dados 3 puntos P, Q y R, es lógico llamar **lados del triángulo plano** que definen a 3 de sus vectores. Si se toman en el orden, $u_1 = PQ$, $u_2 = QR$ y $u_3 = RP$. Entonces se verifica que su suma es el vector cero.

$$u_1 + u_2 + u_3 = (Q - P) + (R - Q) + (P - R) = Q - P + R - Q + P - R = 0$$ [6]

Como $u_1 + u_2 + u_3 = 0 \iff -u_3 = u_1 + u_2$, se tiene la caracterización

Lema 1. [regla del paralelogramo]
La condición para que 3 vectores u_1, u_2, u_3 formen los lados de un triángulo es que sumen cero. O bien, uno de ellos sea igual a la suma de los otros dos.

Pero los triángulos en 3D, también forman ángulos entre sus lados. Para medirlos, dados dos vectores $u = (x_1, x_2, x_3)$ y $v = (y_1, y_2, y_3)$, llamamos

Definición 5. Producto escalar *de ambos a* $\boxed{u \bullet v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}$
Puede ser negativo, salvo $u \bullet u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$. *Además,* $\|u\|^2 = u \bullet u$

Ahora, dados 2 vectores $u = (x_1, x_2, x_3)$ y $v = (y_1, y_2, y_3)$, se llama

Definición 6. *Ángulo* $\widehat{uv}$ *al único,* $\beta < 180°$, *que verifica* $\boxed{\cos(\beta) = \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}}$

[6] Ya que la suma de vectores tiene las mismas propiedades de la suma de números.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Esta definición de medida de un ángulo es independiente del sentido o signo del ángulo, ya que siempre sale un ángulo positivo[7].

Además, si se cambia uno de los vectores por un múltiplo positivo suyo sale el mismo ángulo. Ya que $\frac{(\lambda u)\bullet v}{\|\lambda u\|\cdot\|v\|} = \frac{\lambda(u\bullet v)}{|\lambda|\cdot\|u\|\cdot\|v\|} = \frac{u\bullet v}{\|u\|\cdot\|v\|} = \cos(\beta)$

Ejemplo 2. *El triángulo en 3D, definido por los 3 puntos anteriores,* $O = (0,0,0)$, $P = (1,0,1)$ *y* $Q = (0,1,1)$, *tiene de ángulo en el origen*

$$\beta_O = ArcCos\left(\frac{OP \bullet OQ}{\|OP\| \cdot \|OQ\|}\right) = ArcCos\left(\frac{1}{\sqrt{2}^2}\right) = ArcCos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

Ahora, como $PO = O - P = (-1,0,-1)$, $PQ = Q - P = (-1,1,0)$, *su producto escalar vale* $PO \bullet PQ = 1 + 0 + 0 = 1$. *Así,*

$$\beta_P = ArcCos\left(\frac{PO \bullet PQ}{\|PO\| \cdot \|PQ\|}\right) = ArcCos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right) = ArcCos(0.408) = 65.9^\circ$$

Como $QO = O - Q = (0,-1,-1)$, $QP = P - Q = (1,-1,0)$ *el tercer ángulo es*

$$\beta_Q = ArcCos\left(\frac{QO \bullet QP}{\|QO\| \cdot \|QP\|}\right) = ArcCos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right) = ArcCos(0.408) = 65.9^\circ$$

Así, el triángulo tiene dos ángulos iguales[8] *y es isósceles.*

---

[7] Para medir ángulos mayores de 180° o negativos, hace falta elegir un criterio de medida.
[8] Porque ya tenía dos lados iguales.

3.2. Perpendicularidad en 3D.

Definición 7. *Decimos que dos vectores u, v son* **ortogonales**, $u \perp v$, *si su ángulo es* $\widehat{uv} = 90°$. *Equivalentemente, si* $u \bullet v = \|u\|\|v\|\cos(90°) = 0$.

Como $\|u+v\|^2 = (u+v)\bullet(u+v) = u\bullet u + 2(u\bullet v) + v\bullet v$, se tiene

Teorema 1. [de Pitágoras] $u \perp v \iff u\bullet v = 0 \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Definición 8. *Decimos que un vector* $u = (x_1, x_2, x_3)$ *es* **unitario**, *si* $\|u\| = 1$.

Así, los vectores $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$[9] son ortogonales y unitarios. Ya que se tiene

$$e_i \bullet e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

Definición 9. *Llamamos* **cosenos directores** *del vector* $u = (x_1, x_2, x_3)$, *a los cosenos de los ángulos entre el vector u y los vectores e_1, e_2, e_3 de la base.*

Como, $\cos(\alpha_i) = \cos(\widehat{ue_i}) = \frac{u.e_i}{\|u\|} = \frac{x_i}{\|u\|} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \quad i \in \{1,2,3\}$

el **vector de los cosenos directores** es un múltiplo positivo de u

$$\overline{u} = (\cos(\alpha_1), \cos(\alpha_2), \cos(\alpha_3)) = \left(\frac{x_1}{\|u\|}, \frac{x_2}{\|u\|}, \frac{x_3}{\|u\|}\right) = \frac{1}{\|u\|}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\|u\|}\cdot u$$

---

[9] Llamados canónicos porque son los más sencillos, después del vector cero.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Despejando, $u = \|u\| \cdot \overline{u} \Longrightarrow \|u\| = \|u\| \cdot \|\overline{u}\| \Longrightarrow \|\overline{u}\| = 1$

Y elevando al cuadrado, $\boxed{\|\overline{u}\|^2 = \cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = 1}$

hemos demostrado para cualquier vector $u = (x_1, x_2, x_3)$, que

Lema 2. *El vector* $\overline{u} = (\cos(\alpha_1), \cos(\alpha_2), \cos(\alpha_3))$ *es unitario*[10].
Como tiene norma uno, $\overline{u}$ *,a veces es llamado el* **normalizado** *de* u.

Ejemplo 3. *Dados,* $O = (0,0,0)$, $P = (1,0,1)$ *y* $Q = (0,1,1)$, *como los vectores* $u = OP = (1,0,1)$, $v = OQ = (0,1,1)$ *tienen de norma* $\|u\| = \|v\| = \sqrt{2}$.
Si los normalizamos obtenemos los vectores de sus cosenos directores

$$\overline{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \overline{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} v = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Claramente, ahora $\|\overline{u}\|^2 = \|\overline{v}\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $\overline{u} \bullet \overline{v} = 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$
Por tanto, obtenemos de nuevo el ángulo en el vértice O

$$\beta_O = ArcCos\left(\frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}\right) = ArcCos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

Además, considerando $\overline{u} = (\cos(\alpha_1), \cos(\alpha_2), \cos(\alpha_3))$, *tenemos que* $\cos(\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\alpha_2) = 0$, $\cos(\alpha_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. *Por tanto*

$$\alpha_1 = 45^\circ, \alpha_2 = 90^\circ, \alpha_3 = 45^\circ$$

Análogamente, para $\overline{v}$ *se obtienen* $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

[10] Y marca la misma dirección de u, porque es un múltiplo positivo suyo.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

3.3. Producto vectorial en 3D. Dados $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$. Un tercer vector $w = (n_1, n_2, n_3)$ será perpendicular a ambos si los productos escalares $u \cdot w = 0$, $v \cdot w = 0$ son cero. Pero esto equivale a que n_1, n_2, n_3 sean solución del sistema lineal

$$\left.\begin{array}{r} n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = 0 \\ n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Por Cramer, es fácil de ver que la solución general de este sistema son los múltiplos arbitrarios de la terna de números reales
$(x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1)$. Así llamamos

Definición 10. Producto vectorial, cruzado *o* **exterior** *de u, v, al vector*

$$\boxed{u \times v = (x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1) = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)}$$

La norma o longitud de un producto vectorial es fácil de calcular. Así

$$\|u \times v\|^2 = (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 =$$
$$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 =$$
$$= \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2(\alpha) = \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2(\alpha)) = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2(\alpha)$$

Así, hemos demostrado que

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2(\alpha) = \ \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \geqq 0$$

y hemos obtenido la desigualdad, $|u\cdot v|\le \|u\|\|v\|$ de Schwartz.
Y extrayendo raíces cuadradas, hemos demostrado el siguiente

Lema 3. [Módulo del producto vectorial] *Si $\alpha=\widehat{uv}$ es el ángulo formado por dos vectores en $\mathbb{R}^n$. Entonces,* $\boxed{\|u\times v\|=\|u\|\|v\|\sin(\alpha)}$

El producto $\|v\|\sin(\alpha)$ se interpreta como la altura de v sobre u. Así,

Definición 11. *El área del paralelogramo que definen es $S_{u,v}=\|u\times v\|$. El área del triángulo formado por u, v y $v-u$ es $\|u\times v\|/2$.*

Ejemplo 4. *El área del paralelogramo definido por $u=OP=(1,0,1)$ y $v=OQ=(0,1,1)$ vale*

$$\|OP\times OQ\|=\left(\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\right)=\|(-1,-1,1)\|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$$

Mientras que el área del triángulo definido por u, v es $\|u\times v\|/2=\sqrt{3}/2$

Ejemplo 5. *Los mismos 3 puntos, $O=(0,0,0)$, $P=(1,0,1)$ y $Q=(0,1,1)$, eligiendo otro vértice, p.ej P, definen otro paralelogramo, cuya área se puede calcular con los vectores $PO=(-1,0,-1)$ y $PQ=(-1,1,0)$. Así,*

$$\|PO\times PQ\|=\left(\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&-1\\0&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&0\\-1&1\end{vmatrix}\right)=\|(1,1,-1)\|=\sqrt{3}$$

El triángulo es el mismo y su área de nuevo sale $\sqrt{3}/2$.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ejemplo 6. *Los mismos 3 puntos,* $O = (0,0,0)$*,* $P = (1,0,1)$ *y* $Q = (0,1,1)$*, eligiendo el tercer vértice,* Q*, definen otro paralelogramo, cuya área se puede calcular con los vectores* $QO = (0,-1,-1)$ *y* $QP = (1,-1,0)$*. Así,*

$$\|QO \times QP\| = \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = \|(-1,-1,-1)\| = \sqrt{3}$$

El triángulo de nuevo es el mismo y su área también sale $\sqrt{3}/2$*.*

3.4. Propiedades del producto vectorial.

Como operación binaria entre vectores, el producto vectorial tiene algunas propiedades:

1) Si uno de los vectores es múltiplo del otro, $v = \lambda u$, se tiene

$$u \times \lambda u = (\lambda(x_2x_3 - x_3x_2),\ \lambda(x_3x_1 - x_1x_3),\ \lambda(x_1x_2 - x_2x_1)) = (0,0,0)$$ [11]

En particular, $\boxed{u \times u = 0}$ es el vector cero.

Recíprocamente, si $u \times v = 0$ se tiene que

$$x_2y_3 - x_3y_2 = x_3y_1 - x_1y_3 = x_1y_2 - x_2y_1 = 0 \Rightarrow x_1u = y_1v \Rightarrow v = \frac{x_1}{y_1}u$$

2) Anticonmutativa: Si cambiamos el orden de los vectores, cambia el signo

$$v \times u = (y_2x_3 - y_3x_2,\ y_3x_1 - y_1x_3,\ y_1x_2 - y_2x_1) =$$
$$= -(x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1) = -u \times v$$

[11] Se dice que los vectores u y λu forman un paralelogramo degenerado de área cero.

3) El vector $u \times v$ es ortogonal a u y a v. En efecto

$$u \bullet (u \times v) = x_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + x_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + x_3(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$
$$v \bullet (u \times v) = y_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + y_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + y_3(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$

4) Lineal: $(\lambda u + \mu v) \times w = \lambda(u \times w) + \mu(v \times w)$[12]

3.5. Producto triple escalar en 3D.

Dados 3 vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$,

Definición 12. *Llamamos* **producto triple escalar** *al número* $u \bullet (v \times w) \in \mathbb{R}$.

Si $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$, $w = (z_1, z_2, z_3)$ se tiene

$$u \bullet (v \times w) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

O sea, el producto triple es un determinante $u \bullet (v \times w) = Det(u, v, w)$. Así, a veces se usa la notación $|u, v, w| = u \bullet (v \times w)$. Además, como un determinante cambia de signo si se intercambian dos filas, se tiene

Lema 4. [Propiedades del producto triple escalar]

$$|u, v, w| = -|u, w, v| = -|v, u, w| = -|w, v, u| \implies |u, v, w| = |w, u, v| = |v, w, u|$$

[12] Es sencilla, pero larga de demostrar y la omotimos.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

El valor de un producto triple escalar puede ser negativo, pero su valor absoluto es por definición su módulo. Su interpretación natural es

$$|u \bullet (v \times w)| = \|u\| \cdot \|v \times w\| \cos(\beta) = \|u\| \cos(\beta) \cdot S_{u,v} = \text{altura} \cdot \text{área base}$$

Así, dados 3 vectores u, v, w en 3D

Definición 13. *Llamamos* **volumen** *del paralelepípedo, definido por ellos, al valor absoluto de su producto triple escalar* $|u \bullet (v \times w)|$.

Ejemplo 7. *El volumen del paralelepípedo con vértice en O, definido por los 4 puntos,* $O = (0,0,0)$, $P = (1,0,1)$, $Q = (0,1,1)$ *y* $R = (1,1,0)$, *se puede calcular con los vectores* $OP = (1,0,1)$, $OQ = (0,1,1)$ *y* $OR = (1,1,0)$. *Así,*

$$|OP \bullet (OQ \times OR)| = \left| Det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = |-1-1| = 2$$

O sea, el volumen sale 2 m^3 *(si la unidad de medida lineal fuera el metro).*

Ejemplo 8. *Si en vez del vértice O, consideramos el paralelepípedo con vértice en P, definido por los mismos 4 puntos. Se puede calcular su volumen con los vectores* $PO = (-1,0,-1)$, $PQ = (-1,1,0)$ *y* $w = PR = (0,1,-1)$. *Así,*

$$|PO \bullet (PQ \times PR)| = \left| Det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = |1+1| = 2$$

O sea, el volumen sale de nuevo 2 m^3.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Si se eligen, como vértices, los otros dos puntos, Q o R. Se obtienen paralelepípedos diferentes pero de nuevo con el mismo valor 2 de volumen.

De hecho, los 4 paralelepípedos son diferentes, pero tienen el mismo volumen. La razón es que comparten el prisma triangular definido por los 4 puntos, O, P, Q y R. Además, por tener sus caras paralelas, cada uno de ellos se descompone en 6 copias del prisma triangular que comparten.

Tienen el mismo volumen porque sale 6 veces el volumen de ese prisma. Así

Lema 5. *4 puntos arbitrarios en 3D, definen un prisma triangular cuyo volumen es $\frac{1}{6}$ del de uno cualquiera de los 4 paralelepípedos que definen.*

Para los mismos puntos de los ejemplos anteriores, se tiene

Ejemplo 9. *El volumen del prisma triangular, definido por los 4 puntos, $O=(0,0,0)$, $P=(1,0,1)$, $Q=(0,1,1)$ y $R=(1,1,0)$, es*

$$\frac{1}{6}|OP \bullet (OQ \times OR)| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \simeq 0.33\ m^3 \text{ (si la unidad fuera el metro)}$$

Ejemplo 10. *El volumen del prisma triangular, definido por los 4 puntos canónicos, $O=(0,0,0)$, $E=(1,0,0)$, $N=(0,1,0)$ y $C=(0,0,1)$, es*

$$\frac{1}{6}\left|Det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \simeq 0.17\ m^3$$

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

4. Coordenadas esféricas

Por la definición 4, dados dos puntos $X=(x,y,z), O=(o_1,o_2,o_3)$ de $\mathbb{R}^3$, la distancia entre ellos es $\boxed{d(X,O)=\sqrt{(x-o_1)^2+(y-o_2)^2+(z-o_3)^2}}$

Definición 14. *Una esfera es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de uno llamado centro. O sea, conjunto de puntos equidistantes de O.*

La condición para pertenecer a una esfera, de radio r, y centro el O, es
$d(X,O)=r$ o elevando al cuadrado $(x-o_1)^2+(y-o_2)^2+(z-o_3)^2 \;=\; r^2$
llamada **ecuación de la esfera**. Por tanto, una esfera es el conjunto

$$\boxed{S \;=\; \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; (x-o_1)^2+(y-o_2)^2+(z-o_3)^2 \;=\; r^2\right\}}$$

Ejemplo 11. *La esfera de radio 2, centrada en el punto, $O=(1,0,1)$, tiene de ecuación $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=4$.*

Todas las esferas tienen las mismas propiedades geométricas.
Por tanto, éstas se pueden estudiar en la esfera más sencilla que es

Definición 15. *La esfera de radio 1, centrada en el origen de coordenadas, $O=(0,0,0)$, tiene de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ y es llamada* **esfera unidad**.

Así, sus puntos son los extremos de todos los vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$.

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
Página 22 de 53
Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Por el lema 2, un vector unitario tiene de coordenadas cosenos directores, $u = (\cos(\alpha_1), \cos(\alpha_2), \cos(\alpha_3))$, donde $cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = 1$.

Por tanto, los 3 ángulos que forma con los ejes no son independientes. Se puede despejar uno de ellos y u tiene sólo 2 variables independientes[13].

Para evitar raíces cuadradas al despejar, es costumbre hacer un cambio de variables y usar 2 ángulos ϕ, λ llamados **latitud** y **longitud** respectivamente.

Para eso, consideramos un vector $u = (a, b, c)$, donde $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Lo que haremos es poner a, b, c en función de ϕ, λ.

Como la tercera coordenada es $c = \cos(\alpha_3)$, donde $\theta = \alpha_3$, llamada **colatitud** de u, es el ángulo que forma u con el eje Z. Ahora,

Definición 16. *Llamamos* **latitud**, *ϕ de u, al ángulo que forma con el plano XY, que es el complementario de la colatitud. O sea, $\phi = 90° - \theta$.*

Ángulos complementarios tienen el seno y el coseno cambiados. Así, la tercera coordenada ya la tenemos en función de la latitud, $c = \cos(\theta) = \sin(\phi)$.

Por tanto,

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + \sin^2(\phi) \Longrightarrow a^2 + b^2 = 1 - \sin^2(\phi) = \cos^2(\phi)$$

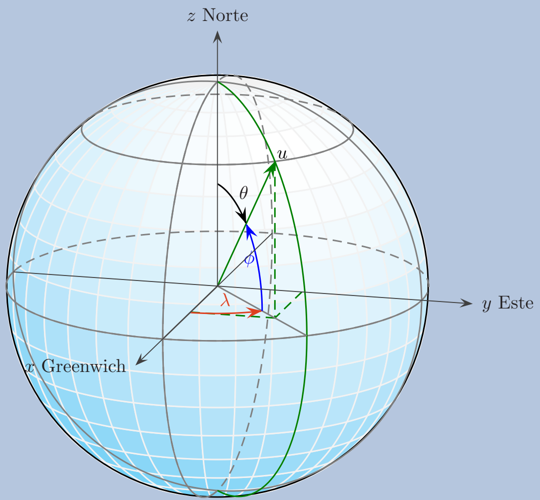
De donde, despejamos $\cos(\phi) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

[13] Se dice que la esfera es una superficie, ya que tiene 2 variables independientes.

Ahora, consideramos la proyección de u sobre el plano XY, $v = (a, b, 0)$. Calculamos el ángulo, λ, que forma con el eje $OX = (1, 0, 0)$ y obtenemos

$$a = OX \bullet v = \|OX\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\lambda) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\lambda) = \cos(\phi) \cos(\lambda)$$

Definición 17. *Se llama* **longitud** *de u al ángulo, λ, que forma su proyección horizontal con el eje X.*



Ahora, como teníamos $a^2 + b^2 = \cos^2(\phi)$, podemos despejar b^2. Así,
$\cos^2(\phi)\cos^2(\lambda) + b^2 = \cos^2(\phi) \Longrightarrow b^2 = \cos^2(\phi)(1 - \cos^2(\lambda)) = \cos^2(\phi)\sin^2(\lambda)$
Y extrayendo raíces cuadradas, $b = \cos(\phi)\sin(\lambda)$. O sea, hemos demostrado

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Lema 6. *Todo vector unitario*[14] *se puede parametrizar con dos ángulos,* $\boxed{u = (\cos(\phi)\cos(\lambda), \cos(\phi)\sin(\lambda), \sin(\phi))}$ *llamados latitud y longitud.*

Como todo vector se puede normalizar, $v = \|v\|\overline{v} = r\overline{v}$, donde $r = \|v\|$ es la distancia al centro y $\overline{v}$ es un vector unitario. Para todo v, se tiene[15]

$$v = (x, y, z) = r\overline{v} = (r\cos(\phi)\cos(\lambda), r\cos(\phi)\sin(\lambda), r\sin(\phi))$$

Así, si se conoce la distancia, r, al centro y la latitud y longitud, se pueden calcular las coordenadas rectangulares del punto simplemente multiplicando.

Definición 18. (r, ϕ, λ) *son las* **coordenadas polares** *de un punto en 3D. Y las ec. del* **cambio de coordenadas** *polares a rectangulares son*

$$\boxed{x = r\cos(\phi)\cos(\lambda), \;\; y = r\cos(\phi)\sin(\lambda), \;\; z = r\sin(\phi)}$$

Considerando a la tierra, todo punto sobre ella tiene unas coordenadas con origen en el centro de gravedad, el eje Z dirigido al PN, el eje X dirigido al meridiano de Greenwich, y el eje Y perpendicular a ambos hacia el Este.

Definición 19. $(\phi, \; \lambda)$ *son las* **coordenadas esféricas** *del punto* u[16].

[14] Y todo punto de la esfera unidad.

[15] Todo punto, en 3D, se determina con una distancia r y dos ángulos $\phi, \; \lambda$.

[16] En el caso de la tierra, existen otras coordenadas llamadas **geográficas** y **geodésicas**. Pero difieren poco de las esféricas y en los ejemplos las consideramos iguales.

Ejemplo 12. *El centro de Granada tiene de coordenadas geográficas, obtenidas con GPS, (ϕ, λ) = (37° 11' 13", -3° 35' 31".95)*[17]

Como el radio medio de la tierra o distancia al centro, es r = 6 371 km, se pueden calcular sus coordenadas rectangulares o geocéntricas

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 6371\cos(37.19)\cos(-3.6) = 5065.3925\ km \\ y & = & 6371\cos(37.19)\sin(-3.6) = -318.6847\ km \\ z & = & 6371\sin(37.19) = 3851.0152\ km \end{array}\right\}$$

Ejemplo 13. *Barcelona tiene de coord. geográficas, $(\phi, \lambda) = (41.23°, 2.11°)$ Sus coordenadas rectangulares o geocéntricas son*

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 6371\cos(41.23)\cos(2.11) = 4788.1888\ km \\ y & = & 6371\cos(41.23)\sin(2.11) = 176.4117\ km \\ z & = & 6371\sin(41.23) = 4199.0199\ km \end{array}\right\}$$

Ejemplo 14. *La distancia mínima entre Granada y Barcelona,* $G = (5065.3925, -318.6847, 3851.0152)$, $B = (4788.1888, 176.4117, 4199.0199)$ *se calcula con la norma del vector* $GB = (4788.1888 - 5065.3925, 176.4117 - (-318.6847), 4199.0199 - 3851.0152) = (-277.204, 495.096, 348.005)$. *O sea,*

$$\|GB\| = \sqrt{(-277.204)^2 + (495.096)^2 + (348.005)^2} = 665.635\ km$$

Esta distancia es en línea recta en 3D, atravesando la tierra.

[17] Latitud positiva al norte del ecuador, longitud negativa al oeste de Greenwich.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

4.1. Elementos esféricos.

Los conceptos fundamentales en una esfera son

Definición 20. *Se llama* **circunferencia máxima** *(cmax) a la intersección de la esfera con un plano que pasa por su centro.*

Y **circunferencia mínima** *o* **menor** *(cmin) a la intersección con otro plano.*

Polos *de una cmax o cmin son los extremos del diámetro perpendicular al plano que la define.*

Definición 21. *Se llama* **ángulo esférico** *entre 2 cmax al ángulo formado por las tangentes a las 2 circunferencias en un punto de contacto.*

Coincide con el ángulo diedro que forman los planos que las definen.

Definición 22. *Se llama* **distancia esférica**, *entre 2 puntos de la esfera, a la longitud del menor arco de la cmax que los contiene.*

La distancia esférica se puede medir en radianes o en la misma unidad de longitud del radio. Así, se puede hallar la distancia esférica entre 2 puntos.

Ejemplo 15. *Para calcular la distancia esférica entre Granada y Barcelona,* $OG = (5065.3925, -318.6847, 3851.0152)$, $OB = (4788.1888, 176.4117, 4199.0199)$ *primero se calcula el ángulo que forman como vectores, en radianes. O sea,* $ArcCos(OG.OB/(\|OG\| * \|OB\|)) = 0.104526$ *rad y luego se multiplica por el radio medio terrestre* $r = 6371$ *km, obteniendo*

$$distacia\ = 0.104526 * 6371 = 665.936\ km$$

Esta distancia sobre una esfera, es mayor que la anteriormente calculada. Pero sigue siendo menor que la real (por carretera) entre ambas ciudades.

El cálculo de la distancia esférica se puede hacer en función de las latitudes y longitudes. Como el ángulo entre vectores es independiente del módulo. Dados dos vectores u, v el ángulo que forman es $\boxed{\widehat{uv} = ArcCos(\overline{u} \bullet \overline{v})}$

Así, si tenemos dos puntos en la esfera, $A = (\phi_1,\ \lambda_1)$, $B = (\phi_2,\ \lambda_2)$, el ángulo que forman en el centro se calcula con el producto escalar

$$\begin{aligned} u = OA &= (\cos(\phi_1)\cos(\lambda_1), \cos(\phi_1)\sin(\lambda_1), \sin(\phi_1)) \\ v = OB &= (\cos(\phi_2)\cos(\lambda_2), \cos(\phi_2)\sin(\lambda_2), \sin(\phi_2)) \\ u \bullet v &= \cos(\phi_1)\cos(\phi_2)\cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \sin(\phi_1)\sin(\phi_2) \end{aligned}$$

O sea, la distancia esférica entre A y B, en grados o radianes, es

$$\widehat{uv} = ArcCos\big(\cos(\phi_1)\cos(\phi_2)\cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\big)$$

Y si se multiplica después por el radio, se obtiene en unidades de longitud.

Ejemplo 16. *La distancia esférica entre Granada,* $G = (37.19°, -3.59°)$, *y Paris,* $P = (48.85°, 2.35°)$, *se calcula directamente con su producto escalar*

$$\cos(37.19°)\cos(48.85°)\cos(-3.59° - 2.35°) + \sin(37.19°)\sin(48.85°) = 0.97655$$

Luego, la distancia angular es $\delta(GP) = ArcCos(0.97655) = 0.216992$ *radianes y multiplicando por el radio, salen* $\delta(GP) * 6371 \simeq 1383$ *km.*

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

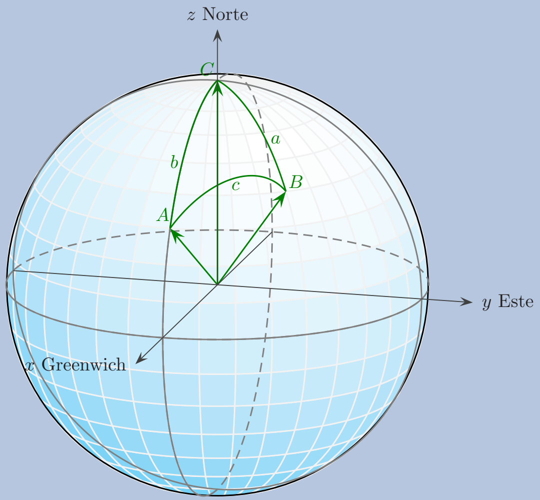
Página web personal
Página de Abertura
Contenido
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

4.2. Triángulos esféricos. Se llama **triángulo esférico** a la figura que definen 3 puntos, A, B, C, sobre una esfera. Y se definen

Definición 23. Lados del triángulo esférico *son los arcos de cmax entre cada dos puntos. Su medida son distancias esféricas, en grados o radianes.*

Definición 24. Ángulos del triángulo esférico *son los ángulos esféricos entre cada dos lados. Coinciden con el ángulo diedro entre cada dos planos.*



Los ángulos se denotan con el nombre del punto en se cortan y los lados con el nombre, en minúscula, del punto que tienen enfrente.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Como un **ángulo triedro** es el que forman 3 planos que se cortan en un punto. Se puede definir un triángulo esférico como la intersección de un ángulo triedro con una esfera que tenga el mismo centro.

Conocidos 3 puntos en una esfera. O sea, sus latitudes y longitudes. Sabemos calcular los lados del triángulo esférico calculando 3 productos escalares.

Para calcular los 3 ángulos (diedros) necesitamos calcular los productos vectoriales, dos a dos, de los vectores de los puntos. Ya que así obtenemos perpendiculares a los planos del triedro y podemos usar la conocida propiedad de que ángulos con lados perpendiculares son suplementarios (suman 180°)[18].

Ejemplo 17. *Si queremos hallar el ángulo en* N*, en el triángulo formado por Granada,* $G = (37.19°, -3.59°)$*, Paris,* $P = (48.85°, 2.35°)$ *y el polo Norte,* $N = (90°, 0°)$*. Primero, hallamos los radio vectores unitarios, desde el centro de la tierra, con la fórmula* $(\cos(\phi)\cos(\lambda), \cos(\phi)\sin(\lambda), \sin(\phi))$*. Obtenemos*

$$\begin{aligned} n &= ON = (0, 0, 1) \\ g &= OG = (0.795072, -0.0498824, 0.60446) \\ p &= OP = (0.657479, 0.0269818, 0.752989) \end{aligned}$$

Después, calculamos los productos vectoriales $n \times g$ *y* $p \times n$*, que nos dan las perpendiculares a los planos del ángulo diedro en* N*. Y obtenemos*

[18] Si uno es agudo, el otro es obtuso.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

$$p' = n \times g = (0.0498824, 0.795072, 0)$$
$$g' = p \times n = (0.0269818, -0.657479, 0)$$

El ángulo entre estas dos vectores es el suplementario del ángulo en N.

$$ArcCos(p' \bullet g') = ArcCos(-0.521397) = 2.11928 \; radianes = 121.426°$$

Finalmente, nuestro ángulo en el polo Norte es $N = 180 - 121.426 = 58.574°$.

En el ejemplo, y siempre que queramos calcular los ángulos de un triángulo esférico conocidos sus vértices, A, B, C, se calculan los polos de los lados del triángulo que se encuentren en el mismo lado que el triángulo.

Precísamente, estos 3 polos llamados **polos del triángulo** y denotados A', B', C', forman otro triángulo esférico. Así, llamamos

Definición 25. Triángulo polar *al formado por los polos del original.*

Por la definición, si volvemos a calcular el triángulo polar del A', B', C', se obtiene el original, A, B, C. O sea, la relación es simétrica entre triángulos.

Así, se verifica que cada ángulo de uno de los triángulos polares es igual al suplementario del correspondiente lado opuesto del otro triángulo. Es decir

$$\boxed{\begin{array}{ll} A = 180° - a', & A' = 180° - a \\ B = 180° - b', & B' = 180° - b \\ C = 180° - a', & C' = 180° - c \end{array}}$$

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

4.3. Propiedades de un triángulo esférico. Usualmente, sólo se estudian triángulos esféricos que verifican $0 < a, b, c, A, B, C < 180°$[19].

Ahora, si $u = OA$, $v = OB$ y $w = OC$ son los radio vectores de los 3 puntos. Sabemos que $\cos(a) = v \bullet w$, $\cos(b) = u \bullet w$ y $\cos(c) = u \bullet v$.

La primera propiedad es comparar los valores angulares de los lados.
Como la función coseno es decreciente en el intervalo $[0, 180°]$.
La desigualdad $a < b + c$ equivale a que $\cos(a) > \cos(b + c)$. O sea,

$$\begin{aligned}&\cos(a) > \cos(b+c) = \cos(b)\cos(c) - \sin(b)\sin(c) \iff \\ &v \bullet w > (u \bullet w)(u \bullet v) - \sqrt{1-(u \bullet w)^2}\sqrt{1-(u \bullet v)^2}\end{aligned}$$

despejando las raíces $\sqrt{1-(u \bullet w)^2}\sqrt{1-(u \bullet v)^2} > (u \bullet w)(u \bullet v) - v \bullet w$
y elevando al cuadrado $(1-(u \bullet w)^2)(1-(u \bullet v)^2) > \big((u \bullet w)(u \bullet v) - v \bullet w\big)^2$
desarrollando y restando el sumando común, se obtiene

$$\begin{aligned}&1-(u \bullet w)^2-(u \bullet v)^2 > (v \bullet w)^2 - 2(u \bullet w)(u \bullet v)(v \bullet w) \iff \\ &1-(u \bullet w)^2-(u \bullet v)^2-(v \bullet w)^2 + 2(u \bullet w)(u \bullet v)(v \bullet w) > 0\end{aligned}$$

Pero la expresión de la izquierda coincide con el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & u \bullet v & u \bullet w \\ u \bullet v & 1 & v \bullet w \\ u \bullet w & v \bullet w & 1 \end{vmatrix} = \det\left((u, v, w) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right) = |u, v, w|^2$$

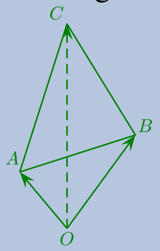
[19] Es suficiente, en prácticamente todas las aplicaciones.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

que siempre es un cuadrado y por tanto un número real positivo[20]. Así,

Lema 7. [Desigualdad triangular esférica]
Cada lado es menor que la suma de los otros dos, $a < b + c$.

Los lados de un triángulo esférico, a, b, c son en realidad los ángulos planos



en un vértice de las caras de un triedro.
O sea, $a = \widehat{BOC}$, $b = \widehat{AOC}$, $c = \widehat{AOB}$.

Pero si consideramos el ángulo triedro cortado por un triángulo plano.
Se tiene un tetraedro en 3D, con 4 vértices y 4 caras triangulares.

Tenemos otros 3 triedros centrados en A, B, C que también verifican las desigualdades triangulares esféricas. En particular, se tiene

$$\widehat{BAC} < \widehat{OAB} + \widehat{OAC}, \quad \widehat{ABC} < \widehat{OBA} + \widehat{OBC}, \quad \widehat{ACB} < \widehat{OCA} + \widehat{OCB}$$

Pero los 9 ángulos de los 3 triángulos laterales suman $3 * 180 = 540°$. O sea,

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOC} + \widehat{BOC} + (\widehat{OAB} + \widehat{OAC}) + (\widehat{OBA} + \widehat{OBC}) + (\widehat{OCA} + \widehat{OCB}) = 540°$$

[20] Salvo que los puntos sean coplanarios. En cuyo caso, no definen un triángulo esférico.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Página web personal
Página de Abertura
Contenido

Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

y usando las 3 desigualdades anteriores se obtiene

$$\widehat{AOB}+\widehat{AOC}+\widehat{BOC}+\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}<540^\circ \iff$$
$$\widehat{AOB}+\widehat{AOC}+\widehat{BOC}<540^\circ-(\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB})=540^\circ-180^\circ=360^\circ$$

Y hemos demostrado que $\boxed{a+b+c<360^\circ}$. O sea,

Lema 8. [del máximo para los lados]
La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que 360°.

Definición 26. *Se denomina* **Defecto esférico** *a lo que le falta en grados,* $360^\circ-(a+b+c)$. *O en radianes,* $d=2\pi-(a+b+c)$.

Si consideramos ahora el triángulo polar, A', B', C'. También, sus lados a', b', c' verifican la cota anterior. O sea, $a'+b'+c'<360^\circ$. Y se tiene

$$A+B+C=180-a'+180-b'+180-c'=540-(a'+b'+c')$$

Por tanto, $A+B+C<540^\circ$. También se obtiene una cota inferior cuando $a'+b'+c'$ toma su valor máximo 360°. Como $540-360=180$. Se tiene que

Lema 9. [de las cotas para los ángulos] *La suma de los ángulos de un triángulo esférico satisface las desigualdades* $\boxed{180^\circ<A+B+C<540^\circ}$

Definición 27. *Se llama* **Exceso esférico** *a lo que excede de un ángulo llano. En grados,* $A+B+C-180^\circ$. *O en radianes,* $\varepsilon=A+B+C-\pi$.

4.4. Área de un triángulo esférico. El área de una esfera de radio r es $\boxed{S = 4\pi r^2}$[21]

Para la fórmula de un triángulo esférico necesitamos primero la de un

Definición 28. Huso esférico *es la superficie esférica delimitada por dos arcos de cmax (geodésicas de la esfera).*

Se llaman **vértices del huso** *a los dos puntos antípodas donde se cortan los dos arcos de cmax.*

Se llama **angulo del huso** *al diedro formado por los semiplanos que definen los dos arcos de cmax.*

La esfera se puede considerar el caso límite de un huso con ángulo 360°. Así, por una regla de tres, se puede calcular el área de un huso, que sale $\boxed{\frac{\alpha}{2\pi}4\pi r^2 = \alpha 2r^2}$ si medimos su ángulo en radianes. O bien, $\boxed{\frac{\alpha\pi}{180}2r^2}$ si lo medimos en grados sexagesimales.

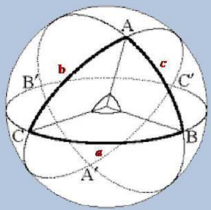
Un triángulo esférico tiene 3 ángulos. Luego, define 3 husos, uno en cada vértice cuyas área respectivas son $A2r^2$, $B2r^2$ y $C2r^2$[22].

[21] Calculada con una integral doble o bien simple ya que es una superficie de revolución.
[22] Midiendo los ángulos A, B,C en radianes.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Pero cada uno de estos husos es suma de las áreas de 2 triángulos esféricos. Uno de ellos el original y el otro con un vértice antípoda. Así, tenemos:



Los 3 husos tienen de área

$S_{ABC} \;+\; S_{A'BC} \;=\; A2r^2$

$S_{ABC} \;+\; S_{AB'C} \;=\; B2r^2$

$S_{ABC} \;+\; S_{ABC'} \;=\; C2r^2$

Ahora, la suma de 4 da la semiesfera superior

$S_{ABC} \;+\; S_{ABC'} \;+\; S_{AB'C} \;+\; S_{AB'C'} \;=\; \frac{1}{2}4\pi r^2$

Y los triángulos $S_{AB'C'} = S_{A'BC}$ por ser antípodas.

Por tanto, despejando y sustituyendo, tenemos

$$S_{ABC} \;+\; C2r^2 \;-\; S_{ABC} \;+\; B2r^2 \;-\; S_{ABC} \;+\; A2r^2 \;-\; S_{ABC} = 2\pi r^2$$

de donde, $2S_{ABC} = (A+B+C)2r^2 - 2\pi r^2 = (A+B+C-\pi)2r^2$. O sea, dividiendo por 2, se tiene que $\boxed{S_{ABC} = (A+B+C-\pi)r^2 = \varepsilon r^2}$

Teorema 2. [de Picard, Jean-Felix 1620-1682] *El área de un triangulo esférico es su exceso esférico en radianes multiplicado por el radio al cuadrado.*

Ejemplo 18. *El área del triángulo esférico formado por el* $PN = (90°N, 0°)$ *y* $B = (0°, 0°)$, $C = (0°, 90°E)$, *como tiene sus 3 ángulos de* $90°$, *es* $S = \varepsilon r^2 = (3\pi/2 - 2\pi/2)r^2 = \frac{\pi}{2}r^2$. *O sea, la octava parte del área total de la esfera.*

El área de un **polígono esférico** (limitado por arcos de cmax) se obtiene triangulando y vale $S = (A_1 + \cdots + A_n - (n-2)\pi)r^2 = \varepsilon r^2$.

Por ej, el área de un **cuadrilátero esférico** vale $\boxed{S = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 2\pi)r^2}$

Ejemplo 19. *Calcula el área del triángulo esférico definido por Granada* $(37.19°, -3.59°)$*, Madrid* $(40.24°, -3.41°)$ *y Barcelona* $(41.23°, 2.11°)$*.*

Se calculan en radianes los 3 ángulos en Granada, Madrid y Barcelona

$$AngG = 0.753202,\ AngM = 1.88202,\ angB = 0.50828$$

Su exceso esférico en radianes es pequeño

$$exceso \ = \ (angG + angM + angB) - \pi \ = \ 0.00190633$$

que en formato tradicional son poco mas de 6 minutos de arco: 6' 33.208". Ahora, tomando como radio medio de la tierra r = 6 371 km, su área es

$$area \ = \ r^2 * exceso \ = \ 77\,377.3$$

O sea, un poco mas de 77 mil kilómetros cuadrados.

En el ejemplo, vemos que con un exceso pequeño se obtiene un área grande. Y que es necesaria mucha precisión en el cálculo de los ángulos.

Ejemplo 20. *¿ Cuál es el área de un triángulo para que el exceso sea de 1"?*

Si calculamos el área para que el exceso sea de 1", se tiene

$$exc = 1./(60*60)*\pi/180 \implies area \ = \ r^2 * exc \ = \ 196.785\ km^2$$

O sea, para tener 1" de exceso hace falta un triángulo de casi 200 km^2*.*

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Concluímos que a pequeña escala los triángulos en la tierra son casi planos.

5. Fórmulas trigonométricas

Es fácil darse cuenta que todo triángulo esférico tiene una copia en el primer octante, como el dibujo 4.2. O sea, con un vértice C en el polo Norte, otro A en el plano XZ y el tercer vértice B hacia el este.

Esta posición de un triángulo esférico la llamamos **posición boreal**.
Así, todo triángulo esférico se puede estudiar en una posición boreal.

La ventaja de estudiar un triángulo, en posición boreal, es que el radio vector del vértice C, es el $w = ON = (0,0,1)$.

El del vértice A es $u = OA = (\sin(b), 0, \cos(b))$, ya que el lado (ángulo) b es la colatitud de este punto mientras que su longitud es cero.

Análogamente, el vértice B tiene de colatitud a (o latitud $90° - a$) y de longitud el ángulo diedro en el polo Norte, es decir, el ángulo esférico C. Así, el radio vector del vértice B es $v = OB = (\sin(a)\cos(C), \sin(a)\sin(C), \cos(a))$.

Ahora, si calculamos su producto triple escalar, por 12, tenemos

$$|u, v, w| = \begin{vmatrix} \sin(b) & 0 & \cos(b) \\ \sin(a)\cos(C) & \sin(a)\sin(C) & \cos(a) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin(a)\sin(b)\sin(C)$$

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ahora, por las propiedades del producto triple escalar 4, se tiene que

$$|u, v, w| = |w, u, v| = |v, w, u|$$

Y calculando esos productos triples se tiene

$$\sin(a)\sin(b)\sin(C) = \sin(c)\sin(a)\sin(B) = \sin(b)\sin(c)\sin(A)$$

Dividiendo ahora por $\sin(a)\sin(b)\sin(c)$ se demuestra el

Teorema 3. [de los senos] *En cualquier triángulo esférico*

$$\frac{\sin(a)}{\sin(A)} = \frac{\sin(b)}{\sin(B)} = \frac{\sin(c)}{\sin(C)}$$

La ventaja de la posición boreal, es que se tienen los radios vectores en función de las razones trigonométricas del triángulo. Así, conocidos los radio vectores u, v de A, B podemos calcular explícitamente el ángulo que forman. Que por definición es el otro lado, c, del triángulo. O sea, tenemos

$$c = ArcCos(u \bullet v) \Longleftrightarrow \cos(c) = \sin(b)\sin(a)\cos(C) + \cos(b)\cos(a)$$

Como un triángulo esférico tiene 3 vértices, tiene también 3 copias en posición boreal y por tanto 3 relaciones como la última. Éstas son

Teorema 4. [de los cosenos] *En cualquier triángulo esférico*

$$\begin{aligned}
\cos(c) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(C)\\
\cos(b) &= \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(B)\\
\cos(a) &= \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)
\end{aligned}$$

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ahora, si consideramos una de las fórmulas del grupo de los cosenos, p.ej.

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)$$

podemos sustituir dentro de ella un coseno, $\cos(c)$ y un seno, $\sin(c)$

$$\cos(a) = \cos(b)(\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(C) + \sin(b)\big(\frac{\sin(a)}{\sin(A)}\sin(C)\big)\cos(A)$$

$$= \cos^2(b)\cos(a) + \cos(b)\sin(a)\sin(b)\cos(C) + \sin(b)\sin(a)\sin(C)\cot(A)$$

pasando el primer sumando al otro miembro y sacando factor común a $\cos(a)$

$$\cos(a)(1-\cos^2(b)) = \cos(b)\sin(a)\sin(b)\cos(C) + \sin(b)\sin(a)\sin(C)\cot(A)$$

$$\iff \cos(a)\sin^2(b) = \sin(a)\sin(b)(\cos(b)\cos(C) + \sin(C)\cot(A))$$

$$\iff \cot(a)\sin(b) = \cos(b)\cos(C) + \sin(C)\cot(A)$$

y hemos obtenido una de las 6 fórmulas del grupo[23]

Teorema 5. [de las cotangentes] *En cualquier triángulo esférico*

$$\begin{aligned}
\cot(a)\sin(b) &= \cos(b)\cos(C) + \sin(C)\cot(A)\\
\cot(a)\sin(c) &= \cos(c)\cos(B) + \sin(B)\cot(A)\\
\cot(b)\sin(c) &= \cos(c)\cos(A) + \sin(A)\cot(B)\\
\cot(b)\sin(a) &= \cos(a)\cos(C) + \sin(C)\cot(B)\\
\cot(c)\sin(a) &= \cos(a)\cos(B) + \sin(B)\cot(C)\\
\cot(c)\sin(b) &= \cos(b)\cos(A) + \sin(A)\cot(C)
\end{aligned}$$

[23]Las otras 5 se deducen igual.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ahora, aplicando el teorema de los cosenos al triángulo polar, A', B', C'

$$\cos(a') = \cos(b')\cos(c') + \sin(b')\sin(c')\cos(A') \iff$$

$$\cos(180 - A) = \cos(180 - B)\cos(180 - C) + \sin(180 - B)\sin(180 - C)\cos(180 - a)$$

$$\iff -\cos(A) = \cos(B)\cos(C) - \sin(B)\sin(C)\cos(a)$$

$$\iff \cos(A) = -\cos(B)\cos(C) + \sin(B)\sin(C)\cos(a)$$

y hemos obtenido una de las 3 fórmulas del grupo[24]

Teorema 6. [del coseno para los vértices] *En cualquier triángulo esférico*

$$\begin{aligned}
\cos(A) &= -\cos(B)\cos(C) + \sin(B)\sin(C)\cos(a)\\
\cos(B) &= -\cos(A)\cos(C) + \sin(A)\sin(C)\cos(b)\\
\cos(C) &= -\cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)\cos(c)
\end{aligned}$$

Mediante estos 4 grupos de fórmulas, llamadas de Bessel[25] puede calcularse cualquier elemento de un triángulo esférico, a partir de 3 conocidos.

Los 3 conocidos y el que buscamos, son los 4 que tienen que relacionarse. Indican el grupo al que hay que acudir y la fórmula única que hay que usar.

Hay exactamente 15 combinaciones posibles de 6 sobre 4 elementos.
Para cada una de ellas existe una única fórmula de Bessel que los relaciona.

---

[24] Las otras 2 se deducen igual.

[25] Friedrich Whilhelm Bessel (1784 Westfalia, Alemania, 1846 Kaliningrado, Rusia).

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Para la mayor parte de los ejemplos de resolución sólo usamos algunas de los dos primeros grupos. Pero hay que hallar 3 elementos desconocidos a partir de 3, y el orden en que se calculan influye en las fórmulas a usar.

Se debe observar el siguiente protocolo. Si para calcular un elemento, se tiene que dividir por un número cercano a cero. Hay que dejar su cálculo para el final y ver si existe otra combinación o fórmula para su cálculo.

Siempre es preferible emplear una fórmula que no precise de la división.
A veces, es conveniente usar alguna de las siguientes.

5.1. Fórmulas auxiliares de la trigonometría esférica.

Sea un triángulo esférico de ángulos A, B y C y lados a, b y c. Entonces, si $\boxed{s = (a+b+c)/2}$ es el **semiperímetro** del triángulo esférico, se demuestran las

Fórmulas de Briggs o Borda[26]. Dan un ángulo en función de los 3 lados.

$$\tan(\frac{A}{2}) = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin(s)\sin(s-a)}}, \quad \tan(\frac{B}{2}) = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin(s)\sin(s-b)}}$$

$$\tan(\frac{C}{2}) = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin(s)\sin(s-c)}}$$

[26] Henry Briggs (1561 Warley Wood, 1630 Oxford) y Jean Borda (1733-1799 Paris).

Y para relacionar todos los elementos de un triángulo esférico las **Analogías de Delambre-Gauss**[27]:

$$\frac{\sin(\frac{A+B}{2})}{\cos(\frac{C}{2})}=\frac{\cos(\frac{a-b}{2})}{\cos(\frac{c}{2})},\quad \frac{\sin(\frac{A-B}{2})}{\sin(\frac{C}{2})}=\frac{\sin(\frac{a-b}{2})}{\sin(\frac{c}{2})}$$

$$\frac{\cos(\frac{A+B}{2})}{\sin(\frac{C}{2})}=\frac{\cos(\frac{a+b}{2})}{\cos(\frac{c}{2})},\quad \frac{\cos(\frac{A-B}{2})}{\sin(\frac{C}{2})}=\frac{\sin(\frac{a+b}{2})}{\sin(\frac{c}{2})}$$

5.2. Triángulos esféricos equiláteros. Dado un triángulo esférico con lados iguales, $a=b=c$. Se tiene por el teorema 3, que

$$\frac{\sin(a)}{\sin(A)}=\frac{\sin(b)}{\sin(B)}=\frac{\sin(c)}{\sin(C)}\Rightarrow \sin(A)=\sin(B)=\sin(C)\Rightarrow A=B=C$$

Recíprocamente, si tiene sus 3 ángulos iguales también tiene sus 3 lados. Así

Definición 29. *Un* **triángulo equilátero** *tiene sus 3 lados o ángulos iguales.*

A diferencia de los planos, se determinan mutuamente. Por el teorema 4

$$\cos(a)=\cos^2(a)+\sin^2(a)\cos(A)\Rightarrow \cos(A)=\frac{\cos(a)-\cos^2(a)}{\sin^2(a)}=\frac{\cos(a)}{1+\cos(a)}$$

[27] Jean Baptiste Joseph Delambre (1749 Amiens, Francia, 1822 Paris) y Johann Carl Friedrich Gauss (1777 Brunswick, 1855 Göttingen, Hanover).

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Y por el teorema 6, también los lados se determinan por los ángulos

$$\cos(A) = -\cos^2(A) + \sin^2(A)\cos(a) \Rightarrow \cos(a) = \frac{\cos(A) + \cos^2(A)}{\sin^2(A)} = \frac{\cos(A)}{1 - \cos(A)}$$

Ejemplo 21. *Si consideramos un triángulo con lados $a = b = c = 60°$*

$$\cos(A) = \frac{\cos(60°)}{1 + \cos(60°)} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3} \Rightarrow A = ArcCos(1/3) \simeq 70.53°$$

Recíprocamente, si consideramos un triángulo esférico con ángulos $A = B = C = 70.53°$, tenemos

$$\cos(a) = \frac{\cos(70.53°)}{1 - \cos(70.53°)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = ArcCos(1/2) = 60°$$

y los ángulos determinan a los lados (a diferencia de los triángulos planos).

Una consecuencia curiosa del teorema 2, es que el área de un triángulo esférico determina el exceso esférico y por tanto la suma de sus ángulos. Así,

Ejemplo 22. *En una tierra esférica con $r = 6371$ km, un triángulo cuyo exceso sea de un grado sexagesimal, tiene de área*

$$S = r^2(A + B + C - \pi) = 6371^2 * \varepsilon = 40589641 * 180/Pi = 708423\ km^2$$

Así, para que la suma de los ángulos de un triángulo en la tierra sea $\geq 181°$, hace falta que su área sea $\geq 708\,423\ km^2$. O sea, en España que tiene $504\,645\ km^2$ cualquier triángulo esférico tiene exceso menor que $1°$.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

6. CÁLCULO DEL AZIMUT DIRECTO E INVERSO ENTRE DOS PUNTOS.

Elegido un sistema de referencia, dos puntos A y B en la superficie de la tierra determinan dos radio vectores, u_A, u_B, desde el origen. El origen puede ser el centro de la tierra u otro punto arbitrario como sucede en el caso de puntos cercanos que caen una misma hoja de un mapa UTM[28].

Si los dos puntos caen en una misma hoja de un mapa UTM, se pueden sacar sus 3 coordenadas del mismo mapa. Las dos primeras directamente por las etiquetas de la cuadrícula y la tercera por las curvas de nivel que los contiene.

6.1. Azimut cartográfico. En el caso de punto cercanos, conocidos los dos vectores se conoce el vector de la visual entre ambos

$$v = AB = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

que marca la dirección desde A hacia B. También, su proyección horizontal $w = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, 0)$ que se puede considerar sobre el mismo mapa UTM.

Por la orientación del mapa, la dirección norte la marca el vector $u = (0,1,0)$. La forma de hallar el azimut cartográfico o ángulo que forma la dirección con el norte del mapa, se calcula con el producto escalar. Así

$$Az_c(AB) = ArcCos\left(\frac{w \cdot u}{\|w\| * \|u\|}\right) = ArcCos\left(\frac{w \cdot u}{\|w\|}\right)$$

[28] El origen de referencia es un punto en el mismo plano del mapa a la izquierda y abajo.

Y el azimut verdadero se halla usando la convergencia de cuadrícula de la hoja del mapa. Pero debe repartirse entre el azimut directo e inverso.

6.2. Azimut verdadero. Si los puntos no caen dentro de una misma hoja UTM, la única forma de calcular el azimut de AB es con su latitud y longitud.

Los radio vectores $u_A = (a_1, a_2, a_3)$ y $u_B = (b_1, b_2, b_3)$ se calculan con las fórmulas[29] del lema 6. Pero AB no da la dirección verdadera desde A a B.

La razón es que cuando los puntos no están cercanos el vector AB penetra en la tierra, no marca la visual y no se puede seguir como rumbo.

La dirección desde A hacia B es la del vector tangente a la tierra que sí se puede seguir como rumbo. En este caso, el azimut es el ángulo que forma esa tangente con la que mira al polo norte desde A.

Coincide con el ángulo diedro entre dos planos que pasan por el centro de la tierra y que determinan dos lados de un triángulo esférico. El que forman los puntos A, B con el polo norte supuesta la tierra esférica[30].

Si el punto B está al Este del A, entonces el azimut desde A a B viene dado por el ángulo A de ese triángulo esférico. Y el azimut desde el punto B hacia el A es el suplementario del ángulo B del mismo triángulo esférico.

---

[29] En un sistema de referencia geocéntrico que usa como eje z, el eje de rotación terrestre en vez de la línea de gravedad local. La línea que marca el norte en A o B, no es (0,1,0).

[30] Resolver ese triángulo esférico es la manera de calcular el rumbo entre esos dos puntos.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Cuando los puntos están cercanos, el ángulo en el polo norte es muy pequeño y los meridianos que por A y B son casi paralelos. En ese caso, el azimut directo de AB casi coincide con el inverso de BA y recíprocamente.

Cuando los puntos están sobre el mismo paralelo (misma latitud), entonces el azimut directo de A a B coincide con el inverso de B a A y recíprocamente.

En ese caso, el triángulo esférico es rectangular en A y B, los azimutes son $90°$ y $(90+180)° = 270°$, señalando al Este desde A y al Oeste desde B.

Pero en general, los azimutes desde A o desde B son muy diferentes. Por ej.

Ejemplo 23. *Dados las coordenadas* $A(37°\ 11'\ 13", -3°\ 35'\ 31.95")$ *y* $B(37°\ 58'\ 19.7", 23°\ 43'\ 0.9")$ *de Granada y Atenas. Para calcular el azimut directo e inverso desde Granada a Atenas y viceversa:*

Se resuelve el triángulo esférico formado por Granada, Atenas y el polo Norte. Se obtiene el valor del ángulo diedro en Granada que vale $A = 79°\ 32'\ 2.70238"$*, ese es el azimut directo de A a B (Granada a Atenas). Su azimut inverso se calcula sumando* $180°$*. O sea,* $259°\ 32'\ 2.70238"$*.*

Análogamente, se halla el ángulo en Atenas, $B = 83°\ 36'\ 38.5059"$*. Su suplementario es el azimut directo de B a A (ya que Granada está al Este de Atenas y el azimut hay que medirlo a derechas).*

Así, el azimut directo de B a A es $276°\ 23'\ 21.4941"$*. Y su contradirección o azimut inverso se calcula restándole* $180°$*. O sea,* $96°\ 23'\ 21.4941"$

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

7. Ejercicios.

Ejercicio 1. *¿A partir de que área la suma de los ángulos de un triángulo esférico en la luna, cuyo radio medio es 1 736 km, supera a 181º?. Calcula el área de la Luna y compárala con el resultado obtenido.*

Ejercicio 2. *Calcula los ángulos y los lados del triángulo esférico formado por* $A = PN$, $B = (0°, 45° E)$, $C = (0°, 45° W)$.

Ejercicio 3. *Calcula los ángulos y los lados del triángulo esférico formado por* $A = PN$, $B = (0°, 60° E)$, $C = (0°, 60° W)$.

Ejercicio 4. *Resuelve el triángulo esférico formado por* $A = (45° N, 0°)$, $B = (0°, 90° E)$, $C = (0°, 90° W)$.

Ejercicio 5. *Resuelve el triángulo esférico formado por* $A = (60° N, 0°)$, $B = (0°, 90° W)$, $C = (60° S, 0°)$.

Ejercicio 6. *Halla el área del triángulo esférico definido por Huéscar* (37.48° *N,* 2.33° *W), Motril* (36.44° *N,* 3.31° *W) y Loja* (37.10° *N,* 4.10° *W).*

Ejercicio 7. *Resuelve el triángulo que pasa por Paris, Granada y Atenas. Calcula el exceso y el defecto esférico de este triángulo. Calcula su área.*

Ejercicio 8. *Calcula las coordenadas geocéntricas de Ayamonte* (37.13° *N,* 7.24° *W) y Roses* (42.16° *N,* 43.11° *E) y su mínima distancia espacial. Calcula el error cometido por no haber considerado la distancia esférica.*

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ejercicio 9. *Calcula las longitudes de los arcos de meridiano y paralelo comprendidos entre Ayamonte y Roses y su distancia esférica. Halla el área del trapecio que definen en kilómetros cuadrados.*

Ejercicio 10. *Desde Granada G (37° 11’ 13”, −3° 35’ 31”.95). Halla las coordenadas geográficas de otro punto P situado 91322.8 metros al este y a 110970.4 metros al norte. Calcula el área del cuadrilátero formado por arcos de meridianos y paralelos que tiene a G al SW y a P al NE y la distancia esférica entre ambos puntos.*

Ejercicio 11. *Desde el puerto A = (39° 33’ N, 82° 11’ E) sale un buque, el día 3 de enero a las 14 horas 20 minutos, a 10 nudos*[31] *siguiendo un arco de paralelo hacia el oeste. De otro puerto B = (20° 45’ N, 23° 10’ E), salió en su persecución otro buque a 20 nudos, siguiendo un arco de cmax, y le dio alcance a las 21 horas 10 minutos del día 5 de enero. Averigua el rumbo de salida del barco perseguidor, el día y la hora en que salió este buque y la situación del punto de encuentro de ambos buques.*

Ejercicio 12. *Dado el arco de cmax entre Granada y Atenas de coordenadas geográficas A (37° 11’ 13”, −3° 35’ 31”.95) y B (37° 58’ 19”.7, 23° 43’ 0”.9). ¿ Cuál es el punto mas al norte de ese arco p = AB ?*

---

[31] 1 nudo = 1 milla náutica por hora = 1852 metros por hora.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ejercicio 13. *Resuelve el triángulo formado por A (24° 18’ N, 133° 39’E) y B (36° 47’ N, 125° 24’W) y el polo norte. Calcula y dibuja su triángulo polar. ¿ Cuál es el punto mas al norte del lado $p = AB$?*

8. Test de repaso.

Para comenzar el cuestionario pulsa el botón de inicio.
Cuando termines pulsa el botón de finalizar.
Para marcar una respuesta coloca el ratón en la letra correspondiente y pulsa el botón de la izquierda (del ratón).

Inicio del Test

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Se pueden sumar 2 puntos pero no 2 vectores.
(b) Se pueden sumar 2 vectores pero no 2 puntos.
(c) Se pueden sumar 2 puntos y también 2 vectores.
(d) No se pueden sumar 2 puntos y tampoco 2 vectores.

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Existe el punto diferencia de 2 puntos.
(b) Existe el vector diferencia de 2 puntos.

(c) Existe el vector diferencia de 2 vectores pero no de 2 puntos.
(d) No existe diferencia ni de puntos ni de vectores.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Toda norma es una distancia pero no al revés.
(b) Norma es sinónimo de distancia entre vectores.
(c) Toda distancia es la norma de un vector.
(d) Existe la distancia entre vectores pero no entre puntos.

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Un ángulo es un producto escalar.
(b) El producto escalar sirve para definir ángulo entre vectores.
(c) Un producto escalar es un ángulo.
(d) El concepto de ángulo sirve para calcular el producto escalar.

5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) No existen los cosenos directores de un vector sino de un punto.
(b) La suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector pueden sumar cualquier número.
(c) La suma de los cosenos directores de un vector suman uno.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

(d) La suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector suman uno.

6. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) A veces no existe el producto vectorial de 2 vectores.
(b) El producto vectorial de 2 vectores es un número.
(c) El módulo del producto vectorial se interpreta como un área.
(d) El módulo del producto vectorial es el producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman.

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) A veces no existe el producto triple escalar de 3 vectores.
(b) El producto triple escalar de 2 vectores es un número.
(c) El producto triple escalar de 3 vectores es otro vector.
(d) El valor absoluto del producto triple escalar se interpreta como un volumen.

8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Las coordenadas polares son 2 ángulos.
(b) Basta con 2 ángulos para determinar un punto en cualquier esfera.
(c) Basta con 2 ángulos para determinar un punto en la esfera unidad.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

(d) Hay que dar 2 ángulos y el radio para determinar un punto en la esfera unidad.

9. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Un triángulo esférico puede no tener triángulo polar.
(b) Un triángulo esférico es igual a su polar.
(c) Un triángulo esférico tiene sólo ángulos.
(d) Un triángulo esférico tiene 3 lados y 3 ángulos.

10. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) La suma de los 3 ángulos de un triángulo esférico es menor que 360°.
(b) La suma de los 3 lados de un triángulo esférico es menor que 360°.
(c) La suma de los 3 ángulos de un triángulo esférico es menor que 180°.
(d) La suma de los 3 ángulos de un triángulo esférico es mayor que 540°.

Final del Test | Puntos:

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra