LOS NÚMEROS COMPLEJOS $\mathbb{C}$

¿Existe la raiz cuadrada de un número negativo?

ugr Universidad de Granada

Enrique R. Aznar

Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada

Enrique R. Aznar

Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
Página 3 de 37
Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

1. Introducción.

Los números que hoy llamamos "complejos" fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1672) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596-1650) quien afirmó que "ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación" y acuñó el calificativo "imaginarias" para referirse a ellas.

Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución de un problema resulta ser un número complejo se interpreta esto como que el problema no tiene solución. Para Leibnitz "el número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser."

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema bien cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

similar con los números complejos. Hasta que los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se preocuparon de la "naturaleza" de los mismos; no se preguntaron "¿qué es un número complejo?", sino que se dijeron "a ver, para qué sirven, qué puede hacerse con ellos".

Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el resultado conocido como Teorema Fundamental del Álgebra que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que también son números complejos.

Fíjate en cada una de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+3 &= 0 \\ 2x+3 &= 0 \\ x^2-2 &= 0 \\ x^2+2x+2 &= 0 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones

$$x=-3,\ x=-\frac{3}{2},\ x=\pm\sqrt{2},\ x=-1\pm i$$

son respectivamente, un número entero, un racional, dos reales y dos complejos.

Podría ocurrir que este proceso de ampliación del campo numérico continuara. ¿Qué ocurrirá si ahora consideramos ecuaciones polinómicas con coeficientes complejos? Por ejemplo:

$$x^5+(1-i)x^4+(\frac{1}{5}-i\sqrt{2})x^2-8x+3-\frac{i}{\sqrt{3}}=0$$

¿Cómo serán sus soluciones? ¿Aparecerán también nuevos tipos de números? El Teorema Fundamental del Álgebra nos dice que esa ecuación tiene soluciones que también son números complejos y, por tanto, que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

El término, hoy usado de "números complejos" se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra "i" que Euler (1707-1783) había usado esporádicamente.

En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

2. El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos

Consideremos en el conjunto $\mathbb{R}^2$ (conjunto de parejas de números reales) las operaciones de adición y producto definidas por,

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (a,b)+(a',b') & = & (a+a',b+b') \\ (a,b)(a',b') & = & (aa'-bb',ab'+a'b) \end{array}}$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa y conmutativa de las operaciones así definidas y la distributiva del producto respecto de la suma[1]. El elemento neutro de la suma es (0,0) y (1,0) es la unidad del producto. Además, $(-a,-b)$ es el opuesto de (a,b), y todo $(a,b) \neq (0,0)$ tiene inverso dado por la pareja[2]

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

[1] En realidad, las definiciones de suma y producto, se pueden obtener por el proceso inverso. Suponiendo, $i^2 = -1$, y que dichas operaciones existen y verifican las propiedades asociativa, conmutativa, distributiva, etc. Entonces

$$(a+bi)+(a'+b'i)) = a+a'+(b+b')i$$

$$(a+bi)(a'+b'i)) = aa'+ab'i+ba'i+bb'i^2 = (aa'-bb')+(ab'+ba')i$$

[2] Se demuestra, mas adelante, en el lema 2.

Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Página web personal
Página de Abertura
Contenido

Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

Todas estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ (léase "el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las operaciones de adición y producto") es un cuerpo.

Dicho cuerpo se representa simbólicamente por $\mathbb{C}$ y sus elementos se llaman números complejos.

Con la definición de producto, es fácil comprobar algunas igualdades, por ejemplo

$$\begin{aligned} (0,1)(0,1) &= (-1,0) \\ (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) &= (0,1) \end{aligned}$$

que se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} (0,1)^2 &= (-1,0) \\ (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^2 &= (0,1) \end{aligned}$$

Además, si llamamos $i=(0,1)$, se obtienen las igualdades

$$\begin{aligned} i^2 &= (-1,0) \\ (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^2 &= i \end{aligned}$$

y si, finalmente, simplificamos la notación de las parejas con cero en la segunda coordenada, escribiendo $a = (a,0)$[3].

[3] En la sección siguiente, daremos razones para esta simplificación de la notación.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Podemos escribir las igualdades anteriores como

$$i^2 = -1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^2 = i$$

que son mucho más intuitivas y fáciles de recordar[4].

En particular, hemos demostrado la célebre fórmula, $i^2 = -1$, que tanto costó aceptar en el pasado. De donde, se deduce también, la factorización del polinomio cuadrático más famoso de la historia

$$x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$$

Definición 1. *A los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama unas veces pares ordenados de números reales, otras vectores o puntos y también números complejos.*

En $\mathbb{R}^2$ conviven varias estructuras cada una con su terminología propia. Por eso a los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama vectores si se está considerando la estructura de espacio vectorial, puntos si fijamos la atención en la estructura topológica o afín, pares ordenados cuando estamos pensando en $\mathbb{R}^2$ como conjunto sin ninguna estructura particular y números complejos cuando se considera la estructura aritmética de cuerpo antes definida.

[4] También veremos como escribir una pareja como una suma.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ocurre que estos términos se usan a veces en un mismo párrafo lo que puede resultar confuso. La regla que debes tener siempre presente es que todo concepto matemático tiene sentido propio dentro de una determinada estructura matemática.

Por ello, a un elemento de $\mathbb{R}^2$ se le llama número complejo cuando se va a usar el producto antes definido que es lo que en realidad distingue a los números complejos de los vectores de $\mathbb{R}^2$.

3. Forma binómica de un número complejo

El símbolo usual (a, b) para representar pares ordenados no es conveniente para representarlo como número complejo.

Representaremos los números complejos con un simbolismo más apropiado en el que va a intervenir el producto complejo. Para ello, observa que:

$$(a,0)+(a',0)=(a+a',0)$$

$$(a,0)(a',0)=(aa'-0*0, a*0+0*a')=(aa',0)$$

esto indica que los números complejos de la forma $(a,0)$, se comportan respecto a la suma y la multiplicación de números complejos, exactamente de la misma forma que lo hacen los números reales respecto a la suma y multiplicación propias.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

En términos más precisos, $\mathbb{R}\times 0$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$. Por esta razón, en las operaciones con números complejos podemos sustituir los complejos del tipo $(a,0)$ por el número real a.

Es decir, hacemos la identificación $(a,0) = a$.

Fíjate que con dicha identificación podemos considerar los números reales dentro de los complejos. O sea, considerar la aplicación inclusión siguiente

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

$$a \mapsto (a,0)$$

y podemos pensar que el conjunto o cuerpo $\mathbb{C}$ es una ampliación de los reales.

Definición 2. *Al número complejo (0,1) lo representaremos por i y lo llamaremos unidad imaginaria.*

Con ello razonamos la famosa igualdad encontrada antes

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

Y podemos reescribir una pareja como una suma

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi$$

O sea, se tiene también que toda pareja, (a,b), se puede escribir como una suma $a + bi$[5].

[5] También como $a + ib$ por la conmutativa del producto.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Definición 3. *Se dice que* $a + bi$ *es la expresión binómica del número complejo (a,b). Se dice que* a *es la parte real y* b *es la parte imaginaria del número complejo* $a + bi$*.*

El producto ahora es muy fácil de recordar, pues por las propiedades distributiva, asociativa y la igualdad fundamental $i^2 = -1$, tenemos

$$(a+ib)(a'+ib') = aa' + i^2bb' + i(ab'+ba') = aa' - bb' + i(ab'+ba')$$

Es costumbre representar los números complejos con las letras z y w y reservar las letras x, y, a, b para representar números reales. Una expresión de la forma $z = x + iy$ se interpreta como que z es el número complejo cuya parte real es x y cuya parte imaginaria es y.

Definición 4. *Se escribe* $Re(z)$ *e* $Im(z)$ *para representar las partes real e imaginaria de z. Naturalmente, dos números complejos son iguales cuando tienen igual parte real e igual parte imaginaria.*

Acabamos de ver que $i^2 = -1$ de aquí se tiene que $i = \sqrt{-1}$. Pero hay que tener cuidado con esta notación de raiz cuadrada. Fíjate lo que ocurre si manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

$$-1 = i^2 = ii = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Luego $1=-1$. Esto es una contradicción que nos está diciendo que la regla de multiplicación de raices cuadradas

$$\sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$$

válidas para números reales positivos no es válida para raices de números complejos[6].

4. Cálculo de raíces cuadradas de números complejos

Como, por la regla de los signos, el cuadrado de cualquier número real positivo. Se deduce que no existen en $\mathbb{R}$ las raíces cuadradas de ningún número negativo. En $\mathbb{C}$, sin embargo existen siempre las raíces cuadradas de cualquier número:

Lema 1. *Dado, $z=a+bi\in\mathbb{C}$, con $a,b\in\mathbb{R}$. El número complejo*

$$w=\sqrt{\frac{1}{2}(|z|+a)}+i\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}(|z|-a)}$$

donde el signo ε se elige de forma que $b=\varepsilon|b|$, verifica $w^2=z$.

Demostración: Como, $(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$, si

$$(x+iy)^2=a+bi$$

[6]Observa, además, que no hemos definido todavía que es la radicación compleja. La regla válida la demostraremos en el lema 6.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

obtendríamos $x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$. O sea,

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \end{aligned}$$

como además

$$x^2 + y^2 = |w|^2 = |z|$$

sumando y restando se obtienen

$$\begin{aligned} 2x^2 &= |z| + a \\ 2y^2 &= |z| - a \end{aligned}$$

se donde se deduce el enunciado. □

Como en el caso real, **al número w del lema anterior se le llama una raíz cuadrada del z.** Además de éste, también $-w$ es una raíz cuadrada. Por tanto, $\sqrt{z} = \pm w$, y existen dos raíces cuadradas de cada número complejo[7].

Ejemplo 1. *Halla las dos raíces cuadradas de i.*

Solución: Como, $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 1$, $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, tenemos

$$\pm w = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(1+0)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(1-0)}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

[7] Salvo para $z = 0$ donde la raíz cuadrada, $\sqrt{z} = \pm 0$, es única. Hemos encontrado dos raíces cuadradas para cada número complejo z. Como la ecuación $x^2 - z = 0$ no puede tener más de dos raíces, éstas dos, $\pm w$, son todas las que existen.

Como la extracción de raíces cuadradas es lo que se usa, además de la aritmética, para resolver ecuaciones cuadráticas. Éstas se pueden resolver cuando tienen coeficientes complejos. Por ejemplo,

Ejemplo 2. *Halla de forma exacta (no numérica) las soluciones de la ecuación* $z^2+(1+i)z+i=0$.

Solución: Como[8]

$$\left(z+\frac{1+i}{2}\right)^2-\frac{(1+i)^2}{4}+i \;=\; z^2+(1+i)z+i=0$$

es equivalente a

$$\left(z+\frac{1+i}{2}\right)^2 \;=\; \frac{(1+i)^2}{4}-i \;=\; \frac{i^2+2i+1-4i}{4} \;=\; \frac{-2i}{4}$$

$$z+\frac{1+i}{2} \;=\; \sqrt{\frac{-2i}{4}} \;=\; \frac{\sqrt{-2i}}{2}$$

las dos soluciones de la ecuación cuadrática son

$$z \;=\; -\frac{1+i}{2}+\frac{\sqrt{-2i}}{2} \;=\; -\frac{1+i}{2}\pm\frac{(1-i)}{2} \;=\; \frac{-1-i\pm(1-i)}{2} \;=\; \{-1,-i\}$$

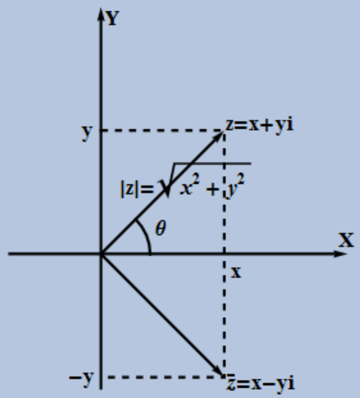
ya que $\sqrt{-2i} \;=\; \pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(2+0)}-i\sqrt{\tfrac{1}{2}(2-0)}\right) \;=\; \pm(1-i)$

[8] Aunque se puede usar la conocida fórmula de las ecuaciones de segundo grado. Aquí hallamos las raíces, por el método llamado de completación de cuadrados.

5. Representación gráfica. Complejo conjugado y módulo de un número complejo

Es usual interpretar el número complejo $x + i\,y$ como el vector del plano (x, y) y, en ese sentido, se habla del plano complejo.

El eje horizontal recibe el nombre de eje real, y el eje vertical recibe el nombre de eje imaginario.



Definición 5. *Si $z = x + i\,y$ es un número complejo (con x e y reales), entonces el conjugado de z se define como el complejo $\overline{z} = x - i\,y$.*

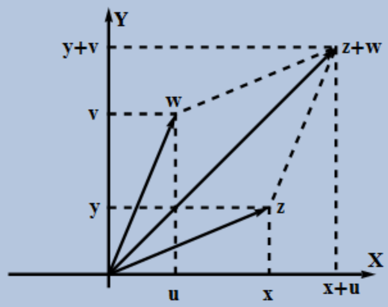
El módulo o valor absoluto de z, se define como el número real $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Observa, que la raíz cuadrada $\sqrt{x^2+y^2}$ está definida sin ambigüedad; es la raíz cuadrada positiva del número real no negativo x^2+y^2.

Geométricamente $\overline{z}$ es sencillamente la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$, por el teorema de Pitágoras, es la distancia euclídea del punto (x, y) a $(0,0)$ o, también, la longitud o norma euclídea del vector (x, y) (ver figura anterior).

Definición 6. *La distancia entre dos números complejos z y w se define como $|z-w|$.*

Dos números complejos $z = x+i\,y$ y $w = u+i\,v$ determinan un paralelogramo cuya diagonal es $z+w$.



ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Se comprueba fácilmente que si z y w son números complejos se verifica que

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

También:

Lema 2. *Dado el número complejo, $z = x + y \cdot i$ se verifica que el producto $z\overline{z} = (x+y \cdot i)(x-y \cdot i)$ es un número real (llamado el cuadrado de su norma). Además, se verifica que*

$$\boxed{z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \cdot i}$$

Demostración: como

$$(x + y \cdot i)(x - y \cdot i) = (x^2 + y^2) + (-xy + xy) \cdot i = x^2 + y^2$$

obtenemos que $|z|^2 = x^2 + y^2 = (x + y \cdot i)(x - y \cdot i)$ es un número real (no negativo). Esta igualdad es equivalente a

$$(x + y \cdot i)(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot i) = 1$$

de donde se deduce el resto del enunciado. □

También son de comprobación inmediata las desigualdades siguientes

Lema 3. *Dado el número complejo, $z = x + y \cdot i$, donde $x = Rez$, $y = Imz$ se verifican las desigualdades*

$$\max\{|x|, |y|\} \leq |z| \leq |x| + |y|$$

Demostración: como las tres cantidades son no negativas, basta comprobar las correspondientes desigualdades con sus cuadrados

$$|x|^2 \leq x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$$

lo cual es inmediato. □

También se demuestran las siguientes propiedades:

Lema 4. *Dados dos números complejos, $z = x + y \cdot i$, $w = u + w \cdot i$, se verifican las propiedades*

i) $|zw| = |z||w|$.
ii) $|z + w| \leq |z| + |w|$

Demostración: como todas las cantidades son no negativas, basta comprobarlo con sus cuadrados

i) $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2$.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

$$\text{ii) } |z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z}+w\overline{w}+z\overline{w}+\overline{z}w =$$

$$= |z|^2+|w|^2+2Re(z\overline{w}) \leq |z|^2+|w|^2+2|Re(z\overline{w})| \leq$$

$$\leq |z|^2+|w|^2+2|z\overline{w}| = |z|^2+|w|^2+2|z||\overline{w}| = |z|^2+|w|^2+2|z||w| =$$

$$= (|z|+|w|)^2$$

como queríamos demostrar. □

Supuesto que $z \neq 0$ y $w \neq 0$, de la demostración anterior deducimos tambien que se verifica la igualdad $|z+w| = |z|+|w|$ si, y solo si, $Re(z\overline{w}) = |z\overline{w}|$, esto es, si $z\overline{w} \in \mathbb{R}^+$, o lo que es lo mismo $z\overline{w} = r$ donde $r \in \mathbb{R}^+$.

Esta igualdad, puede escribirse de forma equivalente,multiplicando por w, como $z|w|^2 = rw$, esto es, $z = lw$ para algun $l \in \mathbb{R}^+$, lo que quiere decir que z y w estan en una misma semirrecta a partir del origen.

Definición 7. *La desigualdad obtenida se le llama la* **desigualdad triangular**

$$|z+w| \leq |z|+|w|$$

6. Forma polar de un número complejo

El uso de coordenadas polares en el plano facilita mucho los cálculos con productos de números complejos. Para cualquier número complejo $z = x+$

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

$yi \neq 0$ podemos escribir

$$z = |z|(\frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|}i)$$

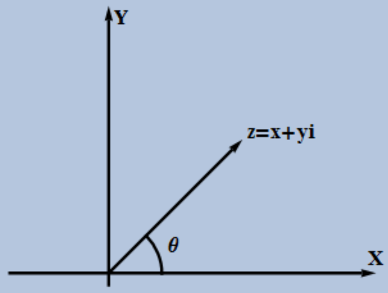
Como $(\frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|}i)$ es un punto de la circunferencia unidad, puede escribirse en la forma

$$(\frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|}i) \ = \ (\cos\theta, \sin\theta)$$

para algun numero $\theta \in \mathbb{R}$. Resulta asi que

$$z = |z|(\cos\theta, \sin\theta)$$

Esta forma de expresar un número complejo recibe el nombre de **forma polar** o **forma módulo-argumento** cuya interpretación gráfica es inmediata.



Es claro que, dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos numeros reales $\theta \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z|(cos\theta + i sen\theta)$; cualquiera de ellos recibe el nombre de argumento de z.

Definición 8. *Definimos el conjunto de los argumentos de z:*

$$Arg(z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z|(cos t + i sen t)\}$$

Observa que

$$s, t \in Arg(z) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} cos(t) = cos(s) \\ sen(t) = sen(s) \end{array} \right\} \Longleftrightarrow s = t + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, conocido un argumento $t_0 \in Arg(z)$ cualquier otro es de la forma $t_0 + 2k\pi$ para algun $k \in \mathbb{Z}$ es decir, $Arg(z) = t_0 + 2\pi\mathbb{Z}$.

Es claro que dos numeros complejos no nulos, z, w, son iguales si, y solo si, tienen el mismo módulo y $Arg z = Arg w$.

Definición 9. *De entre todos los argumentos de un numero complejo* $z \neq 0$ *hay sólo uno que se encuentra en el intervalo* $]-\pi, \pi]$, *se representa por* $arg(z)$ *y se le llama* **el argumento principal** *de z.*

El argumento principal, $arg(z)$, de un número complejo se calcula así:

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Lema 5.

$$arg(z) = \begin{cases} -\pi + \arctan\frac{y}{x} & si\ x<0,\ y<0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & si\ x<0,\ y\geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} & si\ x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & si\ x=0,\ y<0 \\ \frac{\pi}{2} & si\ x=0,\ y>0 \end{cases}$$

Puede parecer un poco extraña la forma de elegir el argumento principal de un número complejo. Pero simplemente, la elección que hemos hecho, supone que medimos ángulos desde $-\pi$ a π. En el semiplano superior de 0 a π y en el semiplano inferior de $-\pi$ a 0.

7. Fórmula de De Moivre

Veamos cómo la forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos. Consideremos dos números complejos no nulos

$$z = |z|(cos\theta + i sen\theta)$$

$$w = |w|(cos\phi + i sen\phi)$$

Entonces

$$zw = |z||w|(cos\theta + i sen\theta)(cos\phi + i sen\phi) =$$
$$= |zw|[(cos\theta cos\phi - sen\theta sen\phi) + i(sen\theta cos\phi + cos\theta sen\phi)] =$$
$$= |zw|(cos(\theta+\phi) + i sen(\theta+\phi))$$

donde se ha usado las conocidas fómulas del coseno y del seno del ángulo suma[9].

Es decir, se obtiene la regla de que **para multiplicar dos numeros complejos se multiplican sus modulos y se suman sus argumentos**. Por ejemplo,

Ejemplo 3. *Para calcular* $(1+i)^4$ *como el módulo de la base es*

$$|1+i| = \sqrt{2}$$

y su argumento principal

$$arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

se sigue que

$$(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4(cos(4\frac{\pi}{4}) + i sen(4\frac{\pi}{4})) =$$
$$= 4(cos\pi + i sen\pi) = 4(-1) = -4$$

Así pues, el producto de dos números complejos es geométricamente un **giro** (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una **homotecia** (el producto de los módulos de ambos números).

[9] Estas dos fórmulas

$$cos(\theta+\phi) = cos\theta cos\phi - sen\theta sen\phi$$

$$sen(\theta+\phi) = sen\theta cos\phi + cos\theta sen\phi$$

se demostrarán en el tema de trigonometría plana.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Acabamos de ver que si $\theta \in Arg(z)$ y $\phi \in Arg(w)$, entonces

$$\theta + \phi \in Arg(zw)$$

Observa que se puede obtener también, de la anterior regla, que si $\theta \in Arg(z)$ entonces

$$-\theta \in Arg(\frac{1}{z})$$

Es fácil de demostrar, ahora mediante inducción

Teorema 1. *[fórmula de De Moivre[10]] Si z es un complejo no nulo, θ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $n\theta \in Arg(zn)$. Es decir,*

$$\boxed{z^n = |z|^n(cos(n\theta) + i sen(n\theta))}$$

8. Raíces de un número complejo

Se trata ahora de resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural, $n > 2$, y $z \neq 0$ es un número complejo conocido. Si escribimos w en forma polar:

$$w = |w|(cos\phi + i sen\phi)$$

[10] La hemos demostrado para $n = 2$ y falta sólo el paso de la inducción que omitimos.

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
Página 25 de 37
Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

Usando la fórmula de De Moivre, podemos escribir la ecuación $w^n = z$ en la forma equivalente:

$$w^n = |w|^n(cos(n\phi) + isen(n\phi)) = |z|(cos\theta + isen\theta)$$

Esta igualdad se da cuando

$$|w|^n = |z|$$

y

$$n\phi = \theta + 2k\pi$$

donde $k \in \mathbb{Z}$.Deducimos que[11]

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}$$

Ahora bien, para cualquier número ϕ_k de la forma $\phi_k = (\phi+2k\pi)/n$ tenemos un número complejo

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(cos\phi_k + isen\phi_k)$$

solución de la ecuación inicial. O sea, tal que $(w_k)^n = z$.

Como una ecuación polinómica de grado n no puede tener más de n soluciones, se sigue que distintos valores de k pueden dar lugar al mismo número w_k. Esta condición es equivalente a

$$w_k = w_q \Longleftrightarrow \phi_k - \phi_q = 2m\pi \Longleftrightarrow k - q = nm$$

Es decir, a que k y q den el mismo resto al dividirlos por n.

[11] se trata de la raiz n-ésima de un numero positivo, cosa ya conocida.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Deducimos que para $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ obtenemos raíces distintas y cualquier otra raíz w_q es igual a una de ellos. Por tanto hay n raíces n-ésimas distintas de z.

De entre todas las raíces n-ésimas de z vamos a designar con el simbolo $z_0 = \sqrt[n]{z}$ a la raíz n-ésima principal, que esta definida por

$$z_0 = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(cos\frac{arg z}{n} + i sen\frac{arg z}{n})$$

Observa que en el caso particular de que z sea un número real positivo, entonces la raíz principal de z (considerada como número complejo) coincide con la raíz de z (considerada como número real positivo).

Hemos obtenido que

Teorema 2. *Las raíces n-ésimas de un número complejo, z, vienen dadas por*

$$\boxed{\sqrt[n]{|z|}(cos\frac{\phi+2k\pi}{n} + i sen\frac{\phi+2k\pi}{n}) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

Ejemplo 4. *Por la fórmula de De Moivre, tomando $u = cos(2\pi/n) + i sen(2\pi/n)$, se tiene que*

$$u^n = 1$$

Entonces, por el resultado anterior, las potencias de éste número

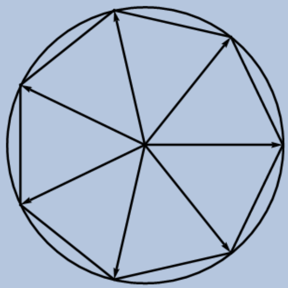
$$u^0 = 1, u, u^2, ..., u^{n-1}$$

son todas las raíces n-ésimas de la unidad ($z = 1$).

Usando el ejemplo anterior, podemos escribir, de nuevo por DeMoivre, las raíces n-ésimas de un z arbitrario en la forma

$$z_k = z_0 u^k$$

Como multiplicar por u es un giro de amplitud $2\pi/n$, deducimos que las n raíces de z se obtienen girando la raíz n-ésima principal, z_0, con giros sucesivos de amplitud $2\pi/n$. Es decir, si representamos todas las raíces n-ésimas de z obtenemos n puntos sobre una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt[n]{|z|}$ que forman un polígono regular de n lados.



Sabemos que las dos raíces cuadradas de 1 son $\{1,-1\}$[12]. Para hallar las raíces de la unidad superiores usamos el teorema anterior.

[12] Es cierto en cualquier cuerpo, por ejemplo en $\mathbb{Q}$, en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ejemplo 5. *Halla las raíces cúbicas, complejas, de la unidad.*

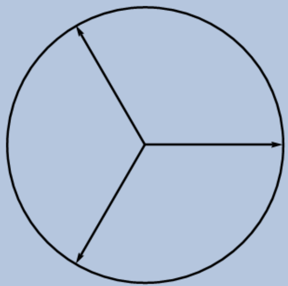
Solución: Para $n = 3$, la raíz n-ésima principal es

$$u = cos(2\pi/3) + i sen(2\pi/3) \;=\; cos(120^\circ) + i sen(120^\circ) \;=\; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

y las tres raíces cúbicas de la unidad son

$$\{1, u, u^2\} \;=\; \{1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

y su dibujo es



Ejemplo 6. *Halla las raíces cuartas, complejas, de la unidad.*

Solución: Para $n = 4$, la raíz n-ésima principal es

$$u = cos(2\pi/4) + i sen(2\pi/4) \;=\; cos(90^\circ) + i sen(90^\circ) \;=\; i$$

y las cuatro raíces cúbicas de la unidad son

$$\{1, u, u^2, u^3\} = \{1, i, -1, -i\}$$

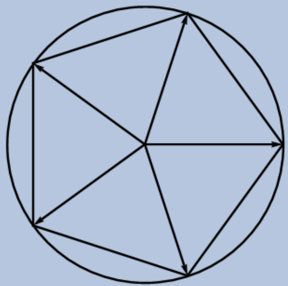
Ejemplo 7. *Halla las raíces quintas, complejas, de la unidad.*

Solución: Para $n = 5$, la raíz n-ésima principal es

$$u = cos(2\pi/5) + i sen(2\pi/5) = cos(72^\circ) + i sen(72^\circ)$$

y las cuatro raíces cúbicas de la unidad son[13]

$$\{1, u, u^2, u^3, u^4\}$$



[13] Se puede demostrar que $cos(72^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ de donde $sen(72^\circ) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. Los griegos ya sabían construir con regla y compás el pentágono regular luego ya conocían empíricamente estas fórmulas

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

9. Producto de raíces n-ésimas principales

En general no es cierto que dados dos números complejos z y w entonces el producto de las raíces n-ésimas principales de z y w sea igual a la raíz n-ésima principal del producto zw.

Lo que si es cierto es que el producto de dos raíces n-ésimas cualesquiera de z y w es una raíz n-ésima de zw. Por tanto, $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$, es una raíz n-ésima de zw pero no tiene por que ser la principal $\sqrt[n]{zw}$. Veamos cuándo se verifica la igualdad.

Lema 6. *La igualdad* $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$ *equivale a que*

$$-\pi \ < \ arg(z) + arg(w) \ < \ \pi$$

Demostración: Como los numeros $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$ y $\sqrt[n]{zw}$ tienen igual módulo, la igualdad equivale a que sus argumentos sean iguales. O sea, a que para algún entero k se verifique que

$$\frac{arg(z)}{n} + \frac{arg(w)}{n} = \frac{arg(zw)}{n} + 2k\pi$$

lo que es equivalente a que

$$arg(z) + arg(w) = arg(zw) + 2kn\pi$$

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ahora, como $n > 2$ y $-2\pi < arg(z) + arg(w) \leq 2\pi$, deducimos que ha de ser $k = 0$. Luego, debe ocurrir que

$$arg(z) + arg(w) = arg(zw)$$

como un argumento principal está siempre entre $-\pi$ y π, hemos demostrado lo que queríamos. $\square$

Ejemplo 8. *En el caso en que $n = 2$, $z = w = -1$, tenemos que*

$$arg(-1) + arg(-1) = 2\pi \neq 0 = arg(1) = arg((-1)(-1))$$

y no se cumple la condición anterior. En este caso, $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ es una raíz cuadrada de $1 = (-1)(-1)$ pero no es la raíz cuadrada principal de 1.

10. Método de Newton para los complejos.

11. Ejercicios.

Ejercicio 1. *Comprueba la igualdad.*

$$\sqrt{1 + i\sqrt{3}} + \sqrt{1 - i\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

Ejercicio 2. *Expresa en forma polar el número complejo $1 + i$.*

Ejercicio 3. *Expresa en forma polar el número complejo $\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}$.*

Ejercicio 4. *Expresa en forma polar el número complejo $\frac{1}{-1+i\sqrt{3}}$.*

Ejercicio 5. *Halla de forma exacta (no numérica) la raíz cuadrada del número complejo* $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejercicio 6. *Halla de forma exacta (no numérica) la raíz cuadrada del número complejo* $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ejercicio 7. *Halla de forma exacta (no numérica) las soluciones de la ecuación* $z^2 + (1+i)z + 5i = 0$.

Ejercicio 8. *Halla de forma exacta (no numérica) las soluciones de la ecuación* $z^4 + (1+i)z^2 + 5i = 0$.

Ejercicio 9. *Calcula todas las soluciones de la ecuación* $z^3 = 1$.

Ejercicio 10. *Calcula todas las soluciones de la ecuación* $z^8 = 1$.

Ejercicio 11. *Calcula todas las soluciones de la ecuación* $z^4 = i$.

Ejercicio 12. *Expresa en forma binómica exacta el número* $(1+i)^{25}$

Ejercicio 13. *Expresa en forma binómica exacta el número* $(\sqrt{3}+i)^{37}$

Ejercicio 14. *Expresa en forma binómica exacta el número* $(1+i\sqrt{3})^{24}$

12. Test de repaso.

Para comenzar el cuestionario pulsa el botón de inicio.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Cuando termines pulsa el botón de finalizar.
Para marcar una respuesta coloca el ratón en la letra correspondiente y pulsa el botón de la izquierda (del ratón).

Inicio del Test

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?.

(a) Un número complejo es un número con mas de 100 cifras.
(b) Un número complejo es una pareja de números con mas de 100 cifras cada uno.
(c) Un número complejo es una pareja de números reales.
(d) Un número complejo es un vector arbitrario de números reales.

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Los números complejos están contenidos en los reales.
(b) Los números complejos están contenidos en los racionales.
(c) Los números complejos contienen a los racionales pero no a los reales.
(d) Los números complejos contienen a los demas cuerpos numéricos.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Un número complejo tiene una parte real pero no una parte imaginaria.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

(b) Un número complejo tiene siempre una parte real y otra imaginaria.
(c) La parte imaginaria de un número complejo es es un número imaginario.
(d) Un número complejo a veces no tiene una parte real o una parte imaginaria.

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Se pueden calcular raíces cuadradas de un números complejo pero no raíces cúbicas.
(b) No se pueden calcular raíces cuadradas de un números complejo cuando es negativo.
(c) Sólo se pueden calcular raíces cuadradas de números reales positivos.
(d) Se pueden calcular raíces de cualquier orden de cualquier número complejo.

5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Existe siempre el conjugado de un número complejo.
(b) El conjugado de un número complejo es un número real.
(c) A veces no existe el conjugado de un número complejo porque coincide con él mismo.
(d) Sólo se pueden conjugar números reales.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

6. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Todos los números complejos tienen inverso.

(b) El inverso de un número complejo es un número real.

(c) El producto de los inversos de dos complejos es un número real.

(d) Si un número complejo es distinto de cero su inverso también es distinto de cero.

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) La desigualdad triangular es geométrica no numérica.

(b) La norma de un número complejo es siempre menor que él.

(c) Los números complejos no se pueden ordenar con un orden compatible.

(d) La norma de la suma de dos números complejos es mayor que la suma de las normas.

8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Algunos números complejos no tienen forma polar.

(b) La forma polar de un número complejo es igual que su forma binómica.

(c) El módulo de un número complejo puede ser negativo.

(d) Todos los números complejos tienen módulo y argumento.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

9. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) La fórmula de De Moivre afecta sólo a algunos números complejos.
(b) La fórmula de De Moivre afecta sólo a la potencia n-ésima de su módulo.
(c) La fórmula de De Moivre sirve para calcular potencias n-ésimas de un número complejo.
(d) La fórmula de De Moivre afecta sólo a la potencia n-ésima de su argumento.

10. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) La fórmula de De Moivre sirve sólo para calcular raíces n-ésimas de un número complejo.
(b) Sólo las raíces n-ésimas de la unidad se pueden calcular.
(c) Se pueden calcular potencias pero no raíces n-ésimas de un número complejo.
(d) Las raíces n-ésimas de un número complejo siempre se pueden calcular.

Final del Test | Puntos: