MATRICES Y DETERMINANTES.

¿Cómo ordenar bidimensionalmente?

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada

Enrique R. Aznar

Dpto. de Álgebra

1. Introducción

Una matriz puede ser definida inicialmente como una tabla rectangular que contiene cantidades abstractas que pueden ser sumadas o multiplicadas.

Aunque el nombre de matriz es relativamente reciente (fue introducido en 1850 por James Joseph Sylvester), su uso se remonta a la antigua China, con el estudio de sistemas de varias ecuaciones lineales.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Las matrices están presentes en Matemáticas así como en casi todas las disciplinas científicas actuales. La teoría de matrices es una de las ramas mas rica, abstracta y útil de las matemáticas.

Las matrices de números son especialmente útiles para el tratamiento de datos estadísticos. Sus aplicaciones van desde la ingeniería hasta la física, pasando por todas las ramas científicas. Hoy día, no se concibe una matemática aplicada sin este concepto.

Las matrices proporcionan una notación compacta y flexible especialmente adecuada para estudiar transformaciones lineales. Permiten, además, un tratamiento simple y organizado de la resolución de sistemas lineales, incluidos sistemas de ecuaciones diferenciales.

Fueron estudiadas, en 1857, por Cayley[1] considerado el padre del Álgebra Lineal. Sin embargo mucho antes, en 1683, el japonés Seki Takakazu e independientemente, en 1693, el alemán Gottfried Leibnitz ya habían considerado la asignación de un número a un array cuadrado de números.

[1] Matemático británico y profesor en Cambridge, Arthur Cayley (1821-1895), fue uno de los matemáticos mas prolíficos de la historia junto con Leonard Euler y Paul Erdös.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

O sea, ya habían considerado la definición de determinante de una matriz cuadrada. Durante los siguientes 120 años los determinantes fueron estudiados en conexión con la solución de s.l. de ecuaciones como p.ej.

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y & = & b_2 \end{array}\right\}$$

En 1812, Augustin-Louis Cauchy publicó un artículo donde usó determinantes para dar fórmulas para el volumen de ciertos sólidos poliédricos.

De hecho, fue el primero en probar que el volumen de un cristal paralelepípedo coincide con el valor absoluto del determinante formado por las coordenadas de 3 vectores que lo definan. Cauchy y sus sucesores aplicaron los determinantes a toda la geometría analítica.

Así, las aplicaciones de los determinantes fueron investigadas antes e independientemente del desarrollo de la teoría de matrices. En 1900, Thomas Muir compendió todo lo conocido en un tratado de 4 volúmenes.

Hoy día, los determinantes representan un papel pequeño en los tremendos cálculos matriciales que surgen a menudo en las aplicaciones modernas.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

2. Matrices

Dado un cuerpo[2] K, una matriz de orden m x n con coeficientes en K es una objeto matemático que se describe como una tabla bidimensional

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

O sea, es una colección, doblemente ordenada, de elementos en un cuerpo.

Una forma de definirla con más precisión, es fijándonos en la colección de sus filas[3].

Definición 1. *Una matriz $m \times n$ con coeficientes en K es un vector de longitud m, cuyos elementos son vectores en K de longitud n. O sea,*

$$\boxed{A = ((a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn}))}$$

Al número m lo llamamos número de filas y al número n número de columnas. Y decimos que la dimensión u orden de la matriz es $m \times n$.

---

[2] K usualmente será $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

[3] Hay otra forma equivalente de definir matriz por columnas.

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Página 7 de 65
Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

Por ejemplo, con esta definición, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

será el vector formado por sus filas[4]

$$A = ((1,1),(2,-1))$$

Ejemplo 1. *$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es de orden 2×3. O sea, tiene 2 filas y 3 columnas.*

Claramente, dos matrices son iguales si tienen igual orden e iguales elementos en cada una de sus posiciones.

Por ejemplo, la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 9 \\ 2 & 0 & b \end{pmatrix}$$

es igual a la matriz, A, anterior si y sólo si $a = -1$ y $b = 5$.

De una matriz con una única fila diremos que es una **matriz fila** y de una matriz con una única columna que es una **matriz columna**. Una matriz es **cuadrada** si tiene igual número de filas que de columnas, esto es: si es de orden $n \times n$ para algún n.

[4] La otra forma equivalente sería el vector formado por sus columnas $A = ((1,2),(1,-1))$.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Definición 2. *Al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en el cuerpo K lo denotaremos por $M_{m\times n}(K)$. Para el caso, $m = n$, escribiremos simplemente $M_n(K)$.*

Así, por ejemplo, $M_3(\mathbb{R})$ designará al conjunto de todas las matrices cuadradas de orden 3 con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales, mientras que $M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ será el conjunto de todas las matrices de 2 filas y 3 columnas con coeficientes en el cuerpo de los racionales.

Definición 3. *Para una matriz A, llamaremos submatriz de A, a cada matriz que se obtenga de ella suprimiendo algunas de sus filas y/o columnas.*

Ejemplo 2. *La matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *de 2 filas y 3 columnas, tiene 3 submatrices* 2×2. *Una de ellas es* $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Dada una matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición 4. *Los n elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ constituyen su diagonal principal. Se dice que A es una matriz diagonal si todos los elementos fuera de su diagonal principal son cero. Esto es, si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.*

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

A se dice triangular superior si todos los elementos por debajo de su diagonal son cero, $a_{ij} = 0, \forall i > j$. Triangular inferior si todos los elementos por encima de su diagonal son cero[5]*, $a_{ij} = 0, \forall i < j$.*

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ es triangular inferior. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es triangular superior. Mientras que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es diagonal.

3. Aritmética de matrices

3.1. Suma de Matrices. Dadas dos matrices de igual orden $m \times n$, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ se define su suma como la matriz del mismo orden dada por:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

[5] Es costumbre dar estas definiciones para matrices cuadradas. Aunque, las mismas definiciones tienen sentido para matrices rectangulares.

Universidad de Granada

Enrique R. Aznar

Dpto. de Álgebra

Esto es, la suma de las matrices A y B es la matriz que en la fila i, columna j, tiene al elemento $a_{ij}+b_{ij}$, suma de los correspondientes elementos de A y B. La suma de matrices sólo está definida para matrices de igual orden.

Ejemplo 3.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

Esta operación de suma, para matrices A y B arbitrarias en el conjunto $M_{m\times n}(K)$, verifica las siguientes propiedades:

Asociativa: $(A+B)+C \;=\; A+(B+C)$
Conmutativa: $A+B \;=\; B+A$
Elemento neutro: $A+0 \;=\; 0+A \;=\; A$
Elementos simétricos: $A+(-A) \;=\; -A+A \;=\; 0$

donde la matriz cero tiene todas sus entradas cero, $a_{ij}=0$. Esto es,

$$0 \;=\; \begin{pmatrix}0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

y donde la matriz opuesta, de una matriz A, se define cambiando el signo a cada entrada o elemento de la matriz original:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

La demostración de las 4 propiedades de la suma se basa en que las mismas propiedades son ciertas para la suma de elementos en el cuerpo K[6].

Definición 5. *Un conjunto V junto con una operación interna que verifique las 4 propiedades anteriores: Asociativa, Existencia de neutro, Existencia de simétricos y Conmutativa lo llamaremos un* **grupo abeliano**.

Cuando a la operación la denominamos suma, $+$. Entonces, al elemento neutro lo llamamos **cero**, *a los simétricos los llamamos* **opuestos** *y al grupo abeliano, lo denotamos $(V, +)$ y lo llamamos un* **grupo aditivo**.

Por lo visto anteriormente, el conjunto de todas las matrices, $M_{m\times n}(K)$, de la misma dimensión con entradas en un cuerpo K, y con la suma de matrices, es un grupo aditivo, denotado $(M_{m\times n}(K), +)$.

Existen por tanto muchos grupos aditivos de matrices. Por ejemplo, $(M_{2\times 3}(\mathbb{R}), +)$ es un grupo aditivo, también $(M_{2\times 2}(\mathbb{Q}), +)$, $(M_{3\times 3}(\mathbb{C}), +)$, etc.

[6]Recuerda que K será normalmente un cuerpo numérico $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

3.2. Producto de un escalar por una matriz. Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$ y dado un escalar $a \in K$, se define su producto como la matriz de orden $m \times n$

$$aA = (aa_{ij}) = \begin{pmatrix} aa_{11} & \dots & aa_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ aa_{n1} & \dots & aa_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4. *Si multiplicamos 2 por la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *obtenemos*

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

El producto de un escalar por una matriz verifica las siguientes 4 propiedades.

Distributiva respecto de la suma de escalares: $(a+b)A = aA+bA$
Distributiva respecto de la suma de matrices: $a(A+B) = aA+aB$
Pseudoasociativa respecto de los escalares: $(ab)A = a(bA)$
Unitaria: $1A = A$

Definición 6. *Un grupo aditivo* $(V,+)$ *junto con un producto por los elementos (escalares) de un cuerpo* K *que verifique las 4 propiedades anteriores: las dos Distributivas, la Pseudoasociativa y la Unitaria lo llamaremos un* **espacio vectorial**. *A veces, a sus elementos los llamaremos* **vectores**.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Por lo visto anteriormente, el conjunto de todas las matrices, $V = M_{m\times n}(K)$, de la misma dimensión con entradas en un cuerpo K, con la suma de matrices y con el producto por escalares definido antes, es un espacio vectorial.

Existen por tanto muchos espacios vectoriales de matrices. Por ejemplo, $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, también $M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$, $M_{3\times 3}(\mathbb{C})$, etc. Entre todos ellos, hay algunos que son mas sencillos o que admiten interpretación geométrica. Son las matrices que tienen una única fila.

Por ejemplo, $M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ es el conjunto de los puntos o vectores usuales del plano (dos dimensiones). Y $M_{1\times 3}(\mathbb{R})$ el de los puntos o vectores usuales del espacio (tres dimensiones)[7].

3.3. Producto de matrices. Dadas matrices A y B en las siguientes condiciones:

- $A = (a_{ik}) \in M_{m\times p}(K)$ (m filas y p columnas)
- $A = (b_{kj}) \in M_{p\times n}(K)$ (p filas y n columnas)

se define su producto como la matriz $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$ (m filas y n columnas), donde todas sus entradas son sumas de productos

[7] Es costumbre, denotar al espacio vectorial $M_{1\times n}(\mathbb{R})$ simplemente por $\mathbb{R}^n$ y decir que tiene dimensión n. Son los llamados usualmente, vectores de dimensión n.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}}$$

O sea,

$$C = AB = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k} b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k} b_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk} b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk} b_{kn} \end{pmatrix}$$

gráficamente los órdenes o dimensiones de las matrices son

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & C \\ m \times p & & p \times n & = & m \times n \end{array}$$

Ejemplo 5. *Si multiplicamos la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *por la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenemos la matriz

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Observaremos, que el otro producto BA no tiene sentido, ya que no está definido al no coincidir el número de columnas, 3 de la matriz B con el número de filas, 2, de la matriz A.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Recordemos que el elemento c_{ij} que ocupa el lugar i, j en AB se obtiene a partir de la fila i-ésima de A y la columna j-ésima de B (que han de tener igual número de elementos, en este caso p)

$$\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c|cc} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & a_{pn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \boxed{c_{ij}} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

El producto de matrices, cuando existe, verifica las siguientes propiedades.

Asociativa: $(AB)C = A(BC)$
Unitarias: $I_m A = A = A I_n$
Distributiva derecha: $A(B+C) = AB + AC$
Distributiva izquierda: $(B+C)A = BA + CA$
Pseudoasociativa respecto de las matrices: $a(AB) = (aA)B = A(aB)$

Cuando las matrices son cuadradas del mismo orden; o sea, en el conjunto $M_n(K)$, todos los productos anteriores tienen sentido. Por tanto, obtenemos.

Teorema 1. *El conjunto de las matrices cuadradas con coeficientes en un cuerpo con su aritmética , $(M_n(K),+,.)$, tiene estructura de anillo, no conmutativo para todo $n > 1$.*

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Para ver la no conmutatividad, veamos el siguiente.

Ejemplo 6. *Los siguientes productos no son iguales*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Matriz traspuesta

Dada una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

llamamos matriz traspuesta de A, y la denotamos por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas. O sea, a la matriz

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Por tanto, si A es $m \times n$. Su traspuesta es $n \times m$.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra


Ejemplo 7. *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, su traspuesta es

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La trasposición de matrices, verifica las siguientes propiedades.

Aditiva: $(A+B)^t = A^t + B^t$
Multiplicativa: $(AB)^t = B^t A^t$
Preservación del producto escalar: $(aA)^t = aA^t$

Definición 7. *Dada una matriz cuadrada, $A \in M_n(K)$, se dice que A es simétrica cuando coincide con su traspuesta. Esto es, $A = A^t$.*

Cláramente, el que una matriz $A = (a_{ij})$ sea simétrica equivale a las igualdades $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i \neq j$. Gráficamente, a que sus entradas sean simétricas respecto de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, la siguiente matriz es simétrica 3×3

Ejemplo 8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ya que si cambiamos filas por columnas, coincide con ella misma. Sin embargo la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

no es simétrica porque su traspuesta

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

no coincide con ella.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

5. Producto escalar de vectores

Un caso particularmente sencillo de multiplicación de matrices es cuando se multiplica una sóla fila por una sóla columna.

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_p b_p$$

se obtiene una matriz 1×1. O sea, un único escalar[8].

Como un conjunto finito ordenado de escalares se puede ver tanto como una matriz fila, como una matriz columna. Es costumbre, definir el producto escalar de dos vectores fila, $u = (a_1, \dots, a_p)$ y $v = (b_1, \dots, b_p)$ de la forma anterior. O sea,

Definición 8.

$$u.v = uv^t = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_p b_p$$

[8] Es costumbre no escribir paréntesis, para las matrices 1×1.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 9. *Sean, $u = (1, 2, -1)$ y $v = (-2, 1, 0)$ pertenecientes a $M_3(\mathbb{Q})$. Su producto escalar vale cero:*

$$u.v \ = \ uv^t \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ = \ -2 + 2 + 0 = 0$$

Sin embargo, el producto

$$u^t v \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada 4×4 que no es la matriz cero[9].

El producto escalar de vectores, verifica las siguientes propiedades[10].

Conmutativa: $u.v \ = \ v.u$
Distributiva: $u.(v_1 + v_2) \ = \ u.v_1 + u.v_2$
Pseudoasociativa: $a(u.v) \ = \ (au).v \ = \ u.(av)$

---

[9] Si se multiplica una columna por una fila, lo que se obtiene siempre es una matriz rectangular.

[10] Son consecuencia de las propiedades del producto de matrices, del producto de un escalar por una matriz y de la conmutativa del producto de escalares.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

6. Matrices inversas y regulares

Definición 9. *Dadas dos matrices cuadradas, $A, B \in M_n(K)$, se dice que B es inversa de A si*

$$\boxed{AB = BA = I_n}$$

No toda matriz cuadrada tiene inversa, ya que por ejemplo la siguiente matriz

Ejemplo 10.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no puede tener inversa, ya que al multiplicar por cualquier matriz cuadrada 2×2, se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nunca puede dar la matriz identidad.

Este ejemplo se puede generalizar a cualquier matriz.

Lema 1. *Si una matriz A tiene una fila de ceros cualquier producto AB tiene una fila de ceros. También, si A tiene una columna de ceros cualquier producto CA tiene una columna de ceros. Por tanto, una matriz invertible nunca tiene ni una fila ni una columna de ceros.* □

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Lema 2. *Si existe la matriz inversa de una matriz $A \in M_n(K)$. Ésta es única.*

Demostración: Si existieran dos matrices $B, B' \in M_n(K)$ tales que

$$AB = BA = I_n = AB' = B'A$$

entonces, son ciertas las siguientes igualdades

$$B' = I_nB' = (BA)B' = B(AB') = BI_n = B$$

lo que demuestra la unicidad. $\square$

Como la inversa si existe es única, se le puede dar nombre propio.

Definición 10. *A la inversa de A, si existe, se le llama A^{-1}. Una matriz cuadrada, $A \in M_n(K)$, se dice que es* **invertible** *o* **regular** *si existe A^{-1}.*

Lema 3. [Propiedades de la matrices invertibles] *Si las matrices cuadradas $A_1, A_2, \ldots, A_r \in M_n(K)$ son invertibles. Entonces,*

- *La matriz producto, $A_1 \cdots A_r$, es invertible y su inversa es*

$$\boxed{(A_1 \cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1} \cdots A_1^{-1}}$$

- *La matriz traspuesta de una invertible es invertible. De hecho,*

$$\boxed{(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t}$$

Demostración:

- Basta comprobar que

$$(A_1 \cdots A_r)(A_r^{-1} \cdots A_1^{-1}) = A_1 \cdots (A_r A_r^{-1}) \cdots A_1^{-1} = \cdots = A_1 A_1^{-1} = I$$

- Basta comprobar que

$$A^t (A^{-1})^t \; = \; (AA^{-1})^t \; = \; I^t = I$$

Veamos algunos ejemplos de matrices invertibles.

Ejemplo 11. *Un ejemplo de matriz de tipo I:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un ejemplo de matriz de tipo II:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un ejemplo de matriz de tipo III:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los ejemplos anteriores de matrices invertibles se pueden generalizar, a cualquier dimensión, en los tipos siguientes.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Definición 11. [Matrices elementales] *Para un orden n fijo, Las siguientes matrices cuadradas se denominan:*

Tipo I: *La matriz que se obtiene de la matriz identidad, intercambiando las filas* i, j *entre si, se denomina* E_{ij}.

Tipo II: *La matriz que se obtiene de la matriz identidad, multiplicando la fila* i *por un escalar* k*, se denomina* $E_i(k)$.

Tipo III: *La matriz que se obtiene de la matriz identidad, sumándole a la fila* i *la fila* j *multiplicada por* k*, se denomina* $E_{ij}(k)$.

Con esta definición, los ejemplos anteriores son.

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{23}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, siempre se verifica que la inversa de una matriz de tipo I, E_{ij}, es ella misma, $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

La inversa de una matriz de tipo II, $E_i(k)$, es la matriz $E_i(k)^{-1} = E_i(\frac{1}{k})$.

Y la inversa de una matriz de tipo III, $E_{ij}(k)$, es la matriz $E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Como consecuencia del lema anterior, si multiplicamos una matriz invertible, A, por una matriz elemental, E, de la misma dimensión. El producto, EA sigue siendo una matriz invertible[11].

Teorema 2. [Caracterización de las matrices invertibles] *Una matriz cuadrada, $A \in M_n(K)$ es invertible si y sólo si es producto de matrices elementales.*

Demostración: En efecto, como todas las matrices elementales son invertibles, cualquier producto finito de ellas será de nuevo invertible.

Por tanto, lo que queda por demostrar es que si A es invertible existen matrices $A_1, \ldots, A_r \in M_n(K)$ elementales tales que $A = A_1 \cdots A_r$.

La demostración de esa existencia es constructiva. Consiste en aplicar un algoritmo a la matriz original en el que, cada paso consistirá en multiplicar a izquierda por una matriz elemental adecuada, B_i. De forma que, en un número finito de pasos, el producto total sea la matriz identidad.

$$B_r \cdots B_1 A = I$$

Ahora, multiplicando sucesivamente por las inversas de las matrices elementales, obtenemos

$$B_{r-1} \cdots B_1 A = B_r^{-1} B_r \cdots B_1 A = B_r^{-1} I = B_r^{-1}$$
$$B_{r-2} \cdots B_1 A = B_{r-1}^{-1} B_{r-1} \cdots B_1 A = B_{r-1}^{-1} B_r^{-1}$$

[11] Y por tanto, EA no puede tener una fila o columna de ceros.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

sucesivamente hasta conseguir que

$$A = B_1^{-1} \cdots B_r^{-1}$$

que es lo queríamos demostrar. $\square$

Corolario 1. *Si una matriz A es invertible, su inversa también se puede obtener como producto de matrices elementales.*

Demostración: Como

$$A = B_1^{-1} \cdots B_r^{-1} = (B_r \cdots B_1)^{-1}$$

y la inversa de una matriz es única, se tiene que $A^{-1} = B_r \cdots B_1$. $\square$

Por todo lo anterior, conociendo y aplicando el algoritmo a una matriz A invertible lo que se obtiene es su matriz inversa.

En realidad, veremos que el algoritmo siempre se puede aplicar a toda matriz cuadrada o no. A veces no se obtiene la matriz identidad[12].

7. Transformaciones elementales

De hecho, hay dos versiones del algoritmo, una por filas y otra por columnas. Y se pueden aplicar a cualquier matriz aunque no sea cuadrada, ni invertible.

[12]En general, cuando A no es invertible se obtiene una forma normal de Hermite.

Una posible salida de las dos versiones del algoritmo son matrices triangulares.

Veamos primero cual es el resultado de multiplicar a izquierda por una matriz elemental.

Lema 4. [Transformaciones elementales de filas] *Si se multiplica una matriz $A \in M_{m\times n}(K)$, a la izquierda por una matriz elemental $E \in M_m(K)$. El producto EA verifica:*

- **Tipo I:** *Si $E = E_{ij}$, el producto EA es el resultado de intercambiar en A, las filas i, j.*
- **Tipo II:** *Si $E = E_i(k)$, el producto EA es el resultado de multiplicar en A, la fila i por el escalar k.*
- **Tipo III:** *Si $E = E_{ij}(k)$, el producto EA es el resultado de multiplicar en A, la fila j por el escalar k, y el resultado sumarselo a la fila i.*

La demostración del lema es consecuencia inmediata de la definición de producto de matrices y de las matrices elementales[13].

Veamos un ejemplo de como aplicar las transformaciones elementales de filas para obtener una matriz triangular.

---

[13] Hay otro lema, llamado dual del anterior, donde se multiplica a derecha por E y lo que se obtiene son transformaciones de columnas en vez de filas.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ejemplo 12. *Dada la matriz* 3×4 *siguiente*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1ª etapa: *Elegimos como pivote el primer elemento, no cero, de la primera fila y hacemos ceros por debajo.*
Primero multiplicamos, a izquierda, por $E_{21}(1)$. *O sea,*

$$E_{21}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos, a izquierda, por $E_{31}(-1)$.

$$E_{31}(-1)E_{21}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2ª etapa: *Elegimos el pivote de la segunda fila y hacemos cero por debajo.*

$$E_{32}(2)E_{31}(-1)E_{21}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

No seguimos multiplicando por matrices elementales porque ya hemos encontrado una matriz triangular superior[14].

Si la matriz inicial A es cuadrada, a veces, se puede llegar a la matriz identidad por transformaciones elementales de filas. Veamoslo en un ejemplo.

Ejemplo 13. *Dada la matriz* 3×3 *siguiente*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como en el ejemplo anterior, multiplicando por 3 matrices elementales, conseguimos una matriz triangular superior.

$$E_{32}(2)E_{31}(-1)E_{21}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ahora, podemos continuar haciendo ceros por encima de la diagonal principal. Así

$$E_{12}(-2)E_{32}(2)E_{31}(-1)E_{21}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

[14] Si multiplicamos a la derecha por matrices elementales 4×4, cambiando el papel de las filas por las columnas, también se puede llegar a una matriz triangular. En este caso inferior.

Ahora, podemos hacer ceros por encima en la tercera columna. Así

$$E_{13}(2/3)\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2/3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

Y multiplicando por $E_{23}(-1/3)$ *obtenemos una matriz diagonal*

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1/3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

Finalmente, podemos conseguir la identidad, multiplicando sucesivamente por $E_2(-1)$ *y* $E_3(1/6)$

$$E_3(1/6)E_2(-1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I$$

de donde obtenemos que el producto sucesivo de estas matrices elementales por la matriz original vale la matriz identidad

$$E_3(1/6)E_2(-1)E_{23}(-1/3)E_{13}(2/3)E_{12}(-2)E_{32}(2)E_{31}(-1)E_{21}(1)A = I$$

De donde, se obtiene que

$$A^{-1} = E_3(1/6)E_2(-1)E_{23}(-1/3)E_{13}(2/3)E_{12}(-2)E_{32}(2)E_{31}(-1)E_{21}(1)$$

Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

El cálculo de la matriz inversa se puede hacer a la vez que se consigue la diagonal. Basta hacer las mismas transformaciones elementales empezando en la matriz identidad.

Así, la condición necesaria y suficiente para que se pueda llegar a una matriz diagonal, es que en cada etapa se pueda elegir un pivote, distinto de cero, para hacer ceros por debajo y por encima del mismo[15].

Lo cuál está asegurado cuando la matriz original A es invertible, ya que en ese caso cada matriz intermedia en el cálculo es también invertible y por tanto no puede contener ninguna columna de ceros.

Todo lo anterior se resume en el siguiente algoritmo:

Primera etapa: Se inicia eligiendo el primer elemento, no cero, de la primera columna de A. Se cambia si es necesario el pivote elegido a la posición 1 y se hacen ceros por debajo del mismo.

Etapa i: Se elige el primer elemento, no cero, a partir de la posición i, en la columna i-ésima de A. Se cambia si es necesario el pivote elegido a la posición i y se hacen ceros por debajo y por encima del mismo.

[15]Si es necesario, se intercambian filas para conseguir que los pivotes queden en la diagonal principal.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Finalmente, cuando ya no quedan columnas que procesar se ha obtenido una matriz escalonada[16].

Veremos a continuación el uso de este algoritmo para calcular determinantes.

8. Determinantes

El concepto de determinante responde a la siguiente pregunta. ¿Existe una aplicación *computacionalmente buena* que haga corresponder a cada matriz cuadrada, $A \in M_n(K)$, un escalar del mismo cuerpo, $det(A) = |A| \in K$?

Esto es, para cada matriz cuadrada arbitraria,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

que escribiremos linealmente como $A = \{v_1, \dots, v_n\}$. Donde $v_1 = \{a_{11}, \dots, a_{1n}\}$, $\dots$, $v_n = \{a_{n1}, \dots, a_{nn}\}$ son sus filas. Queremos analizar si existe un escalar $det(A) = det(v_1, \dots, v_n) \in K$ de forma que esta aplicación sea buena en el sentido siguiente.

Definición 12. *Decimos que una aplicación determinante es computacionalmente buena cuando verifica las siguientes 4 propiedades.*

[16] Opcionalmente, como en el ejemplo anterior, se pueden convertir en unos, todos los pivotes.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Multiplicativa: $det(AB) = det(A)det(B)$.

Aditiva: *Para cada índice i,*

$$det(v_1,\dots,v_i+v'_i,\dots,v_n) = det(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n) + det(v_1,\dots,v'_i,\dots,v_n)$$

lineal: *Para cada índice i, y cada escalar $k \in K$*

$$det(v_1,\dots,kv_i,\dots,v_n) = kdet(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)$$

Alternante: *Para cada dos índices i, j,*

$$det(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots v_n) = -det(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots v_n)$$

Ahora como $|A| = |AI| = |A|\cdot|I|$. Lo primero que observamos es que si el determinante de la matriz unidad fuera cero, $det(I) = |I| = 0$, también sale cero, el de cualquier matriz cuadrada del mismo orden[17].

$$|A| = |A|\cdot 0 = 0$$

Por tanto, supondremos que $det(I) = |I| \neq 0$. Pero entonces, como

$$|I| = |I\cdot I| = |I|\cdot|I|$$

podemos multiplicar por $\frac{1}{|I|} \in K$ y obtenemos que

$$1 = \frac{1}{|I|}|I| = \frac{1}{|I|}|I|\cdot|I| = |I|$$

[17] Una aplicación que cumple las 4 propiedades de determinante es la aplicación constate cero, $det(A) = |A| = 0$, pero no tiene utilidad.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

O sea, si queremos que la aplicación determinante sea multiplicativa y no sea cero, el determinante de cualquier matriz unidad debe valer uno, $det(I_n) = 1$.

Ahora, podemos determinar los determinantes de las matrices elementales.
Tipo I: Como la matriz, E_{ij}, se obtiene de la matriz identidad, intercambiando las filas i, j entre si, de la propiedad *alternante* obtenemos que

$$det(E_{ij}) = -|I| = -1$$

También, usaremos la propiedad *alternante* para ver que el determinante de una matriz, con dos filas iguales, es cero. En efecto, como

$$det(v_1,\ldots,v,\ldots,v,\ldots,v_n) = -det(v_1,\ldots,v,\ldots,v,\ldots,v_n)$$

Entonces, $2det(v_1,\ldots,v,\ldots,v,\ldots,v_n) = 0$, y dividiendo por 2 se obtiene $det(v_1,\ldots,v,\ldots,v,\ldots,v_n) = 0$.
Tipo II:
Como la matriz, $E_i(k)$, se obtiene de la matriz identidad, multiplicando la fila i por un escalar k, se tiene por la propiedad *lineal*

$$det(E_i(k)) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & k & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = k \cdot |I| = k \cdot 1 = k$$

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Realizando n veces el mismo argumento, se razona que el determinante de cualquier matriz diagonal está unívocamente determinado y es igual al producto de los elementos de su diagonal principal. Por ejemplo, para $n = 3$ sería

$$\begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{vmatrix} = k_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{vmatrix} = k_1 k_2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{vmatrix} =$$

$$= k_1 k_2 k_3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = k_1 k_2 k_3 \cdot 1 = k_1 k_2 k_3$$

Ahora, razonaremos que los determinantes de las matrices de tipo III, también están unívocamente determinados por las propiedades anteriores.

Tipo III: $E = E_{ij}(k)$, es la matriz que se obtiene de la matriz identidad, sumándole a la fila i la fila j multiplicada por k

$$det(E_{ij}(k)) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & k & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & k & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= det(I) + k \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 + k \cdot 0 = 1$$

También, usaremos la propiedad *aditiva* para ver que el determinante de una matriz cuadrada con una fila de ceros es necesariamente cero.
En efecto,

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = det(v_1, \dots, 0, \dots, v_n) =$$

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

$$= \, det(v_1, \ldots, 0+0, \ldots, v_n) \; = \; det(A) \; + \; det(A)$$

y restando $det(A)$ en ambos miembros, obtenemos $det(A) = 0$.

En particular, hemos obtenido que si existe una aplicación determinante, no nula, que satisface las 4 propiedades anteriores (multiplicativa, aditiva, lineal y alternante). Entonces los determinantes de las matrices elementales están unívocamente determinados y son distintos de cero.

$$\begin{array}{rcr} det(I_n) & = & 1 \\ det(E_{ij}) & = & -1 \\ det(E_i(k)) & = & k \\ det(E_{ij}(k)) & = & 1 \end{array}$$

Por la propiedad multiplicativa, si E es una matriz elemental y $B = EA$ entonces

$$|B| \; = \; |E| \cdot |A|$$

y por tanto $|A| \neq 0$ si y sólo si $|B| \neq 0$.

O sea, por transformaciones elementales de filas no se cambia el caracter de ser cero o no, del determinante. Además, como se conocen los determinantes de la matrices elementales se puede calcular cualquier determinante por transformaciones elementales de filas.
Basta aplicar transformaciones elementales de filas, hasta conseguir una matriz diagonal[18], cuyo determinante está unívocamente determinado por el

[18] Basta con que sea triangular superior o inferior.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

producto de los elementos de su diagonal principal.
En particular, por la propiedad multiplicativa, tenemos

Lema 5. *Si A es una matriz triangular. su determinante está unívocamente determinado por el producto de los elementos de su diagonal pricipal.*

Demostración: Basta hacer la demostración para matrices triangulares superiores[19] con todos los elementos de su diagonal distintos de cero.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

como sabemos que multiplicando, a izquierda, por matrices de tipo III, se llega a la matriz diagonal

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y el determinante de cada matriz de tipo III vale 1, se tiene

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}$$

[19] Para triangulares inferiores, el razonamiento es el mismo.

Por este método se puede calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada.

Ejemplo 14. *para la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *del ejemplo 13, donde se comprobó inicialmente que*

$$E_{32}(2)E_{31}(-1)E_{21}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

De nuevo, como los determinantes de todas las matrices de tipo III valen 1, se tiene por el lema anterior que $det(A) = -6$

Un argumento parecido permite demostrar el resultado inductivo siguiente.

Lema 6. *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. *Entonces, se verifica que*

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
Página 40 de 65
Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Demostración: Basta darse cuenta que la matriz triangular superior que se obtiene por transformaciones elementales de filas a partir de A puede cambiar sólo a partir del segundo elemento de la diagonal principal.
Luego el producto de ellos será el mismo que cuando se aplican las mismas transformaciones elementales a la matriz $B = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\square$

Observaremos, que la traspuesta de una matriz elemental es otra matriz elemental del mismo tipo y sus determinantes coinciden:

$$\begin{array}{rcccr} det(E_{ij}^t) & = & det(E_{ij}) & = & -1 \\ det(E_i(k)^t) & = & det(E_i(k)) & = & k \\ det(E_{ij}(k)^t) & = & det(E_{ji}(k)) & = & 1 \end{array}$$

Como aplicación del algoritmo de transformaciones elementales de filas, se obtiene para cualquier matriz cuadrada A el siguiente.

Teorema 3. *A tiene determinante distinto de cero si y sólo si es invertible.*

Demostración: Basta razonar que una matriz cuadrada tiene determinante distinto dero si y sólo si, por transformaciones elementales de filas, se obtiene una matriz diagonal con todas sus entradas distintas de cero.

Si se continúa el algoritmo, también se obtiene la matriz unidad, y por tanto también se puede poner la matriz como producto de matrices elementales.

Finalmente, sólo queda recordar el teorema que dice que una matriz es invertible si y sólo es producto de matrices elementales. $\square$

Como sabemos que una matriz es invertible si y sólo si su traspuesta es invertible, una matriz cuadrada tendrá determinante distinto de cero si y sólo si su traspuesta también lo tiene. En realidad, podemos demostrar el siguiente.

Lema 7. *Dada matriz cuadrada A, se tiene $det(A) = det(A^t)$.*

Demostración: Distinguiremos dos casos:

- $det(A) = 0$ si y sólo si no A es invertible si y sólo si A^t no es invertible si y sólo si $det(A^t) = 0$.
- Si A es invertible, entonces existen matrices elementales, $E_1, \ldots, E_r$, tales que $A = E_1 \cdots E_r$. Entonces, su traspuesta será $A^t = E_r^t \cdots E_1^t$. Ahora, como para toda matriz elemental, E se tiene $det(E) = det(E^t)$, y el producto de escalares es conmutativo, obtenemos

$$det(A) = det(E_1) \cdots det(E_r) = det(E_r^t) \cdots det(E_1^t) = det(A^t)$$

En particular, las propiedades aditiva, lineal y alternante si se verifican por filas también se verifican por columnas.

De todo lo anterior, parece deducirse que la aplicación determinante está unívocamente determinada por las 4 propiedades multiplicativa, aditiva, lineal y alternante. En efecto, veámoslo inductivamente.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Si la matriz es 1×1. O sea, un único escalar $A = (k)$, tenemos que

$$det(A) = det(k) = k \cdot det(1) = k \cdot 1 = k$$

Si la matriz es 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, por la propiedad aditiva, tenemos

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{12} \end{vmatrix} = \boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

O sea, la famosa fórmula del determinante de una matriz de orden 2.

El método que hemos usado, para hallar las fórmulas de los determinantes de orden 2, es completamente generalizable a una matriz arbitraria A. Se llama desarrollo por la primera fila.

Pero veámoslo también para matrices 3×3.

Si la matriz es 3×3, por la propiedad aditiva, tenemos

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

como toda matriz de tipo III, tiene determinante 1, obtenemos

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

ahora, por la propiedad multiplicativa, tenemos

$$= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$\boxed{= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

y hemos obtenido la famosa fórmula de los determinantes de orden 3.
Esta fórmula se recuerda con el nombre de **regla de Sarrus** que describe gráficamente los 3 sumandos positivos y los 3 negativos.

Primero definimos

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Definición 13. *Llamamos ij-ésimo menor adjunto de A al escalar,* $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$*, donde A_{ij} es la matriz que se obtiene de A eliminando la la fial i-ésima y la columna j-ésima.*

Ahora se puede demostrar el siguiente.

Lema 8. [Desarrollo por la primera fila] *Si existe una aplicación determinante verificando las propiedades multiplicativa, aditiva, lineal y alternante. Entonces, $det(A) \in K$ está unívocamente determinado por la fórmula*

$$\boxed{det(A) = a_{11}\alpha_{11} + \cdots + a_{1n}\alpha_{1n}}$$

Demostración: Basta darse cuenta de que

$$det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_{21} & \dots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} & 0 \end{vmatrix}$$

y de que hay que cambiar varias veces de signo el determinante para llevar una columna a la primera posición. □

Repitiendo esencialmente la misma demostración anterior, hallamos los desarrollos de un determinante por cualquier otra fila[20].

---

[20] Como $|A| = |A^t|$ también se puede desarrollar por cualquier columna.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Como los menores adjuntos de una matriz se obtienen a partir de determinantes de orden $n-1$. Haremos notar en este punto que se puede tomar como definición de aplicación determinante justamente esa fórmula recursiva

$$det(A) = a_{11}\alpha_{11} + \cdots + a_{1n}\alpha_{1n}$$

añadiendo en la definición, el primer caso. O sea, que $det(1) = 1$.

Tomando esta definición recursiva se pueden demostrar, por inducción, las 4 propiedades multiplicativa, aditiva, lineal y alternante.
Además, por el lema anterior, la aplicación determinante está unívocamente determinada por dichas 4 propiedades, obteniéndose la conocida fórmula:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_\sigma (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

donde el determinante sale la suma de todos los productos que contienen un elemento de cada fila y columna, sin repetir fila ni columna, y donde la mitad de los productos son positivos y la otra mitad negativos.

Sin embargo, esta fórmula no es operativa para n medianamente grande[21], ya que el número de sumandos implicados es $n! = n(n-1)\cdots 1$ y se incrementa rápidamente. Para $n = 5$ ya salen 120 sumandos, para $n = 6$ salen 720, etc.

[21] Hoy día, se usa el método de transformaciones elementales.

9. Formas normales de Hermite.

Daremos algunas definiciones de matrices especialmente sencillas que se encuentran aplicando el algoritmo de transformaciones elementales (página 32) a una matriz arbitraria (Charles Hermite matemático francés, 1822–1901).

Definición 14. *Llamamos* **pivote de una fila** *de una matriz al primer número no nulo de dicha fila. Análogamente, llamamos* **pivote de una columna** *al primer número no nulo de dicha columna.*
Decimos que una matriz es **escalonada por filas** *si verifica que el pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila inmediata superior.*
Análogamente, decimos que una matriz es **escolanada por columnas** *cuando el pivote de cada columna está mas abajo del pivote de la columna inmediata anterior.*
Decimos que una matriz es una **forma de Hermite por filas** *si es escalonada por filas, todos los pivotes son 1. Además, todos los elementos de la matriz por encima de cada pivote son cero y si hay filas de ceros están las últimas (abajo).*
Decimos que una matriz es una **forma de Hermite por columnas** *si es escalonada por columnas, todos los pivotes son 1. Además, todos los elementos de la matriz a la izquierda de cada pivote son cero y si hay columnas de ceros están las últimas (a la derecha).*

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ejemplo 15. *La matriz,* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, *es escalonada por filas pero no es una forma de Hermite por filas.*

La matriz, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, *es escalonada por filas pero no es una forma de Hermite por filas.*

La matriz, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, *es una forma de Hermite por filas.*

La matriz, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *es una forma de Hermite por filas.*

La matriz, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *es una forma de Hermite por filas y por columnas.*

La matriz, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, *es una forma de Hermite por columnas pero no por filas.*

La matriz, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *es una forma de Hermite por filas y por columnas.*

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

10. Equivalencia de matrices.

Como muchos otros conceptos de matrices, la equivalencia puede ser por filas o por columnas. Sus resultados y propiedades se dice que son duales.

Definición 15. *Decimos que dos matrices, $A, B \in M_{m\times n}(K)$ de la misma dimensión, son* **equivalentes por filas**, *lo escribimos $A \sim_f B$, si se puede pasar de la primera a la segunda haciendo transformaciones elementales de filas. Por lo visto anteriormente, equivale a que exista un número finito de matrices elementales $E_1, \dots, E_r$ tales que $P = E_r \cdots E_1$ y*

$$B = P \cdot A$$

Decimos que dos matrices, $A, B \in M_{m\times n}(K)$ de la misma dimensión, son **equivalentes por columnas**, *lo escribimos $A \sim_c B$, si se puede pasar de la primera a la segunda haciendo transformaciones elementales de columnas. O sea, si existen matrices elementales $E_1, \dots, E_r$ tales que $Q = E_1 \cdots E_r$ y*

$$B = A \cdot Q$$

Finalmente, decimos que dos matrices, $A, B \in M_{m\times n}(K)$, son **equivalentes**, *y lo escribimos $A \sim B$, si se puede pasar de la primera a la segunda haciendo transformaciones elementales de filas y/o columnas. O sea, si*

$$B = P \cdot A \cdot Q$$

donde tanto P como Q son productos de matrices elementales.

Como la matriz identidad es elemental, la inversa de una matriz elemental es de nuevo elemental y el producto de matrices es asociativo. Estas relaciones de equivalencia, por filas o por columnas, claramente satisfacen las siguientes 3 propiedades:

- Reflexiva $A \sim A$.
- Transitiva Si $A \sim B$, $B \sim C$ entonces $A \sim C$
- Simétrica Si $A \sim B$ entonces $B \sim A$

Ejemplo 16. *Las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ *del ejemplo 13, son equivalentes por filas ya que* $B = E_{32}(2)E_{31}(-1)E_{21}(1)A$. *O sea,* $A \sim_f B$.

También, es fácil de ver que la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ *es equivalente por filas a* B. *O sea,* $B \sim_f C$. *Por tanto,*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Vamos a demostrar que entre todas las matrices equivalentes por filas, a una dada A, existe una única matriz que es una forma de Hermite por filas.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

En efecto, como dos matrices equivalentes por filas generan el mismo subespacio vectorial (llamado su espacio de filas), el número de filas no nulas (igual al número de pivotes 1) de ambas matrices es el mismo por ser la dimensión de dicho espacio vectorial[22].

Por tanto, dos matrices, A y B, de Hermite por filas y equivalentes por filas tienen el mismo número de filas no nulas (y el mismo de filas nulas).

Como además, $B = P \cdot A$, también tienen el mismo número de columnas nulas[23]. Por eso, para demostrar la unicidad de la forma Normal de Hermite por filas, basta hacerlo suponiendo que no hay ni filas ni columnas nulas. Así, la relación $P \cdot A = B$ se despliega de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1m} & \dots & p_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{1m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1m} & \dots & p_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow p_{11} = 1, p_{21} = 0, \dots, p_{m1} = 0$$

[22] Por el teorema de la base que se demuestra en el tema de espacios vectoriales.
[23] Ya que las columnas de ceros se mantienen por multiplicación a derecha.

O sea, independientemente de las entradas designadas por * en ambas matrices, efectuando el producto e igualando las primeras m columnas, se deduce que la matriz $P = I$ y en consecuencia $A = B$ como queríamos.

Dualmente[24], *entre todas las matrices equivalentes por columnas a una dada, A, existe una única matriz que es una forma de Hermite por columnas*. Como consecuencia de ambos resultados se tiene que

Teorema 4. *Entre todas las matrices equivalentes a una dada, A, existe una única matriz, B, que es a la vez de Hermite por filas y columnas.*

Esta forma normal de Hermite única en cada clase de equivalencia es una matriz identidad con posiblemente filas y/o columnas adicionales de ceros que están abajo y/o a la derecha. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O bien,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[24] Ya si $A = B \cdot Q$, con Q regular, tienen el mismo número de filas nulas y generan el mismo espacio de columnas. El número de columnas no nulas en una forma normal de Hermite da la dimensión y basta demostrar la unicidad suponiendo que hay ni filas ni columnas nulas.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Para hallar esta forma normal de Hermite, basta aplicar ambos algoritmos (de filas y columnas) sucesivamente. Por ej.

Ejemplo 17. *Para hallar la forma normal de Hermite de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *primero aplicamos el algoritmo de columnas*[25] *añadiendo la identidad por debajo y haciendo transformaciones elementales de columnas*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego obtenemos la forma normal de Hermite con una sóla matriz de cambio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = H = A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pero si añadimos la identidad por la izquierda y tranformamos por filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[25] La forma normal de Hermite que se obtiene es única pero no salen las mismas matrices Q y P de cambio si se cambia el orden de aplicación de los algoritmos.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Página web personal
Página de Abertura
Contenido

Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

obtenemos una matriz de cambio P por la izquierda

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

después es necesario seguir con transformaciones de columnas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de forma que tenemos una nueva matriz de cambio Q_1 tal que

$$P \cdot A \cdot Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = H$$

En particular, el espacio de filas tiene dimensión 2 y lo mismo el espacio de columnas y también es 2 el rango de las matrices A y H[26].

[26] Por defición, el rango de una matriz es el número unos en una forma normal de Hermite

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

11. Apéndice : Matriz de Vandermonde.

Se llama matriz de Vandermonde[27] a una matriz cuadrada definida a partir de n datos $\{x_1, \dots, x_n\}$ y sus potencias de la siguiente forma

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la penúltima columna por x_1 y se la restamos a la última

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & 0 \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{pmatrix}$$

Si hacemos lo mismo con cada fila y su siguiente (desde $n-1$ a 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-3}(x_n - x_1) & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{pmatrix}$$

[27] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796) fue un músico, químico y matemático francés que nació y vivió toda su vida en París.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Hemos acabado la etapa de x_1. Ahora, si multiplico la penúltima columna por x_2 y se la resto a la última, pasamos por transformaciones elementales a

$$V \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & 0 \\ 1 & x_3 - x_1 & \dots & x_3^{n-3}(x_3 - x_1) & x_3^{n-3}(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-3}(x_n - x_1) & x_n^{n-3}(x_n - x_1)(x_n - x_2) \end{pmatrix}$$

Así, multiplicando cada columna por x_2 y restando a su siguiente (hasta 2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & \dots & x_3^{n-4}(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & x_3^{n-3}(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & (x_n - x_1)(x_n - x_2) & \dots & x_n^{n-4}(x_n - x_1)(x_n - x_2) & x_n^{n-3}(x_n - x_1)(x_n - x_2) \end{pmatrix}$$

Hemos terminado la etapa de x_2. Si continuamos, llegamos por transformaciones elementales de columnas hasta una matriz triangular inferior

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & (x_n - x_1)(x_n - x_2) & \dots & (x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Como las transformaciones usadas son de tipo III[28], el determinante de Vandermonde vale el producto de los elementos de la diagonal principal

$$|V| \; = \; (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

En realidad, si los valores son distintos dos a dos, $x_i \neq x_j$, se puede continuar por tranformaciones de columnas de tipo III, hasta la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

que tiene el mismo determinante que la matriz de Vandermonde original. Por tanto, si los valores x_i son distintos dos a dos, el determinante es distinto de cero y la matriz V es regular y tiene inversa. Como consecuencia,

Teorema 5. *Si $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$, todo s.l. de n ecuaciones y n incógnitas que tenga como matriz del sistema $V(x_1, \dots, x_n)$ es de Cramer.*

Corolario 2. *Un polinomio de grado $n-1$, está determinado por n puntos. O sea, por n puntos pasa una única función polinómica de grado $n-1$.*

---

[28] Equivalen a multiplicar por matrices con determinante 1.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Demostración : Como un polinomio, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^{n-1}$, de grado $n-1$ queda determinando por n coeficientes. Si conocemos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ y buscamos un polinomio tal $p(x_i) = y_i$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$, su existencia es equivalente a una solución del s.l. siguiente que es de Cramer cuando $x_i \neq x_j$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 18. *La matriz de Vandermonde de los primeros 5 naturales*

$$V(1,2,3,4,5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 & 5^4 \end{pmatrix}$$

como es equivalente por columnas a la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (3-1)(3-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (4-1)(4-2)(4-3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (5-1)(5-2)(5-3)(5-4) \end{pmatrix}$$

tiene por determinante $2^3 * 3^2 * 4 = 2^5 * 3^2 = 32 * 9 = 288.$

Por la misma razón, el determinate de Vandermonde de cualesquiera 5 números consecutivos también vale 288. En particular, $|V(2.1,3.1,4.1,5.1,6.1)| = 288$.

12. Ejercicios.

Ejercicio 1. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Razona que por transformaciones elementales de filas se puede llegar a la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Razona que por transformaciones elementales de columnas se puede llegar a la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ejercicio 3. *Demuestra que la inversa de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ *es la matriz* $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4. *Calcula el cuadrado de la matriz* $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *¿Cuál es la inversa de la matriz* A*?.*

Ejercicio 5. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *Calcula* A^2, A^3 *y* A^4. *¿Cuánto vale* A^n*?.*

Ejercicio 6. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Calcula* A^2, A^3 *y* A^4.

Ejercicio 7. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *¿Existe una matriz cuadrada* P *tal que* $PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*?.*

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ejercicio 8. *Dada la matriz* $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *¿Existe una matriz cuadrada* Q *tal que* $BQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*?.*

Ejercicio 9. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *¿Existe una matriz cuadrada* Q *tal que* $AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*?.*

Ejercicio 10. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *¿Existe una matriz cuadrada* P *tal que* $PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*?.*

13. Test de repaso.

Para comenzar el cuestionario pulsa el botón de inicio.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Cuando termines pulsa el botón de finalizar.
Para marcar una respuesta coloca el ratón en la letra correspondiente y pulsa el botón de la izquierda (del ratón).

Inicio del Test

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?.

(a) Una matriz es un vector de vectores arbitrarios.
(b) Una matriz es un conjunto finito de filas cualesquiera.
(c) Una matriz es un vector de vectores de longitud fija.
(d) Una matriz es un conjunto finito de columnas.

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Una matriz puede contener filas de distinta longitud.
(b) Una matriz puede contener columnas de distinta longitud.
(c) Una matriz tiene siempre el mismo número de filas que de columnas.
(d) Una matriz puede tener mas columnas que filas.

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) A tiene 4 submatrices 2×2.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

(b) A no tiene submatrices 2×2.
(c) A tiene submatrices 3×3.
(d) A tiene exactamente 3 submatrices 2×2.

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.
(a) Una matriz triangular también es diagonal.
(b) Una matriz diagonal es también triangular superior pero no inferior.
(c) Una matriz triangular superior e inferior es lo mismo.
(d) Una matriz diagonal es también triangular superior e inferior.

5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.
(a) La suma de matrices es conmutativa pero el producto no.
(b) La suma de matrices es asociativa pero no conmutativa.
(c) Ni la suma ni el producto de matrices son conmutativos.
(d) La suma y el producto de matrices son conmutativos.

6. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.
(a) El conjunto de todas las matrices de la misma dimensión no es un grupo abeliano.
(b) El conjunto de todas las matrices de la misma dimensión no es un espacio vectorial.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

(c) Toda matriz se puede considerar un vector.
(d) Dos matrices de la misma dimensión se pueden multiplicar.

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) El producto de dos matrices siempre está definido.
(b) El producto de dos matrices cuando está definido es conmutativo.
(c) Dos matrices cuadradas siempre se pueden multiplicar.
(d) Toda matriz se puede multiplicar por su traspuesta.

8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) La inversa de una matriz siempre existe.
(b) La inversa de una matriz cuadrada siempre existe.
(c) La inversa de un producto de matrices siempre existe.
(d) Una matriz tiene inversa si y sólo si su traspuesta tiene inversa.

9. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Si existe un producto de matrices existe también la inversa del producto.
(b) Aunque exista la inversa del producto de dos matrices, $(AB)^{-1}$, puede no existir el inverso de A o el de B.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

(c) Si A y B son matrices cuadradas de la misma dimensión, entonces existe $(AB)^{-1}$ si y sólo si existen B^{-1} y A^{-1}.

(d) Si A y B son matrices cuadradas, entonces siempre $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

10. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Una matriz elemental siempre tiene determinante uno.

(b) Los tres tipos de matrices elementales tienen el mismo determinante.

(c) Las matrices elementales pueden tener determinante cero.

(d) La inversa de una matriz elemental es siempre otra matriz elemental.

Final del Test | Puntos:

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra