



Apuntes de Cálculo avanzado

Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Jerónimo Alaminos Prats

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Cálculo

Avanzado

Departamento
de
Análisis Matemático

Índice

1 Números complejos 3

- 1.1 El cuerpo de los números complejos 4 1.2 Representación gráfica. Conjugado y módulo de un número complejo 6 1.3 Forma polar y argumentos de un número complejo 7 1.4 Conjuntos en el plano complejo. Un poco de topología 11 1.5 Sucesiones de números complejos 12
1.6 Series de números complejos 13 1.7 Ejercicios 15

2 Funciones complejas 21

- 2.1 Continuidad y límite funcional 21 2.2 Derivada de una función de variable compleja 22
2.3 Ecuaciones de Cauchy-Riemann 23 2.4 Primeras propiedades de las funciones holomorfas 24 2.5 Ejercicios 26

3 Funciones complejas elementales 29

- 3.1 La función exponencial 29 3.2 Logaritmos complejos 30 3.3 Potencias complejas 31
3.4 Funciones trigonométricas complejas 32 3.5 Funciones trigonométricas inversas 32 3.6 Ejercicios 34

4 Series de potencias. Funciones analíticas 39

- 4.1 Sucesiones y series de funciones 39 4.2 Series de potencias complejas 40 4.3 Ejercicios 42

5 Integración de funciones complejas 45

- 5.1 Integración de funciones de variable real con valores complejos 45 5.2 Curvas en el plano 45
5.3 Integral curvilínea 47 5.4 Ejercicios 49

6 Fórmula de Cauchy. Teorema de los residuos 51

- 6.1 Índice de un punto respecto de un camino cerrado 52 6.2 Forma general del Teorema de Cauchy y de la fórmula integral de Cauchy 54 6.3 Singularidades aisladas. Teorema de los residuos 55
6.4 Aplicaciones del teorema de los residuos al cálculo de integrales 58 6.5 Aplicación del teorema de los residuos a la suma de series 64 6.6 Ejercicios 66

7 Series de Fourier 69

- 7.1 Introducción 69 7.2 Fenómenos periódicos 69 7.3 Un poco de historia 71 7.4 Series de Fourier 75 7.5 Propiedades de las series de Fourier 83 7.6 Sobre los coeficientes de Fourier 84
7.7 Convergencia de las series de Fourier 85 7.8 Otras propiedades 88 7.9 Sumabilidad. Núcleos de Fejér. 90 7.10 Aplicaciones de las series de Fourier 91 7.11 Ejercicios 94

8 Transformada de Fourier 99

- 8.1 Origen histórico de la transformada de Fourier 99 8.2 Definición de la transformada de Fourier 100 8.3 Propiedades de la transformada de Fourier 102 8.4 Convolución de funciones 103 8.5 Ejercicios 104

9 Transformada de Laplace 107

- 9.1 Definición 107 9.2 Propiedades de la transformada de Laplace 108 9.3 Ejemplos y aplicaciones 110 9.4 Ejercicios 111

10 Transformada discreta de Fourier 113

10.1 Muestreo de señales continuas **113** 10.2 Reconstrucción de una señal **115** 10.3 El Teorema de Shannon **116** 10.4 La transformada de Fourier discreta **118**

A Tablas de transformadas de Fourier y Laplace 121

A.1 Transformadas de Laplace **121**

Índice alfabético 123

Números complejos

1

1 Introducción

Los números que hoy llamamos “complejos” fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501–1576) y Bombelli (1526–1672) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596–1650) quien afirmó que “ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación” y acuñó el calificativo *imaginarias* para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución es un problema resulta ser un número complejo se interpreta esto como que el problema no tiene solución. Para Leibnitz “el número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser”.

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema bien cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se preocuparon de la naturaleza de los mismos; no se preguntaron ¿qué es un número complejo?, sino que se dijeron *a ver, para qué sirven, qué puede hacerse con ellos*. Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el conocido como *Teorema Fundamental del álgebra* que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que *también son números complejos*. Algunas de sus implicaciones las podemos comentar directamente. Fíjate en cada una de las ecuaciones:

$$x + 3 = 0, \quad 2x + 3 = 0, \quad x^2 - 2 = 0, \quad x^2 + 2x + 2 = 0,$$

cuyas soluciones $x = -3$, $x = 3/2$, $x = \pm\sqrt{2}$ y $x = 1 \pm i$ tienen sentido cuando x es, respectivamente, un número entero, racional, real o complejo. Podría ocurrir que este proceso de ampliación del campo numérico continuara. ¿Qué ocurrirá si ahora consideramos ecuaciones polinómicas con coeficientes complejos? Por ejemplo:

$$x^5 + (1 - i)x^4 + (1/5 - i\sqrt{2})x^2 - 8x + 3 - i/\sqrt{3} = 0.$$

¿Cómo serán sus soluciones? ¿Aparecerán también nuevos tipos de números? El Teorema fundamental del álgebra nos dice que esa ecuación tiene soluciones que *también* son números complejos y, por tanto, que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

El término, hoy usado de “*números complejos*” se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra “*i*” que Euler (1707–1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números

complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

Recordemos, finalmente, la afirmación de Hadamard “El camino más corto entre dos verdades del campo real pasa con frecuencia por el campo complejo”.

1.1 El cuerpo de los números complejos

Definición 1.1. Consideremos en el conjunto \mathbb{R}^2 las operaciones de adición y producto definidas por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas. El elemento neutro de la suma es $(0, 0)$ y $(1, 0)$ es la unidad del producto. Además, $(-a, -b)$ es el opuesto de (a, b) , y todo $(a, b) \neq (0, 0)$ tiene inverso

$$(a, b) \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) = (1, 0).$$

Todas estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ (léase “el conjunto \mathbb{R}^2 con las operaciones de adición y producto”) es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa simbólicamente por \mathbb{C} y sus elementos se llaman *números complejos*.

Observación 1.2. A los elementos de \mathbb{R}^2 se les llama unas veces *pares ordenados de números reales*, otras *vectores* o *puntos* y también *números complejos*. La razón de esto es que en \mathbb{R}^2 conviven varias estructuras cada una con su terminología propia. Por eso a los elementos de \mathbb{R}^2 se les llama *vectores* si se está considerando la estructura de espacio vectorial, *puntos* si fijamos la atención en la estructura topológica o afín, *pares ordenados* cuando estamos pensando en \mathbb{R}^2 como conjunto sin ninguna estructura particular y *números complejos* cuando se considera la estructura de cuerpo antes definida. Ocurre que estos términos se usan a veces en un mismo párrafo lo que puede resultar confuso. La regla que debes tener siempre presente es que todo concepto matemático tiene sentido propio dentro de una determinada estructura matemática. Por ello, a un elemento de \mathbb{R}^2 se le llama número complejo cuando se va a usar el producto antes definido que es lo que en realidad distingue a los números complejos de los vectores de \mathbb{R}^2 .

1.1.1 Forma cartesiana de un número complejo

El símbolo usual (a, b) para representar pares ordenados no es conveniente para representar el número complejo (a, b) . Para convencerte calcula $(1, -1)^4$. Representaremos los números complejos con un simbolismo más apropiado en el que va a intervenir el producto complejo. Para ello, observa que:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$(a, 0)(b, 0) = (ab, 0).$$

Esto indica que los números complejos de la forma $(a, 0)$ se comportan respecto a la suma y la multiplicación de números complejos exactamente de la misma forma que lo hacen los números reales respecto a la suma y multiplicación propias. En términos, más técnicos, $\mathbb{R} \times \{0\}$ es un subcuerpo

de \mathbb{C} isomorfo a \mathbb{R} . Por esta razón, en las operaciones con números complejos podemos sustituir los complejos del tipo $(a, 0)$ por el número real a . Es decir, hacemos la identificación $(a, 0) = a$. Fíjate que con dicha identificación el producto $a(c, d)$ tiene dos posibles interpretaciones: producto del escalar real a por el vector (c, d) (estructura vectorial de \mathbb{R}^2) y producto del complejo $(a, 0)$ por el complejo (c, d) . Pero ambos coinciden y son iguales a (ac, ad) .

El número complejo $(0, 1)$ lo representaremos por i . Con ello tenemos que

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Ahora podemos escribir $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$.

Se dice que a es la *parte real* y b es la *parte imaginaria* del número complejo $a + ib$. El producto ahora es muy fácil de recordar pues

$$(a + ib)(c + id) = ac + i^2bd + i(ad + bc) = ac - bd + i(ad + bc)$$

Es costumbre representar los números complejos con las letras z y w y reservar las letras x, y, u, v para representar números reales. Una expresión de la forma $z = x + iy$ se interpreta como que z es el número complejo cuya parte real es x y cuya parte imaginaria es y . Se escribe $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$ para representar las partes real e imaginaria de z . Naturalmente, dos números complejos son iguales cuando tienen igual parte real e igual parte imaginaria.

Comentarios a la definición usual $i = \sqrt{-1}$

Acabamos de ver que $i^2 = -1$ pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que $i = \sqrt{-1}$. Fíjate lo que ocurre si ponemos $i = \sqrt{-1}$ y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

$$i^2 = -1 = ii = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Luego $1 = -1$. Por tanto, las matemáticas son contradictorias y aquí hemos acabado.

Naturalmente, el error, procede de que estamos haciendo disparates. Fíjate que en la expresión $\sqrt{-1}$ no puedes interpretar que -1 es el número real -1 (porque, como sabes, los números reales negativos no tienen raíz cuadrada real), sino que tienes que interpretar -1 como el número complejo -1 (espero que ya tengas clara la diferencia). Resulta así que estamos usando raíces de números complejos *sin haberlas definido y dando por supuesto que dichas raíces verifican las mismas propiedades que las de los números reales positivos*.

Antes de escribir $\sqrt{-1}$ hay que definir qué significa \sqrt{z} para $z \in \mathbb{C}$. Cuando lo hagamos veremos que la igualdad $\sqrt{z}\sqrt{w} = \sqrt{zw}$, válida cuando $z, w \in \mathbb{R}^+$, no es cierta en general cuando $z, w \in \mathbb{C}$. Todavía más disparatado es *definir* $i = \sqrt{-1}$ sin ni siquiera haber definido antes los números complejos. Sin embargo, y aunque parezca mentira, en muchos textos se define (porque sí, sin más explicaciones) $i = \sqrt{-1}$ y a continuación se dice que los números de la forma $a + ib$ son los números complejos. No es de extrañar que luego resulte que $1 = -1$.

No hay un orden en \mathbb{C} compatible con la estructura algebraica

Al ampliar \mathbb{R} a \mathbb{C} ganamos mucho pero también perdemos algo. Te recuerdo que \mathbb{R} tiene dos estructuras: la algebraica y la de orden. Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en \mathbb{C} no hay nada parecido. Podemos definir relaciones de orden en \mathbb{C} , pero no hay ninguna de ellas que sea compatible con la estructura algebraica. En efecto, si suponemos que \leq

Parte real y parte imaginaria

Paradoja de Bernoulli

es una relación de orden en \mathbb{C} compatible con su estructura algebraica, como $i \neq 0$ habría de ser $0 < i^2 = -1$ (esto todavía no es contradictorio porque pudiera ocurrir que la relación \leq no respetara el orden de \mathbb{R}). Pero también $0 < 1^2 = 1$, luego $0 < 1 + (-1) = 0$ y eso sí que es contradictorio. Por tanto, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en \mathbb{C} ningún orden. Así que ya sabes: ¡mucho cuidado con no escribir desigualdades entre números complejos! Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

1.2 Representación gráfica. Conjugado y módulo de un número complejo

Es usual interpretar el número complejo $x + iy$ como el vector del plano (x, y) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.

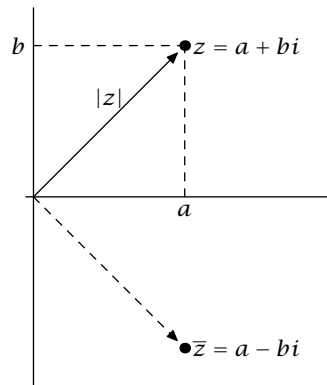


Ilustración 1.1 Representación de un número complejo

Conjugado **Definición 1.3.** Si $z = x + iy$ es un número complejo (con x e y reales), entonces el *conjugado* de z se define como: $\bar{z} = x - iy$ y el *módulo* o *valor absoluto* de z , se define como: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Observa que $\sqrt{x^2 + y^2}$ está definido sin ambigüedad; es la raíz cuadrada del número real no negativo $x^2 + y^2$.

Geoméricamente \bar{z} es sencillamente la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia euclídea del punto (x, y) a $(0, 0)$ o, también, la longitud o norma euclídea del vector (x, y) (ver figura 1.1). La *distancia* entre dos números complejos z y w se define como $|z - w|$. La representación gráfica de la suma es conocida. Dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver figura 1.2) es $z + w$.

Proposición 1.4. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces

- a) $\overline{\bar{z}} = z$,
- b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,
- c) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$.
- d) $|z|^2 = z\bar{z}$,
- e) $\max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$,
- f) $|zw| = |z||w|$,
- g) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

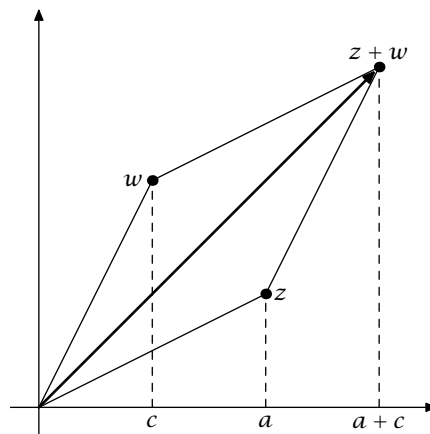


Ilustración 1.2 Suma de números complejos

Demostración. La comprobación de estas afirmaciones es inmediata. Por ejemplo, para comprobar que la propiedad f) se verifica, basta observar que $|zw|$ y $|z||w|$ son números positivos cuyos cuadrados coinciden, pues

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2.$$

Para demostrar la última afirmación es suficiente probar que $|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2$. En efecto:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z}+w\overline{w}+z\overline{w}+\overline{z}w = \\ &= |z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leq |z|^2+|w|^2+2|\operatorname{Re}(z\overline{w})| \leq \\ &\leq |z|^2+|w|^2+2|z\overline{w}| = |z|^2+|w|^2+2|z||\overline{w}| = |z|^2+|w|^2+2|z||w| = \\ &= (|z|+|w|)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Observación 1.5. De la demostración de la última afirmación se deduce que $|z+w| = |z|+|w|$ si, y sólo si, $\operatorname{Re} z\overline{w} = |z\overline{w}|$, esto es, si $z\overline{w} \in \mathbb{R}_0^+$, o lo que es lo mismo $z\overline{w} = \rho$ donde $\rho \in \mathbb{R}_0^+$. Esta igualdad, puede escribirse de forma equivalente multiplicando por w como $z|w|^2 = \rho w$, esto es, $z = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ lo que quiere decir que z y w están en una misma semirrecta a partir del origen.

Ejemplo 1.6. La división de números complejos es fácil teniendo en cuenta que el producto de un complejo y su conjugado da como resultado el módulo al cuadrado de dicho número complejo.

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{1+i}{2-i} \frac{2+i}{2+i} = \frac{1+3i}{5}.$$

1.3 Forma polar y argumentos de un número complejo

El uso de coordenadas polares en el plano facilita mucho los cálculos con productos de números complejos. Para cualquier número complejo $z = x + iy \neq 0$ podemos escribir

$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right).$$

Como $\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|} \right)$ es un punto de la circunferencia unidad, puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|}\right) = (\cos(\vartheta), \text{sen}(\vartheta))$$

para algún número $\vartheta \in \mathbb{R}$. Resulta así que $z = |z|(\cos(\vartheta) + i \text{sen}(\vartheta))$. Esta forma de expresar un número complejo recibe el nombre de *forma polar*, cuya interpretación gráfica vemos en la figura 1.3.

Argumento **Definición 1.7.** Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z|(\cos(t) + i \text{sen}(t))$ cualquiera de ellos recibe el nombre de *argumento* de z . El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por $\text{Arg}(z)$.

$$\text{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos(t) + i \text{sen}(t))\}$$

Observa que

$$s, t \in \text{Arg}(z) \iff \begin{cases} \cos(t) = \cos(s) \\ \sin(t) = \sin(s) \end{cases} \iff s = t + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

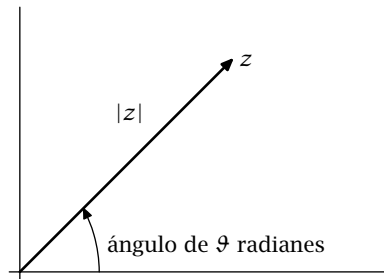


Ilustración 1.3 Forma polar de un número complejo

Por tanto, conocido un argumento $t_0 \in \text{Arg}(z)$, cualquier otro es de la forma $t_0 + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $\text{Arg}(z) = t_0 + 2\pi\mathbb{Z}$.

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay uno único que se encuentra en el intervalo $]-\pi, \pi]$, se representa por $\text{arg}(z)$ y viene dado por

$$\text{arg}(z) = \begin{cases} 2 \arctan\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)+|z|}\right), & \text{si } z \notin \mathbb{R}^- \\ \pi, & \text{si } z \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Argumento principal A dicho argumento se le llama *argumento principal* de z .

La comprobación de las anteriores afirmaciones es fácil. Como $-\frac{\pi}{2} < \arctan(t) < \frac{\pi}{2}$, se sigue que $-\pi < \text{arg}(z) < \pi$ si $z \notin \mathbb{R}^-$. Luego, $-\pi < \text{arg}(z) \leq \pi$. Si $z = t \in \mathbb{R}^-$ es evidente que $z = |t|(\cos(\pi) + i \text{sen}(\pi))$. Y para $z \notin \mathbb{R}^-$ se tiene:

$$\begin{aligned} \cos(\text{arg}(z)) &= \frac{1 - \tan^2(\text{arg}(z)/2)}{1 + \tan^2(\text{arg}(z)/2)} \\ &= \frac{(|z| + \text{Re}(z))^2 - (\text{Im}(z))^2}{(|z| + \text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2} \\ &= \frac{2 \text{Re}(z)(|z| + \text{Re}(z))}{2|z|(|z| + \text{Re}(z))} = \frac{\text{Re}(z)}{|z|}, \text{ y} \\ \text{sen}(\text{arg}(z)) &= \frac{2 \tan(\text{arg}(z)/2)}{1 + \tan^2(\text{arg}(z)/2)} \\ &= \frac{2 \text{Im}(z)(|z| + \text{Re}(z))}{(|z| + \text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2} \\ &= \frac{2 \text{Im}(z)(|z| + \text{Re}(z))}{2|z|(|z| + \text{Re}(z))} = \frac{\text{Im}(z)}{|z|}. \end{aligned}$$

Donde se ha utilizado que $|z|^2 = (\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2$. No es difícil comprobar que el argumento principal de $z = x + iy \neq 0$ viene también dado por:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & \text{si } y < 0, x < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } y \leq 0, x = 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } y > 0, x = 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \text{si } y \geq 0, x < 0. \end{cases}$$

Esta última forma es quizás más cómoda para los cálculos.

Ejemplo 1.8. El módulo de $z = 1 - i$ es $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Por tanto

$$\frac{z}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = \cos(\arg(z)) + i \operatorname{sen}(\arg(z)),$$

o, lo que es lo mismo, $\cos(\arg(z)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen}(\arg(z)) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, de donde se deduce que $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$.

Observación 1.9. Puede parecer un poco extraña la forma de elegir el argumento principal de un número complejo. La elección que hemos hecho supone que medimos ángulos en el semiplano superior de 0 a π y en el semiplano inferior de 0 a $-\pi$.

Fíjate que si tomas un número complejo que esté situado en el tercer cuadrante $z = x + iy$ con $x < 0$, $y < 0$ y supones que y es próximo a 0, su argumento principal está próximo a $-\pi$, y si tomas un número complejo que esté situado en el segundo cuadrante, $w = x + iv$ con $x < 0$, $v > 0$, y supones que v es próximo a 0, su argumento principal está próximo a π . Además, la distancia $|w - z| = |v - y| = v - y$ es tan pequeña como quieras. Esto nos dice que el argumento principal tiene una discontinuidad en el eje real negativo: salta de $-\pi$ a π cuando atravesamos dicho eje desde el tercer al segundo cuadrante.

Peor todavía dirás. Hasta cierto punto. Primero, la discontinuidad es inevitable. Si queremos elegir argumentos en un intervalo de longitud 2π , digamos, $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ entonces dichos argumentos saltan de α a $\alpha + 2\pi$ cuando atravesamos la semirrecta $(x, y) = \rho(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$, ($\rho > 0$). En particular, si tomamos argumentos en el intervalo $[0, 2\pi[$ (cosa que, a primera vista, parece lo razonable) nos encontramos con que entonces se produce una discontinuidad de dichos argumentos en el eje real positivo. Bien, sucede que la extensión a \mathbb{C} de algunas funciones definidas en \mathbb{R}^+ (el logaritmo, las raíces) hace intervenir el argumento principal. Naturalmente, queremos que dichas extensiones sigan siendo continuas en \mathbb{R}^+ y ello justifica que tengamos que tomar argumentos principales de la forma en que lo hemos hecho: porque preferimos introducir una discontinuidad en \mathbb{R}^- a perder la continuidad en \mathbb{R}^+ .

1.3.1 Fórmula de De Moivre

Veamos cómo la forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos. Consideremos dos números complejos no nulos

$$z = |z| (\cos(\vartheta) + i \operatorname{sen}(\vartheta)), \quad w = |w| (\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)).$$

Entonces

$$\begin{aligned} zw &= |z| |w| (\cos(\vartheta) + i \operatorname{sen}(\vartheta))(\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)) = \\ &= |zw| [(\cos(\vartheta) \cos(\varphi) - \operatorname{sen}(\vartheta) \operatorname{sen}(\varphi)) + i(\operatorname{sen}(\vartheta) \cos \varphi + \cos(\vartheta) \operatorname{sen}(\varphi))] = \\ &= |zw| (\cos(\vartheta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\vartheta + \varphi)). \end{aligned}$$

Es decir: para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos. Por ejemplo, para calcular $(1+i)^4$ como $|1+i| = \sqrt{2}$ y $\arg(1+i) = \pi/4$, se sigue que $(1+i)^4 = -4$.

Así pues, el producto de dos números complejos es geoméricamente un giro (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una homotecia (el producto de los módulos de ambos números).

Proposición 1.10. Sean $z, w \in \mathbb{C}$ no nulos. Entonces

- a) Si $\vartheta \in \text{Arg}(z)$ y $\varphi \in \text{Arg}(w)$, entonces $\vartheta + \varphi \in \text{Arg}(zw)$.
- b) Si $\varphi \in \text{Arg}(z)$ entonces $-\varphi \in \text{Arg}(1/z)$.

Como consecuencia, es fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula que será de gran utilidad.

Fórmula de De Moivre

Proposición 1.11. Si z es un complejo no nulo, ϑ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $n\vartheta \in \text{Arg}(z^n)$, es decir:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\vartheta) + i \sen(n\vartheta)).$$

1.3.2 Raíces de un número complejo

Se trata ahora de resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural, $n \geq 2$, y $z \neq 0$ es un número complejo conocido. Escribamos w en forma polar:

$$w = |w| (\cos(\varphi) + i \sen(\varphi)).$$

Usando la fórmula de De Moivre, podemos escribir la ecuación $w^n = z$ en la forma equivalente:

$$w^n = |w|^n (\cos(n\varphi) + i \sen(n\varphi)) = |z| (\cos(\vartheta) + i \sen(\vartheta)).$$

Esta igualdad se da cuando $|w|^n = |z|$ y $n\varphi = \vartheta + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. Deducimos que $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (ojo: se trata de la raíz n -ésima de un número positivo, cosa ya conocida). Ahora bien, para cualquier número φ_k de la forma $\varphi_k = (\vartheta + 2k\pi)/n$ tenemos un número complejo

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} (\cos(\varphi_k) + i \sen(\varphi_k))$$

tal que $(w_k)^n = z$. Como una ecuación polinómica de grado n no puede tener más de n soluciones, se sigue que distintos valores de k deben dar lugar al mismo número w_k . Veamos:

$$w_k = w_q \iff \varphi_k - \varphi_q = 2m\pi \iff k - q = nm.$$

Es decir, k y q dan el mismo resto al dividirlos por n . Deducimos que para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ obtenemos w_k distintos y cualquier otro w_q es igual a uno de ellos. Por tanto hay n raíces n -ésimas distintas de z .

De entre todas las raíces n -ésimas de z vamos a designar con el símbolo $\sqrt[n]{z}$ a la raíz n -ésima principal, que está definida por

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n} \left[\cos\left(\frac{\arg(z)}{n}\right) + i \sen\left(\frac{\arg(z)}{n}\right) \right].$$

Observa que en el caso particular de que z sea un número real positivo, entonces la raíz principal de z (considerado como número complejo) coincide con la raíz de z (considerado como número real positivo).

Hemos obtenido que las raíces n -ésimas de z vienen dadas por

$$z_k = |z|^{1/n} \left[\cos \left(\frac{\arg(z)+2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\arg(z)+2k\pi}{n} \right) \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Observa que definiendo $u = \cos(2\pi/n) + i \operatorname{sen}(2\pi/n)$, los números $u_0 = 1, u, u^2, \dots, u^{n-1}$ son las raíces n -ésimas de la unidad. Podemos escribir las raíces n -ésimas de z en la forma $z_k = z_0 u^k$. Como multiplicar por u es un giro de amplitud $2\pi/n$, deducimos que las n raíces de z se obtienen girando la raíz n -ésima principal, z_0 , con giros sucesivos de amplitud $2\pi/n$. Es decir, si representamos todas las raíces n -ésimas de z obtenemos n puntos sobre una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt[n]{|z|}$ que forman un polígono regular de n lados.

En general no es cierto que dados dos números complejos z y w entonces el producto de las raíces n -ésimas principales de z y de w sea igual a la raíz n -ésima principal de zw . Lo que sí es cierto es que el producto de dos raíces n -ésimas cualesquiera de z y de w es una raíz n -ésima de zw . Por tanto, $\sqrt[n]{z} \sqrt[n]{w}$, es una raíz n -ésima de zw pero no tiene por qué ser la principal.

Por ejemplo, para $n = 2, z = w = -1$, como $\arg(-1) = \pi$, tenemos que

$$\sqrt{-1} = \cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2) = i.$$

En este caso

$$\sqrt{-1} \sqrt{-1} = ii = -1 \neq \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

La igualdad $\sqrt[n]{z} \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$ equivale a que para algún entero k se verifique que

$$\frac{\arg(z)}{n} + \frac{\arg(w)}{n} = \frac{\arg(zw)}{n} + 2k\pi,$$

es decir, $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw) + 2kn\pi$. Como $-2\pi < \arg(z) + \arg(w) \leq 2\pi$ y $n \geq 2$ tiene que ser $k = 0$ (pues, en otro caso, $|2kn\pi| \geq 4\pi$). Luego, debe ocurrir que $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw)$ lo que equivale a que $-\pi < \arg(z) + \arg(w) \leq \pi$.

Por ejemplo, si los números z y w están en el semiplano de la derecha, es decir, $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} w > 0$, entonces $-\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$ y $-\pi/2 < \arg(w) < \pi/2$; por tanto $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw)$ por lo que, en este caso, $\sqrt[n]{z} \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$.

1.4 Conjuntos en el plano complejo. Un poco de topología

Definición 1.12. Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, el conjunto

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

se llama *disco o bola abierta* de centro a y radio r . Si $r \geq 0$, el conjunto

Disco abierto

$$\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\},$$

se llama *disco o bola cerrada* de centro a y radio r .

Disco cerrado

Observa que un disco abierto no puede ser vacío. Un disco cerrado, en cambio, puede reducirse a un sólo punto: $\overline{D}(a, 0) = \{a\}$.

Definición 1.13. Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ se llama *acotado* si está contenido en algún disco centrado en el origen o, lo que es lo mismo, si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a| \leq M$ para cualquier $a \in A$.

Conjunto acotado

Definición 1.14. Sea A un subconjunto de \mathbb{C} .

a) Diremos que $a \in A$ es un *punto interior* de A si existe $r > 0$ tal que $D(a, r) \subset A$. Llamaremos *interior* de A al conjunto

$$\mathring{A} = \{a \in A : a \text{ es punto interior de } A\}.$$

Conjunto abierto b) Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es un conjunto *abierto* si todo punto de Ω es centro de algún disco abierto contenido en Ω , o sea, si $A = \mathring{A}$.

Conjunto cerrado c) Un conjunto es *cerrado* si su complementario es abierto.

Por convenio el conjunto vacío se considera abierto.

Ejemplo 1.15. Los conjuntos determinados por desigualdades estrictas y funciones continuas suelen ser conjuntos abiertos. Por ejemplo, el siguiente conjunto es abierto

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im}(z)^2 > 3\}.$$

Definición 1.16. Un conjunto abierto no vacío con la propiedad de que dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse por una curva sin salirse del conjunto se llama un *dominio*. Una definición equivalente aunque menos intuitiva de dominio es la siguiente. Un dominio es un conjunto abierto no vacío, Ω , cuya única descomposición en la forma $\Omega = A \cup B$, donde A y B son conjuntos abiertos disjuntos, es la trivial, es decir, $\{A, B\} = \{\emptyset, \Omega\}$. Un conjunto cerrado y acotado se llama un conjunto *compacto*.

Dominio

Conjunto compacto

Punto de acumulación

Definición 1.17. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, se dice que un punto $z \in \mathbb{C}$ es un *punto de acumulación* de A si todo disco abierto con centro en z contiene puntos de A distintos de z . Observa que un punto z puede ser un punto de acumulación de A y no pertenecer a A .

1.5 Sucesiones de números complejos

Una sucesión de números complejos es una aplicación del conjunto de los números naturales en \mathbb{C} . Como de costumbre, representaremos por $\{z_n\}$ la función dada por $n \mapsto z_n$ donde $z_n \in \mathbb{C}$. La definición de sucesión convergente es exactamente la misma que para sucesiones reales.

Sucesión convergente

Definición 1.18. La sucesión de números complejos $\{z_n\}$ converge a un número complejo z si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $|z_n - z| < \varepsilon$. Equivalentemente, $\{z_n\}$ converge a z si $\lim |z_n - z| = 0$.

Recordemos que $\max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$. Gracias a esta desigualdad tenemos que

$$\left. \begin{array}{l} |\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z)| \\ |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(z)| \end{array} \right\} \leq |z_n - z| \leq |\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(z)|.$$

Deducimos que $\lim |z_n - z| = 0$ si, y sólo si, $\lim |\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z)| = 0$ y $\lim |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(z)| = 0$. Hemos probado así el siguiente resultado.

Proposición 1.19. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es convergente si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re}(z_n)\}$ y $\{\operatorname{Im}(z_n)\}$ son convergentes. Además en dicho caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \operatorname{Re}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n).$$

Gracias a este resultado el estudio de sucesiones de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de dos sucesiones de números reales.

Supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión tal que para todo $K > 0$ existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geq n_0$ entonces $|z_n| \geq K$. En dicho caso diremos que la sucesión $\{z_n\}$ es *divergente* o que *diverge* y escribiremos $\{z_n\} \rightarrow \infty$. Observa que $\{z_n\} \rightarrow \infty$ es lo mismo que $\{|z_n|\} \rightarrow +\infty$.

Sucesión divergente

Los resultados que conoces para sucesiones de números reales en los que no interviene el orden son también válidos para sucesiones de números complejos. Destacamos entre ellos los más importantes.

Proposición 1.20.

Álgebra de límites

- a) Si $\{z_n\} \rightarrow z$ y $\{w_n\} \rightarrow w$, entonces $\{z_n + w_n\} \rightarrow z + w$ y $\{z_n w_n\} \rightarrow zw$. Además, si $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \neq 0$, entonces $\{1/z_n\} \rightarrow 1/z$.
- b) Si $\{z_n\}$ diverge y $\{w_n\}$ está acotada entonces $\{z_n + w_n\}$ diverge.
- c) Si $\{z_n\}$ diverge y $\{w_n\}$ está separada de 0, esto es, existe $\rho > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que para $n \geq n_0$ se cumple $|w_n| \geq \rho$, entonces $\{z_n w_n\}$ diverge.

Recuerda que una *sucesión parcial* de una sucesión $\{z_n\}$ es cualquier sucesión de la forma $\{z_{\sigma(n)}\}$ donde $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente.

Sucesión parcial

Teorema 1.21. Toda sucesión acotada de números complejos tiene alguna sucesión parcial convergente.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Definición 1.22. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ se dice que es de *Cauchy* si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $p, q \geq n_0$ entonces $|z_p - z_q| < \varepsilon$.

Sucesión de Cauchy

Repitiendo el mismo argumento anterior, deducimos que $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy si, y sólo si, $\{\text{Re}(z_n)\}$ y $\{\text{Im}(z_n)\}$ son sucesiones de Cauchy. Puesto que \mathbb{R} es completo, ser de Cauchy equivale a ser convergente, luego si $\{\text{Re}(z_n)\}$ y $\{\text{Im}(z_n)\}$ son de Cauchy convergen y, por tanto, $\{z_n\}$ es convergente.

Teorema 1.23. Toda sucesión de Cauchy de números complejos es convergente.

Teorema de completitud

1.6 Series de números complejos

Dada una sucesión, $\{z_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{S_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{z_n\}$, es decir:

$$S_1 = z_1, S_2 = z_1 + z_2, S_3 = z_1 + z_2 + z_3, \dots, S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n.$$

La sucesión $\{S_n\}$ así obtenida se llama *serie de término general* z_n y es costumbre representarla por $\sum_{n \geq 1} z_n$ o, más sencillamente, $\sum z_n$.

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, todos los conceptos y resultados estudiados ya para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series. En particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es “convergente”. Si una serie $\sum_{n \geq 1} z_n$ es convergente se usa el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ para representar el límite de la serie que suele llamarse suma de la serie. Naturalmente $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es el número complejo definido por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{S_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k.$$

Como caso particular de la Proposición 1.19, la serie $\sum_{n \geq 1} z_n$ converge si, y sólo si, las series

$$\text{Re} \left(\sum_{n \geq 1} z_n \right) = \sum_{n \geq 1} \text{Re}(z_n) \quad \text{y} \quad \text{Im} \left(\sum_{n \geq 1} z_n \right) = \sum_{n \geq 1} \text{Im}(z_n)$$

son convergentes.

Conviene que recuerdes la condición básica *necesaria* para la convergencia de una serie. Si la serie $\sum z_n$ converge entonces la sucesión $z_n = \sum_{j=1}^n z_j - \sum_{j=1}^{n-1} z_j$ es diferencia de dos sucesiones que convergen al mismo límite y por tanto converge a cero.

Proposición 1.24. Condición necesaria para que $\sum z_n$ sea convergente es que $\lim z_n = 0$.

Para las series es posible definir otro tipo de convergencia, la convergencia absoluta.

Convergen-
cia absoluta

Definición 1.25. Se dice que una serie de números complejos $\sum_{n \geq 1} z_n$ converge absolutamente si la serie de números reales positivos $\sum_{n \geq 1} |z_n|$ es convergente.

Proposición 1.26. Si una serie de números complejos $\sum z_n$ es absolutamente convergente entonces dicha serie también es convergente.

Demostración. Pongamos $S_n = \sum_{j=1}^n z_j$, $A_n = \sum_{j=1}^n |z_j|$ y supongamos que la sucesión $\{A_n\}$ es convergente, es decir, $\sum z_n$ es absolutamente convergente. Dado $\varepsilon > 0$, la condición de Cauchy para $\{A_n\}$ nos dice que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|A_q - A_p| = \sum_{k=p+1}^q |z_k| < \varepsilon \quad \text{para todos } p, q \in \mathbb{N} \text{ tales que } q > p \geq n_0.$$

Deducimos que para todos $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $q > p \geq n_0$ se verifica que

$$|S_q - S_p| = |z_{p+1} + z_{p+2} + \dots + z_q| \leq \sum_{k=p+1}^q |z_k| < \varepsilon$$

Lo que prueba que la sucesión $\{S_n\}$, es decir, la serie $\sum z_n$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente. \square

El concepto de convergencia absoluta de una serie es mucho más fuerte que el de convergencia como se pone de manifiesto en el siguiente resultado que no demostraremos.

Teorema de Riemann

Teorema 1.27. La serie $\sum_{n \geq 1} z_n$ converge absolutamente si, y sólo si, para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n \geq 1} z_{\pi(n)}$ es convergente. Además, en tal caso se verifica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)}.$$

1.6.1 Criterios de convergencia no absoluta para series

Naturalmente, puedes usar los criterios de convergencia para series de números reales positivos, que ya debes conocer, para estudiar la convergencia absoluta de una serie de números complejos. Pero, ¿qué hacer cuando una serie no es absolutamente convergente? Naturalmente, podemos intentar comprobar si la serie verifica la condición de Cauchy, pero este procedimiento con frecuencia es difícil. Pues bien, los siguientes criterios de Dirichlet y Abel proporcionan información sobre la convergencia no absoluta.

Teorema 1.28. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos.

Criterio de Dirichlet

a) Si $\{a_n\}$ es monótona, converge a cero y la serie $\sum z_n$ tiene sumas parciales acotadas, entonces $\sum a_n z_n$ converge.

Criterio de Abel

b) Si $\{a_n\}$ es monótona, acotada y la serie $\sum z_n$ converge, entonces $\sum a_n z_n$ es convergente.

Ejemplo 1.29. Es inmediato comprobar que la sucesión $\{(-1)^n\}$ tiene sumas parciales acotadas. Si tomamos una sucesión monótona verificando que $\lim\{a_n\} = 0$, el criterio de Dirichlet nos dice que la serie $\sum (-1)^n a_n$ es convergente. ¿Te suena este criterio?

1.7 Ejercicios

1.7.1 Números complejos

Ejercicio 1.1

Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma $a + ib$.

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------|
| a) $(7 - 2i)(5 + 3i)$ | e) $\frac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i}$ |
| b) $(i - 1)^3$ | f) $(1 + i)^{-2}$ |
| c) $\overline{(1 + i)(2 + i)}(3 + i)$ | g) $\frac{1+2i}{2-i}$ |
| d) $\frac{3+i}{2+i}$ | h) $i^2(1 + i)^3$ |

Ejercicio 1.2

Calcula la parte real e imaginaria de las funciones:

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| a) $f_1(z) = \bar{z}^2$ | d) $f_4(z) = \frac{1}{1+z^2}$ |
| b) $f_2(z) = z^3$ | e) $f_5(z) = \frac{z+i}{z-i}$ |
| c) $f_3(z) = \frac{1}{z}$ | |

Ejercicio 1.3

Calcula las siguientes cantidades.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| a) $ (1 + i)(2 - i) $ | c) $ (1 + i)^{20} $ |
| b) $\left \frac{4-3i}{2-i\sqrt{5}} \right $ | d) $ \sqrt{2} + i(\sqrt{2} + 1) $ |

Ejercicio 1.4

Calcula los números complejos z tales que $\frac{1+z}{1-z}$ es:

- | | |
|--------------------|-------------------------------|
| a) Un número real; | b) Un número imaginario puro. |
|--------------------|-------------------------------|

Ejercicio 1.5

Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

- | | |
|---------------------------|----------------------------------|
| a) $-\sqrt{3} - i$ | d) $\frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$ |
| b) $-\sqrt{3} + i$ | |
| c) $\frac{3}{\sqrt{3}+i}$ | |

Ejercicio 1.6

Expresa los siguientes números en la forma $a + ib$:

a) $(-1 + i\sqrt{3})^{11}$

d) $(-\sqrt{3} + i)^{13}$

b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$

c) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6$

Ejercicio 1.7

Calcula $\arg(zw)$ y $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg(z)$ y $\arg(w)$.

Ejercicio 1.8

Supuesto que $|z| = 1$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \begin{cases} \pi/2, & \text{si } \operatorname{Im}(z) > 0 \\ -\pi/2, & \text{si } \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 1.9

Sea $z = x + iy$. Supuesto que $|z| = 1$, $z \neq 1$, $z \neq -i$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{si } 1 - x + y > 0, \\ -\frac{3\pi}{4}, & \text{si } 1 - x + y < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 1.10

Representa gráficamente el conjunto de números complejos que verifican la igualdad $|z| = \pi + \arg(z)$.

Ejercicio 1.11

Resuelve la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$ donde a, b y c son números complejos conocidos y $a \neq 0$.

Ejercicio 1.12

Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $z^3 = 1 + i$

d) $z^8 = 1$

b) $z^4 = i$

e) $z^2 + \sqrt{32}iz - 6i = 0$

c) $z^3 = -1 + i\sqrt{3}$

Ejercicio 1.13

Calcula las soluciones de la ecuación $z^4 + (1 + i)z^2 + 5i = 0$.

Ejercicio 1.14

Demuestra la llamada "igualdad del paralelogramo":

**Identidad del
paralelogramo**

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}$ y explica su significado geométrico.

Ejercicio 1.15

Dados dos números complejos α y β , calcula el mínimo valor para $z \in \mathbb{C}$ de la cantidad $|z - \alpha|^2 + |z - \beta|^2$.

Sugerencia: La igualdad del paralelogramo puede ser útil.

Ejercicio 1.16

Prueba las desigualdades:

a) $||z| - |w|| \leq |z - w|$

b) $|z + w| \geq \frac{1}{2}(|z| + |w|) \left| \frac{z}{|z|} + \frac{w}{|w|} \right|$

donde z, w son números complejos. Estudia también cuándo se da la igualdad en cada una de dichas desigualdades.

Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

Ejercicio 1.17

Prueba que $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < 1$ si $|z| < 1$ y $|a| < 1$ y también si $|z| > 1$ y $|a| > 1$.

Ejercicio 1.18

Estúdiese para cada una de las igualdades siguientes si hay algún número complejo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ que la verifica:

a) $|z^3 + z^2 + 1| = 3;$

b) $|z^4 - 2z - i| = 4;$

c) $|z^6 + z^3 + 2| = 4 + |4 + 4z^2|.$

Ejercicio 1.19

Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π . Prueba las igualdades

a) $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx) = \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$

b) $\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(2x) + \dots + \operatorname{sen}(nx) = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$

Sugerencia: Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, calcúlese $A + iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre.

Ejercicio 1.20

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Dado un número entero $m \in \mathbb{Z}$, calcúlese el valor de las expresiones:

- a) $1 + w^m + w^{2m} + \dots + w^{(n-1)m}$;
 b) $1 - w^m + w^{2m} - \dots + (-1)^{n-1} w^{(n-1)m}$.

Ejercicio 1.21

Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

- a) $\operatorname{sen}(3\varphi) = 3 \operatorname{sen}(\varphi) - 4 \operatorname{sen}^3(\varphi)$;
 b) $\cos(4\varphi) = 8 \cos^4(\varphi) - 8 \cos^2(\varphi) + 1$;
 c) $\operatorname{sen}(5\varphi) = 5 \operatorname{sen}(\varphi) - 20 \operatorname{sen}^3(\varphi) + 16 \operatorname{sen}^5(\varphi)$.

Ejercicio 1.22

Representar gráficamente los conjuntos de números complejos z que verifican:

- a) $|z - 3| \leq 3$;
 b) $2 < |z - i| \leq 3$;
 c) $|\arg(z)| < \frac{\pi}{6}$;
 d) $|z - i| + |z + i| = 4$
 e) $|z - 1| = |z - 2i|$;
 f) $\left| \frac{z-i}{z+2i} \right| = 2$;
 g) $\operatorname{Im}(z^2) > 6$;
 h) $|z - i| = \operatorname{Im}(z) + 1$

Ejercicio 1.23

Dados dos números complejos α , β y un número positivo $\rho \neq 1$, justifíquese que el conjunto

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-\alpha}{z-\beta} \right| = \rho \right\}$$

representa una circunferencia en el plano cuyo centro y radio debes calcular.

Ejercicio 1.24

Prueba que $|z| + |w| = \left| \frac{z+w}{2} - \sqrt{zw} \right| + \left| \frac{z+w}{2} + \sqrt{zw} \right|$.

Sugerencia: la identidad del paralelogramo puede ser útil.

Ejercicio 1.25

Encuentra los vértices de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en el punto $z = 0$ y uno de sus vértices z_1 es conocido.

Ejercicio 1.26

Resuelve la ecuación $(z - 1)^n = (z + 1)^n$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Ejercicio 1.27

Sea $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Prueba que z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Ejercicio 1.28

Prueba que tres números complejos a, b, c son los vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, verifican la igualdad $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Ejercicio 1.29

Dados dos números complejos distintos $a, b \in \mathbb{C}$, justifica que $\frac{z-a}{z-b}$ es real si, y sólo si, z está en la recta que pasa por a y por b ; y es real negativo si, y sólo si, z está en el segmento que une a con b .

Ejercicio 1.30

Sean A, B, C, D números reales tales que $A^2 + B^2 + C^2 > D^2$. Prueba que la ecuación:

$$A(z + \bar{z}) + iB(\bar{z} - z) + C(z\bar{z} - 1) + D(z\bar{z} + 1) = 0$$

representa, en el caso de que sea $C + D = 0$, una recta en el plano; mientras que si $C + D \neq 0$, representa una circunferencia cuyo centro y radio se calcularán.

1.7.2 Sucesiones y series

Ejercicio 1.31

Estudia la convergencia de las sucesiones:

- a) $z_n = \sqrt[n]{n} + ina^n$ ($a \in \mathbb{R}, |a| < 1$)
- b) $z_n = \frac{2^n}{n} + \frac{in}{2^n}$
- c) $z_n = \sqrt[n]{a} + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ ($a > 0$)
- d) $z_n = n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) + 5i \cos\left(\frac{1}{n}\right)$
- e) $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$
- f) $z_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

Ejercicio 1.32

Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos y sea $\varphi_n \in \operatorname{Arg}(z_n)$. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \rho$. Justifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \rho (\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)).$$

Ejercicio 1.33

Calcula el límite de la sucesión $z_n = \left(1 + \frac{\sqrt{2} + i\frac{\pi}{3}}{n}\right)^n$.
Sugerencia: Expresa $z_n = |z_n| (\cos(\varphi_n) + i \operatorname{sen}(\varphi_n))$ y usa el ejercicio anterior.

Ejercicio 1.34

Calcula el límite de la sucesión $z_n = n \left(\sqrt[n]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2n} \right) \right) - 1 \right)$.

Sugerencia: Recuerda que el límite de la sucesión $n \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right)$ es bien conocido.

Ejercicio 1.35

Sea $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = 1$, $z \neq 1$. Prueba que la sucesión $\{z^n\}$ no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π , las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

Ejercicio 1.36

Estudia la convergencia de las series:

a) $\sum \frac{1}{(1+i)^n}$

b) $\sum \frac{\cos(n) + i \operatorname{sen}(n)}{n}$

c) $\sum \frac{\cos(n) + i \operatorname{sen}(n)}{n^2}$

d) $\sum \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n}$

e) $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} + i \frac{1}{n\sqrt{n}} \right)$

f) $\sum \frac{n!}{(in)^n}$

g) $\sum \frac{(2+i)^n}{(1+2i)^n} \frac{1}{n}$

h) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^n$

i) $\sum \left(\cos \left(\frac{\pi}{n^2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n^2} \right) \right)$

j) $\sum \frac{(3+4i)^n}{2i(4+3i)^{n+7}}$

Ejercicio 1.37

Sea $\rho \in \mathbb{R}$ con $|\rho| < 1$ y $\vartheta \in \mathbb{R}$. Calcula los límites

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos(n\vartheta) \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \operatorname{sen}(n\vartheta).$$

Ejercicio 1.38

Prueba que si la serie $\sum z_n$ converge y, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica $|\arg(z_n)| < \alpha$, para algún número $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, entonces dicha serie converge absolutamente.

Ejercicio 1.39

Supongamos que las series $\sum z_n$ y $\sum z_n^2$ son convergentes y que $\operatorname{Re}(z_n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\sum |z_n|^2$ es convergente.

Funciones complejas

2

Las funciones complejas no son más que las funciones definidas en subconjuntos de \mathbb{R}^2 con valores en \mathbb{R}^2 cuando en \mathbb{R}^2 consideramos su estructura compleja. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, a toda función compleja $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ se le asocian dos funciones reales: la función $u = \operatorname{Re}(f)$, “parte real de f ”, y la función $v = \operatorname{Im}(f)$, “parte imaginaria de f ”, definidas para todo $(x, y) = x + iy \in A$ por:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy).$$

Naturalmente, $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$.

La *función conjugada* de f es la función \bar{f} dada por $\bar{f}(z) = \operatorname{Re} f(z) - i \operatorname{Im} f(z)$. La *función módulo* de f es la función $|f|$ dada por $|f|(z) = |f(z)|$.

2.1 Continuidad y límite funcional

Definición 2.1. Se dice que la función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es *continua* en un punto $a \in A$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que **Función continua**

$$\left. \begin{array}{l} z \in A \\ |z - a| < \delta \end{array} \right\} \implies |f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

Usando una vez más las desigualdades $\max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$ se prueba fácilmente que una función compleja f es continua en a si, y sólo si, las funciones $\operatorname{Re}(f)$ y $\operatorname{Im}(f)$ son continuas en a .

Definición 2.2. Dado un punto a de acumulación de A , se dice que $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ *tiene límite en a* si existe un número complejo $L \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que **Límite**

$$\left. \begin{array}{l} z \in A \\ 0 < |z - a| < \delta \end{array} \right\} \implies |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Simbólicamente escribimos $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L$.

Usando las desigualdades anteriores y llamando $a = \alpha + i\beta$, $L = \lambda + i\mu$ tenemos

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} \operatorname{Re} f(x, y) = \lambda \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} \operatorname{Im} f(x, y) = \mu \end{cases}$$

De forma análoga se pueden definir límites infinitos o en infinito.

Definición 2.3.

- a) Se dice que $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ *tiene límite en infinito* si hay un número complejo $L \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $K > 0$ tal que si $|z| > K$ entonces $|f(z) - L| < \varepsilon$. Simbólicamente escribimos $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$.
- b) Se dice que $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ *tiene límite infinito en infinito* si para todo $M > 0$ existe $K > 0$ tal que si $|z| > K$ entonces $|f(z)| > M$. Simbólicamente escribimos $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.
- c) Se dice que $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ *tiene límite infinito en un punto a de acumulación* de A si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left. \begin{array}{l} z \in A \\ 0 < |z - \alpha| < \delta \end{array} \right\} \implies |f(z)| > M$$

Simbólicamente escribimos $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.

Observa que hay una completa analogía formal entre las definiciones anteriores y las correspondientes para funciones reales de una variable real. Por ello, las reglas de cálculo de límites conocidas para funciones de una variable real son también válidas, con las mismas demostraciones, para funciones de variable compleja.

El siguiente resultado, aunque elemental, es importante.

Continuidad del argumento principal

Proposición 2.4. *La función argumento principal es continua en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ y discontinua en \mathbb{R}^- .*

Demostración. Sabemos que para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ el argumento principal viene dado por

$$\arg(z) = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z) + |z|} \right).$$

Teniendo en cuenta que la función arcotangente es continua y que $\operatorname{Re}(z) + |z| > 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, deducimos que el argumento principal es continuo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.

Sea $a \in \mathbb{R}^-$ y $z_n = a + \frac{(-1)^n}{n}i$. Claramente $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, pero como $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg(z_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan \left(\frac{1}{na} \right) + \pi = \pi$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg(z_{2n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan \left(\frac{-1}{na} \right) - \pi = -\pi$, concluimos que $\{\arg(z_n)\}$ no converge y por tanto el argumento principal es discontinuo en a . \square

2.2 Derivada de una función de variable compleja

Función derivable

Definición 2.5. Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, se dice que f es *derivable* en un punto $a \in A \cap A'$ si existe el límite

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \in \mathbb{C}.$$

El valor de dicho límite se representa por $f'(a)$ y se llama derivada de f en el punto a .

La única novedad de la definición es que se está utilizando el producto complejo y eso, como veremos, hace que la condición de derivabilidad en sentido complejo sea mucho más fuerte que la derivabilidad para funciones reales.

Casos Particulares

- a) Cuando $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f(A) \subseteq \mathbb{R}$, la definición dada coincide con la conocida para una función real de variable real
- b) Para funciones complejas de una variable real se tiene el siguiente resultado.
Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces la función f es de la forma $f(t) = u(t) + iv(t)$ donde u y v son funciones reales de variable real. En este caso tenemos:

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{u(t) - u(a)}{t - a} + i \frac{v(t) - v(a)}{t - a}$$

y deducimos que f es derivable en a si, y sólo si, las funciones u y v son derivables en a , en cuyo caso $f'(a) = u'(a) + iv'(a)$.

Observa que hay una completa analogía formal entre el concepto de función derivable para funciones de variable compleja y para funciones reales de una variable real. Por ello, las reglas de derivación conocidas para funciones de una variable real son también válidas, con las mismas demostraciones, para funciones de variable compleja.

Proposición 2.6. Sean dos funciones $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ con $A \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Supongamos que f y g son derivables en a . Entonces: Reglas de derivación

a) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

b) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

c) Si $g(z) \neq 0$ para todo $z \in A$ entonces $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

También es fácil comprobar que la regla de la cadena sigue siendo válida para funciones complejas.

Proposición 2.7. Sean $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $f(A) \subseteq B$, y consideremos la función compuesta $h = g \circ f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que f es derivable en $a \in A \cap A'$ y g es derivable en $b = f(a) \in B \cap B'$. Entonces h es derivable en a y Regla de la cadena

$$h'(a) = g'(f(a)) f'(a) = g'(b) f'(a).$$

2.3 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

El siguiente resultado pone de manifiesto que la derivabilidad compleja es mucho más restrictiva de lo que puede parecer a primera vista.

Teorema 2.8. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, a un punto de Ω y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función de Ω en \mathbb{C} . Notemos $a = \alpha + i\beta$, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es derivable (en sentido complejo) en $a = \alpha + i\beta$.

b) Las funciones $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ son diferenciables en (α, β) y además Ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) &= \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, \beta) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta) \end{aligned} \right\}$$

En caso de que se cumplan i) y ii) se tiene $f'(a) = f'(\alpha + i\beta) = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) + i \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta)$.

Demostración. Por definición, f es derivable si, y sólo si existe un número complejo, la derivada de f en a , $f'(a) = \lambda + i\mu$ que verifica

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{|f(z) - f(a) - (\lambda + i\mu)(z - a)|}{|z - a|} = 0.$$

Pongamos $z = x + iy$. Si tenemos en cuenta la igualdad

$$(\lambda + i\mu)(x + iy - \alpha - i\beta) = \lambda(x - \alpha) - \mu(y - \beta) + i(\mu(x - \alpha) + \lambda(y - \beta))$$

y el hecho de que el módulo de un complejo coincide con la norma euclídea (visto en \mathbb{R}^2), el límite anterior se escribe como sigue:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} \frac{\|(u(x,y), v(x,y)) - (u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)) - (\lambda(x-\alpha) - \mu(y-\beta), \mu(x-\alpha) + \lambda(y-\beta))\|}{\|(x,y) - (\alpha,\beta)\|} = 0$$

o bien, como $(\lambda(x - \alpha) - \mu(y - \beta), \mu(x - \alpha) + \lambda(y - \beta)) = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix}$, se tiene que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} \frac{\left\| (u(x,y), v(x,y)) - (u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)) - \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} \right\|}{\|(x,y) - (\alpha,\beta)\|} = 0.$$

La condición anterior quiere decir que la aplicación $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en \mathbb{R}^2 es diferenciable en (α, β) y su diferencial es la aplicación lineal dada por

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por tanto $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ es la matriz jacobiana de la aplicación $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ en (α, β) , esto es

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) = \lambda, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, \beta) = -\mu, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta) = \mu, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha, \beta) = \lambda$$

Finalmente $f'(a) = f'(\alpha + i\beta) = \lambda + i\mu = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta)$. \square

Este resultado explica porqué si defines, sin pensarlo mucho, una función compleja en la forma $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ lo más probable es que, a pesar de lo buenas que puedan ser las funciones u y v , la función así definida no sea derivable. Pues las funciones u y v no tienen por qué verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esto indica (aunque esta es una idea difícil de precisar) que las funciones complejas derivables son “auténticas funciones complejas” en el sentido de que si la función $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable entonces la expresión $u(x, y) + iv(x, y)$ debe depender únicamente de la variable z . Los siguientes ejemplos son ilustrativos.

Ejemplo 2.9.

- $f(x + iy) = x$ no es derivable en ningún punto. Su parte imaginaria es cero y $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$. Esta función es la proyección sobre el eje OX vista como función real. De hecho, como función real es un polinomio (y de los más sencillos) y, por tanto, derivable.
- $f(z) = z|z|^2$ sólo es derivable en cero.
- $f(x + iy) = e^x(\cos(y) + i \operatorname{sen}(y))$ es derivable en todo \mathbb{C} y $f'(z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

2.4 Primeras propiedades de las funciones holomorfas

Función holomorfa

Definición 2.10. Sea Ω un abierto de \mathbb{C} . Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *holomorfa* en Ω si f es derivable en todo punto de Ω . En tal caso la función definida para $z \in \Omega$ por $z \mapsto f'(z)$ se llama *función derivada* de f . Notaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω . Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se llaman *funciones enteras*.

Función entera

Ejemplo 2.11.

- Las funciones polinómicas, es decir, las funciones de la forma

$$p(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n$$
 donde $c_k \in \mathbb{C}$ para $0 \leq k \leq n$, son funciones enteras. La función derivada de p viene dada por $p'(z) = c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + \dots + nc_nz^{n-1}$ para $z \in \mathbb{C}$.
- Las funciones racionales, es decir, las funciones de la forma $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ donde $p(z)$ y $q(z)$ son funciones polinómicas, son holomorfas en su dominio natural de definición $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$. La función derivada de R viene dada por

$$R'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q(z)^2} \quad (z \in \Omega).$$

2.4.1 Propiedades de las funciones holomorfas

Como consecuencia de las reglas de derivación tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.12. *El conjunto $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en un abierto Ω con la suma y el producto usual de funciones es un álgebra.*

Proposición 2.13. *Una función holomorfa en un dominio cuya derivada es nula en todo punto es constante.*

Demostración. Sea Ω un dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Fijado $z_0 \in \Omega$, definimos

$$A = \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}.$$

A es no vacío y, por ser f continua, es un cerrado relativo de Ω . Veamos que también es abierto. Sea $a \in A$ y como Ω es abierto, existe $r > 0$ tal que $D(a, r) \subset \Omega$. Tomamos $b \in D(a, r)$ y definimos $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ por $\varphi(t) = f((1-t)a + tb)$. Como f es derivable, la regla de la cadena nos dice que φ es derivable y

$$\varphi'(t) = f'((1-t)a + tb)(b-a) = 0$$

Por ser φ una función compleja de variable real tenemos

$$\varphi'(t) = (\operatorname{Re} \varphi)'(t) + i(\operatorname{Im} \varphi)'(t) = 0 \quad (t \in [0, 1])$$

Luego $(\operatorname{Re} \varphi)'(t) = 0$ y $(\operatorname{Im} \varphi)'(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Puesto que $\operatorname{Re} \varphi$ y $\operatorname{Im} \varphi$ son funciones reales de variable real definidas en $[0, 1]$, se sigue que son constantes. Luego φ es constante y por tanto $\varphi(0) = f(a) = \varphi(1) = f(b)$ luego $b \in A$. Hemos probado que $D(a, r) \subset A$, luego A es abierto. El hecho de que Ω sea un dominio permite concluir que $A = \Omega$, es decir, f es constante en Ω . \square

Corolario 2.14. *Si dos funciones holomorfas tienen la misma derivada sobre un dominio y coinciden en un punto son iguales.*

La siguiente proposición vuelve a poner de manifiesto que la condición de que una función sea holomorfa es mucho más restrictiva que la derivabilidad real.

Proposición 2.15. *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

- i) $\operatorname{Re}(f)$ es constante en Ω .
- ii) $\operatorname{Im}(f)$ es constante en Ω .
- iii) La función compleja conjugada de f , \bar{f} , es holomorfa en Ω .
- iv) f es constante en Ω .
- v) $|f|$ es constante en Ω .

Demostración. Pongamos $f = u + iv$, con $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$. Es claro que la condición (iv) implica todas las demás.

- (i) \implies (iv)

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann afirman que $f'(z) = f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$.

Puesto que $\operatorname{Re}(f)$ es constante tenemos $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$ lo que implica que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$ de donde deducimos (iv) gracias a la proposición anterior.

- (ii) \implies (iv)

Puesto que $\operatorname{Im}(f) = -\operatorname{Re}(if)$ la implicación (i) \implies (iv) ya probada nos dice que la función if es constante y, por lo tanto, f también lo es.

- (iii) \implies (iv)

Como f es holomorfa y \bar{f} lo es por hipótesis tenemos que $f + \bar{f} = 2 \operatorname{Re}(f)$ es holomorfa. Puesto que $\operatorname{Im}(\operatorname{Re} f) = 0$ es constante, deducimos, por (ii) \implies (iv), que $\operatorname{Re}(f)$ es constante y por (i) \implies (iv) concluimos que f es constante.

- (v) \Rightarrow (iv)

Si $|f| = \alpha$ entonces $f(z)\bar{f}(z) = \alpha^2$. Si $\alpha = 0$ entonces f es idénticamente nula y hemos acabado. Si $\alpha \neq 0$ entonces f no se anula en ningún punto por lo que $\bar{f}(z) = \frac{\alpha^2}{f(z)}$ es holomorfa en Ω y, por (iii) \Rightarrow (iv), concluimos que f es constante. \square

Observación 2.16. Estas propiedades de las funciones holomorfas están muy lejos de ser ciertas para funciones reales diferenciables. Por ejemplo, dada una función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 diferenciable que no se anule nunca, dividiéndola por su norma obtenemos una función diferenciable cuyo módulo (norma euclídea) es constante.

2.5 Ejercicios

Ejercicio 2.1

Demuestra que si $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ es una función polinómica de grado $n \geq 1$, se verifica que $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty$.

Ejercicio 2.2

Estudia la derivabilidad de la función $f(x + iy) = x^3 + 3xy^2 + i(y^3 + 3x^2y)$.

Ejercicio 2.3

Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función dada por $f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}$ si $z = x + iy \neq 0$, $f(0) = 0$. Estudia la continuidad y la derivabilidad de f .

Ejercicio 2.4

Consideremos la función dada para $z \neq 0$ por $f(z) = \frac{\bar{z}^2}{z}$, y $f(0) = 0$. ¿En qué puntos verifica f las ecuaciones de Cauchy-Riemann? ¿Es f derivable en $z = 0$?

Ejercicio 2.5

Escribe las ecuaciones de Cauchy-Riemann para $f(z) = U(\rho, \vartheta) + iV(\rho, \vartheta)$ donde $z = \rho(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$. Expresa la derivada de f por medio de las derivadas parciales de U y V .

Ejercicio 2.6

Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que hay números $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que $a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c$ para todo $z \in \Omega$. Prueba que f es constante en Ω .

Ejercicio 2.7

Calcula una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{Re} f(x + iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Si se exige que sea $f(0) = 0$, entonces dicha función es única.

Ejercicio 2.8

Calcula una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

- a) $\operatorname{Im} f(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$,
- b) $\operatorname{Im} f(x, y) = xy$,
- c) $\operatorname{Re} f(x, y) = x^2 - 4x - y^2 + 2y$, o
- d) $\operatorname{Re} f(x, y) = e^x \cos(y) + x$.

Ejercicio 2.9

Encuentra una condición necesaria y suficiente que deben cumplir los números reales a, b, c para que exista una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, verificando que $\operatorname{Re} f(x + iy) = ax^2 + bxy + cy^2$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Determina, cuando dicha condición se cumpla, todas las funciones enteras f cuya parte real es de la forma indicada.

Ejercicio 2.10

Sea $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función holomorfa. Prueba que las curvas de nivel $u(x, y) = c, v(x, y) = k$ son dos familias de trayectorias ortogonales.

Funciones complejas elementales

3

3.1 La función exponencial

Una de las formas de definir la exponencial de un número real x es mediante el límite

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Por tanto, una forma coherente de definir la exponencial de un número complejo sería calcular el anterior límite para $z \in \mathbb{C}$. Llamemos $z = x + iy$. Consideraremos que $y \neq 0$, puesto que si $y = 0$ tendríamos que $z = x$ sería un número real. Pongamos $w_n = 1 + z/n$ y

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right).$$

Sea n_0 tal que para $n \geq n_0$ se verifique que $\operatorname{Re}(w_n) > 0$. Entonces, para $n \geq n_0$ resulta que $\varphi_n = \arg(w_n)$. Por otra parte, el módulo de w_n viene dado por

$$|w_n|^2 = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^2 = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}.$$

Tenemos ahora, gracias a la fórmula de De Moivre que

$$(w_n)^n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} (\cos(n\varphi_n) + i \operatorname{sen}(n\varphi_n)).$$

Pero, por el criterio de equivalencia logarítmica, es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2}\right)\right) = e^x.$$

Además, la sucesión $\{\varphi_n\}$ es asintóticamente equivalente a la sucesión $\left\{\frac{y/n}{1+x/n}\right\}$. Por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{y/n}{1+x/n} = y.$$

En consecuencia, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} |w_n|^n (\cos(n\varphi_n) + i \operatorname{sen}(n\varphi_n)) = e^x (\cos(y) + i \operatorname{sen}(y)).$$

Definimos, por tanto, la exponencial compleja como

$$e^z = \exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im}(z))).$$

Observa que $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$, $\operatorname{Im}(z) \in \operatorname{Arg}(e^z)$. En particular, obtenemos la *fórmula de Euler*

$$e^{it} = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

que establece una relación entre la exponencial compleja y las funciones trigonométricas. Haciendo $t = \pi$ tenemos la singular igualdad

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

en la que intervienen los números más importantes de las matemáticas. De la fórmula de Euler se deducen fácilmente las llamadas *ecuaciones de Euler*:

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \operatorname{sen}(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann se deduce que la función exponencial es una función entera y $\exp'(z) = \exp(z)$. Se prueba fácilmente que $e^{z+w} = e^z e^w$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$. Se deduce que para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $k \in \mathbb{Z}$ es $e^z = e^{z+2k\pi i}$. Lo que nos dice que la exponencial compleja es una función *periódica* con período $2\pi i$. Naturalmente, esto supone una gran diferencia con la exponencial real que es una función inyectiva. Observa que la exponencial no se anula nunca pues $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} > 0$.

3.2 Logaritmos complejos

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se va a traducir, como vamos a ver enseguida, en que la ecuación $e^w = z$, donde z es un número complejo no cero, va a tener infinitas soluciones $w \in \mathbb{C}$. Como

$$e^w = e^{\operatorname{Re}(w)} (\cos(\operatorname{Im}(w)) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im}(w)))$$

Para que $e^w = z$ es necesario y suficiente que:

- $|e^w| = |z|$, esto es, $e^{\operatorname{Re}(w)} = |z|$, es decir, $\operatorname{Re}(w) = \log |z|$ (logaritmo natural del número real positivo $|z|$).
- $\operatorname{Arg}(e^w) = \operatorname{Arg}(z)$, esto es, $\operatorname{Im}(w) \in \operatorname{Arg}(z)$ y esto se cumple si, y sólo si $\operatorname{Im}(w) = \arg(z) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Hemos probado que $\{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \{\log |z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$. Por tanto, existen infinitos números complejos w que satisfacen la ecuación $e^w = z$. Cualquiera de ellos se llama *un logaritmo* de z . El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Log}(z)$. De entre todos ellos elegimos uno, llamado *logaritmo principal*, definido por

Logaritmo
Logaritmo principal

$$\log(z) = \log |z| + i \arg(z), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}^*.$$

Observa que cualquier otro logaritmo de z es de la forma $\log(z) + i2k\pi$ para algún entero k . Es importante que observes que la igualdad $\log(zw) = \log(z) + \log(w)$ que es válida para los logaritmos de los números reales positivos, no es siempre cierta para números complejos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \log(-1 + i\sqrt{3}) &= \log |-1 + i\sqrt{3}| + i \arg(-1 + i\sqrt{3}) \\ &= \log(2) + i(\arctan(-\sqrt{3}) + \pi) = \log(2) + i\frac{2\pi}{3} \\ \log(-\sqrt{3} + i) &= \log |-\sqrt{3} + i| + i \arg(-\sqrt{3} + i) \\ &= \log(2) + i(\arctan(-1/\sqrt{3}) + \pi) = \log(2) + i\frac{5\pi}{6} \\ \log((-1 + i\sqrt{3})(-\sqrt{3} + i)) &= \log(-4i) = \log(4) - i\frac{\pi}{2} \\ &\neq \log(-1 + i\sqrt{3}) + \log(-\sqrt{3} + i) = \log(4) + i\frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Lo que está claro es que el número $\log(z) + \log(w) \in \operatorname{Log}(zw)$, es decir, $\log(z) + \log(w)$ es *un* logaritmo de zw pero no tiene por qué ser el logaritmo principal de zw .

Como la función $z \mapsto \arg(z)$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ y discontinua en \mathbb{R}_0^- , se deduce que el logaritmo principal es discontinuo en \mathbb{R}_0^- y continuo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$. De hecho, el logaritmo principal es una función holomorfa en el dominio $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$. Esto puedes probarlo usando las condiciones de Cauchy-Riemann aunque en este caso es más fácil proceder como sigue. Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ y $b = \log(a)$. La función

$$h(w) = \frac{e^w - e^b}{w - b}, \quad h(b) = e^b$$

es continua en todo \mathbb{C} . Además $h(b) \neq 0$ y, por tanto, hay algún $r > 0$ tal que $h(w) \neq 0$ para todo $w \in D(b, r)$. Como la función logaritmo principal es continua en a , deducimos que hay un $s > 0$ tal que $w = \log(z) \in D(b, r)$ siempre que $z \in D(a, s)$. Teniendo en cuenta que la función logaritmo principal es inyectiva, podemos escribir para $z \in D(a, s)$:

$$\frac{\log(z) - \log(a)}{z - a} = \frac{1}{h(\log(z))} \implies \lim_{z \rightarrow a} \frac{\log(z) - \log(a)}{z - a} = \frac{1}{h(\log(a))} = \frac{1}{a}.$$

Hemos probado, pues, que $\log'(z) = \frac{1}{z}$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.

3.3 Potencias complejas

Recuerda que dados dos números reales $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b = e^{b \log(a)}$. Ahora, dados $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a , todos ellos son de la forma $\log(a) + i2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por ello, cualquier número complejo de la forma $e^{b(\log(a) + i2k\pi)}$ donde $k \in \mathbb{Z}$, es una potencia de base a y exponente b . De todas ellas se destaca una:

$$a^b = e^{b \log(a)}$$

y dicho número se llama *valor principal* de la potencia de base a y exponente b . Observa que si $b = 1/n$ donde $n \in \mathbb{N}$, el número

$$\begin{aligned} a^{1/n} &= \exp\left(\frac{1}{n} \log(a)\right) \\ &= \exp\left(\frac{\log|a|}{n} + i \frac{\arg(a)}{n}\right) \\ &= |a|^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\arg(a)}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\arg(a)}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

es el valor principal de la raíz n -ésima de a que antes hemos notado por $\sqrt[n]{a}$. Esta definición da lugar a las funciones exponenciales complejas de base a , $z \mapsto a^z$, definidas por $a^z = \exp(z \log(a))$ que son holomorfas en todo el plano.

Por otro lado la función potencia compleja de exponente b , $z \mapsto z^b$, definida por $z^b = \exp(b \log(z))$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.

Las funciones exponenciales cumplen evidentemente la igualdad $a^{z+w} = a^z + a^w$ pero las funciones potencias no cumplen, en general como vimos al estudiar las raíces, la propiedad $(zw)^b = z^b w^b$. Esta igualdad se da en el caso de que

$$\exp(b \log(zw)) = \exp(b \log(z) + b \log(w))$$

o, puesto que la función exponencial es periódica de periodo $2\pi i$, cuando se verifique que

$$b \log(zw) = b \log(z) + b \log(w) + 2k\pi i, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Como caso particular, cuando z y w pertenecen al primer cuadrante la igualdad $\log(zw) = \log(z) + \log(w)$ es cierta con lo cual lo anterior se cumple para $k = 0$. Por los mismos motivos la igualdad $(z^b)^c = z^{bc}$ no es cierta en general.

3.4 Funciones trigonométricas complejas

3.4.1 Seno y coseno complejos

Las ecuaciones de Euler: $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, $\operatorname{sen}(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, válidas para todo $t \in \mathbb{R}$, también tienen sentido para números complejos. Por ello, para todo $z \in \mathbb{C}$ definimos el coseno y el seno complejos por:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Es inmediato que el seno y coseno complejos extienden a las funciones seno y coseno reales. Además, como el coseno y el seno complejos están definidos como combinación de exponenciales, sus propiedades se deducen fácilmente a partir de las propiedades de la exponencial.

Proposición 3.1. Sean $z, w \in \mathbb{C}$.

Identidad fundamental
Fórmulas de adición

- a) $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$.
- b) $\cos(-z) = \cos(z)$, $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$.
- c) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \operatorname{sen}(w)\cos(z)$,
 $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(w)\operatorname{sen}(z)$.
- d) Las funciones seno y coseno son derivables en todo \mathbb{C} con

$$\operatorname{sen}'(z) = \cos(z) \quad \text{y} \quad \cos'(z) = -\operatorname{sen}(z).$$

Relación con las funciones hiperbólicas

- e) $\cosh(x) = \cos(ix)$ y $\operatorname{senh}(x) = -i\operatorname{sen}(ix)$.
- f) Las funciones seno y coseno complejos no están acotadas, aunque si lo están en bandas acotadas paralelas al eje real.
- g) Las funciones seno y coseno complejas no tienen más ceros que los reales, esto es, $\operatorname{sen}(z) = 0$ si, y sólo si, z es real de la forma $2k\pi$ y $\cos(z) = 0$ si, y sólo si, z es real de la forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

3.4.2 Tangente compleja

Por analogía con la tangente real definimos la función tangente compleja como

$$\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} \quad (\cos(z) \neq 0).$$

Puesto que el seno y el coseno son funciones enteras la tangente compleja es una función holomorfa en su dominio de definición $\mathbb{C} \setminus \{z : \cos(z) = 0\}$. Además sabemos que $\cos(z) = 0$ sólo si z es real de la forma $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Las propiedades de la tangente se deducen con facilidad de las propiedades del seno y el coseno. Por ejemplo, puedes comprobar que

$$\tan(z + w) = \frac{\tan(z) + \tan(w)}{1 - \tan(z)\tan(w)}.$$

3.5 Funciones trigonométricas inversas

3.5.1 Arcocoseno complejo

Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$ se trata de calcular los complejos w tales que $\cos(w) = z$.

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z \iff e^{iw} + e^{-iw} - 2z = 0$$

puesto que $\exp(w) \neq 0$ para cualquier w , podemos multiplicar por e^{iw} la expresión anterior: $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$. Poniendo $u = e^{iw}$, la ecuación anterior podemos escribirla $u^2 - 2zu + 1 = 0$, cuyas raíces son

$$u = z \pm \sqrt{z^2 - 1} = z \pm i\sqrt{1 - z^2}.$$

Observa que dichas raíces son distintas de 0, de hecho una es inversa de la otra pues su producto es igual a 1. Hemos obtenido que:

$$\exp(iw) = z \pm i\sqrt{1 - z^2} \iff iw \in \text{Log}(z \pm i\sqrt{1 - z^2}) \iff \cos(w) = z.$$

Naturalmente, hay infinitos valores de w que verifican la igualdad anterior. El conjunto de todos ellos se representa por $\text{Arccos}(z)$.

$$\boxed{\text{Arccos}(z) = \frac{1}{i} \text{Log}(z \pm i\sqrt{1 - z^2}) .}$$

De todos ellos elegimos el que corresponde al logaritmo principal y le llamamos *valor principal* de $\text{Arccos}(z)$ que está definido por:

$$\boxed{\arccos(z) = \frac{1}{i} \log(z + i\sqrt{1 - z^2}) .}$$

Veamos que el $\arccos(z)$ extiende al arccoseno real. En efecto, para $z = x \in [-1, 1]$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \log(x + i\sqrt{1 - x^2}) &= \frac{1}{i} (\log|x + i\sqrt{1 - x^2}| + i \arg(x + i\sqrt{1 - x^2})) \\ &= \frac{1}{i} (\log(1) + i \arg(x + i\sqrt{1 - x^2})) \\ &= \arg(x + i\sqrt{1 - x^2}). \end{aligned}$$

Observemos que $(x, \sqrt{1 - x^2})$ es un punto de la mitad superior de la circunferencia unidad y una medida del ángulo que forma el número complejo $x + i\sqrt{1 - x^2}$ con el eje real positivo es precisamente el arco cuyo coseno es x . Además, para $x \in [-1, 1]$ se tiene que $0 \leq \arccos(x) \leq \pi$. Deducimos que $\arg(x + i\sqrt{1 - x^2}) = \arccos(x)$.

Teniendo en cuenta que $\sqrt{1 - z^2} = \exp(\frac{1}{2} \log(1 - z^2))$, y que el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, deducimos, por la regla de la cadena, que la función $z \mapsto \sqrt{1 - z^2}$ es holomorfa en el conjunto

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 - z^2 \notin \mathbb{R}_0^-\} = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[).$$

Análogamente $\log(z + i\sqrt{1 - z^2})$ es derivable en el conjunto

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : z + i\sqrt{1 - z^2} \notin \mathbb{R}_0^-\}.$$

Como $z + i\sqrt{1 - z^2}$ y $z - i\sqrt{1 - z^2}$ son inversos, tenemos que

$$z + i\sqrt{1 - z^2} \in \mathbb{R}_0^- \implies z - i\sqrt{1 - z^2} \in \mathbb{R}_0^- \implies \left\{ \begin{array}{l} z \in \mathbb{R}^- \\ \sqrt{1 - z^2} \in i\mathbb{R} \end{array} \right\} \implies z \in]-\infty, -1]$$

deducimos que $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1] \supset \Omega$. Luego el arccoseno es holomorfo en Ω . La regla de la cadena nos permite calcular su derivada

$$\begin{aligned}\operatorname{arccos}'(z) &= \frac{1}{i} \frac{1 + i \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}}{z + i\sqrt{1-z^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \frac{\sqrt{1-z^2} - iz}{iz - \sqrt{1-z^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}.\end{aligned}$$

3.5.2 Arcoseno complejo

Dado un número complejo z queremos calcular los complejos w tales que $\operatorname{sen}(w) = z$. El conjunto de tales números lo representaremos por Arcsen . Aunque podemos repetir el mismo proceso anterior, podemos aprovechar lo ya hecho y observar que $\operatorname{sen}(w) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - w\right)$, luego $\operatorname{sen}(w) = z$ si, y sólo si, $\frac{\pi}{2} - w \in \frac{1}{i} \operatorname{Log}\left(z \pm i\sqrt{1-z^2}\right)$. Equivalentemente si

$$w \in \frac{\pi}{2} + i \operatorname{Log}\left(z \pm i\sqrt{1-z^2}\right).$$

El valor principal del arcoseno, que notaremos por $\operatorname{arcsen}(z)$, se define eligiendo el logaritmo principal:

$$\operatorname{arcsen}(z) = \frac{\pi}{2} + i \log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}$$

y es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

3.5.3 Arcotangente compleja

Dado $z \in \mathbb{C}$ queremos calcular los números complejos w tales que $z = \tan(w)$ o, lo que es lo mismo, $z \cos(w) = \operatorname{sen}(w)$. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Arctan}(z)$. Escribiendo la definición de seno y coseno

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}.$$

Si $z = \pm i$, la ecuación anterior no tiene solución por lo que consideramos $z \neq \pm i$. Multiplicando por $e^{2iw} = u$ la expresión anterior resulta

$$u^2 - 1 = iz(u^2 + 1) \Rightarrow u^2(1 - iz) = 1 + iz$$

puesto que $z \neq -i$ podemos escribir $u^2 = \frac{1+iz}{1-iz}$, esto es,

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz} \Leftrightarrow w \in \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \quad (z \neq \pm i).$$

Definimos entonces el valor principal de $\operatorname{Arctan}(z)$ por:

$$\operatorname{arctan}(z) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \quad (z \neq \pm i).$$

Puedes probar ahora que la función $\operatorname{arctan}(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i\rho : \rho \in \mathbb{R}, |\rho| > 1\}$.

Es fácil probar que la función arcotangente compleja, al igual que ocurre con las demás funciones trigonométricas complejas, extiende a la función arcotangente real.

3.6 Ejercicios

Ejercicio 3.1

Expresa los 8 números $\pm 1 \pm i$, $\pm\sqrt{3} \pm i$ en la forma $re^{i\varphi}$.

Ejercicio 3.2

Calcula el módulo y los argumentos principales de los números $1 + e^{i\varphi}$, $1 - e^{i\varphi}$, $-ae^{i\varphi}$ donde $|\varphi| \leq \pi$ y $a > 0$.

Ejercicio 3.3

Calcula $\log(z)$ y $\text{Log}(z)$ cuando z es uno de los números siguientes

$$i, -i, e^{-3}, e^{5i}, 4, -5e, 1 + i.$$

Ejercicio 3.4

Calcula $\log(3i) + \log(-1 + i\sqrt{3})$ y $\log(3i(-1 + i\sqrt{3}))$.

Ejercicio 3.5

Calcula $\log(-1 - i) - \log i$ y $\log\left(\frac{-1-i}{i}\right)$.

Ejercicio 3.6

Calcula $(-4)^i$, i^{-3i} , i^i , 1^{2i} , 3^{1-i} , $((-i)^i)^i$, $(1 + i)^{1+i}$.

Ejercicio 3.7

a) Estudia, para $z \in \mathbb{C}^*$ y $n \in \mathbb{N}$, las igualdades:

- i) $\log(\exp(z)) = z$,
- ii) $\exp(\log(z)) = z$,
- iii) $\log\left(\frac{1}{z}\right) = -\log(z)$,
- iv) $\log(\sqrt[n]{z}) = \frac{\log(z)}{n}$,
- v) $\log(z^n) = n \log(z)$.

b) Prueba que la función logaritmo establece una biyección entre los conjuntos $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ y $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$.

Ejercicio 3.8

Con una interpretación adecuada de la suma justifica que $\text{Arg}(z w) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$, y que $\text{Log}(z w) = \text{Log}(z) + \text{Log}(w)$.

Ejercicio 3.9

Estudia, interpretándolas convenientemente cuando sea necesario, las siguientes igualdades:

- a) $\text{Log}[a^b] = b \text{Log}(a)$,
- b) $\log[a^b] = b \text{Log}(a)$,
- c) $\log(a^b) = b \log(a)$.

Ejercicio 3.10

Indica el error en los razonamientos siguientes: $(-z)^2 = z^2$; por tanto $2 \text{Log}(-z) = 2 \text{Log}(z)$ y, por consiguiente, $\text{Log}(-z) = \text{Log}(z)$.

Ejercicio 3.11

Explica con detalle dónde está el error en las igualdades siguientes:

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i.$$

Ejercicio 3.12

Calcula la imagen por la función exponencial de:

- a) Una recta paralela a uno de los ejes coordenados.
- b) Una banda horizontal de anchura menor que 2π .
- c) Un rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados.
- d) El conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$.

Ejercicio 3.13

¿Tiene la función exponencial límite en infinito? Dado $w \in \mathbb{C}$ con $|w| = 1$, estudia la existencia del límite $\lim_{r \rightarrow +\infty} \exp(rw)$.

Ejercicio 3.14

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función verificando $f(z+w) = f(z)f(w)$, para $z, w \in \mathbb{C}$. Probar que si f es derivable en un punto entonces f es entera. Encontrar todas las funciones enteras que verifiquen la condición anterior. Dar un ejemplo de una función que verifique dicha propiedad y no sea entera.

Ejercicio 3.15

Da condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto $[a^b]$ de las potencias de base a y exponente b sea finito.

Ejercicio 3.16

Estudia qué relación hay entre los conjuntos $[a^{m/n}]$ y $[(a^m)^{1/n}]$, donde $a \in \mathbb{C}^*$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. ¿Qué puede afirmarse, en particular, cuando m y n son primos entre sí?

Ejercicio 3.17

Sean $\rho > 0$, $\alpha < \beta$ tales que $\rho\alpha, \rho\beta, \alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$. Prueba que $z \mapsto z^\rho$ es una biyección de $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : \alpha < \arg z < \beta\}$ sobre $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C}^* : \rho\alpha < \arg z < \rho\beta\}$.

Ejercicio 3.18

Calcula las partes real e imaginaria de los números $\operatorname{sen}(1 + i)$, $\operatorname{cos}(1 - i)$, $\operatorname{tan}(1 + 2i)$.

Ejercicio 3.19

Indica los conjuntos de puntos $z \in \mathbb{C}$ donde las funciones e^z , $\operatorname{sen}(z)$, $\operatorname{cos}(z)$, $\operatorname{tan}(z)$, $\operatorname{arcsen}(z)$, $\operatorname{arctan}(z)$ toman:

- Valores reales.
- Valores imaginarios puros.

Ejercicio 3.20

Calcula $\operatorname{Arcsen}(1 + i)$, $\operatorname{Arctan}(1 - i)$, $\operatorname{arcsen}(i)$, $\operatorname{arctan}(2i)$.

Series de potencias. Funciones analíticas

4

4.1 Sucesiones y series de funciones

4.1.1 Sucesiones de funciones

Una sucesión de funciones, como su nombre indica, es una sucesión cuyos elementos son funciones. Formalmente, es una aplicación que a cada número natural le asigna una función, en nuestro caso una función compleja.

Definición 4.1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones con $f_n : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Decimos que $\{f_n\}$ *converge puntualmente* en un punto $a \in A$ si la sucesión de números complejos $\{f_n(a)\}$ es convergente. Llamaremos *campo de convergencia puntual* de la sucesión $\{f_n\}$ al conjunto

Convergencia puntual

$$C = \{z \in A : \{f_n(z)\} \text{ converge}\}$$

y llamamos *límite puntual* a la función $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(z)\}.$$

Se dice que $\{f_n\}$ *converge uniformemente* a una función f en un conjunto $B \subseteq A$ si

Convergencia uniforme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{|f_n(z) - f(z)| : z \in B\} = 0$$

es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$ para todo $z \in B$.

4.1.2 Series de funciones

Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ podemos formar otra cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los de la primera, esto es:

$$f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \dots, f_1 + f_2 + \dots + f_n, \dots$$

Dicha sucesión la representaremos por $\sum_{n \geq 1} f_n$ y la llamaremos *serie de término general* f_n .

Puesto que las series de funciones son sucesiones de funciones, los conceptos de convergencia puntual, campo de convergencia puntual y convergencia uniforme para series de funciones no precisan de nueva definición.

La serie $\sum_{n \geq 1} f_n$ se dice que *converge absolutamente* en un punto $a \in A$ cuando la serie de los módulos, $\sum_{n \geq 1} |f_n(a)|$, converge. Se define el *campo de convergencia absoluta* como el conjunto

Convergencia absoluta

$$\left\{ z \in A : \sum_{n \geq 1} |f_n(z)| \text{ converge} \right\}$$

Al igual que para series de números complejos la convergencia absoluta de una serie de funciones implica convergencia pero no al contrario.

4.2 Series de potencias complejas

Dada una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y un número $a \in \mathbb{C}$ consideremos la sucesión de funciones

$$f_0(z) = c_0, \\ f_n(z) = c_n(z - a)^n, \quad n \geq 1.$$

La serie definida por esta sucesión de funciones, es decir, la sucesión

$$\{c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots + c_n(z - a)^n\}$$

Series de potencias se representa por $\sum_{n \geq 0} c_n(z - a)^n$ y se llama *serie de potencias centrada en a* . La sucesión $\{c_n\}$ recibe el nombre de sucesión de coeficientes de la serie.

Lema 4.2. *Supongamos un número positivo $\rho > 0$ tal que la serie $\sum_{n \geq 0} |c_n| \rho^n$ sea convergente. Entonces se verifica que la serie $\sum_{n \geq 0} c_n(z - a)^n$ converge absolutamente en el disco $D(a, \rho)$.*

Dada una serie de potencias $\sum_{n \geq 0} c_n(z - a)^n$ puede ocurrir:

- 1) La serie solamente converge para $z = a$. En este caso se dice que la serie de potencias es trivial.
- 2) La serie converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$.
- 3) Hay un número $0 < R < +\infty$ tal que la serie converge absolutamente en $D(a, R)$ y no converge para $|z - a| > R$. El disco $D(a, R)$ se llama disco de convergencia de la serie.

Radio de convergencia Al número R se le llama *radio de convergencia* de la serie. En el caso primer convenimos en que $R = 0$ y en el segundo $R = +\infty$.

Dada una serie de potencias no trivial, llamaremos *dominio de convergencia de la serie* al conjunto

- a) $\Omega = \mathbb{C}$ si $R = +\infty$
- b) $\Omega = D(a, R)$ si $R \in \mathbb{R}^+$

Para obtener el radio de convergencia de una serie de potencias de forma práctica podemos aplicar alguno de los criterios siguientes.

Criterio del cociente o de D'Alembert **Teorema 4.3.** *Dada una sucesión de números complejos $\{c_n\}$ supuesto que*

- a) $c_n \neq 0$ para todo n a partir de un índice en adelante, y que
 - b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$
- entonces $R = 1/L$ con los convenios: $R = 0$ si $L = +\infty$ y $R = +\infty$ si $L = 0$.

Demostración. Para obtener este resultado basta aplicar el criterio del cociente a la serie $\sum_{n \geq 0} |c_n(z - a)^n|$.

Tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}(z - a)^{n+1}|}{|c_n(z - a)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} |z - a| = L |z - a|.$$

Deducimos que:

- a) Si $L |z - a| < 1$ la serie converge,
 - b) Si $L |z - a| > 1$ la serie no converge,
- y concluimos que $R = 1/L$ con los convenios anteriores. \square

De forma análoga se obtiene el siguiente resultado.

Criterio de la raíz o de Cauchy **Teorema 4.4.** *Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ entonces $R = 1/L$ con los mismos convenios anteriores.*

El siguiente lema es muy útil para calcular la suma de algunas series.

Lema de Abel **Lema 4.5.** *Supongamos que la serie $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ converge en un punto z_0 de la frontera de su disco de convergencia. Entonces se verifica que:*

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ 0 < r < 1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (rz_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n.$$

Teorema 4.6. Sea a un número complejo, $\sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n$ una serie de potencias no trivial y Ω su dominio de convergencia. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ la función suma de la serie, esto es,

Teorema de derivación de una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad z \in \Omega.$$

Entonces f es indefinidamente derivable en Ω y para cada $k \in \mathbb{N}$ su derivada k -ésima se obtiene derivando k veces la serie término a término, esto es:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n (z - a)^{n-k}, \quad z \in \Omega.$$

En particular $f^{(k)}(a) = k! c_k$ o, lo que es lo mismo, $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definición 4.7. Sea f una función indefinidamente derivable en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y sea $a \in \Omega$. La serie de potencias

Serie de Taylor

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

se llama *serie de Taylor* de f en el punto a .

Corolario 4.8. Las únicas series de potencias no triviales son series de Taylor (de su función suma).

El resultado anterior nos lleva a definir el concepto de función analítica.

Definición 4.9. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, se dice que una función compleja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es *analítica* en Ω cuando localmente puede representarse como la función suma de una serie de potencias. Con precisión, para cada punto $b \in \Omega$ hay un disco abierto $D(b, \rho_b) \subseteq \Omega$ y una serie de potencias

Función analítica

$$\sum_{n \geq 0} c_n^{(b)} (z - b)^n$$

cuyo dominio de convergencia contiene a $D(b, \rho_b)$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(b)} (z - b)^n \quad \text{para todo } z \in D(b, \rho_b).$$

En virtud del teorema anterior, deducimos que una función analítica f en Ω es indefinidamente derivable en Ω y todas sus derivadas son también analíticas. Además se tiene que

$$c_n^{(b)} = \frac{f^{(n)}(b)}{n!}.$$

Equivalentemente, una función f es analítica en un abierto Ω si es indefinidamente derivable en dicho abierto y para cada punto $b \in \Omega$ la serie de Taylor de f en b converge y su suma es igual a f en algún disco abierto centrado en b y contenido en Ω .

El siguiente resultado es uno de los resultados más sorprendentes de la teoría de funciones holomorfas. Para que comprendas bien su alcance conviene que tengas en cuenta los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.10.

a) Una función derivable una vez pero no dos veces derivable.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2/2, & \text{si } x < 0 \\ x^2/2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La función f es derivable y su derivada viene dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Es decir, $f'(x) = |x|$, que no es derivable en $x = 0$.

- b) *Una función indefinidamente derivable cuya serie de Taylor en un punto no converge a la función.*

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La función f es indefinidamente derivable y sus derivadas en $x = 0$ son todas nulas, $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto la serie de Taylor de f en $x = 0$ es la serie nula. Sin embargo f no es nula en ningún intervalo abierto que contenga a 0.

El siguiente resultado nos dice que para funciones complejas derivables estas situaciones no se pueden dar.

Teorema de Taylor

Teorema 4.11. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función derivable (holomorfa) en Ω . Entonces se verifica que f es analítica en Ω . Con más precisión:*

- a) *f es indefinidamente derivable en Ω ;*
 b) *Para cada punto $a \in \Omega$ la serie de Taylor de f en a converge por lo menos en el disco más grande centrado en a y contenido en Ω y su suma en dicho disco es igual a f . Es decir*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \text{ para todo } z \in D(a, r) \subset \Omega.$$

Este resultado pone de manifiesto la gran diferencia que hay entre la derivabilidad en el campo real y en el campo complejo. En el campo real podemos tener una función que sea continua pero no derivable; continua y derivable pero sin derivada continua; de clase C^1 pero no dos veces derivable, etc. Esto es, con notación que se explica por sí sola

$$C(I) \not\cong D^1(I) \not\cong C^1(I) \not\cong D^2(I) \not\cong C^2(I) \not\cong \dots \not\cong C^\infty(I) \not\cong FA(I)$$

En variable compleja esta cadena de conjuntos se reduce a dos $C(\Omega)$ y $\mathcal{H}(\Omega) = FA(\Omega)$.

4.3 Ejercicios

Ejercicio 4.1

Estudia la convergencia puntual de la serie de funciones $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n$ con $z \neq i$.

Ejercicio 4.2

Estudia la convergencia puntual de la serie de funciones $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{2z-i}{2+iz}\right)^n$, con $z \neq 2i$.

Ejercicio 4.3

Estudia la convergencia puntual de las series de funciones:

- a) $\sum_{n \geq 0} \exp(-nz)$,
- b) $\sum_{n \geq 0} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{3^n}$,
- c) $\sum_{n \geq 0} \exp(-nz^2)$.

Ejercicio 4.4

Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

- a) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2n+3}{2n+6}\right)^{n^2} z^n$
- b) $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$
- c) $\sum_{n \geq 1} \frac{z^{2n}}{(1+2i)^n}$
- d) $\sum_{n \geq 0} a^{n^2} z^n$
- e) $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$
- f) $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!n^{2n}}{2^n n! (3n)!} z^n$

Ejercicio 4.5

Estudia el comportamiento en la frontera del disco de convergencia de las series:

- a) $\sum_{n \geq 1} z^n$,
- b) $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$,
- c) $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$,
- d) $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\log(n)} z^{3n-1}$.

Ejercicio 4.6

Expresa $\frac{1}{z}$ como suma de una serie de potencias centrada en un punto $a \neq 0$ e indica en dónde es válida dicha igualdad.

Ejercicio 4.7

Expresa $\frac{1}{(1-z)^3}$ como suma de una serie de potencias.

Ejercicio 4.8

Sea $a \in \mathbb{C}^*$. Justifica que $(1+z)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} z^n$, para $|z| < 1$.

Serie binomial

Ejercicio 4.9

Obtener el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función f , y calcular el radio de convergencia de la serie resultante en cada uno de los siguientes casos:

- a) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$.
 b) $f(z) = \log(z^2 - 3z + 2)$.
 c) $f(z) = \cos^2(z)$.
 d) $f(z) = \arctan(z)$.

Ejercicio 4.10

Prueba que $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$, $\forall z \in D(0,1)$.

- a) Deduce que para todo $\theta \in]-\pi, \pi[$ se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos(n\theta) = \log\left(2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{\theta}{2}.$$

- b) Cambiando z por $-z$, deduce que para todo $\theta \in]0, 2\pi[$ se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\log\left(2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Integración de funciones complejas

5

5.1 Integración de funciones de variable real con valores complejos

En lo que sigue consideraremos funciones $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ acotadas y continuas salvo, quizás, en un conjunto finito de puntos. Definimos la integral de φ en $[a, b]$ como el número complejo

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} \varphi(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi(t) dt.$$

Indicamos a continuación las propiedades principales de la integral que acabamos de definir. Todas ellas se deducen con facilidad de las propiedades correspondientes de la integral de funciones reales de variable real que suponemos conocidas.

5.1.1 Propiedades

Proposición 5.1. Sean $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrables y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Se cumple que Linealidad

$$\int_a^b (\lambda \varphi(t) + \mu \psi(t)) dt = \lambda \int_a^b \varphi(t) dt + \mu \int_a^b \psi(t) dt.$$

Proposición 5.2. Sea $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrable, entonces Acotación

$$\left| \int_a^b \varphi \right| \leq \int_a^b |\varphi| \leq \sup \{ |\varphi(t)| : a \leq t \leq b \} (b - a).$$

Proposición 5.3. Si $a < c < b$, y $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable, se verifica que Aditividad respecto al intervalo

$$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi.$$

Teorema 5.4. Si $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, la función dada por $G(t) = \int_a^t \varphi(s) ds$ para $t \in [a, b]$ es una primitiva de φ en $[a, b]$. Teorema fundamental del Cálculo

Proposición 5.5. Sea $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ derivable con derivada integrable, entonces Regla de Barrow

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a).$$

Proposición 5.6. Sea $\lambda : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente con derivada continua. Entonces Fórmula de cambio de variable

$$\int_{\lambda(c)}^{\lambda(d)} \varphi(s) ds = \int_c^d \varphi(\lambda(t)) \lambda'(t) dt.$$

5.2 Curvas en el plano

Definición 5.7. Una *curva* en \mathbb{C} es una aplicación continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Hay que distinguir entre la curva y su imagen (también llamada *traza* o *soporte*), que notaremos por $\gamma^* = \gamma([a, b])$. Curva

Al punto $\gamma(a)$ se le llama *punto inicial* de la curva γ y a $\gamma(b)$ *punto final*. Ambos reciben el nombre de *extremos de la curva*.

- Curva cerrada** Se dice que γ es una curva *cerrada* cuando sus extremos coinciden, esto es, $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Curva regular** Diremos que una curva es *regular* si la aplicación que la define es derivable con derivada continua, esto es, es de clase C^1 .

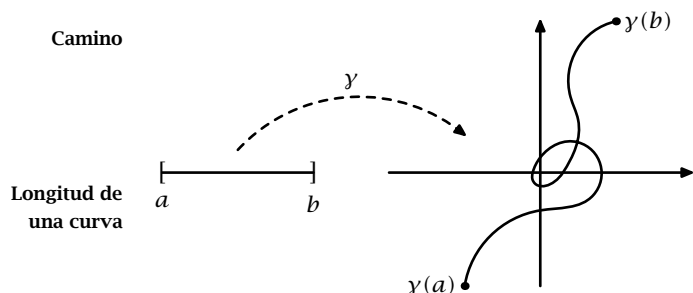


Ilustración 5.1

Definición 5.8. Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es *regular a trozos*, y la llamaremos un *camino*, si existe una partición de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ de manera que $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ es regular para $1 \leq k \leq n$.

Definición 5.9. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es un camino se define la *longitud* de γ por $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

5.2.1 Operaciones con curvas

Curva opuesta de γ

- Curva opuesta** **Definición 5.10.** Llamaremos *curva opuesta* de una dada $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, y la notaremos por $\neg\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, a la curva definida por

$$(\neg\gamma)(t) = \gamma(b + a - t).$$

Se trata de una curva que tiene la misma traza que γ pero la recorre en sentido contrario, esto es, el punto inicial de $\neg\gamma$ es el punto final de γ y viceversa.

Yuxtaposición de curvas

- Yuxtaposición de curvas** **Definición 5.11.** Dadas dos curvas $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ con $\gamma(b) = \sigma(c)$, definimos una nueva curva que llamaremos *yuxtaposición* de γ y σ o también suma de γ y σ , y la notaremos por $\gamma \dot{+} \sigma$, como

$$(\gamma \dot{+} \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{si } a \leq t \leq b \\ \sigma(c - b + t), & \text{si } b \leq t \leq b + d - c \end{cases}$$

Geoméricamente se trata de pegar las trazas de γ y σ juntas, de ahí que se exija que $\gamma(b) = \sigma(c)$, esto es, que podamos pegarlas de forma continua. Evidentemente en los puntos de unión entre una curva y otra puede que no haya derivabilidad. Es fácil probar que $(\gamma \dot{+} \sigma)^* = \gamma^* \cup \sigma^*$. Observa que la yuxtaposición de dos caminos también es un camino.

5.2.2 Ejemplos de curvas

Ejemplo 5.12.
 a) **Segmento de origen z y extremo w .** Es la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\gamma(t) = (1-t)z + tw$$

Notaremos a esta curva como $\gamma = [z, w]$. Resaltamos que no se trata de un intervalo en \mathbb{C} ya que no hemos definido ningún orden.

Es fácil comprobar que $\dot{[z, w]} = [w, z]$

b) **Circunferencia de centro a y radio r** . Es la curva $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\gamma(t) = a + re^{it}$$

La vamos a representar por el símbolo $C(a, r)$. No hay que confundir a la curva con su imagen, que en este caso es una circunferencia y que notamos como $C(a, r)^* \subset \mathbb{C}$.

c) **Poligonal de vértices z_0, z_1, \dots, z_n** . Es la curva

$$[z_0, z_1] \dot{+} [z_1, z_2] \dot{+} \dots \dot{+} [z_{n-1}, z_n]$$

y la representaremos por $[z_0, z_1, \dots, z_n]$. La poligonal es un camino, es decir, es una curva regular a trozos.

Curvas equivalentes

Definición 5.13. Dos curvas $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que son *equivalentes* cuando existe una aplicación $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo

a) $\varphi \in C^1([c, d])$,

b) $\varphi'(u) > 0$ para todo $u \in [c, d]$,

c) $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$

y tal que $\gamma \circ \varphi = \sigma$. En tal caso se dice también que σ es una *reparametrización* de γ .

Reparametrización

Dos curvas equivalentes tienen la misma traza, mismo punto inicial y mismo punto final.

5.3 Integral curvilínea

Definición 5.14. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación continua. Definimos la *integral de f a lo largo del camino γ* como el número complejo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Observemos que $t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ es una función de variable real con valores complejos, luego la integral de la derecha es la integral que ya hemos definido antes.

En lo que sigue notaremos $C(\gamma^*)$ el espacio vectorial complejo de las funciones complejas continuas en γ^* .

Propiedades

Proposición 5.15. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ son curvas equivalentes y $f \in C(\gamma^*)$ se verifica que $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\sigma} f(z) dz$.

Demostración. En efecto, puesto que $\gamma^* = \sigma^*$ la integral de f a lo largo de σ está definida. Por hipótesis existe una aplicación $\varphi \in C^1([c, d])$ con derivada positiva que transforma $[c, d]$ en $[a, b]$ y tal que $\gamma \circ \varphi = \sigma$. Tenemos así que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \left[\begin{array}{l} t = \varphi(s) \\ dt = \varphi'(s) ds \end{array} \right] \\ &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\gamma(\varphi(s))) \gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s) ds \\ &= \int_c^d f(\sigma(s)) \sigma'(s) ds = \int_{\sigma} f(z) dz. \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 5.16. *Dados dos caminos γ , σ y una función compleja f continua en $\gamma^* \cup \sigma^*$ se cumple que $\int_{\gamma+\sigma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\sigma} f(z) dz$.*

Demostración. En efecto, por las definiciones dadas

$$\begin{aligned} \int_{\gamma+\sigma} f(z) dz &= \int_a^{b+d-c} f((\gamma + \sigma)(t)) (\gamma + \sigma)'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt + \int_b^{b+d-c} f(\sigma(t-b+c)) \sigma'(t-b+c) dt \\ &= \left[\begin{array}{l} s = t - b + c \\ ds = dt \end{array} \right] \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt + \int_c^d f(\sigma(s)) \sigma'(s) ds \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\sigma} f(z) dz. \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 5.17. *Dada una función compleja f , $\int_{-y} f(z) dz = - \int_y f(z) dz$.*

Acotación básica

Proposición 5.18. $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max \{ |f(z)| : z \in \gamma^* \} \ell(\gamma)$.

Demostración. En efecto

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \\ &\leq \max \{ |f(z)| : z \in \gamma^* \} \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &= \max \{ |f(z)| : z \in \gamma^* \} \ell(\gamma). \quad \square \end{aligned}$$

Linealidad

Proposición 5.19. *Dadas f, g funciones complejas y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, se tiene que*

$$\int_{\gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z)) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz.$$

El cálculo de una integral curvilínea es inmediato si se conoce una primitiva de la función que integramos.

Regla de Barrow para integrales curvilíneas

Teorema 5.20. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, f una función continua en Ω y supongamos que hay una función $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino en Ω (esto es, $\gamma^* \subset \Omega$), entonces*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Demostración. Puesto que γ es un camino existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ de forma que $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ es una aplicación de clase C^1 , esto es, $\gamma'|_{[t_{k-1}, t_k]}$ es continua. Teniendo en cuenta que la función $f(\gamma(t)) \gamma'(t)$ es continua en cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ y que

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t)) \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \gamma'(t)$$

para todo $t \in [t_{k-1}, t_k]$, resulta

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n (F(\gamma(t_k)) - F(\gamma(t_{k-1}))) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \end{aligned}$$

como pretendíamos demostrar. \square

5.3.1 Existencia de primitivas

Corolario 5.21. Si una función continua f en un abierto Ω admite una primitiva en Ω , entonces la integral curvilínea de f es la misma para todos los caminos en Ω que tienen los mismos puntos inicial y final. En particular, para todo camino cerrado γ en Ω se verifica que $\int_{\gamma} f(w) dw = 0$.

Condición necesaria para la existencia de primitivas

Proposición 5.22. La función suma de una serie de potencias no trivial tiene primitivas en el dominio de convergencia de la serie.

Demostración. Supongamos que $\sum_{n \geq 0} c_n(z - a)^n$ es una serie de potencias no trivial. Sea Ω su dominio de convergencia y para $z \in \Omega$ sea $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - a)^{n+1}$ la función suma. El teorema de derivación de series de potencias nos dice que la función

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - a)^{n+1}$$

es una primitiva de φ en Ω . \square

Con este resultado es fácil dar un ejemplo de una función que no tiene primitiva. Sea $f(z) = \frac{1}{z}$ para $z \in \mathbb{C}^*$. Tenemos que

$$\int_{C(0,1)} f(z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = 2\pi i \neq 0$$

luego f no tiene primitiva en \mathbb{C}^* .

El anterior corolario nos dio una condición necesaria para la existencia de primitiva de una función. Esta condición es también suficiente.

Teorema 5.23. Sea f una función continua en un abierto Ω . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Caracterización de la existencia de primitivas

- a) f tiene primitivas en Ω .
- b) La integral de f sobre todo camino cerrado en Ω es nula.

5.4 Ejercicios

Ejercicio 5.1

Calcula $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ siendo $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ el camino dado por:

- a) $\gamma(t) = t^2 + it$
- b) $\gamma(t) = 2t + it$
- c) $\gamma(t) = \begin{cases} 2it, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 2i + 4(t - 1), & \text{si } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$

Ejercicio 5.2

Calcula $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz$ siendo $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ el camino dado por:

a) $\gamma(t) = t + it$;

b) $\gamma(t) = e^{2\pi it}$

Ejercicio 5.3

Calcula $\int_{\gamma} z^2 dz$ siendo $\gamma = [i, 1 + i, 3 + 3i]$.

Ejercicio 5.4

Calcula $\int_{C(0,1)} \frac{1}{\sqrt{z}} dz$.

Ejercicio 5.5

Calcula $\int_{C(0,1)} \log(z) dz$.

Ejercicio 5.6

Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, calcula $\int_{C(0,1)} z^{\alpha} \log(z) dz$.

Ejercicio 5.7

Calcula $\int_{\gamma} |z| \bar{z} dz$ siendo γ el camino formado por la mitad superior de la circunferencia unidad y el segmento $[-1, 1]$.

Ejercicio 5.8

Prueba que para $0 < r < 1$, se tiene que $\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz = 0$. Deduce que

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + r^2 + 2r \cos(\vartheta)) d\vartheta = 0.$$

Ejercicio 5.9

Sea f holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y verificando que $|f(z) - 1| < 1, \forall z \in \Omega$. Justifica que $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ para todo camino cerrado γ en Ω .

Fórmula de Cauchy. Teorema de los residuos

6

En este capítulo estaremos interesados en el problema de la existencia de primitivas de funciones holomorfas.

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que toda función real de variable real continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo. La situación es muy distinta para funciones complejas de variable compleja. En primer lugar, si una función f tiene primitivas en un abierto Ω , es decir, existe una función $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$, entonces la función f es la derivada de una función holomorfa en Ω y, como sabemos que las funciones holomorfas son indefinidamente derivables, deducimos que f tiene que ser holomorfa en Ω . Pero ni siquiera el hecho de que una función sea holomorfa en un dominio garantiza que tenga primitivas en dicho dominio.

Ejemplo 6.1. La función $f(z) = \frac{1}{z}$ es holomorfa en el dominio \mathbb{C}^* y no tiene primitivas en dicho dominio.

En efecto, tenemos que

$$\int_{C(0,1)} f(z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = 2\pi i \neq 0$$

luego, en virtud del Teorema 5.23, concluimos que f no tiene primitiva en \mathbb{C}^* .

Observa que la utilidad de este teorema para probar la existencia de primitivas es dudosa puesto que para justificar que una función tiene primitivas en un cierto dominio Ω sería necesario comprobar que su integral a lo largo de *todo* camino cerrado en Ω es cero, lo que no parece nada fácil en la práctica. Afortunadamente, hay teoremas que garantizan que bajo ciertas condiciones la integral de una función holomorfa a lo largo de cualquier camino cerrado es nula. Estos teoremas reciben el nombre de teoremas de Cauchy. En ellos se considera un abierto Ω y un camino cerrado γ en Ω . Se suponen hipótesis adicionales sobre Ω o sobre γ para concluir que $\int_{\gamma} f(w) dw = 0$ para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Pretendemos, en definitiva, dar respuesta a los dos problemas siguientes:

- Caracterizar los *caminos* cerrados γ en un abierto Ω tales que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para toda función f holomorfa en Ω .
- Caracterizar los *abiertos* Ω tales que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para todo camino cerrado γ en Ω y toda función holomorfa f en Ω . Equivalentemente, caracterizar los abiertos en los que se verifica que toda función holomorfa tiene primitivas.

El siguiente resultado será útil en lo que sigue.

Lema 6.2. *Si una función compleja es continua en un abierto y sabemos que es derivable en todos los puntos de dicho abierto excepto en un conjunto finito de puntos (en los que sólo sabemos que es continua) entonces se verifica que dicha función es derivable en todos los puntos del abierto.*

Lema de Riemann

Supongamos que γ es un camino cerrado en un abierto Ω y se verifica que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para cualquier función f holomorfa en Ω . Entonces si z es un punto que no está en Ω , como la función

$w \mapsto \frac{1}{w-z}$ es holomorfa en Ω , deberá cumplirse que $\int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = 0$. Si ahora f es una función holomorfa en Ω y $z \in \Omega$, la aplicación $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$h(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{si } w \neq z \\ f'(z), & \text{si } w = z, \end{cases}$$

es holomorfa en Ω (pues es continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{z\}$ por lo que el lema de Riemann nos asegura que es holomorfa en todo Ω) y deberá ser $\int_{\gamma} h(w) dw = 0$. Supuesto que $z \notin \gamma^*$ tenemos que

$$0 = \int_{\gamma} h(w) dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw$$

de donde

$$f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad (z \in \Omega \setminus \gamma^*).$$

Observa que esta es una *fórmula de representación* pues permite calcular los valores de f en puntos $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ conocidos los valores de f sobre el camino γ^* .

Queda claro, por estas consideraciones, que para responder a los problemas planteados debemos empezar estudiando la integral $\int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw$ donde γ es un camino cerrado y $z \notin \gamma^*$. Vamos a ver que dicha integral tiene una sencilla interpretación y en la práctica será muy fácil de calcular.

6.1 Índice de un punto respecto de un camino cerrado

Lema 6.3. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regular que no pasa por el origen, $0 \notin \gamma^*$. Entonces existe una función derivable $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $e^{h(t)} = \gamma(t)$ para todo $t \in [a, b]$. En consecuencia $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$ para $t \in [a, b]$.

Logaritmo derivable

La función h se llama un *logaritmo derivable* de γ . Observa que la función h tiene que ser de la forma $h(t) = \log |\gamma(t)| + i\vartheta(t)$ donde $t \mapsto \vartheta(t)$ es una función continua (derivable, de hecho) y $\vartheta(t) \in \text{Arg}(\gamma(t))$. Es decir, $t \mapsto \vartheta(t)$ es un *argumento continuo* de γ .

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regular *cerrada* y $z \notin \gamma^*$. Pongamos $\sigma(t) = \gamma(t) - z$. Tenemos

$$\int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt = \int_a^b \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} dt.$$

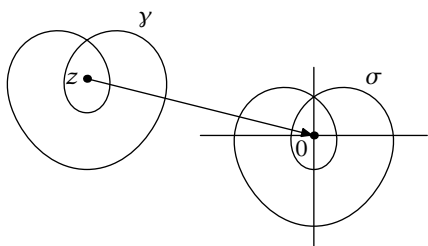


Ilustración 6.1

Sea $h(t) = \log |\sigma(t)| + i\vartheta(t)$ un *logaritmo derivable* de σ . Entonces $h'(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$, para todo $t \in [a, b]$ lo que nos permite calcular la integral anterior sin más que aplicar la regla de Barrow

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw &= h(b) - h(a) \\ &= \log |\sigma(b)| + i\vartheta(b) - \log |\sigma(a)| - i\vartheta(a) \\ &= i(\vartheta(b) - \vartheta(a)) = i2k\pi. \end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia de que $\vartheta(a)$ y $\vartheta(b)$ son argumentos del mismo número complejo $\sigma(a) = \sigma(b)$ luego su diferencia es un múltiplo entero de 2π .

Hemos justificado la igualdad

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = \frac{\vartheta(b)-\vartheta(a)}{2\pi} = k \in \mathbb{Z},$$

siendo $\vartheta(t)$ un argumento continuo de $y(t) - z$.

El número entero k que aparece es intuitivamente el número de veces que la curva σ rodea al origen o equivalentemente el número de veces que γ rodea al punto z .

Definición 6.4. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino cerrado y $z \notin \gamma^*$. Se define el *índice del punto z respecto del camino γ* como índice

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z} dw.$$

Hemos justificado que $\text{Ind}_\gamma(z)$ es un número entero y representa el número de veces que el camino γ rodea al punto z .

Proposición 6.5. Dado un camino cerrado $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, la función definida para $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ por $z \mapsto \text{Ind}_\gamma(z)$ tiene las propiedades: Propiedades del índice

- a) Es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
- b) Vale cero en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

6.1.1 Cadenas

En lo que sigue nos va a interesar integrar en varios caminos al mismo tiempo por lo que es conveniente introducir la terminología de “cadenas”. Una *cadena* es una suma formal finita de caminos, $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$. El símbolo “+” que hemos escrito en la expresión anterior no representa a la suma de funciones ni a la yuxtaposición de caminos, es una manera de decir que la cadena Γ está formada por varios caminos. Por ejemplo podemos considerar la cadena

$$\Gamma = C(0, 1) + C(i, 2) - 2C(1 + i, 1/2).$$

que está formada por tres circunferencias, la última de ellas considerada dos veces y recorrida en sentido contrario.

Por definición, para integrar una función sobre una cadena se integra la función sobre cada uno de los caminos que forman la cadena y se suman dichas integrales.

$$\int_\Gamma f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

Dadas dos cadenas Γ y $\Sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_m$ entonces su suma es otra cadena compuesta por todos los caminos que forman Γ y todos los que forman Σ ,

$$\Gamma + \Sigma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n + \sigma_1 + \dots + \sigma_m.$$

Evidentemente se cumple que $\int_{\Gamma+\Sigma} f(z) dz = \int_\Gamma f(z) dz + \int_\Sigma f(z) dz$.

Como caso particular de cadenas tenemos los *ciclos*. Un ciclo es una cadena formada por caminos cerrados. Ciclo

En el ejemplo anterior Γ era un ciclo pues estaba formado por circunferencias. Si Γ es un ciclo se define el índice de un punto $z \notin \Gamma^*$ respecto a Γ como la suma de los índices del punto z respecto a cada uno de los caminos cerrados que forman el ciclo.

$$\text{Ind}_\Gamma(z) = \sum_{j=1}^n \text{Ind}_{\gamma_j}(z).$$

Proposición 6.6. Dado un ciclo Γ la función $z \mapsto \text{Ind}_\Gamma(z)$ es constante en componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ y vale 0 en la componente conexa no acotada.

Ciclo nulhomólogo **Definición 6.7.** Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y un ciclo Γ en Ω , diremos que Γ es *nulhomólogo* respecto de Ω si el índice de todo punto que no esté en Ω respecto de Γ es cero:

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 0, \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

6.2 Forma general del Teorema de Cauchy y de la fórmula integral de Cauchy

Teorema 6.8. Sea Ω un abierto en \mathbb{C} , Γ un ciclo en Ω nulhomólogo respecto de Ω . Entonces para toda función holomorfa, f , en Ω se verifica:

a) $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$

Fórmula de Cauchy b) $f(z) \text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \text{ para todo } z \in \Omega \setminus \Gamma^* .$

Fórmula de Cauchy para las derivadas c) $f^{(k)}(z) \text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw, \text{ para todo } z \in \Omega \setminus \Gamma^* \text{ y para todo } k \in \mathbb{N}.$

Corolario 6.9. Sea Ω un abierto en \mathbb{C} , $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y supongamos que $\bar{D}(a, R) \subset \Omega$. Entonces para todo $z \in D(a, R)$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que

Fórmula de Cauchy para una circunferencia a) $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z} dw,$

b) $f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw.$

Simplemente conexo **Definición 6.10.** Un dominio Ω se llama *simplemente conexo* si todo camino cerrado en Ω es nulhomólogo respecto de Ω .

Intuitivamente, un dominio simplemente conexo es un dominio que no tiene “agujeros” (en términos más precisos: su complemento no tiene componentes conexas acotadas). En la práctica son fáciles de reconocer.

Teorema de Cauchy para dominios simplemente conexos **Teorema 6.11.** Toda función holomorfa en un dominio simplemente conexo tiene primitivas en dicho dominio.

Consecuencias

Es cómodo introducir la siguiente terminología.

Definición 6.12. Dos ciclos Γ, Σ en un abierto Ω se dicen *homológicamente equivalentes* respecto de Ω si se verifica que $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \text{Ind}_{\Sigma}(z)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

El teorema de Cauchy afirma que si Γ y Σ son ciclos en un abierto Ω , homológicamente equivalentes respecto de Ω , entonces

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Sigma} f(z) dz$$

para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Este teorema permite reducir el cálculo de integrales de funciones holomorfas sobre caminos cerrados al cálculo de integrales sobre circunferencias.

El siguiente ejemplo es ilustrativo de esto. Sea el abierto Ω el plano complejo \mathbb{C} al que le hemos quitado tres puntos a, b y c . Pretendemos calcular la integral de una función holomorfa en Ω a lo largo del camino Γ que se presenta en la figura 6.2

Teniendo en cuenta que el índice de los puntos a , b y c respecto de Γ es el número de veces que Γ los rodea (teniendo en cuenta que el sentido es positivo si los rodea en sentido contrario al de las agujas del reloj), a la vista de la figura tenemos:

$$\text{Ind}_{\Gamma}(a) = 1, \text{Ind}_{\Gamma}(b) = 2, \text{Ind}_{\Gamma}(c) = -1.$$

Consideremos las circunferencias $C(a, \rho)$, $C(b, \rho)$ y $C(c, \rho)$ que se presentan en la figura y formemos el ciclo

$$\Sigma = C(a, \rho) + 2C(b, \rho) - C(c, \rho).$$

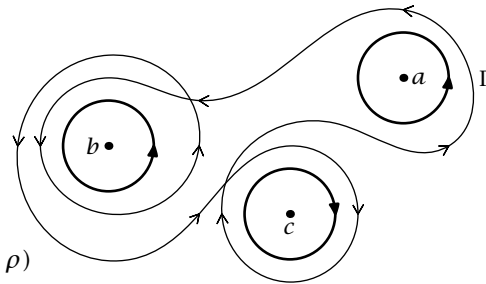


Ilustración 6.2 Un camino complicado

El ciclo Σ es homológicamente equivalente al ciclo Γ respecto de Ω . El Teorema de Cauchy nos dice que en estas condiciones para cualquier función holomorfa en Ω , f , se cumple que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Sigma} f(z) dz = \int_{C(a, \rho)} f(z) dz + 2 \int_{C(b, \rho)} f(z) dz - \int_{C(c, \rho)} f(z) dz.$$

De esta forma hemos reducido el cálculo de la integral de cualquier función holomorfa sobre el camino Γ a tres integrales sobre circunferencias. Observa que podemos tomar los radios de estas circunferencias arbitrariamente pequeños. Esto nos dice que la integral $\int_{\Gamma} f(z) dz$ va a depender solamente del comportamiento de f en los puntos a , b , y c .

6.3 Singularidades aisladas. Teorema de los residuos

6.3.1 Singularidades aisladas

Sea Ω un abierto en \mathbb{C} , a un punto de Ω y sea f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$ (el abierto Ω puede muy bien ser un disco abierto centrado en a). En esta situación se dice que el punto a es una *singularidad aislada* de f . Pueden ocurrir los siguientes casos:

- a) Existe $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w \in \mathbb{C}$. En tal caso, definiendo $f(a) = w$ tenemos, en virtud del lema de Riemann, que f es holomorfa en Ω . Se dice que a es un *punto regular* de f o que a es una *singularidad evitable* de f .
- b) Existe $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. En tal caso se dice que a es un *polo* de f .
- c) No existe el límite de f en a . Se dice entonces que a es una *singularidad esencial* de f .

Singularidad evitable
Polo
Singularidad esencial
Residuo

Definición 6.13. Sea Ω un abierto en \mathbb{C} , a un punto de Ω y sea f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$. Supongamos que $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$. Se define el *residuo* de f en a como

$$\text{Res}(f(z), a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} f(z) dz.$$

Observa que la integral en esta definición no depende de r pues si consideras otro disco $\bar{D}(a, s) \subset \Omega$, el ciclo $\Gamma = C(a, r) - C(a, s)$ es nulhomólogo respecto de $\Omega \setminus \{a\}$ y, como f es una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$, el teorema de Cauchy nos dice que $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, es decir,

$$\int_{C(a, r)} f(z) dz = \int_{C(a, s)} f(z) dz.$$

Teorema 6.14. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $S = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ un conjunto finito de puntos en Ω y sea f una función holomorfa en $\Omega \setminus S$. Si Γ es un ciclo en Ω nulhomólogo respecto de Ω entonces

Teorema de los residuos

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}(f(z); a_j) \text{Ind}_{\Gamma}(a_j).$$

Idea de la demostración. Tomamos $\rho > 0$ de forma que $\bar{D}(a_k, \rho) \subseteq \Omega$ y $\bar{D}(a_k, \rho) \cap A = \{a_k\}$ para $k = 1, \dots, q$. Para cada k llamamos $m_k = \text{Ind}_{\Gamma}(a_k)$ y $\gamma_k = m_k C(a_k, \rho)$. Construimos el ciclo $\Sigma = \sum_{j=1}^q \gamma_j$. Es fácil probar que el ciclo $\Gamma - \Sigma$ es nulhomólogo respecto del abierto $\Omega \setminus S$. En consecuencia, podemos aplicar el teorema general de Cauchy a dicho abierto para el ciclo $\Gamma - \Sigma$ y la función f obteniendo que

$$0 = \int_{\Gamma - \Sigma} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{\Sigma} f(z) dz.$$

Despejando obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Sigma} f(z) dz = \sum_{j=1}^q \int_{\gamma_j} f(z) dz \\ &= \sum_{j=1}^q m_j \int_{C(a_j, \rho)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Ind}_{\Gamma}(a_j) \text{Res}(f(z); a_j) \end{aligned}$$

que es la fórmula que queríamos probar.

La utilidad del teorema de los residuos depende de que seamos capaces de calcular los residuos de una función holomorfa en sus singularidades aisladas.

6.3.2 Cálculo de residuos

Sea Ω un abierto en \mathbb{C} , a un punto de Ω y sea f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$.

- a) Supongamos que a es un punto regular de f . Entonces $\text{Res}(f(z), a) = 0$. Pues podemos definir $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ con lo que f es holomorfa en Ω y si $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$, como consecuencia del teorema de Cauchy tenemos que $\int_{C(a, r)} f(z) dz = 0$.
- b) Supongamos que a es un polo de f . Entonces se verifica que hay un número natural $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) = w \neq 0$. Se dice que a es un *polo de orden k* de la función f . Sea $g(z) = (z - a)^k f(z)$ para $z \in \Omega$, $z \neq a$, y sea $g(a) = w$. Entonces, por el lema de Riemann, g es holomorfa en Ω . Sea $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$. Por el Teorema de Taylor (Teorema 4.11) sabemos que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - a)^n, \quad z \in D(a, r)$$

donde $d_n = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}$. Deducimos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{d_n}{(z-a)^{k-n}} + \sum_{n=k}^{\infty} d_n (z-a)^{n-k}, \quad z \in D(a, r) \setminus \{a\}. \quad (6.1)$$

Es usual emplear la siguiente notación para la serie (6.1). Dicha serie se escribe en la forma

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad z \in D(a, r) \setminus \{a\}. \quad (6.2)$$

Observa que con ello tenemos que $c_{-1} = d_{k-1}$. Si ahora integramos $f(z)$ en la circunferencia $C(a, r)$ y tenemos en cuenta que $(z-a)^n$ tiene primitiva $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq -1$ por lo que $\int_{C(a, r)} (z-a)^n dz = 0$ para todo entero $n \neq -1$, obtenemos que las integrales de

todos los términos de la serie (6.2) son nulas excepto la que corresponde al sumando para $n = -1$. Por tanto

$$\int_{C(a,r)} f(z) dz = \sum_{n=-k}^{\infty} \int_{C(a,r)} c_n (z-a)^n dz = \int_{C(a,r)} \frac{c_{-1}}{z-a} dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Deducimos que

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} f(z) dz = \text{Res}(f(z), a).$$

Lo interesante es que podemos calcular $c_{-1} = d_{k-1}$ derivando. Pues

$$c_{-1} = \frac{d^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)].$$

Hay que calcular el límite indicado porque al evaluar la derivada $\frac{d}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)]$ en el punto a suele aparecer una indeterminación.

- c) Supongamos, finalmente, que a es una singularidad esencial de f . Entonces se prueba que es posible representar a la función f por medio de una serie del tipo siguiente.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in D(a, r) \setminus \{a\} \tag{6.3}$$

donde hay infinitos coeficientes c_{-n} distintos de cero. Razonando igual que antes también se obtiene en este caso que $c_{-1} = \text{Res}(f(z), a)$. Aunque ahora no disponemos de una forma para calcular c_{-1} que no sea obtener el desarrollo 6.3.

Definición 6.15. Una serie del tipo $\sum_{k=-n}^{k=n} c_k (z-a)^k$ se dice que es una *serie de Laurent* centrada en a . Dichas series son una generalización de las series de potencias. Cuando dicha serie converge el límite se nota por

Serie de Laurent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k (z-a)^k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n.$$

Usaremos la notación $A(a; r, R)$ para indicar el anillo abierto de centro a radio interior r y radio exterior R donde $0 \leq r < R \leq +\infty$.

$$A(a; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

El siguiente resultado es una generalización del teorema de Taylor.

Teorema 6.16. Sean $0 \leq r < R \leq +\infty$, $a \in \mathbb{C}$ y f una función holomorfa en el anillo $A(a; r, R)$. Entonces hay una única serie de Laurent centrada en a verificando que

Desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{para todo } z \in A(a; r, R).$$

Además los coeficientes de la serie vienen dados por:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{Z}$$

siendo $r < \rho < R$.

Polos de cocientes de funciones holomorfas

a) En muchas ocasiones la función que integramos viene dada como cociente de dos funciones holomorfas $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ donde suponemos que g, h son funciones holomorfas en un abierto Ω . En tal caso las únicas posibles singularidades de f son los ceros de h . Supongamos que $a \in \Omega$ y que la función h y sus derivadas hasta la de orden $k - 1$ se anulan en el punto a y la derivada de orden k de h es distinta de cero en a (se dice entonces que h tiene un *cerro de orden k* en a). Supongamos también que $g(a) \neq 0$. Entonces, en virtud del Teorema de Taylor, podemos escribir para $z \in D(a, r) \subset \Omega$:

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \\ &= (z - a)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^{n-k}. \end{aligned}$$

Poniendo para $z \in D(a, r)$ $\varphi(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^{n-k}$, la función φ es holomorfa en $D(a, r)$ y $\varphi(a) \neq 0$. Deducimos que

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{\varphi(z)} = \frac{g(a)}{\varphi(a)} \neq 0$$

por lo que f tiene en a un polo de orden k .

b) Supongamos que $\lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z) = w$, entonces se verifica que $\text{Res}(f(z), a) = w$. En particular, supongamos que $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ donde g, h son funciones holomorfas en un abierto Ω , y suponemos que $g(a) \neq 0$ y h tiene un cero simple, es decir, de orden 1 en a . Entonces, según acabamos de ver, f tiene un polo simple, es decir, de orden 1 en a . Entonces tenemos que

$$\text{Res}(f(z), a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \frac{g(z)}{h(z)} = g(a) \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - a}{h(z)} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

6.4 Aplicaciones del teorema de los residuos al cálculo de integrales

6.4.1 Integrales del tipo $\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt$

Suponemos que R es una función racional de dos variables continua en la circunferencia unidad. La idea para calcular esta integral por el método de residuos es convertirla en una integral sobre $C(0, 1)$ de una función compleja que también va a ser racional. Para ello recordemos que

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{e^{2it} - 1}{2ie^{it}}, \quad \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{e^{2it} + 1}{2e^{it}}.$$

Por tanto, se verifica que

$$\int_{C(0,1)} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{iz} dz = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt.$$

En consecuencia, si notamos $f(z) = R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{iz}$, tenemos que $f(z)$ es una función racional por lo que sus únicas posibles singularidades son polos. Para calcular la integral sólo nos interesan los polos que están dentro del disco unidad. Supongamos que estos son $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$. El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}(f(z), z_j).$$

Ejemplo 6.17. Se trata de calcular la integral $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5+4\cos(t)} dt$. Según acabamos de ver

$$I = \int_{C(0,1)} \frac{1}{5 + 2\frac{z^2+1}{z}} \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_{C(0,1)} \frac{1}{2z^2+5z+2} dz = \frac{1}{i} \int_{C(0,1)} \frac{1}{(2z+1)(z+2)} dz.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{i} 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{(2z+1)(z+2)}, \frac{-1}{2}\right) = 2\pi \lim_{z \rightarrow -1/2} (z + 1/2) \frac{1}{(2z+1)(z+2)} \\ &= \pi \lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{1}{(z+2)} = \frac{2}{3}\pi. \end{aligned}$$

6.4.2 Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Suponemos que

- a) P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.
- b) $\text{grado}(Q) \geq \text{grado}(P) + 2$.
- c) $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right).$$

Para ello vamos a aplicar el teorema de los residuos a la función $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ en el abierto $\Omega = \mathbb{C}$. Sea Γ la poligonal $\Gamma(\alpha, \beta, \rho) = [-\alpha, \beta, \beta + i\rho, -\alpha + i\rho, -\alpha]$ donde α, β y ρ son números positivos que tomamos suficientemente grandes para que todos los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior queden en el interior del rectángulo Γ de modo que $\text{Ind}_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)}(z_j) = 1$ para $1 \leq j \leq q$.

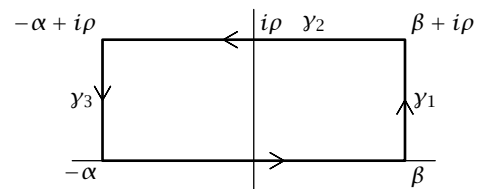


Ilustración 6.3 $\Gamma(\alpha, \beta, \rho)$

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right).$$

Observa que en esta igualdad el lado de la derecha es independiente de α, β y ρ . Por tanto, será suficiente para nuestros propósitos probar que cuando α, β y ρ tienden hacia $+\infty$ se verifica que

$$\lim_{\alpha, \beta, \rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Por la hipótesis sobre los grados de los polinomios P y Q se tiene que existen números $K > 0$ y $M > 0$ tales que

$$|z| \geq K \implies |f(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^2}. \tag{6.4}$$

En lo que sigue, suponemos que α , β y ρ son mayores que K .

Pongamos ahora $\gamma_1 = [\beta, \beta + i\rho]$, $\gamma_2 = [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]$ y $\gamma_3 = [-\alpha + i\rho, -\alpha]$ (ver figura 6.3) y notamos $I_k = \int_{\gamma_k} f(z) dz$. Tenemos

$$2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right) = \int_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + I_1 + I_2 + I_3$$

Así,

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right) - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \right| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3|. \quad (6.5)$$

Acotamos ahora I_1 . Para $z \in [\beta, \beta + i\rho]^*$ tenemos que $z = \beta + it$ para $t \in [0, \rho]$. Además, como es $\beta > K$ será $|z| \geq K$ por lo que, en virtud de la desigualdad 6.4, se tiene que

$$|f(z)| = |f(\beta + it)| \leq \frac{M}{\beta^2 + t^2}.$$

Por tanto,

$$|I_1| = \left| \int_0^{\rho} f(\beta + it) i dt \right| \leq \int_0^{\rho} |f(\beta + it)| dt \leq \int_0^{\rho} \frac{M}{\beta^2 + t^2} dt = \frac{M}{\beta} \left[\arctan \left(\frac{t}{\beta} \right) \right]_{t=0}^{t=\rho} \leq \frac{M}{\beta} \frac{\pi}{2}.$$

La integral I_3 se acota de la misma forma, resultando $|I_3| \leq \frac{M}{\alpha} \frac{\pi}{2}$.

Por último, para acotar I_2 se usa que para $z \in [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]^*$ tenemos, por ser $\rho > K$, que $|z| \geq K$ por lo que, en virtud de la desigualdad (6.4), se tiene que $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$. Por tanto

$$|I_2| = \left| \int_{[\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]} f(z) dz \right| \leq \int_{-\alpha}^{\beta} |f(t + i\rho)| dt \leq \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{M}{t^2 + \rho^2} dt \leq (\alpha + \beta) \frac{M}{\rho^2}.$$

En vista de (6.5) y de las acotaciones anteriores se tiene que

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right) - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \right| \leq \frac{M}{\beta} \frac{\pi}{2} + \frac{M}{\alpha} \frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta) \frac{M}{\rho^2}.$$

Como en esta desigualdad la parte de la izquierda no depende para nada de ρ podemos fijar α y β y tomar límite cuando $\rho \rightarrow +\infty$ con lo que obtenemos

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right) - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \right| \leq \frac{\pi}{2} \left(\frac{M}{\beta} + \frac{M}{\alpha} \right). \quad (6.6)$$

Tomando ahora límite para $\alpha \rightarrow +\infty$ y $\beta \rightarrow +\infty$ en la expresión de la derecha, se obtiene que la función $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es impropriamente integrable en \mathbb{R} y además

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right).$$

Observa que la acotación (6.6) proporciona una cota del error que se comete al aproximar la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ por una "integral parcial" $\int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

Ejemplo 6.18. Queremos calcular la integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$$

donde suponemos que $a > 0$ y $b > 0$ son distintos. La función que integramos tiene dos polos simples en el semiplano superior en los puntos ia, ib . Según acabamos de ver

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ia \right) + 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ib \right).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ia \right) &= \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia) \frac{1}{(z-ia)(z+ia)(z^2+b^2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{(z+ia)(z^2+b^2)} = \frac{1}{2ia(b^2-a^2)}. \end{aligned}$$

Análogamente $\operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ib \right) = \frac{1}{2ib(a^2-b^2)}$. Luego

$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{2ia(b^2-a^2)} + \frac{1}{2ib(a^2-b^2)} \right) = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

6.4.3 Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx$

Suponemos que

- a) P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes y $\lambda > 0$.
- b) $\operatorname{grado}(Q) \geq \operatorname{grado}(P) + 1$.
- c) $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}, z_j \right).$$

Para ello vamos a aplicar el teorema de los residuos a la función $f(z) = \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}$ en el abierto $\Omega = \mathbb{C}$. Sea Γ la poligonal $\Gamma(\alpha, \beta, \rho) = [-\alpha, \beta, \beta + i\rho, -\alpha + i\rho, -\alpha]$ donde α, β y ρ son números positivos que tomamos suficientemente grandes para que todos los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior queden en el interior del rectángulo Γ de modo que $\operatorname{Ind}_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)}(z_j) = 1$ para $1 \leq j \leq q$.

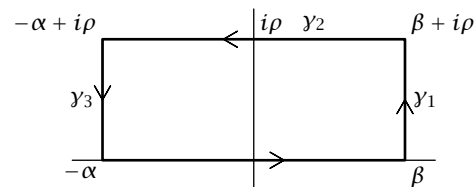


Ilustración 6.4 $\Gamma(\alpha, \beta, \rho)$

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)} \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}, z_j \right).$$

Observa que en esta igualdad el lado de la derecha es independiente de α, β y ρ . Por tanto, será suficiente para nuestros propósitos probar que cuando α, β y ρ tienden hacia $+\infty$ se verifica que

$$\lim_{\alpha, \beta, \rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)} \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx.$$

Por la hipótesis sobre los grados de los polinomios P y Q se tiene que existen números $K > 0$ y $M > 0$ tales que

$$|z| \geq K \implies \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|} \tag{6.7}$$

En lo que sigue, suponemos que α, β y ρ son mayores que K .

Pongamos ahora $\gamma_1 = [\beta, \beta + i\rho]$, $\gamma_2 = [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]$ y $\gamma_3 = [-\alpha + i\rho, -\alpha]$ (ver figura 6.4) y notamos $I_k = \int_{\gamma_k} f(z) dz$. Tenemos

$$2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}, z_j \right) = \int_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)} \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx + I_1 + I_2 + I_3$$

Así,

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}, z_j \right) - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx \right| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3|. \quad (6.8)$$

Acotamos ahora I_1 . Para $z \in [\beta, \beta + i\rho]^*$ tenemos que $z = \beta + it$ para $t \in [0, \rho]$. Además, como es $\beta > K$ será $|z| \geq K$ por lo que, en virtud de la desigualdad (6.7), se tiene que

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = \left| \frac{P(\beta + it)}{Q(\beta + it)} \right| \leq \frac{M}{|\beta + it|} \leq \frac{M}{\beta}.$$

Además $|e^{i\lambda(\beta + it)}| = e^{-\lambda t}$. Por tanto,

$$|I_1| = \left| \int_0^{\rho} f(\beta + it) i dt \right| \leq \int_0^{\rho} |f(\beta + it)| dt \leq \int_0^{\rho} \frac{M e^{-\lambda t}}{\beta} dt = \frac{M}{\beta} \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_{t=0}^{t=\rho} = \frac{M}{\beta} \frac{1 - e^{-\lambda \rho}}{\lambda} \leq \frac{M}{\beta \lambda}.$$

La integral I_3 se acota de la misma forma, resultando $|I_3| \leq \frac{M}{\alpha \lambda}$.

Por último, para acotar I_2 se usa que para $z \in [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]^*$ tenemos, por ser $\rho > K$, que $|z| \geq K$ por lo que, en virtud de la desigualdad (6.7), se tiene que $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{\rho}$. Además, para $z \in [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]^*$ es $\operatorname{Im}(z) = \rho$. Por tanto $|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda \rho}$. Deducimos que

$$|I_2| = \left| \int_{[\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]} f(z) dz \right| \leq \int_{-\alpha}^{\beta} |f(t + i\rho)| dt \leq \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{M e^{-\lambda \rho}}{\rho} dt = (\alpha + \beta) \frac{M}{\rho} e^{-\lambda \rho}.$$

En vista de (6.8) y de las acotaciones anteriores se tiene que

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}, z_j \right) - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx \right| \leq \frac{M}{\beta \lambda} + \frac{M}{\alpha \lambda} + (\alpha + \beta) \frac{M}{\rho} e^{-\lambda \rho}.$$

Como en esta desigualdad la parte de la izquierda no depende para nada de ρ podemos fijar α y β y tomar límite cuando $\rho \rightarrow +\infty$ con lo que, teniendo en cuenta que $\lambda > 0$, obtenemos

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}, z_j \right) - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{M}{\beta} + \frac{M}{\alpha} \right). \quad (6.9)$$

Tomando ahora límite para $\alpha \rightarrow +\infty$ y $\beta \rightarrow +\infty$ en la expresión de la derecha, se obtiene que la función $\frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)}$ es impropriadamente integrable en \mathbb{R} y además

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}, z_j \right).$$

Observa que la acotación (6.9) proporciona una cota del error que se comete al aproximar la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx$ por una "integral parcial" $\int_{-\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx$.

Ejemplo 6.19. Calcular la integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{a^2 + x^2} dx$.

Suponemos que $a > 0$ y $\lambda > 0$. Como $I = \text{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{a^2+x^2} dx \right)$, calcularemos $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{a^2+x^2} dx$. Según acabamos de ver, teniendo en cuenta que la función $\frac{1}{a^2+z^2}$ solamente tiene un polo simple en el semiplano superior en el punto ai , se sigue que

$$\begin{aligned} J &= 2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z}}{a^2+z^2}, i \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ai} (z - ai) \frac{e^{i\lambda z}}{a^2+z^2} \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow ai} (z - ai) \frac{e^{i\lambda z}}{(z-ai)(z+ai)} = \pi \frac{e^{-\lambda a}}{a} \implies I = \pi \frac{e^{-\lambda a}}{a}. \end{aligned}$$

6.4.4 Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda x)P(x)}{x Q(x)} dx$

Suponemos que

- a) P y Q son funciones polinómicas con coeficientes reales sin factores comunes, $P(0) \neq 0$, y $\lambda > 0$.
- b) $\text{grado}(Q) \geq \text{grado}(P)$.
- c) $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda x)P(x)}{x Q(x)} dx = \text{Im} \left(2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{z Q(z)}, z_j \right) + \pi i \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{z Q(z)}, 0 \right) \right).$$

La forma de proceder es muy parecida a la anterior con una pequeña diferencia y es que ahora consideraremos el camino de integración $\Gamma(\alpha, \beta, \rho, \varepsilon)$ que puedes ver en la figura 6.5.

Procediendo como en el caso anterior, considerando ahora la función $f(z) = \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{z Q(z)}$ teniendo en cuenta que $\text{Ind}_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho, \varepsilon)}(0) = 0$, el teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho, \varepsilon)} \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{z Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{z Q(z)}, z_j \right).$$

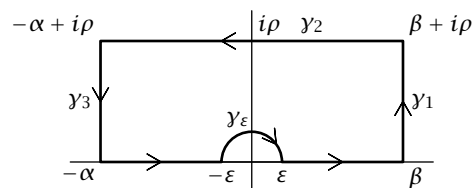


Ilustración 6.5 $\Gamma(\alpha, \beta, \rho, \varepsilon)$

Las acotaciones que hemos obtenido antes en los segmentos γ_1, γ_2 y γ_3 siguen siendo válidas (observa que $\text{grado}(zQ(z)) \geq \text{grado}(P(z)) + 1$) por lo que obtenemos fácilmente la siguiente acotación análoga a la acotación (6.9) del caso anterior:

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} (f(z), z_j) - \int_{-\alpha}^{\varepsilon} f(x) dx - \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz - \int_{\varepsilon}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{M}{\beta} + \frac{M}{\alpha} \right). \quad (6.10)$$

Tomando en esta desigualdad límites para $\alpha \rightarrow +\infty$ y $\beta \rightarrow +\infty$ se deduce que

$$2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} (f(z), z_j) - \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx. \quad (6.11)$$

Sea $w = \text{Res}(f(z), 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \frac{P(0)}{Q(0)}$. Teniendo en cuenta el sentido de recorrido de γ_{ε} tenemos que

$$\int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz + \pi i w = - \int_0^{\pi} \left(f(\varepsilon e^{it}) - \frac{w}{\varepsilon e^{it}} \right) i \varepsilon e^{it} dt.$$

Como $\left| f(\varepsilon e^{it}) - \frac{w}{\varepsilon e^{it}} \right| = \frac{1}{\varepsilon} \left| \varepsilon e^{it} f(\varepsilon e^{it}) - w \right|$, deducimos que

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz + \pi i w \right| \leq \int_0^\pi |\varepsilon e^{it} f(\varepsilon e^{it}) - w| dt \leq \pi \max \{ |zf(z) - w| : |z| = \varepsilon \}$$

y como $\lim_{z \rightarrow 0} (zf(z) - w) = 0$, se sigue que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max \{ |zf(z) - w| : |z| = \varepsilon \} = 0$. Hemos probado así que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = -\pi i w = -\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0).$$

Teniendo en cuenta la igualdad (6.11) deducimos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx \right) = 2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res}(f(z), z_j) + \pi i \operatorname{Res}(f(z), 0). \quad (6.12)$$

Tomando ahora partes imaginarias y teniendo en cuenta que P y Q tienen coeficientes reales

$$\operatorname{Im} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx \right) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)} dx$$

y teniendo en cuenta también que la función $x \mapsto \frac{\operatorname{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)}$ es continua en $x = 0$ sin más que definirla en 0 igual a $\lambda \frac{P(0)}{Q(0)}$ por lo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)} dx \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)} dx$$

concluimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)} dx = \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res}(f(z), z_j) + \pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) \right).$$

Ejemplo 6.20.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \operatorname{Im} \left(\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) \right) = \operatorname{Im} \left(\pi i \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{iz}}{z} \right) = \pi.$$

6.5 Aplicación del teorema de los residuos a la suma de series

6.5.1 Series del tipo $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$

- a) P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.
- b) $\operatorname{grado}(Q) \geq \operatorname{grado}(P) + 2$.
- c) $Q(k) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = - \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\pi \cotan(\pi z) \frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right).$$

Para probarlo consideremos la función $\pi \cotan(\pi z)$. Dicha función tiene un polo simple en cada entero $k \in \mathbb{Z}$ y $\lim_{z \rightarrow k} (z - k\pi) \pi \cotan(\pi z) = 1$.

Aplicamos el teorema de los residuos a la función $f(z) = \pi \cotan(\pi z) \frac{P(z)}{Q(z)}$ y al camino cerrado (es un cuadrado)

$$\Gamma_n = [(n + \frac{1}{2})(-1 - i), (n + \frac{1}{2})(1 - i), (n + \frac{1}{2})(1 + i), (n + \frac{1}{2})(-1 + i), (n + \frac{1}{2})(-1 - i)]$$

y obtenemos para n suficientemente grande que

$$\int_{\Gamma_n} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{k=-n}^n \text{Res}(f(z), k) + \sum_{j=1}^q \text{Res}(f(z), z_j) \right). \tag{6.13}$$

Como para $k \in \mathbb{Z}$ es

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), k) &= \lim_{z \rightarrow k} (z - k) \pi \cotan(\pi z) \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(k)}{Q(k)} \lim_{z \rightarrow k} (z - k) \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \\ &= \frac{P(k)}{Q(k)} \pi \cos(k\pi) \lim_{z \rightarrow k} \frac{z - k}{\sin(\pi z)} = \frac{P(k)}{Q(k)} \pi \cos(k\pi) \frac{1}{\pi \cos(k\pi)} = \frac{P(k)}{Q(k)} \end{aligned}$$

y, en las hipótesis hechas, se comprueba que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_n} f(z) dz = 0$, deducimos de la igualdad (6.13) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \text{Res}(f(z), k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{P(k)}{Q(k)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = - \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\pi \cotan(\pi z) \frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right).$$

Ejemplo 6.21. Sea $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} &= - \text{Res} \left(\pi \cotan(\pi z) \frac{1}{z^2 + \alpha^2}, i\alpha \right) - \text{Res} \left(\pi \cotan(\pi z) \frac{1}{z^2 + \alpha^2}, -i\alpha \right) \\ &= \frac{\pi}{\alpha} \frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}. \end{aligned}$$

De donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\alpha} \frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} - \frac{1}{\alpha^2} \right).$$

Ahora deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\alpha} \frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} - \frac{1}{\alpha^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

donde el último límite puede calcularse por la regla de L'Hôpital.

6.5.2 Series del tipo $\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$

Suponemos que

- a) P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.
- b) $\text{grado}(Q) \geq \text{grado}(P) + 1$.
- c) $Q(k) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)} = - \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\pi \text{cosec}(\pi z) \frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right).$$

6.6 Ejercicios

Ejercicio 6.1

Calcula la integral $\int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$ para $\gamma = C(1/4, 1/2)$, $\gamma = C(1, 1/2)$ y $\gamma = C(2, 3)$.

Ejercicio 6.2

Calcula la integral $\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{z^2(z-1)}$ para $\gamma = C(0, 1/3)$, $\gamma = C(1, 1/3)$ y $\gamma = C(0, 2)$.

Ejercicio 6.3

Calcula $\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen}(2z)}{(z-\pi/4)^2(z^2+9)} dz$.

Ejercicio 6.4

Calcula $\int_{C(0,r)} \frac{dw}{(w-a)(w-b)^m}$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $|b| < r < |a|$.

Ejercicio 6.5

Dado $n \in \mathbb{N}$, calcula las siguientes integrales:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^n} dz; \quad \int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz; \quad \int_{C(1, \frac{1}{2})} \frac{\log(z)}{z^n} dz.$$

Ejercicio 6.6

Sean $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|a| < |b|$. Obténgase el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$, con $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ en cada uno de los anillos:

- $A(0; |a|, |b|)$,
- $A(0; |b|, +\infty)$,
- $A(a; 0, |b-a|)$ y
- $A(a; |b-a|, +\infty)$.

Ejercicio 6.7

Obténgase el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$ con $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ en los anillos $A(1; 0, 2)$ y $A(1; 2, +\infty)$.

Ejercicio 6.8

Clasificar las singularidades de las funciones $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ siguientes:

- $f(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^n}$ $\Omega = \mathbb{C}^*$ ($n \in \mathbb{N}$),
- $f(z) = z^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$ $\Omega = \mathbb{C}^*$ ($n \in \mathbb{N}$),
- $f(z) = \frac{\log(1+z)}{z^2}$ $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$,

$$\text{d) } f(z) = \frac{1}{z(1-e^{2\pi iz})} \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$$

$$\text{e) } f(z) = \frac{z}{\tan(\pi z)} \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Ejercicio 6.9

Prueba, usando el teorema de los residuos, que para $0 < b < a$ se tiene:

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{a+b \cos(t)} dt = \frac{\pi}{b^2} (a - \sqrt{a^2 - b^2}).$$

Series de Fourier

7

7.1 Introducción

Los sucesos que se repiten con una cierta periodicidad son relativamente comunes en la naturaleza. Piensa, por ejemplo, en las olas en el mar, las estaciones a lo largo del año, la transmisión del sonido, el péndulo de un reloj, las señales electromagnéticas emitidas por una antena, etc. También podemos fijarnos en fenómenos que dependen de más variables como las sombras que se producen con la difracción de un par de haces de luz. Aunque todos estos sistemas sean más o menos cíclicos, esto no quiere decir que sean fáciles de describir o modelar.

Las series de Fourier y la transformada de Fourier han jugado y continúan jugando un papel fundamental en el estudio de estos problemas y el desarrollo de las Matemáticas tal y como hoy las conocemos.

El problema de la representación de una función mediante una suma, posiblemente infinita, de funciones sinusoidales surge en el siglo XVIII de la mano de numerosos científicos como D'Alembert, D. Bernoulli o Fourier entre otros, para intentar resolver ecuaciones diferenciales asociadas a fenómenos físicos como el movimiento de una cuerda o la transmisión del calor.

A la hora de estudiar fenómenos periódicos tenemos dos frentes abiertos. Por un lado es necesario un conocimiento de las leyes físicas que gobiernan el sistema que queremos modelar, ya se trate del movimiento de un fluido para estudiar las olas del mar o cuál es la relación entre la electricidad, el magnetismo, voltajes, resistencias y lo que sea necesario para estudiar una señal eléctrica. En este punto no vamos a entrar aunque a veces en los ejemplos aparezca algunas de estas leyes. A nosotros nos interesa más el aspecto matemático del problema. ¿Cómo podemos describir uno de estos sistemas? El principio que vamos a aplicar es el de *divide y vencerás*. Intentaremos describir el problema en términos sencillos utilizando *senos* y *cosenos* y después combinaremos funciones de este tipo para obtener sistemas más complicados.

7.2 Fenómenos periódicos

Definición 7.1. Una función f es *periódica* con periodo T (o T -periódica) si existe un número $T > 0$ tal que $f(t) = f(t + T)$, para todo t . Al menor valor de T se le llama periodo de f (también lo llamaremos *periodo fundamental* o *mínimo* para distinguirlo del resto).

Función periódica

Observación 7.2. Las funciones constantes son periódicas con periodo fundamental cero dado que son periódicas con cualquier periodo. Si nos olvidamos de este caso, todas las funciones continuas y periódicas tienen un periodo fundamental T positivo.

Obsérvese que si $f(t) = f(t + T)$, entonces $f(t) = f(t + nT)$ para cualquier entero n . Dicho de otra forma, si T es un periodo de f , también lo es nT para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

Ya conoces ejemplos de funciones periódicas: quizás los más usuales sean las funciones de tipo sinusoidal como $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(3x + 1)$ o $\text{sen}(2x) + \text{cos}(x)$. Las funciones $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ son periódicas con periodo 2π . Las funciones $\text{sen}(2x)$ y $\text{cos}(2x)$ también son periódicas pero su periodo fundamental es π . En general las funciones del tipo

$$\text{sen}(n\omega t + \phi), \text{cos}(n\omega t + \phi)$$

son periódicas con periodo fundamental $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

¿La suma de funciones periódicas es periódica?

Observación 7.3. En un primer vistazo parece claro que si la gráfica de una función se repite cada vez que avanzamos T_1 unidades y la de la segunda función se repite cada T_2 unidades, entonces la suma de ambas funciones también se acabará repitiendo.

Si miramos un poco más despacio e intentamos buscar el periodo T de la suma de dos funciones periódicas f y g , debería verificarse que

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x) = (f + g)(x + T) = f(x + T) + g(x + T)$$

De esto se deduce que T es un periodo de f y g y por tanto, T debe ser múltiplo entero de T_1 y T_2 . No es difícil comprobar que si $T_1, T_2 \in \mathbb{Q}$, entonces no hay ningún problema. Pero, en general, la suma de dos funciones periódicas no es una función periódica: por ejemplo $\text{cos}(t) + \text{cos}(\sqrt{2}t)$.

Funciones sinusoidales

Uno de los ejemplos más clásicos de comportamiento periódico y que, probablemente, recordarás de tus clases de Física es el oscilador armónico. Se trata de describir el movimiento de un peso colgado de un muelle. Dicho movimiento viene descrito por una función de la forma:

$$A \text{sen}(2\pi\omega t + \phi).$$

A representa la *amplitud*, ω es la *frecuencia* medida en ciclos por segundo (Herzios) y la *fase* es ϕ . Se suele usar también el nombre de *frecuencia angular* para referirse a $\frac{2\pi}{\omega}$. Se comprueba fácilmente que el periodo de esta función es $T = \frac{1}{\omega}$:

$$\begin{aligned} A \text{sen}\left(2\pi\omega\left(t + \frac{1}{\omega}\right) + \phi\right) &= A \text{sen}\left(2\pi\omega t + 2\pi\omega \frac{1}{\omega} + \phi\right) \\ &= A \text{sen}(2\pi\omega t + \phi + 2\pi) \\ &= A \text{sen}(2\pi\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Si nos olvidamos de la fase, los ejemplos más sencillos de funciones sinusoidales son las funciones $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ que tienen periodo 2π . Es fácil dar ejemplos de funciones que tengan periodo T : es cuestión de “encoger” o “estirar” estas funciones. Las funciones $\text{sen}(n\pi x/T)$ y $\text{cos}(n\pi x/T)$ son periódicas con periodo $2T$ y, por tanto, las funciones $\text{sen}(2n\pi x/T)$ y $\text{cos}(2n\pi x/T)$ son periódicas con periodo T .

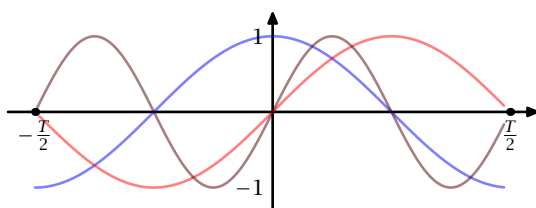


Ilustración 7.1 Funciones periódicas

Aunque lo olvidemos a veces, las funciones constantes también son periódicas, de hecho con cualquier periodo.

Cuando intentamos describir fenómenos periódicos algo más complejos es necesario recurrir a combinaciones lineales de funciones sinusoidales de la forma anterior, esto es, funciones del tipo

$$\sum_{n=1}^N A_n \text{sen}(n\omega + \phi_n), \sum_{n=1}^N B_n \text{cos}(n\omega + \phi_n)$$

o sumas de ambas.

Para trabajar con funciones de esta clase, se puede “retocarlas” un poco para obtener periodo uno. Ya veremos como un simple cambio de variable nos permitirá pasar a intervalos cualesquiera cuando sea necesario. En este caso tendríamos sumas del tipo

$$\sum_{n=1}^N A_n \text{sen}(2\pi nt + \phi_n)$$

Esta forma de escribir sumas trigonométricas tiene la ventaja de presentar de forma explícita la amplitud, frecuencia y fase. El inconveniente es la dificultad del cálculo de dichos coeficientes. La forma usual de escribir una suma trigonométrica es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(2\pi nt) + b_n \text{sen}(2\pi nt)]$$

Pronto entenderás que el motivo para añadir la constante $\frac{a_0}{2}$ es una cuestión de comodidad en la notación.

Definición 7.4. Un *polinomio trigonométrico* con periodo T y frecuencia $\omega = 2\pi/T$ es una función de la forma

Polinomio trigonométrico

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t)].$$

Los coeficientes a_n y b_n se llaman *coeficientes de Fourier* del polinomio y N es el grado de dicho polinomio.

El motivo de llamar “polinomios” a funciones de este tipo es que $\text{sen}(n\omega t)$ y $\cos(n\omega t)$ se puede expresar como sumas y potencias de $\text{sen}(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$ usando que

$$\text{sen}(2\omega t) = 2 \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \quad \text{y} \quad \cos(2\omega t) = \cos^2(\omega t) - \text{sen}^2(\omega t).$$

Si $f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t)]$ es un polinomio trigonométrico, f es una función T -periódica. Además, si tomamos

$$\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{y} \quad \phi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \in (-\pi, \pi]$$

para $n = 1, 2, \dots, N$ se tiene que $a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t) = \alpha_n \cos(n\omega t + \phi)$, con lo que

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega t + \phi_1) + \alpha_2 \cos(2\omega t + \phi_2) + \dots + \alpha_N \cos(N\omega t + \phi_N)$$

donde $2\alpha_0 = a_0$.

A $\alpha_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ se le llama *primer armónico* o *modo fundamental de vibración*, los coeficientes α_n son las *amplitudes* y ϕ_n son los *ángulos de fase*. También se pueden escribir con senos en lugar de cosenos utilizando que $\cos(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

La expresión de un polinomio trigonométrico en términos de las amplitudes y las fases de sus armónicos es muy intuitiva: nos dice que la función resultante consiste en superponer vibraciones $\cos(n\omega t + \phi_n)$ cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia del modo fundamental, de mayor o menor amplitud y que van en fase (si $\phi_n = 0$), adelantadas (cuando $\phi_n > 0$, lo que corresponde a deslizar la gráfica hacia la izquierda) o retrasadas (cuando $\phi_n < 0$, lo que corresponde a deslizar la gráfica hacia la derecha) con respecto al armónico puro de la misma frecuencia $\cos(n\omega t)$.

7.3 Un poco de historia

7.3.1 La cuerda vibrante

A principios del siglo XVIII, el Cálculo está firmemente establecido dentro las Matemáticas y ya ha demostrado su utilidad en la resolución de numerosos problemas en Mecánica. Por ejemplo,

Isaac Newton (1643-1727) lo ha utilizado para deducir las leyes de Kepler sobre el movimiento de los planetas. Sin embargo, sus aplicaciones están principalmente dirigidas a sistemas simples. Problemas más complejos como el movimiento de muchos cuerpos, el estudio de fluidos, de cuerpos elásticos o de vibraciones requerían técnicas más elaboradas.

El problema del movimiento de una cuerda elástica sujeta por sus extremos era uno de los que más interesaban a los científicos de aquel tiempo. Los medios continuos se modelaban con un número finito de partículas n y después se hacía tender n a infinito. En el problema de la cuerda vibrante se pretende describir el movimiento de una cuerda sujeta por sus extremos. También supondremos que el peso de la cuerda es nulo, que la cuerda es elástica y que no hay fricción. Esta es la situación, por ejemplo, que se presenta cuando consideramos las cuerdas de un piano de cola donde la masa es despreciable en comparación con la tensión que soporta.

Johann Bernoulli (1667-1748) estudió este problema en su versión simplificada con una cuerda que constaba de 8 partículas. En 1747, Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), utilizando el caso discreto general con n partículas y tomando límites, dedujo que se debía verificar la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),$$

donde $c = \sqrt{T/M}$, T es la tensión de la cuerda y M su masa. Más concretamente, supongamos que tenemos una cuerda de longitud π , con los extremos fijos en $(0, 0)$, $(\pi, 0)$. Se tira de la cuerda hasta que tenga la forma dada por la curva $y = f(x)$ y se suelta. La pregunta es ¿cuál es el movimiento descrito por la cuerda? Dicho movimiento vendrá dado por una función $u(x, t)$, donde $u(x, t)$ representa el desplazamiento vertical en un punto x entre 0 y π en un momento dado $t \geq 0$. En otras palabras, para un valor fijo t , $u(x, t)$ es la curva que representa la cuerda en dicho momento. Nuestro problema es calcular $u(x, t)$ a partir de $f(x)$. Más concretamente, la función u debe verificar

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

La primera condición es una ecuación en derivadas parciales conocida como "Ecuación de ondas". Las tres siguientes son condiciones sobre la posición de la cuerda.

D'Alembert demostró que la solución general viene dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x + t) + \Psi(x - t)]$$

donde Φ y Ψ son funciones arbitrarias con derivadas de segundo orden continuas. Utilizando la condición inicial, obtuvo que la solución tenía la forma $u(x, t) = \frac{\tilde{f}(x+ct) + \tilde{f}(x-ct)}{2}$ donde sólo se suponía que \tilde{f} era una extensión par y periódica de f . El hecho de que esta fórmula tenga sentido sin ninguna hipótesis de regularidad de la función f planteaba serias dudas a D'Alembert. Independientemente, Euler también había llegado a la misma conclusión, aunque ambos tenían serias divergencias en cuanto a qué "funciones" se podían tomar como condición inicial. Hay que tener en cuenta que el concepto de función, tal y como hoy lo conocemos, no estaba nada claro. Como ejemplo, las funciones definidas a trozos no eran aceptadas como "funciones" por D'Alembert y sí por Euler.

En 1753, Daniel Bernoulli, junto con su padre Johann Bernoulli y su tío paterno Jakob, propone otra manera distinta de obtener una solución del problema motivada por sus estudios en Acústica. La idea consiste en descomponer la solución $u(x, t)$ como suma de funciones "simples" de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx) \cos(nt).$$

De nuevo hay que observar que los conceptos de convergencia de series de funciones no estaban planteados en aquel momento. A fin de cuentas, el problema físico estaba claro que tenía solución y por tanto la suma debía tener sentido. Obsérvese también que si la solución ofrecida por Bernoulli fuese correcta se tendría que

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx), \quad \forall x \in [0, \pi].$$

El hecho de que funciones de muy diverso tipo se pudieran expresar como suma de funciones periódicas no fue compartido por sus colegas D'Alembert y Euler. Veremos en este tema quién estaba más cerca de la verdad.

7.3.2 Difusión del calor

Medio siglo más tarde, Joseph Fourier, matemático y físico francés, tomó en cuenta las investigaciones previas de Bernoulli para resolver otro problema. Al regresar a Francia de la campaña de Egipto con Napoleón, Fourier se interesa por la teoría de conducción del calor en los cuerpos sólidos en respuesta a un concurso promovido por la Academia de Ciencias de París.

Más concretamente, el problema era el siguiente: se considera una varilla delgada de longitud fija, L , cuyos extremos se mantienen a 0°C y cuyos laterales están aislados. Si la temperatura inicial de la varilla viene dada por la función $f(x)$, ¿cuál será la temperatura al cabo de un tiempo t ?

Fourier demostró que, en condiciones apropiadas, si $u(x, t)$ es la solución debe verificar que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, & 0 < x < L, 0 < t \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & 0 \leq t \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (7.2)$$

La primera condición es una ecuación en derivadas parciales conocida como "Ecuación del calor". La segunda condición indica que la temperatura en los extremos se mantiene a 0°C siempre. La última es la temperatura inicial de la varilla y K es una constante *positiva* que depende de las propiedades termales de la barra.

Para buscar la solución, Fourier supuso que era de la forma $u(x, t) = f(x)g(t)$. Sustituyendo en la ecuación (7.2) obtenemos que

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{K} \frac{\partial u}{\partial t} = f''(x)g(t) - \frac{1}{K} f(x)g'(t).$$

Como la solución $u(x, t) = 0$ no nos interesa, debe verificarse que $f(x), g(t) \neq 0$ y, por tanto, dividiendo en ambos lados por el producto $f(x)g(t)$ y separando términos en x de términos en t se llega a que:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{K} \frac{g'(t)}{g(t)}.$$

Como ambos miembros dependen de variables distintas, la única posibilidad es que ambos sean constantes (ya veremos cuánto vale dicha constante). Por ahora y por comodidad la denotaremos $-\lambda$:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{K} \frac{g'(t)}{g(t)} = -\lambda,$$

con lo que hemos transformado nuestra ecuación original en dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\lambda \implies f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad (7.3)$$

y

$$\frac{1}{K} \frac{g'(t)}{g(t)} = -\lambda \implies g'(t) + \lambda K g(t) = 0. \quad (7.4)$$

La ecuación (7.4) ya la conoces y tiene como solución general $g(t) = ae^{-K\lambda t}$. Desde un punto de vista físico sería deseable que la temperatura de la barra fuera descendiendo al pasar el tiempo para lo que λ debe ser positivo también. La solución general de la ecuación (7.3) también la conoces:

$$f(x) = a_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + a_2 \cos(\sqrt{\lambda}x),$$

donde a_1 y a_2 son constantes. Combinando estas dos expresiones, tenemos que

$$u(x, t) = ae^{-K\lambda t} (a_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + a_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)).$$

Para acabar de resolver el problema necesitaríamos conocer los valores de a , a_1 , a_2 y λ y para esto vamos a utilizar las condiciones que teníamos en la ecuación del calor (7.2). En primer lugar,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \implies f(0)g(t) = f(L)g(t) = 0, \quad \forall t > 0,$$

y como $g(t) \neq 0$, se tiene que $f(0) = f(L) = 0$. Si sustituimos en la definición de f ,

$$0 = f(0) = a_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}0) + a_2 \cos(\sqrt{\lambda}0) = 0 + a_2 = a_2.$$

Si $a_2 = 0$, entonces a_1 debe ser distinto de cero para que f no sea constantemente cero. Además $f(L) = 0$, con lo que $0 = f(L) = a_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L)$ y por tanto $\sqrt{\lambda}L$ debe ser un cero de la función seno:

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \implies \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} = \lambda_n.$$

En consecuencia, para cada entero n tenemos un posible valor de λ . Dicho de otra forma,

$$f(x) = a_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}x)$$

es solución de $f''(x) + \lambda_n f(x) = 0$, $f(0) = f(L) = 0$. Resumiendo, cualquier función de la forma

$$u_n(x, t) = a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{Kn^2\pi^2 t}{L^2}}$$

verifica la ecuación del calor y la primera condición. Además cualquier combinación lineal también las verifica. Por tanto

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{Kn^2\pi^2 t}{L^2}}$$

es la solución más general que tenemos hasta ahora.

¿Qué pasa con la segunda condición del sistema? Si $u(x, 0) = f(x)$, entonces f debe ser de la forma

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^N b_n a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

No es cierto que cualquier función se escriba de esta forma ni mucho menos. El acierto de Fourier fue sustituir la suma finita por una suma infinita. Ya habíamos comentado que esta idea había

sido avanzada por Bernoulli en su solución del problema de la cuerda vibrante. El paso dado por Fourier en su libro sobre la teoría del calor fue demostrar que, efectivamente, la serie infinita era convergente para convenientes coeficientes y calculó su valor en numerosos casos.

La historia de las series de Fourier no acaba aquí. De hecho, continua hasta nuestros días. Las ideas expuestas por Fourier suscitaron una gran cantidad de nuevas preguntas:

- a) ¿Qué funciones se pueden desarrollar de esta manera?
- b) ¿Cómo se calculan los coeficientes?
- c) ¿En qué sentido se entiende la convergencia de la serie?
- d) ¿Cómo se recupera la función a partir del conocimiento de los coeficientes?
- e) ¿Qué deben verificar los coeficientes para que den lugar a una función?
- f) ...

7.4 Series de Fourier

El primer problema que tenemos que estudiar es cuándo una función f con periodo T se puede escribir de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)] \tag{7.5}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. A las series de funciones la forma (7.5), las llamaremos *series trigonométricas*. Hemos visto que la posibilidad de que una función periódica se pueda expresar como suma de funciones periódicas más sencillas, en este caso series trigonométricas, tiene una gran repercusión en la solución del problema de la difusión del calor.

¿Cuáles serán estas funciones? Comencemos con una función f periódica con período T y notemos $\omega_0 = 2\pi/T$. Supongamos que se cumple que

$$f(t) = C + \sum_{n \geq 1} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)] \tag{7.6}$$

Utilizando que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) \cos(y) &= \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)), \\ \cos(x) \cos(y) &= \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y)), \text{ y} \\ \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y) &= \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \end{aligned} \tag{7.7}$$

se obtiene lo siguiente.

Proposición 7.5.

- a) $\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) \operatorname{sen}(m\omega_0 t) dt = 0, \forall n, m \in \mathbb{N},$
- b) $\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} T/2, & \text{si } m = n, \\ 0, & \text{si } m \neq n \end{cases}$
- c) $\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \operatorname{sen}(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} T/2, & \text{si } m = n, \\ 0, & \text{si } m \neq n \end{cases}$
- d) $\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} T, & \text{si } n = 0, \\ 0, & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$
- e) $\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt = 0.$

Demostración. Utilizando integración por partes y las ecuaciones (7.7)

- a) $\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt = \left[\frac{\text{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{-T/2}^{T/2} = 0.$
- b) $\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(n\omega_0 t) dt = \left[-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{-T/2}^{T/2} = 0.$
- c) $\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(n\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} (1 + \cos(2n\omega_0 t)) dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{\text{sen}(2n\omega_0 t)}{2n\omega_0} \right]_{-T/2}^{T/2} = T/2.$
- d) $\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}^2(n\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} (1 - \cos(2n\omega_0 t)) dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{\text{sen}(2n\omega_0 t)}{2n\omega_0} \right]_{-T/2}^{T/2} = T/2.$
- e) $\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [\text{sen}((n+m)\omega_0 t) + \text{sen}((n-m)\omega_0 t)] dt = 0,$ para $n, m \in \mathbb{N}.$

Por último, para $n \neq m,$

- f) $\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [\cos((n+m)\omega_0 t) + \cos((n-m)\omega_0 t)] dt = 0,$ y
- g) $\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(n\omega_0 t) \text{sen}(m\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [\cos((n-m)\omega_0 t) - \cos((n+m)\omega_0 t)] dt = 0. \square$

Funciones ortogonales

Esto se suele resumir diciendo que las funciones $\text{sen}(n\omega_0 t)$ y $\cos(n\omega_0 t)$ son *ortogonales*. Pero no olvidemos que queríamos calcular el valor de los coeficientes C, a_n y $b_n.$

Si multiplicamos la igualdad (7.6) por $\cos(m\omega_0 t)$ e integramos,

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \left[C + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)) \right] \cos(m\omega_0 t) dt \\ &= C \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

de lo que obtenemos que

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt,$$

para $n = 1, 2, \dots$

Si en lugar de multiplicar por $\cos(n\omega_0 t),$ multiplicamos por $\text{sen}(m\omega_0 t),$ se obtiene que

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por último, también podemos calcular $C:$

$$C = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(0\omega_0 t) dt,$$

si más que tener en cuenta que $\cos(0) = 1.$ Para tener una fórmula similar al resto de coeficientes usaremos

$$a_0 = 2C = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$$

con lo que

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt,$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$

Definición 7.6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica con período T . Llamaremos *coeficientes de Fourier* a los siguientes números (si existen): Coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots, \text{ y}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

La *serie de Fourier* de la función f es Serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t).$$

Como aún no conocemos la relación entre f y su serie de Fourier usaremos la notación

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)$$

Por ahora no sabemos si se da la igualdad. De hecho, ni siquiera sabemos la serie se pueda sumar. Lo que sí sabemos es que esta es la única posibilidad para desarrollar f de esta manera.

Observación 7.7.

- a) Cualquier intervalo de longitud T puede jugar el mismo papel. Por ejemplo, podríamos haber tomado el intervalo $[0, T]$.
- b) Todas las funciones que han aparecido hasta ahora son periódicas con periodo la longitud del intervalo y las hemos considerado definidas en el intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ (o en \mathbb{R}). Esto puede acarrear problemas cuando planteamos la cuestión de la siguiente manera: calcular los coeficientes de Fourier de la función $f(x) = x + 1$ en el intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Tal como está enunciado, la función f no es periódica. Para que así fuera deberíamos definir $f(-\frac{T}{2})$ y $f(\frac{T}{2})$ con un mismo valor. Ahora bien, a la hora de calcular los coeficientes de Fourier, el valor de la integral en un punto no influye sobre su valor y por tanto la serie de Fourier que se obtiene es la misma independientemente del valor de la función en los extremos.

Para que no se presente este problema, en muchos textos encontrarás las funciones definidas en $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$, en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ o en $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Nosotros hemos optado por considerar siempre las funciones en el intervalo cerrado o en todo \mathbb{R} , pero hay que tener en cuenta que las funciones tienen que ser periódicas. Por esto, aunque en algún problema no aparezca el valor de la función en algunos puntos, sigue teniendo perfecto sentido el cálculo de los coeficientes de Fourier.

Si el desarrollo de Fourier de una función f es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)$$

a las funciones $\frac{a_0}{2}, a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)$ se las suele llamar *armónicos* de f . En cierta manera, los armónicos son los ladrillos de los que está hecha la función f . También podemos escribir $a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)$ como un único coseno:

$$a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega_0 t + \phi_n),$$

donde

$$\phi_n = \begin{cases} \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right), & \text{si } a_n \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } a_n = 0. \end{cases}$$

La *amplitud* del n-ésimo armónico es $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y la *fase* es ϕ_n .

Los coeficientes de Fourier, la amplitud y el ángulo de fase son datos muy importantes a la hora de representar una señal. Además de la representación usual de la señal como una función, podemos representar las amplitudes (*espectro discreto de amplitudes*) o las fases (*espectro discreto de fases*) cuando en el eje de abscisas representamos las frecuencias .

Ejemplo 7.8. Calcular la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < -\pi/2 \\ 1, & \text{si } -\pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

De acuerdo con la definición de los coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} dx = \frac{3}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} \cos(nx) dx = \left. \frac{\text{sen}(nx)}{n\pi} \right]_{-\pi/2}^{\pi} = \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} \text{sen}(nx) dx = \left. \frac{-\cos(nx)}{n\pi} \right]_{-\pi/2}^{\pi} = \frac{-\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n\pi}[1 - (-1)^{n/2}], & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} \left(\cos(x) + \text{sen}(x) - \text{sen}(2x) - \frac{1}{3} \cos(3x) + \frac{1}{3} \text{sen}(3x) + \dots \right) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left[(-1)^{n-1} \cos((2n-1)x) + \text{sen}((2n-1)x) - \text{sen}((4n-2)x) \right] \end{aligned}$$

Ejemplo 7.9. Sea $f : [4, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 4 < x \leq 5 \\ 2, & \text{si } 5 < x \leq 6 \end{cases}$$

En este caso $a = 5$ y $r = 1$. Vamos a calcular sus coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \int_4^5 dx + \int_5^6 2 dx = 3$$

Para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_4^5 \cos(n\pi(x-5)) dx + \int_5^6 2 \cos(n\pi(x-5)) dx = 0, \text{ y} \\ b_n &= \int_4^5 \text{sen}(n\pi(x-5)) dx + \int_5^6 2 \text{sen}(n\pi(x-5)) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto $f(x) \approx \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1} \text{sen}[(2n-1)\pi(x-5)]$.

Funciones pares e impares

Se puede simplificar el cálculo de los coeficientes de Fourier de una función f si sabemos que la función es par o impar. Recordemos que una función es *par* si $f(-x) = f(x)$, y que es *impar* si $f(-x) = -f(x)$. Si la función es par su integral de 0 a $\frac{T}{2}$ coincide con la de $-\frac{T}{2}$ a 0. Si es impar, coincide salvo en el signo. Como el coseno es par y el seno es impar, la mitad de los coeficientes de Fourier valen cero (dependiendo de en qué caso estemos).

Proposición 7.10. Sea $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Si f es par, entonces $f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$, donde

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(n\omega_0 t) dt, \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

b) Si f es impar $f(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\omega_0 t)$, donde

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt, \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Ejemplo 7.11. La función $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$ es impar. Por tanto, su serie de Fourier sólo tiene coeficientes en senos.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \text{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right] \\ &= -\frac{2\cos(n\pi)}{n} = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Por tanto, $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(nx)$.

Extensiones periódicas de una función

Hay que recordar que estamos trabajando con funciones *periódicas*. Cuando consideramos una función f en $[-\pi, \pi]$, en realidad estamos trabajando con la extensión 2π -periódica de f a todo \mathbb{R} . Esto hace que la idea que tengamos de la continuidad o derivabilidad de la función pueda inducirnos a error. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ en $[-\pi, \pi]$ es continua pero *no* es derivable en los extremos del intervalo. Un vistazo a su gráfica (figura 7.2) puede dejarnos las cosas más claras. Fíjate que cuando decimos la función x^2 en realidad estamos diciendo: la función que vale x^2 en $[-\pi, \pi]$ y que hemos extendido de forma 2π -periódica.

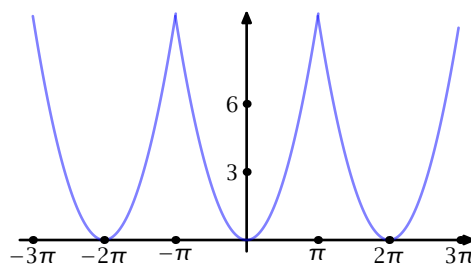


Ilustración 7.2 $f(x) = x^2$

Existen muchas formas de extender por periodicidad una función dada. Supongamos por ejemplo que f es la identidad en $[0, \pi]$, esto es $f(x) = x$, que tenemos en la figura 7.3. Entre otras, podemos considerar entonces las funciones $f_1, f_2, f_3 : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x + \pi), & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ f(x), & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} f(-x), & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ f(x), & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{y } f_3(x) = \begin{cases} -f(-x), & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ f(x), & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

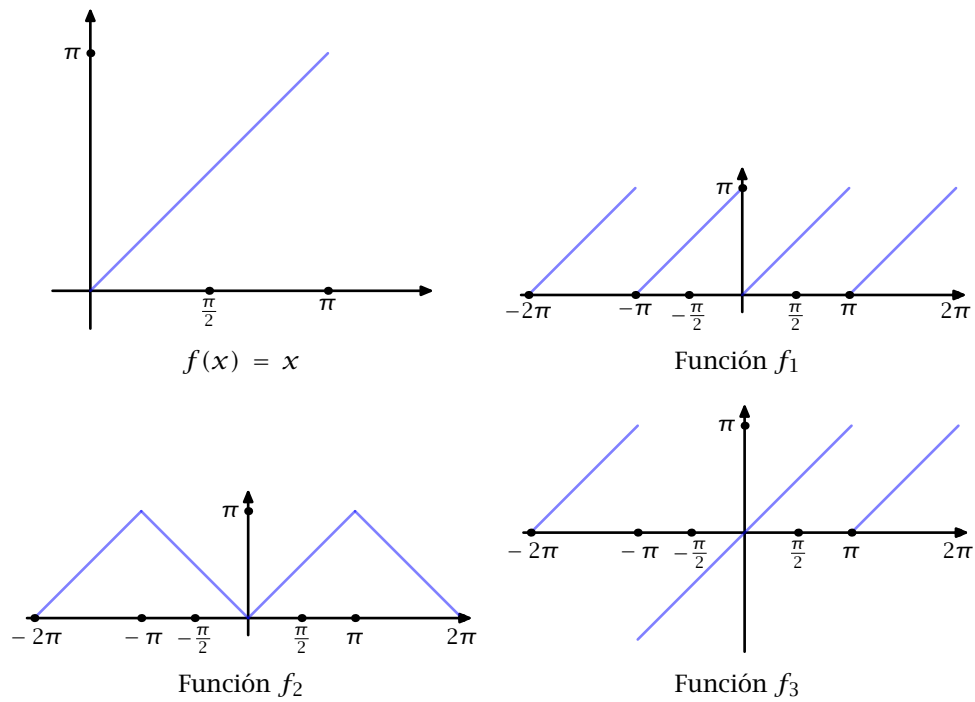


Ilustración 7.3 Extensiones periódicas de $f(x) = x$

y entonces extender cada una de ellas por periodicidad. Las propiedades de la representación trigonométrica obtenida depende enormemente de la elección que se haga. Por ejemplo, como se puede ver en las figuras, la primera extensión no es continua en el origen, ni en π ni en $-\pi$. En cambio la segunda extensión sí es continua en el origen aunque no derivable. La tercera extensión es continua y derivable en el origen.

7.4.1 Series de Fourier complejas

En la primera parte del curso hemos visto que la notación compleja es muchas veces más adecuada. Éste es uno de esos casos. Recordemos que $e^{it} = \cos(t) + i \sen(t)$, de lo que se deduce que

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}}{2}, \quad \sen(t) = \frac{e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}}{2i}$$

Si desarrollamos

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega_0 t} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [\cos(n\omega_0 t) + i \sen(n\omega_0 t)] + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} [\cos(n\omega_0 t) - i \sen(n\omega_0 t)] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(c_n + c_{-n}) \cos(n\omega_0 t) + i(c_n - c_{-n}) \sen(n\omega_0 t)] \end{aligned}$$

Por tanto, tomando $a_0 = 2c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$ y $b_n = i(c_n - c_{-n})$ o $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ y $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sen(n\omega_0 t)]$$

Obsérvese que los coeficientes c_n son ahora números complejos que verifican $c_n = \overline{c_{-n}}$ y, en particular, $|c_n| = |c_{-n}|$.

También podríamos haber calculado los coeficientes de Fourier *complejos* utilizando el mismo truco que usamos para calcular a_n y b_n , esto es, si suponemos que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

y que todo lo que aparece se puede integrar término a término. Multipliquemos ambos miembros por $e^{-in\omega_0 t}$ e integramos. Así se obtiene el valor de los coeficientes c_n

Definición 7.12. Sea f una función periódica con período T y frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Entonces los *coeficientes de Fourier complejos* de f son

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$

Coeficientes de Fourier complejos

Los coeficientes de Fourier complejos los hemos calculado usando exponenciales complejas y pueden ser complejos. En segundo lugar, obsérvese que la definición tiene perfecto sentido para funciones con valores complejos. De hecho, aunque únicamente afirmamos que f es una función periódica, el enunciado completo sería

“Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función periódica con período $T \dots$ ”

Definición 7.13. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función periódica con período T y frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$. La *serie de Fourier compleja* de f es $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$.

Observación 7.14. Existe una gran cantidad de literatura sobre las series de Fourier. Quizá la notación más usual para los coeficientes de Fourier que el lector se puede encontrar $\hat{f}(n)$ para denotar a dichos coeficientes, esto es, $\hat{f}(n) = c_n$, con lo que

$$f(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\omega_0 t}.$$

Ejemplo 7.15. Calcular la serie de Fourier compleja de la función $f(t) = t, \forall t \in]-\pi, \pi]$. Tenemos, en este caso, que $T = 2\pi$ y $\omega_0 = 1$. Para $n = 0$,

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0.$$

Para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} dt \\ &= \frac{-1}{2in\pi} \left([t e^{-int}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt \right) \\ &= \frac{-1}{2in\pi} \left(\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi} + \frac{1}{in} (e^{-in\pi} - e^{in\pi}) \right) \\ &= \frac{-1}{2in\pi} \left(2\pi \cos(n\pi) - \frac{2}{n} \operatorname{sen}(n\pi) \right) \\ &= \frac{-1}{in} \cos(n\pi) \\ &= \frac{i}{n} (-1)^n. \end{aligned}$$

7.4.2 Algunas funciones “típicas”

Pulso rectangular

Ejemplo 7.16. Llamamos *pulsos rectangulares* a aquellas señales que son nulas salvo un determinado intervalo de tiempo en el que son constantes. El ejemplo típico es la función $f: \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < a/2, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

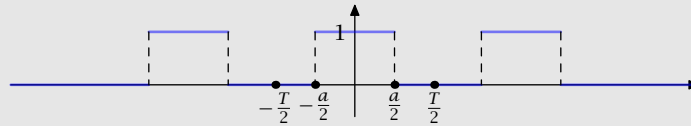


Ilustración 7.4 Pulso rectangular

donde a es un número real positivo y menor que T . Los coeficientes de Fourier complejos de f son

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-a/2}^{a/2} e^{in\omega_0 t} dt \\ &= \left[\frac{1}{T} \frac{e^{-in\omega_0 t}}{-in\omega_0} \right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{2}{Tn\omega_0} \left(\frac{e^{in\omega_0 a/2} - e^{-in\omega_0 a/2}}{2i} \right) = \frac{\text{sen}(n\omega_0 a/2)}{Tn\omega_0}, \end{aligned}$$

para n distinto de cero, y $c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-a/2}^{a/2} 1 dt = \frac{a}{T}$.

Función triangular

Ejemplo 7.17. La función “triangular periódica” con periodo T está definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a}, & \text{si } |t| \leq a, \\ 0, & \text{para } a \leq |t| \leq T/2. \end{cases}$$

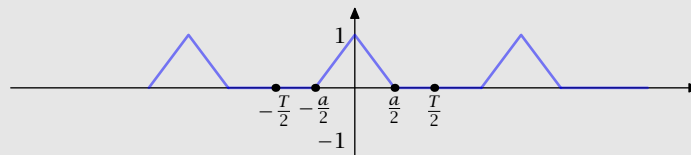


Ilustración 7.5 Triangular

Calculemos sus coeficientes de Fourier.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \\ &= \int_{-a}^0 \left(1 + \frac{t}{a}\right) e^{-in\omega_0 t} dt + \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) e^{-in\omega_0 t} dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (\text{integramos por partes}) \\ &= \frac{2}{T} \frac{1}{n\omega_0} \left[\left(1 - \frac{t}{a}\right) \text{sen}(n\omega_0 t) \Big|_0^a + \frac{1}{a} \int_0^a \text{sen}(n\omega_0 t) dt \right] \\ &= \frac{2(1 - \cos(n\omega_0 a))}{n^2 \omega_0^2 a T} \end{aligned}$$

y usando que $1 - \cos(2x) = 2 \text{sen}^2(x)$, $c_n = \frac{4 \text{sen}^2(n\omega_0 a/2)}{n^2 \omega_0^2 a T}$.

Es inmediato comprobar que $c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{a}{T}$.

Función diente

Ejemplo 7.18. La función diente está definida como $f(t) = \frac{2t}{T}$.

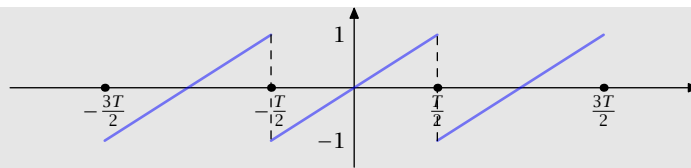


Ilustración 7.6 Dientes

Sus coeficientes de Fourier complejos son

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} 2te^{-in\omega_0 t} dt = \frac{i(-1)^n}{n\pi},$$

si $n \neq 0$ y $c_0 = 0$.

7.5 Propiedades de las series de Fourier

Linealidad

Proposición 7.19. Sean f y g funciones T -periódicas con coeficientes de Fourier $\hat{f}(n)$ y $\hat{g}(n)$. Sean a y b números complejos. Entonces, los coeficientes de Fourier de $af + bg$ son

$$(a\widehat{f} + b\widehat{g})(n) = a\hat{f}(n) + b\hat{g}(n),$$

para cualquier número entero n .

Conjugación

Proposición 7.20. Sea f una función periódica con periodo T y coeficientes de Fourier $\hat{f}(n)$. Entonces los coeficientes de Fourier de la función conjugada son

$$\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Podemos aplicar este resultado al estudio de los coeficientes de Fourier de funciones reales. En este caso $f(t) = \overline{f(t)}$ y por tanto $c_n = \overline{c_{-n}}$ y, en particular, $|c_n| = |c_{-n}|$, cosa que ya habíamos comentado con anterioridad.

Traslaciones

¿Qué pasa si “movemos” una función hacia la izquierda o la derecha? ¿Qué repercusión tiene esto en los coeficientes de Fourier?

Proposición 7.21. Sea f una función periódica con periodo T y coeficientes de Fourier $\hat{f}(n)$ y sea t_0 un número real. Entonces, los coeficientes de Fourier de la función $f(t - t_0)$ son

$$e^{-in\omega_0 t_0} \hat{f}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Como $|e^{-in\omega_0 t_0}| = 1$, la amplitud (el módulo de los coeficientes de Fourier) de una función no cambia al trasladarla.

Inversión del tiempo

Si la variable t indica el tiempo, el cambio de t por $-t$ simplemente cambia la dirección del tiempo: en lugar de avanzar, retrocedemos en el tiempo. ¿Qué pasa en este caso con los coeficientes de Fourier?

Proposición 7.22. *Sea f una función periódica con periodo T . Entonces los coeficientes de Fourier de $f(-t)$ son $\hat{f}(-n)$.*

7.6 Sobre los coeficientes de Fourier

Hasta ahora hemos dado una definición de serie trigonométrica en la que no aparece ninguna función y hemos hablado de serie de Fourier cuando los coeficientes están asociados a una función. En esta sección vamos a ver qué condiciones deben verificar los coeficientes de una serie trigonométrica para ser los coeficientes de Fourier de una adecuada función.

En primer lugar, introducimos las funciones con las que vamos a trabajar a partir de ahora. Obsérvese que para la definición de los coeficientes de Fourier de una función es necesario que las integrales tengan sentido. Aunque esto no sea cierto para cualquier función, sí lo es para las funciones que consideramos en la siguiente definición.

Definición 7.23. Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es *continua a trozos* si existe una partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$ de forma que

- a) f es continua en $]x_i, x_{i+1}[$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, y
- b) f tiene límites laterales en x_i , $i = 0, 1, \dots, n$. A estos límites los denotaremos $f(x_{i+})$ y $f(x_{i-})$, esto es

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) = f(x_{i+}) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) = f(x_{i-})$$

Diremos que f es *derivable a trozos* si es derivable salvo en un conjunto finito de puntos en los que existen derivadas laterales.

Ejemplo 7.24.

- a) La función $f : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 3x + 1, & \text{si } 5 < x < 7 \\ x^2 - x, & \text{si } 7 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

es continua a trozos. Es continua salvo en 5, 7 y 10, pero en dichos puntos los límites laterales existen.

- b) La función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ 1/x, & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

no es continua a trozos. Es continua en todos los puntos salvo en el origen, pero no tiene límite en 0.

Las funciones continuas a trozos son integrables. Además, la integral la podemos calcular como suma de integrales en cada uno de los intervalos donde la función es continua.

Si nos restringimos a este tipo de funciones no hay problema para el cálculo de los coeficientes de Fourier. Ahora vamos a ver cuándo se puede sumar la serie de Fourier de una función y cuánto vale

dicha suma. Los siguientes resultados nos ponen algunas restricciones sobre el comportamiento de los coeficientes de Fourier.

Teorema 7.25. *Sea f una función periódica con periodo T continua a trozos y con coeficientes de Fourier c_n . Entonces*

Desigualdad de Bessel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt.$$

El siguiente resultado, de gran importancia, es una simple consecuencia del hecho que la convergencia de una serie implica la convergencia a cero del término general.

Teorema 7.26. *Sea f una función periódica con periodo T continua a trozos con coeficientes de Fourier c_n . Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow -\infty} c_{-n} = 0$.*

Teorema de Riemann-Lebesgue

7.7 Convergencia de las series de Fourier

La continuidad a trozos es una condición suficiente para poder calcular la serie de Fourier de una función según hemos visto en la sección anterior. Pero todavía seguimos escribiendo

$$f(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

porque aún no sabemos si la igualdad es cierta.

Para calcular la suma de una serie, hay que calcular el límite de la sucesión de sumas parciales. En este caso

$$s_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega_0 x},$$

y queremos ver qué ocurre cuando N tiende a ∞ . La forma de calcular este límite pasa por reescribir la suma parcial s_N como una integral. En este cálculo va a jugar un papel fundamental las funciones que se conocen como núcleos de Dirichlet. Antes de pasar a estudiar la convergencia de la serie de Fourier, veamos la definición y algunas propiedades de estas funciones.

Definición 7.27. Sea n un número natural. El núcleo de Dirichlet de orden n es la función D_n

Núcleo de Dirichlet

definida como $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{-ik\omega_0 x}$.

El núcleo de Dirichlet es una función periódica. Además

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{-ik\omega_0 x} \\ &= e^{in\omega_0 x} + e^{i(n-1)\omega_0 x} + \dots + e^{i\omega_0 x} + 1 + e^{-i\omega_0 x} + \dots + e^{-i(n-1)\omega_0 x} + e^{-in\omega_0 x} \end{aligned}$$

es una progresión geométrica. Estamos sumando $2n + 1$ términos empezando en $e^{in\omega_0 x}$ y con razón $e^{-i\omega_0 x}$. Su suma será

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{e^{in\omega_0 x}(1 - e^{-i\omega_0(2n+1)x})}{1 - e^{-i\omega_0 x}} \\ &= \frac{e^{in\omega_0 x} - e^{-i(n+1)\omega_0 x}}{1 - e^{-i\omega_0 x}} \quad (\text{multiplicamos y dividimos por } e^{\omega_0 x/2}) \\ &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\omega_0 x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega_0 x}}{e^{i\frac{1}{2}\omega_0 x} - e^{-i\frac{1}{2}\omega_0 x}} = \frac{\text{sen}((n+\frac{1}{2})\omega_0 x)}{\text{sen}(\frac{1}{2}\omega_0 x)}. \end{aligned}$$

Esto es cierto cuando $e^{-i\omega_0 x} \neq 1$ o, lo que es lo mismo, para $\omega_0 x \neq 2k\pi$ o $x \neq kT$, $k \in \mathbb{Z}$. Pero de la definición del núcleo de Dirichlet se obtiene directamente que $D_n(kT) = 2n + 1$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

También es fácil comprobar que D_n es una función par y se puede calcular su integral en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ sin problemas usando que $\int_{-T/2}^{T/2} e^{-ik\omega_0 x} dx = 0$, $\forall k \neq 0$. De hecho, la integral no depende de n :

$$\int_{-T/2}^{T/2} D_n(x) dx = \sum_{k=-n}^n \int_{-T/2}^{T/2} e^{-ik\omega_0 x} dx = \int_{-T/2}^{T/2} 1 dx = T. \tag{7.8}$$

Obsérvese que, como D_n es par, $\int_0^{T/2} D_n(x) dx = T/2$.

7.7.1 Condiciones de Dirichlet

Condiciones de Dirichlet

Definición 7.28. Una función T -periódica f se dice que verifica las *condiciones de Dirichlet* si en $[0, T]$ es continua salvo una cantidad finita de discontinuidades de salto y tiene un número finito de máximos y mínimos locales estrictos.

Teorema 7.29. (Dirichlet, Riemann) Sea f periódica con periodo T , derivable a trozos. Entonces la serie de Fourier es convergente y su suma es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{in\omega_0 t} = \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)].$$

En particular, si f es continua en t , $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{in\omega_0 t} = f(t)$.

Ejemplo 7.30. La función $f(x) = 1 + x + |x|$ en $]-\pi, \pi[$ es continua y derivable a trozos. Por tanto su serie de Fourier converge a f para cualquier $x \in]-\pi, \pi[$. ¿Qué ocurre en los extremos? El límite en π vale $2\pi + 1$, y el límite en $-\pi$ vale 1. Por tanto la serie de Fourier tiende a $\frac{1+2\pi+1}{2} = 1 + \pi$ en dichos puntos.

Una consecuencia directa del teorema anterior es que los coeficientes determinan la función.

Teorema de unicidad

Teorema 7.31. Sean f y g funciones periódicas con periodo T derivables a trozos. Si $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f = g$.

¿El final de la historia?

Durante mucho tiempo se pensó que la continuidad era una condición suficiente para la convergencia de una serie de Fourier. De hecho, hay algunos resultados un poco más generales que el Teorema 7.29. En 1873 Paul Du Bois-Reymond encontró una función continua y acotada cuya serie de Fourier no es convergente en el origen. Hubo que esperar hasta 1966 para resolver este problema. Carleson demostró que si f verifica que

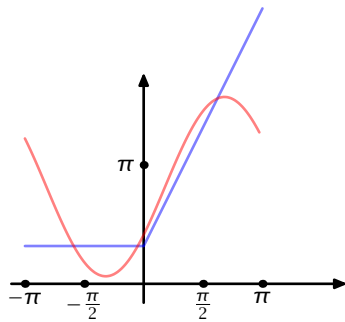
$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt < \infty \tag{7.9}$$

entonces su serie de Fourier converge salvo en un conjunto de medida cero. Al mismo tiempo, Kahane y Katznelson probaron que, dado un conjunto de medida cero arbitrario, es posible construir una función continua salvo en dicho conjunto y cuya serie de Fourier no es convergente en los puntos de dicho conjunto.

Si la función f no verifica (7.9), entonces la situación puede ser aún peor. En 1926 Andrei Kolmogorov construyó una función integrable, con cuadrado no integrable y cuya serie de Fourier no converge en ningún punto.

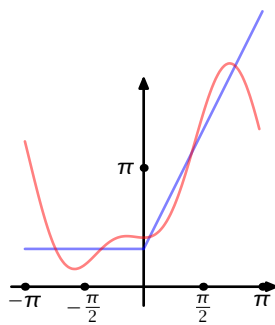
7.7.2 Una imagen vale más que mil palabras (I)

Consideremos la función real $f(x) = 1 + x + |x|$



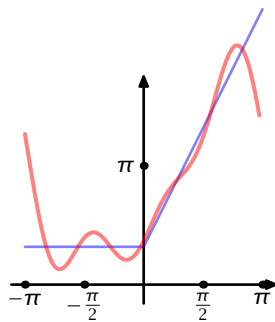
Su desarrollo de Fourier real hasta $n = 1$ es

$$1 + \frac{\pi}{2} - \frac{4 \cos(x)}{\pi} + 2 \operatorname{sen}(x)$$



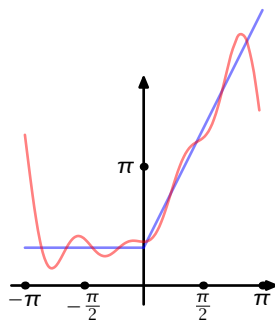
para $n = 2$

$$1 + \frac{\pi}{2} - \frac{4 \cos(x)}{\pi} + 2 \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(2x)$$



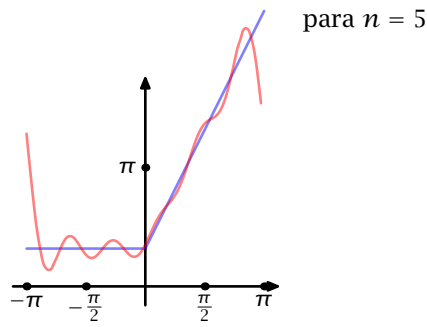
para $n = 3$

$$1 + \frac{\pi}{2} - \frac{4 \cos(x)}{\pi} + 2 \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(2x) - \frac{4}{9\pi} \cos(3x) + \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x)$$



para $n = 4$

$$1 + \frac{\pi}{2} - \frac{4 \cos(x)}{\pi} + 2 \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(2x) - \frac{4}{9\pi} \cos(3x) + \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(4x)$$



para $n = 5$

$$1 + \frac{\pi}{2} - \frac{4 \cos(x)}{\pi} + 2 \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(2x) - \frac{4}{9\pi} \cos(3x) + \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(4x) - \frac{4}{25\pi} \cos(5x) + \frac{2}{5} \operatorname{sen}(5x)$$

7.8 Otras propiedades

Convolución

Teorema 7.32. Sean f y g funciones periódicas con periodo T y derivables a trozos. Si $h(t) = f(t)g(t)$, entonces $\hat{h}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(n - k)$.

Convolución Definición 7.33. La convolución de dos funciones f y g , que denotaremos $f * g$, se define como

$$(f * g)(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t - x)g(x) dx.$$

Si las funciones f y g son periódicas con periodo T , entonces también lo es su convolución.

¿Cuál es el motivo de introducir este producto “raro” de funciones? El motivo es responder a una pregunta muy natural. Si c_n y d_n son los coeficientes de Fourier de dos funciones f y g , ¿qué se puede decir de $c_n d_n$?, ¿qué función, si es que existe alguna, tiene dichos coeficientes de Fourier? y ¿qué relación tiene con f y g ? La solución:

Teorema 7.34. Sean f y g funciones derivables a trozos, entonces

$$\widehat{(f * g)}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Identidad de Parseval

Vamos a ver que la desigualdad de Bessel es una igualdad en muchas ocasiones.

Identidad de Parseval Teorema 7.35. Sean f y g funciones T -periódicas derivables a trozos. Entonces

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\overline{g(t)} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}.$$

Corolario 7.36. Sea f una función T -periódica derivable a trozos. Entonces

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

Derivación

Teorema 7.37. Sea f una función periódica con periodo T derivable a trozos y continua. Supongamos además que f' es derivable a trozos. Entonces $\widehat{f'}(n) = in\omega_0\hat{f}(n)$ y, por tanto,

$$\frac{f'(t+) + f'(t-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\omega_0 \hat{f}(n) e^{in\omega_0 t}.$$

Integración

Teorema 7.38. Sea f una función periódica con periodo T derivable a trozos. Supongamos que $\hat{f}(0) = 0$. Entonces la función h definida como $h(t) = \int_{-T/2}^t f(x) dx$ es periódica con periodo T .

Además $h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{h}(n) e^{in\omega_0 t}$, donde

$$\hat{h}(n) = \begin{cases} \frac{\hat{f}(n)}{in\omega_0}, & \text{si } n \neq 0, \\ - \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n \hat{f}(n)}{in\omega_0}, & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

7.8.1 El fenómeno de Gibbs

Al igual que con el polinomio de Taylor, en la práctica utilizaremos únicamente una cantidad finita de términos de la serie de Fourier para aproximar una función. Cabe preguntarse cómo de rápida es la convergencia de los términos de la serie de Fourier a la función.

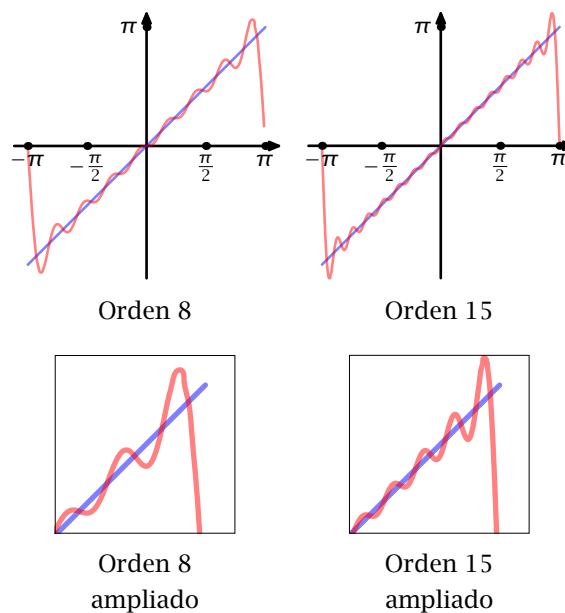


Ilustración 7.7 Serie de Fourier de $f(x) = x$

Veamos un caso concreto. Vimos en el Ejemplo 7.11 que la función $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$ tenía el siguiente desarrollo de Fourier:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(nx)$$

Utilizando el Teorema 7.29, se tiene que la serie es convergente en todos los puntos del intervalo abierto (la función es continua en esos puntos), esto es

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx), \quad \forall x \in]-\pi, \pi[$$

En la Figura 7.7 se puede ver como cerca de los puntos donde falla la continuidad, π y $-\pi$, las sucesivas aproximaciones dadas por la serie de Fourier siguen teniendo un error digno de tener en cuenta.

En 1898 Albert A. Michaelson y S. W. Stratton pusieron de manifiesto este hecho en la revista *Nature*: la convergencia de la serie no es buena cerca de los puntos de discontinuidad. Comprobaron el desarrollo de orden 160 de la serie de Fourier y aún había grandes diferencias entre la función y su serie. No hubo que esperar mucho tiempo para encontrar el motivo. La explicación la dio el profesor Josiah Willard Gibbs en la misma revista al año siguiente. Gibbs demostró que la amplitud de la oscilación tiende a ser $\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt \approx 0.089$ veces el tamaño del salto, o sea, aproximadamente un 9% del tamaño del salto.

7.9 Sumabilidad. Núcleos de Fejér.

Hemos visto que la convergencia de una serie de Fourier puede fallar en infinitos puntos en el caso de funciones continuas y, además, no olvidemos que tenemos el fenómeno de Gibbs. Ambos problemas se pueden subsanar considerando la convergencia en media. Este método se debe a Lipot Fejér.

Recordemos que dada una función $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, s_N denotaba las sumas parciales de la serie de Fourier, esto es

$$s_0(x) = \frac{1}{2}a_0, \quad y$$

$$s_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)].$$

Consideremos ahora la media aritmética de s_N :

$$\sigma_N(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_N(x)}{N+1} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N s_n(x)$$

Recordemos que teníamos una fórmula para calcular $s_N(x)$ por medio de los núcleos de Dirichlet:

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(t-x) dt$$

Obsérvese que si tomamos D_0 constantemente igual a uno entonces la igualdad también es cierta para $N = 0$. Por tanto

$$\begin{aligned} \sigma_N(x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_N(t-x) dt \end{aligned}$$

Núcleo de Fejér donde $F_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n$, se le suele llamar el *núcleo de Fejér*.

Teorema de Fejér **Teorema 7.39.** Sea $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Si f tiene límites laterales en x , entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

En particular, si f es continua en x , entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(x) = f(x)$. Además, si f es continua en $[-\pi, \pi]$, entonces $\{\sigma_N(x)\}$ converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

Una consecuencia fácil de esto es el siguiente resultado.

Corolario 7.40. Sean $f, g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas e integrables con la misma serie de Fourier. Entonces $f = g$.

Uno de los motivos por el que comenzamos a hablar de la convergencia en media y de los núcleos de Fejér era el fenómeno de Gibbs. No vamos a entrar en los detalles pero sí decir que *no* se presenta. En otras palabras la aproximación $\sigma_N(x)$ es más parecida a f que $s_N(x)$. Compruébalo tú mismo con alguna función.

7.9.1 Una imagen vale más que mil palabras (II)

Uno de los motivos para introducir la sumabilidad en lugar de la convergencia era el fenómeno de Gibbs. Ya habíamos visto cómo la convergencia de la serie de Fourier de la función $f(x) = 1 + x + |x|$ era buena con la excepción de los extremos. En la figura 7.8 se puede comprobar como la suma de las medias no presenta los problemas que tiene la serie de Fourier debido al fenómeno de Gibbs.

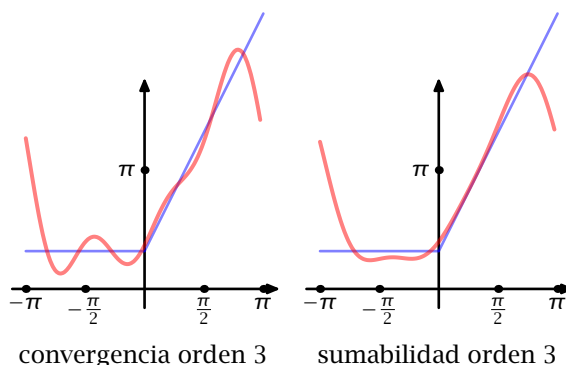


Ilustración 7.8 Sumabilidad y convergencia

7.10 Aplicaciones de las series de Fourier

7.10.1 La construcción de una bodega

El problema de la difusión del calor tuvo una gran importancia en el desarrollo de las series de Fourier. Estos trabajos no sólo tenían importancia teórica. Para ilustrar esto de una manera sencilla supongamos que queremos construir una bodega. ¿Cuál debería ser su profundidad para que la temperatura fuera la adecuada? ¿Cuál es la variación de la temperatura a lo largo del año? ¿Es posible que la temperatura permanezca constante a lo largo de las estaciones?

La propagación del calor no es inmediata. Un día caluroso no se traduce inmediatamente en una temperatura similar varios metros bajo tierra. Hasta pasado cierto tiempo (cambio de fase) no se alcanza un pico de temperatura en el interior. Piensa en un manantial de agua: no es difícil que ésta este fresca en verano a pesar del calor. Además también es creíble que los cambios de temperatura sean más débiles en el interior, que estén atenuados.

Si planteamos y resolvemos un modelo matemático (la ecuación del calor) podremos extraer algunas conclusiones. Se puede comprobar que la ola de calor alcanza una profundidad de 4.5 metros con un cambio de fase equivalente a seis meses: cuando en la superficie es verano, a 4.5 metros es invierno y viceversa. La atenuación es, aproximadamente, 1/16 de la variación que hay en la

superficie. Si la diferencia de temperatura entre invierno y verano es de 40° , la diferencia en el interior no llega a tres grados. ¿Cómo hemos obtenido estos datos?

Primero, a la hora de buscar un modelo hemos tenido que simplificar un poco la situación: hemos supuesto que la tierra es plana y que la temperatura a grandes profundidades no es importante, lo que no es demasiado suponer para la situación en la que estamos.

La temperatura vendrá dada por una función $u(x, t)$ que depende de dos variables: la profundidad x y el tiempo t . Suponemos conocida la temperatura en la superficie, esto es, $u(0, t) = f_0(t)$. La ecuación que modela este problema es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.10}$$

donde K es una constante que depende del tipo de suelo. Supondremos que la temperatura es una función periódica con periodo T igual a un año. Como siempre $\omega = 2\pi/T$ denotará la frecuencia angular. Usando el método de separación de variables hemos visto que la solución es

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\sqrt{\frac{n\omega}{2K}}x\right) \cos(n\omega t + \phi_n(x)),$$

donde $\phi_n(x) = \varphi_n - \sqrt{\frac{n\omega}{2K}}x$, y

$$f_0(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

Hemos expresado la solución como una suma infinita en la que los términos decrecen exponencialmente. Cuanto mayor sea n , menor será el valor del correspondiente sumando. Si sólo nos fijamos en el primer armónico y nos olvidamos del resto, el cambio de fase $\phi_1(x)$ y la atenuación $\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2K}}x\right)$ dependen de $\sqrt{\frac{\omega}{2K}}$. Para dar algún dato más concreto nos hace falta conocer K . Experimentalmente se determina y, por ejemplo, $K = 2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ para un suelo ordinario. T es $365 \times 24 \times 60 \times 60$ s. Para $x = 450$ cm obtenemos que el cambio de fase es aproximadamente π o, dicho de otra manera, la temperatura a dicha profundidad muestra un desfase de $\frac{T}{2}$ (medio año). El factor de atenuación es alrededor de $e^{-\pi} \approx 1/16$.

Si tomamos como T un día (24×3600 s) los resultados son algo distintos. Sigue existiendo un desfase de aproximadamente la mitad del periodo (medio día). En cambio, sólo es necesario llegar a una profundidad de 25 cm para que el coeficiente de atenuación sea 1/16. Esto quiere decir que los cambios diarios de temperatura apenas penetran en el terreno.

7.10.2 La desigualdad isoperimétrica

¿Cuál es la curva cerrada del plano que encierra un área mayor? Parece lógico pensar que es la circunferencia pero de ahí a demostrarlo hay un trecho. Veamos cómo podemos resolver este problema.

Consideremos una curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ cerrada, derivable y con derivada continua. La longitud de dicha curva es

$$L = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt.$$

Reparametrizando, podemos suponer que $L = 2\pi$ y que $|\gamma'(t)| = 1$. El área encerrada por la curva es

$$A = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \overline{\gamma(t)} \gamma'(t) dt.$$

Como y verifica las condiciones de Dirichlet, y coincide con su desarrollo de Fourier. Además, podemos suponer que $\hat{y}(0) = 0$. Si no, la curva $y - \hat{y}(0)$ es una traslación de la curva y y que, por tanto, tiene la misma longitud y encierra la misma área. Los coeficientes de Fourier de \bar{y} y de y' son fácilmente calculables:

$$\hat{y}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{y(t)} e^{-int} dt = \overline{\hat{y}(-n)},$$

y $\widehat{y'}(n) = in\hat{y}(n)$, según vimos en el Teorema 7.37. Por tanto,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{y}(-n)} e^{int} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} im\hat{y}(m) e^{imt} \right) dt \\ &= \pi \sum_{n \neq 0} n |\hat{y}(n)|^2. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$L = 2\pi = \int_0^{2\pi} dt = \int_0^{2\pi} |y'(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{n \neq 0} n^2 |\hat{y}(n)|^2.$$

Comparando término a término las dos igualdades, obtenemos la *desigualdad isoperimétrica*:

$$0 \leq \pi - A. \tag{7.11}$$

La igualdad se da si, y sólo si,

$$\sum_{n \neq 0} (n^2 - n) |\hat{y}(n)|^2 = 0,$$

o sea, si, y sólo si, $|\hat{y}(n)|^2 = 0$ para $n \neq 0, 1$. En ese caso, $y(t) = \hat{y}(1)e^{it}$, que es la circunferencia de radio $|\hat{y}(1)|$.

Proposición 7.41. Si y es una curva con longitud L que encierra un área A , entonces

Desigualdad isoperimétrica

$$4\pi A \leq L^2$$

y la igualdad se da si, y sólo si, y es una circunferencia.

Demostración. Aplicamos la discusión anterior a la curva $\sigma(t) = \frac{2\pi}{L} y(t)$ que tiene longitud 2π y encierra un área $A \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$. Por tanto, aplicando (7.11) tenemos que

$$0 \leq \pi - A \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2,$$

o, lo que es lo mismo, $4\pi A \leq L^2$. \square

7.10.3 El problema de Dirichlet en el disco unidad

El problema de Dirichlet en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ consiste en encontrar una función $u(x, y)$ con valores en \mathbb{R} que sea armónica en \mathbb{D} y que en la frontera, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, tome los valores

$$u(\cos(\theta), \text{sen}(\theta)) = U(\theta), \quad \forall \theta \in]-\pi, \pi]$$

Teorema 7.42. Si la función U es 2π -periódica y su serie de Fourier es

$$U(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt),$$

entonces la solución al problema de Dirichlet en \mathbb{D} es

$$u(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos(n\theta) + b_n r^n \operatorname{sen}(n\theta).$$

7.11 Ejercicios

Ejercicio 7.1

Comprobar que la definición de los coeficientes de Fourier se puede utilizar el intervalo $[0, T]$ en lugar de $[-T/2, T/2]$.

Solución 7.1

Ejercicio 7.2

Calcular la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución 7.2 Tomando $f(0) = 0$,

$$f(x) \approx \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$$

Ejercicio 7.3

Calcular la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ 3, & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

¿A qué converge la serie en 0?

Solución 7.3

$$f(x) \approx 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$$

En 0 converge a $\frac{1+3}{2} = 2$.

Ejercicio 7.4

Calcular la serie de Fourier en cosenos de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < h, \\ 0, & \text{si } h < x < \pi, \end{cases}$$

donde $h \in]0, \pi[$.

Solución 7.4

$$f(x) \approx \frac{2h}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nh)}{nh} \cos(nx) \right]$$

Ejercicio 7.5

Calcular la serie de Fourier en senos de la función $f(x) = x(\pi - x)$, $\forall x \in [0, \pi]$. Usar este desarrollo para calcular la suma

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \dots$$

Solución 7.5

$$f(x) \approx \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

Tomando $x = \frac{\pi}{2}$, se tiene que la suma vale $\frac{\pi^3}{32}$.

Ejercicio 7.6

Sea h un número entre 0 y π . Calcular la serie de Fourier en senos de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ \frac{2h-x}{2h}, & \text{si } 0 < x < 2h \\ 0, & \text{si } 2h < x < \pi \end{cases}$$

Solución 7.6

$$f(x) \approx \frac{2h}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\text{sen}(nh)}{nh} \right)^2 \cos(nx) \right]$$

Ejercicio 7.7

Calcular la serie de Fourier en senos de la función $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, $\forall x \in [0, \pi]$.

Solución 7.7

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2nx)}{2n}$$

Ejercicio 7.8

Calcular la serie de Fourier en cosenos de la función $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, $\forall x \in [0, \pi]$.

Solución 7.8

$$f(x) \approx \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

Ejercicio 7.9

Calcular la serie de Fourier en senos de la función $f(x) = x^2, \forall x \in [0, \pi]$.

Solución 7.9

$$f(x) \approx \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} ((-1)^n - 1) \right] \text{sen}(nx)$$

Ejercicio 7.10

Demostrar que

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

¿Qué series se obtienen cuando tomamos $x = \pi$ o $x = -\pi$?

Solución 7.10

falta

Ejercicio 7.11

Calcular la serie de Fourier de la función 2π -periódica $f(x) = x^2, \forall x \in [0, 2\pi]$.

Solución 7.11

$$f(x) \approx \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n}$$

Ejercicio 7.12

Calcular la serie de Fourier de la función $|\text{sen}(x)|$ en $[-\pi, \pi]$ y demostrar que converge en cualquier punto de dicho intervalo. Utilizar esto para probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}$$

Solución 7.12 *falta***Ejercicio 7.13**

Utilizar las series de Fourier de las funciones x^2, x^4 y $x^3 - \pi^2 x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ para probar que

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

Solución 7.13 falta

Transformada de Fourier

8

8.1 Origen histórico de la transformada de Fourier

El trabajo de Fourier que hemos comentado en el capítulo anterior acabó plasmado en la memoria “*Mémoire sur la propagation de la chaleur*” (1807) y en una versión extendida, “*Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*”, que presentó en 1812 al Instituto de Francia (algo así como la Academia de las Ciencias) para participar en un concurso sobre el estudio del calor. Premio que, por cierto, consiguió.

En dichos trabajos, Fourier se plantea estudiar el problema de la difusión del calor en una barra ideal de longitud infinita. Para resolver este problema, en lugar de una serie de coeficientes, aparece una función a determinar dentro de una integral relacionada con las condiciones iniciales del sistema. Esa función es lo que hoy conocemos como *transformada de Fourier*.

La transformada de Fourier fue “redescubierta” un poco más tarde por Cauchy y Poisson estudiando el movimiento de un fluido. Ambos estudiaban ecuaciones del tipo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (8.1)$$

lo que se suele llamar *ecuación de Laplace* o *ecuación del potencial* porque, en su versión para dimensión tres, fue estudiada por Laplace para resolver problemas relacionados con la atracción gravitacional y la forma de los planetas. Este tipo de ecuaciones ya habían aparecido en trabajos de Euler y Lagrange. Por ejemplo, Lagrange la había utilizado para estudiar la propagación de una onda en una capa de agua. También tienen relación con la propagación del calor, de la electricidad o con el magnetismo.

Ecuación de Laplace

La ecuación (8.1) modela la propagación de ondas en una capa fina de agua si además suponemos que el líquido es homogéneo (tiene la misma densidad en todos sus puntos), incomprensible (la densidad no cambia con el tiempo) y que el trabajo necesario para llevar una partícula de un lugar a otro es independiente del camino elegido (lo que se suele expresar diciendo que la velocidad es un campo conservativo).

Veamos con un ejemplo cómo la búsqueda de funciones armónicas verificando unas determinadas condiciones en la frontera está relacionada con la transformada de Fourier. Consideremos el *problema de Dirichlet* en un semiplano. Más concretamente, sea

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \quad \text{y} \quad \bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}.$$

Queremos encontrar una función $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en \bar{D} , de clase C^2 en D , armónica en D , esto es,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (8.2)$$

y que verifique

$$u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (8.3)$$

donde f es una función continua y acotada dada.

Para resolver este problema, usaremos el método de separación de variables como en el caso de la ecuación del calor. Supongamos que existe una solución $u(x, y)$ de la forma $F(x)G(y)$. Entonces, sustituyendo en la ecuación (8.2) se tiene que

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G}.$$

Como la parte de la izquierda sólo depende de x y la de la derecha sólo depende de y , la única posibilidad es que ambas sean constantes:

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = -\lambda,$$

de donde

$$F'' + \lambda F = 0, \quad G'' - \lambda G = 0.$$

Si $\lambda < 0$, las soluciones de F no son acotadas. Para $\lambda = 0$, las únicas soluciones acotadas son las constantes. Por último, si λ es positivo, la solución general de F y G es

$$F(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x), \quad G(y) = ce^{\sqrt{\lambda}y} + de^{-\sqrt{\lambda}y}$$

donde a, b, c y d son constantes.

Para que la solución sea acotada en y , tenemos que tomar $c = 0$, con lo que podemos escribir la solución general de la forma

$$u(x, y) = F(x)G(y) = e^{-\sqrt{\lambda}y} [A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}y)]$$

Si notamos $\omega = \sqrt{\lambda}$, las soluciones acotadas son de la forma

$$u(x, y) = F(x)G(y) = e^{-\omega y} [A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \operatorname{sen}(\omega y)],$$

donde $A(\omega), B(\omega)$ indica que tenemos un par de constantes para cada valor de ω mayor o igual que cero.

Al igual que en la ecuación del calor, la suma de soluciones de este tipo sigue verificando la ecuación (8.2) pero en este caso tenemos un continuo de soluciones en lugar de una cantidad numerable. Por esto la solución más general será de la forma

$$\int_0^{+\infty} e^{-\omega y} [A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \operatorname{sen}(\omega x)] d\omega \quad (8.4)$$

en lugar de una suma.

8.2 Definición de la transformada de Fourier

Sea $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ una función 2π -periódica, continua a trozos y con derivada a trozos. Sabemos que podemos expresar f como suma de senos y cosenos. También podemos expresar f como una *serie de Fourier compleja* de la siguiente forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

donde $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$.

Los coeficientes c_n son, en general, números complejos, pero usando el desarrollo en senos y cosenos podemos establecer fácilmente una relación. Sabíamos que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)). \tag{8.5}$$

Usando la definición de la exponencial compleja:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (\cos(nx) - i \operatorname{sen}(nx)) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(c_n + c_{-n}) \cos(nx) + i(c_n - c_{-n}) \operatorname{sen}(nx)]. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Si comparamos las ecuaciones (8.5) y (8.6), se tiene que

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad \text{y} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Si cambiamos a una función $2L$ -periódica definida en el intervalo $[-L, L]$, entonces la serie de Fourier compleja asociada a f sería

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{i\pi n x}{L}}$$

Para representar una función que no sea periódica, vamos a calcular su representación en $[-L, L]$ y después haremos tender L a ∞ . Intuitivamente, vamos a considerar una función no periódica como una función periódica de periodo infinito. El resultado es lo siguiente:

Definición 8.1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Si la siguiente integral existe, entonces la función $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

se llama *transformada de Fourier* de f . La integral

Transformada de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

se llama la *integral de Fourier* de f .

Ejemplo 8.2. Sea $\delta > 0$. Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < \delta, \\ 0, & \text{si } |x| \geq \delta. \end{cases}$$

Dado $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \cos(\omega x) - i \operatorname{sen}(\omega x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \cos(\omega x) dx = \frac{\operatorname{sen}(\omega\delta)}{\pi\omega}. \end{aligned}$$

Ejemplo 8.3. Dado $a \in \mathbb{R}$, calcular la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-|x|^a}$.

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|a} e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(i\omega+a)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-(i\omega-a)x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{i\omega+a} - \frac{1}{i\omega-a} \right) = \frac{a}{\pi(\omega^2+a^2)}.\end{aligned}$$

Observación 8.4. Si se consultan diferentes textos puede parecer en principio que existen multitud de definiciones de la transformada de Fourier pero, en realidad, sólo se diferencian en constantes.

Teorema de inversión

Teorema 8.5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable a trozos. Entonces

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

En particular, si f es continua en x , se tiene que $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$.

8.3 Propiedades de la transformada de Fourier

Linealidad

Proposición 8.6. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con transformadas de Fourier $\mathcal{F}[f]$ y $\mathcal{F}[g]$. Supongamos además que $a, b \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\mathcal{F}[(af + bg)] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g].$$

Traslación en el tiempo

Proposición 8.7. Sea f una función con transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$ y sea $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{F}[f(x - a)](\omega) = e^{-i\omega a} \mathcal{F}[f](\omega).$$

Dilatación en el tiempo

Proposición 8.8. Sea f una función con transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$ y sea $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{F}[f(ax)](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

En particular, $\mathcal{F}[f(-t)](\omega) = \mathcal{F}[f](-\omega)$.

Traslación en frecuencia

Proposición 8.9. Sea f una función con transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$, entonces

$$\mathcal{F}[e^{iat} f(t)] = \mathcal{F}[f](\omega - a).$$

En el caso particular de funciones pares o impares, las integrales que definen la transformada de Fourier se pueden simplificar un poco.

Proposición 8.10.

a) Sea f una función par, entonces $\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$.

b) Si f es una función impar, entonces $\mathcal{F}[f](\omega) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$.

Proposición 8.11. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$. Supongamos además que $a \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces la transformada de Fourier de

a) $f(x) \cos(\alpha x)$ es $\frac{\mathcal{F}[f](\omega - \alpha) + \mathcal{F}[f](\omega + \alpha)}{2}$,

b) $f(x) \sin(\alpha x)$ es $\frac{\mathcal{F}[f](\omega - \alpha) - \mathcal{F}[f](\omega + \alpha)}{2i}$.

Teorema 8.12. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e integrable en \mathbb{R} . Supongamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Entonces, si f' es continua a trozos e integrable, se tiene que $\widehat{f'}(\omega) = i\omega \mathcal{F}[f](\omega)$.

Corolario 8.13. Si f, f', f'', \dots verifican las hipótesis del Teorema 8.12, entonces

$$\widehat{f^{(n)}}(\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega).$$

Transformada de la derivada

Ejemplo 8.14. Veamos cómo podemos aplicar la transformada de Fourier para resolver algunas ecuaciones diferenciales. Consideremos la ecuación diferencial

$$-y'' + y = f.$$

Supongamos que todas las funciones que aparecen tienen su transformada de Fourier. Entonces

$$\omega^2 \widehat{y}(\omega) + \widehat{y}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega),$$

de donde se deduce que

$$\widehat{y}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \frac{1}{\omega^2 + 1}$$

Del Ejemplo 8.3, sabemos que la transformada de Fourier de $g(x) = \pi e^{-|x|}$ es $\frac{1}{\omega^2 + 1}$. Por tanto, $\widehat{y} = \mathcal{F}[f] \widehat{g}$ donde f y g son conocidas. Veremos en la próxima sección cómo podemos “recuperar” y desde f y g .

Teorema 8.15. Sea f una función con cuadrado integrable (energía finita). Entonces su transformada también tiene energía finita y de hecho

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\omega)|^2 d\omega.$$

Identidad de Parseval

8.4 Convolución de funciones

Definición 8.16. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrables. Se define la *convolución* de f y g como

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x - s) ds \tag{8.7}$$

para todos aquellos $x \in \mathbb{R}$ para los que la integral tenga sentido.

Puede parecer una definición un poco extraña en principio, pero, tengamos en cuenta que buscamos un “producto” de funciones que respete la transformada de Fourier. Haciendo un poco de trampa:

$$\begin{aligned}
(f * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega s} d\omega \right) g(x-s) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)g(x-s)e^{i\omega s} d\omega \right) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)g(x-s)e^{i\omega s} d\omega \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} g(x-s)e^{i\omega s} ds \right) d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{i\omega(x-t)} dt \right) d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)e^{i\omega x} d\omega \\
&= \widehat{(f * g)}(x)
\end{aligned}$$

Teorema 8.17. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrables y una de las dos continua a trozos. Entonces

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}.$$

Proposición 8.18. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrables. Entonces

- a) $f * g = g * f$, y
b) $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Proposición 8.19. Consideremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua a trozos. Entonces existe $f * g$ en todo \mathbb{R} y es continua.

Ejemplo 8.20. Vamos a continuar con la solución de la ecuación diferencial que empezamos en el Ejemplo 8.14. La solución y debía verificar $\hat{y} = \hat{f}\hat{g}$. Por tanto, la solución será

$$y(x) = (f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s) ds = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-|x-s|} ds.$$

Esto que hemos hecho para “resolver” la ecuación diferencial, lo podemos hacer en otros casos:

- Hacemos la transformada de Fourier de las ecuaciones diferenciales,
- resolvemos las ecuaciones resultantes y obtenemos la transformada de Fourier de las incógnitas,
- calculamos la solución a partir de su transformada de Fourier, y
- deberíamos comprobar que, en efecto, es solución de la ecuación diferencial.

De estos cuatro pasos, los dos primeros suelen ser fáciles y la dificultad estriba, normalmente, en calcular la transformada inversa y en comprobar que de hecho es solución. El tercer paso se suele realizar con ayuda de tablas de transformadas de Fourier.

8.5 Ejercicios

Ejercicio 8.1

Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Como consecuencia, obtener la transformada de Fourier de la función

$$\Pi_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq a/2, \\ 0, & \text{si } |x| > a/2. \end{cases}$$

Solución 8.1 FALTA

Ejercicio 8.2

Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Solución 8.2 FALTA

Ejercicio 8.3

Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 < x < 1, \\ -1, & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Solución 8.3 FALTA

Ejercicio 8.4

Calcular la transformada de Fourier de la función $f(x) = \frac{1}{1+\pi ix}$.

Solución 8.4 FALTA

Ejercicio 8.5

Calcular la transformada de Fourier de la función $f(x) = 2xe^{-x^2}$.

Solución 8.5 FALTA

Ejercicio 8.6

Calcular la transformada de Fourier de la función que tiene como gráfica

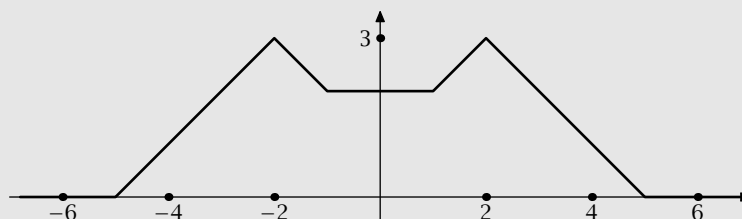


Ilustración 8.1

Solución 8.6 FALTA

Ejercicio 8.7

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular la transformada de Fourier de las siguientes funciones.

- a) $f(t) = e^{-a|t|}$,
- b) $f(t) = e^{-a|t|} \operatorname{sen}(bt)$,
- c) $f(t) = e^{-a|t|} \operatorname{cos}(bt)$

Solución 8.7 FALTA

Transformada de Laplace

9

9.1 Definición

Algunas de las funciones elementales, como las constantes, la exponencial o los senos y cosenos, no tienen transformada de Fourier ya que no son integrables en \mathbb{R} . Existe una manera “simple” de arreglar esto: multiplicamos la función por otra de forma que el producto sea integrable, transformamos el producto y luego “arreglamos” la fórmula para invertir el proceso. Esto, que será la transformada de Laplace, se suele aplicar a procesos que dependen del tiempo. Es por ello que todas las funciones que vamos a considerar estarán definidas en $[0, +\infty[$. En el caso de las funciones usuales consideraremos su extensión por cero en los negativos. Por ejemplo, cuando hablemos de la función $f(t) = t^2$ nos estaremos refiriendo a

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ t^2, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Para conseguir una función que sea integrable en \mathbb{R}_0^+ , necesitamos una función que esté cerca de cero. De las funciones elementales la que tiene crecimiento más rápido es la exponencial. Lo que vamos a hacer es dividir por ella para conseguir una función pequeña, esto es, consideraremos funciones del tipo $f(t)e^{-\sigma t}$. En el caso que teníamos, $f(t) = t^2$, obtenemos una función integrable siempre que σ sea positivo. A este producto ya sí le podemos calcular su transformada de Fourier:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t} dt$$

Tomando t como variable y notando s a $\sigma + i\omega$, tenemos la definición de la transformada de Laplace.

Definición 9.1. Sea $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ verificando que $f(t)e^{-\sigma t}$ es integrable para algún valor $\sigma \in \mathbb{R}$. Entonces la función $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

Transformada de Laplace

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

con dominio $D_F = \{s \in \mathbb{C} : f(t)e^{-st} \text{ es integrable}\}$ se llama la *transformada de Laplace* de f . También se suele notar $\mathcal{L}\{f\}$ o $\mathcal{L}[f]$. Al operador \mathcal{L} lo llamaremos *transformación de Laplace*.

Ejemplo 9.2. Sea $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(t) = a$, donde $a \in \mathbb{C}$. Entonces

$$F(s) = \int_0^\infty ae^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{ae^{-st}}{-s} \right]_0^b = \frac{a}{s},$$

siempre que $\text{Re}(s) > 0$. En particular $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$.

Ejemplo 9.3. Sea $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(t) = e^{at}$, con $a \in \mathbb{C}$. Entonces

$$F(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^b = \frac{1}{s-a}$$

si $\text{Re}(s) > \text{Re}(a)$.

Parece natural buscar condiciones que nos garanticen la existencia de la integral. No es difícil encontrar ejemplos de funciones para los que la integral no tiene sentido.

Ejemplo 9.4. La función $f(t) = e^{t^2}$ no tiene transformada de Laplace puesto que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = \infty$$

y, por tanto $f(t)e^{-\sigma t}$ no es integrable para ningún valor de σ .

Este ejemplo y los comentarios que lo preceden son el motivo por el que sólo vamos a trabajar con funciones tales que al multiplicarlas por $e^{-\sigma t}$ obtengamos funciones integrables. Estas funciones cumplen que crecen más despacio que una exponencial.

Definición 9.5. Diremos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (que se anula en los negativos) tiene *crecimiento exponencial* si existen números reales $M > 0$ y K tales que

$$|f(t)| \leq Me^{Kt}, \quad \forall t.$$

El siguiente teorema resuelve el problema de obtener la función f a partir de su transformada de Laplace.

Fórmula de inversión

Teorema 9.6. Sea $f \in \mathcal{L}$ con transformada de Laplace F , continua y derivable a trozos. Sea σ un número real tal que $f(t)e^{-\sigma t}$ es integrable en \mathbb{R}_0^+ . Entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + i\omega)e^{(\sigma+i\omega)t} d\omega = \frac{1}{2} (f(t+) + f(t-)). \quad (9.1)$$

En particular, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + i\omega)e^{(\sigma+i\omega)t} d\omega = f(t)$ en cualquier punto t donde f sea continua.

El nombre de transformada de Laplace se debe a que casos particulares de la definición aparecen en el libro “Théorie analytique des probabilités” publicado en 1812 por Laplace. Sin embargo su uso generalizado debe esperar un siglo hasta que, a finales del siglo XIX, el ingeniero eléctrico Olivier Heaviside la empieza a utilizar para resolver algunas ecuaciones diferenciales relacionadas con transmisiones telegráficas a larga distancia. Antes de ver un ejemplo, comentemos la propiedades básicas de la transformada de Laplace.

9.2 Propiedades de la transformada de Laplace

Linealidad **Proposición 9.7.** Sean $f, g \in \mathcal{L}$ con transformadas de Laplace $\mathcal{L}[f]$ y $\mathcal{L}[g]$ respectivamente, y a y b dos constantes. Entonces $\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$.

Unicidad **Proposición 9.8.** Sean $f, g \in \mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$, entonces $f = g$.

Traslación en el eje t

Proposición 9.9. Sea f una función con transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$ y $a > 0$, entonces

$$\mathcal{L}[f(t-a)H(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f],$$

donde H denota la función de Heaviside.

Dilatación en el eje t

Proposición 9.10. Sea f una función con transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$, entonces

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right).$$

Traslación en el eje s

Proposición 9.11. Sea f una función con transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$, entonces

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \mathcal{L}[f](s - a).$$

Proposición 9.12. Sea f una función con transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$, entonces

Dilatación en el eje s

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right).$$

Proposición 9.13. Sea f una función con transformada $\mathcal{L}[f]$, entonces f' tiene transformada de Laplace

Transformada de la derivada

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

Repitiendo el proceso obtenemos la transformada de Laplace de la derivada segunda, tercera, ... En general, se tiene que la transformada de Laplace de la derivada n -ésima es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] &= s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots \\ &\quad - s^2 f^{(n-3)}(0) - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Proposición 9.14. Si g es una función continua, $\mathcal{L}\left[\int_0^t g(x) dx\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[g(t)]$.

Transformada de una primitiva

Ejemplo 9.15. La linealidad de la transformada de Laplace, primera propiedad que hemos enunciado, nos permite calcular la transformada de Laplace de las funciones $1, t, t^2, \dots, t^n$ y, a partir de estas, la de cualquier polinomio.

Transformada de Laplace de polinomios

- a) La transformada de Laplace de $f(t) = 1$ ya la habíamos sabido: $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$. Esto se deduce de la definición o usando la transformada de la derivada. Como $f'(t) = 0$, $\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$, de donde $0 = s\mathcal{L}[f(t)] - 1$.
- b) Si $f(t) = t$, entonces $f'(t) = 1$. Aplicando de nuevo la fórmula de la transformada de la derivada, se tiene que

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \implies \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}.$$

- c) Por inducción se puede demostrar que $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

9.2.1 Transformada Laplace de funciones trigonométricas e hiperbólicas

El cálculo de la transformada de Laplace de funciones trigonométricas o hiperbólicas es fácil teniendo en cuenta que estas funciones están definidas usando la función exponencial y su transformada (véase Ejemplo 9.3).

Función f	Transformada $\mathcal{L}[f]$
$f(t) = \text{sen}(at)$	$\mathcal{L}[f] = \frac{a}{s^2 + a^2}$
$f(t) = \text{cos}(at)$	$\mathcal{L}[f] = \frac{s}{s^2 + a^2}$
$f(t) = \text{senh}(at)$	$\mathcal{L}[f] = \frac{a}{s^2 - a^2}$
$f(t) = \text{cosh}(at)$	$\mathcal{L}[f] = \frac{s}{s^2 - a^2}$

Tablas 9.1 Transformada de Laplace

Ejemplo 9.16. Calcular la transformada de Laplace de $f(t) = \text{senh}(at)$, donde $a \in \mathbb{C}$. Como $f(t) = (e^{at} - e^{-at})/2$, el Ejemplo 9.3 nos da que

$$F(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{a}{s^2-a^2}.$$

9.2.2 Convolución

La convolución de funciones nos permite relacionar la transformada del producto con el producto de funciones. La definición de convolución de funciones para la transformada de Laplace nos proporciona un resultado similar al que teníamos para la transformada de Fourier.

Convolución
de funciones

Proposición 9.17. Sean $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g], \text{ donde}$$

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x) dx$$

es el producto de convolución de f y g .

9.3 Ejemplos y aplicaciones

La utilidad principal de la transformada de Laplace se encuentra en la resolución de problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. La transformada de Laplace transforma una ecuación diferencial de este tipo en una ecuación algebraica. Una vez resueltas estas, la transformada inversa nos da la solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo 9.18. Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' - y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos en ambos miembros por e^{-st} y, supongamos que $y(t)e^{-st}$ y $y'(t)e^{-st}$ tienden a cero en $+\infty$ y son integrables. Si Y denota la transformada de Laplace de y , aplicando integración por partes se obtiene que

$$\int_0^{\infty} y'(t)e^{-st} dt = [y(t)e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt = -y(0) + sY(s) = sY(s)$$

$$\int_0^{\infty} y''(t)e^{-st} dt = [y'(t)e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} y'(t)e^{-st} dt = -y'(0) + s^2Y(s) = s^2Y(s)$$

Por tanto, nuestro problema se transforma en

$$s^2Y(s) - Y(s) = \mathcal{L}(1)(s)$$

En consecuencia, $Y(s) = \frac{1}{s^2-1} \mathcal{L}(1)(s)$. Usando el Ejercicio 9.2, $\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}$, con lo que

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2-1)s} = \frac{1/2}{s-1} + \frac{1/2}{s+1} - \frac{1}{s}.$$

Usando ahora el Ejemplo 9.3,

$$y(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1 = \cosh(t) - 1.$$

9.4 Ejercicios

Ejercicio 9.1

Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

- a) $f(t) = (3 + t^2)^4$,
- b) $f(t) = (2 + e^{2t})^3$,
- c) $f(t) = t^2 e^{3t}$,
- d) $f(t) = t \cos(5t)$,
- e) $f(t) = t^2 \operatorname{sen}(t)$.

Solución 9.1 FALTA

Ejercicio 9.2

Calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 3, \\ 1, & \text{si } 3 < t < 5, \text{ y} \\ t, & \text{si } t > 5. \end{cases}$$

Solución 9.2 FALTA

Ejercicio 9.3

Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = \int_0^t x \cosh(x) dx$.

Solución 9.3 FALTA

Ejercicio 9.4

Calcular la transformada inversa de la función $f(t) = \frac{1}{(s+2)(s-3)}$.

Solución 9.4 FALTA

Ejercicio 9.5

Calcular la transformada inversa de la función $f(t) = \frac{1}{s^2+2}$.

Solución 9.5 FALTA

Ejercicio 9.6

Resolver la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ usando la transformada de Laplace.

Solución 9.6 FALTA

Ejercicio 9.7

Resolver la ecuación diferencial $y'' - y' + 6y = H(t)$ con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ usando la transformada de Laplace, donde H denota la función de Heaviside.

Solución 9.7 FALTA

Ejercicio 9.8

Resolver la ecuación integral $f(t) = t - t^2 + \int_0^t f(x) dx$ usando la transformada de Laplace.

Solución 9.8 Tomando transformadas se tiene que

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[t] - \mathcal{L}[t^2] + \mathcal{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right] \Rightarrow \mathcal{L}[f] = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^3} + \frac{\mathcal{L}[f]}{s}$$

Transformada discreta de Fourier

10

En este capítulo vamos a introducir una herramienta muy útil para analizar fenómenos que provienen de procesos discretos como, por ejemplo, los que proceden del procesamiento de señales digitales. La transformada discreta de Fourier y su implementación computacional, conocida como FFT (*Fast Fourier Transform*), es uno de los conceptos matemáticos que más han influido en la vida cotidiana. Sus aplicaciones incluyen campos como los CD, la mecánica aplicada, acústica, análisis de imágenes (tomografía), análisis sísmográfico, procesamiento digital de señales, radares, etc.

En los capítulos anteriores hemos visto como se pueden calcular transformadas de señales en tiempo “continuo”. Sin embargo, en la práctica hay muchas situaciones en las que sólo conocemos los valores de la señal en algunos instantes. Cuando tenemos una cantidad limitada de datos de una señal lo que primero que debemos tener en cuenta es que podemos estar perdiendo parte de la información. Si la cantidad de datos es lo suficientemente alta esto no será un problema; la dificultad será otra: encontrar formas y métodos para procesar dichos datos con rapidez. En este aspecto, el desarrollo de microprocesadores cada vez más veloces y, por otro lado, de mejores algoritmos ha jugado un papel decisivo. A consecuencia de esto las aplicaciones del procesado digital de señales se han extendido a todos los campos ya citados.

En este capítulo veremos en primer lugar como discretizar una señal continua sin perder “demasiada” información. En segundo lugar aprenderemos a trabajar con señales discretas y, para acabar, comentaremos brevemente la FFT: una implementación muy eficiente de la transformada de Fourier de señales discretas.

10.1 Muestreo de señales continuas

Vamos a comenzar pasando de señales continuas a señales discretas y viceversa. Veremos cómo debe ser el muestreo para que se pierda información en el paso de un tipo de señal al otro.

El ejemplo más sencillo de como obtener una señal discreta (en el tiempo) es el siguiente: partimos de una señal continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y un número positivo T , consideremos

$$f[n] := f(nT), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Simplemente lo que estamos haciendo es quedarnos con los valores de f en $\dots, -2T, -T, 0, T, 2T, \dots$. A esto es lo que se suele llamar un *muestreo* de f , T es el *período* de muestreo y $w_s = 2\pi/T$ *frecuencia* de muestreo.

Veamos un ejemplo: consideremos la señal $f(t) = \text{sen}(8t)$.

Si tomamos $w_s = 8$, entonces

$$f[n] = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{8} 8n\right) = \text{sen}(2\pi n) = 0, \quad \forall n.$$

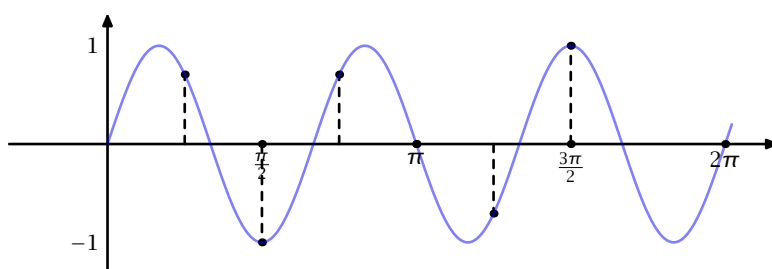


Ilustración 10.1 Muestreo de una señal continua

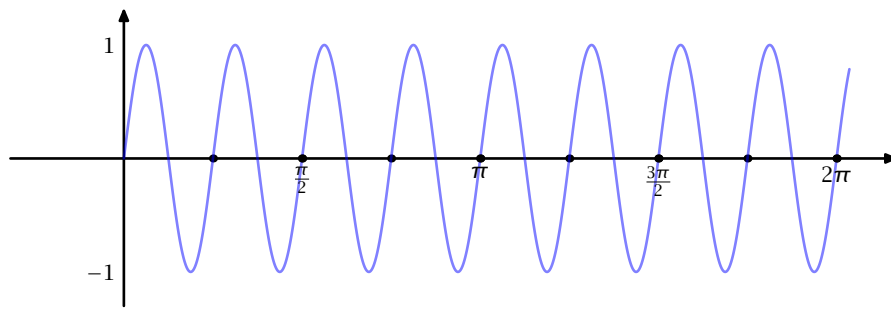


Ilustración 10.2 $w_s = 8$

Si tomamos $w_s = 64$ (REPASARLO!!!!)

$$f[n] = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{64}8n\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi n}{4}\right), \forall n.$$

Por último, si tomamos $w_s = e$, se tiene

$$f[n] = \text{sen}\left(\frac{2\pi n}{e}\right), \forall n.$$

Obsérvese que el muestreo de una señal periódica puede dar como resultado una señal discreta periódica o no.

Definición 10.1. Llamaremos *pulso unidad* a la señal discreta

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ 0, & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

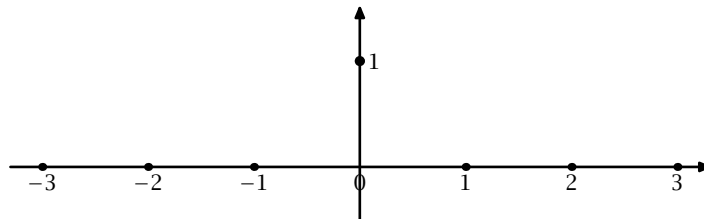


Ilustración 10.3 Pulso unidad

Observación 10.2. Dada una señal discreta $f[n]$, se cumple que

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]\delta[n - k], \forall n \in \mathbb{Z}$$

Dicho de otra manera, cualquier señal discreta se puede escribir como superposición de trasladados de pulsos unidad.

Ejemplo 10.3. Consideremos la señal discreta

$$f[n] = \begin{cases} 3, & \text{si } n = 0, \\ 1, & \text{si } n = 1, \\ -2, & \text{si } n = 2, \\ 0 & , \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $f[n] = 3\delta[n] + \delta[n - 1] - 2\delta[n - 2]$.

Si queremos trabajar con funciones periódicas nos serán de gran utilidad las siguientes funciones.

Definición 10.4. Sea $N \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\delta_N[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es múltiplo de } N, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

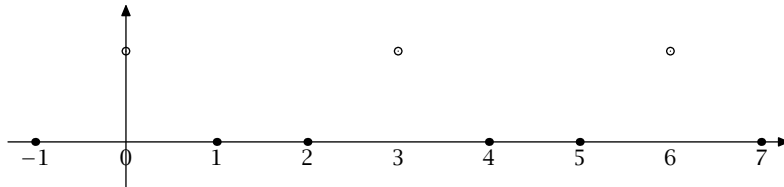


Ilustración 10.4 δ_3

Observación 10.5. Si $f[n]$ es una señal discreta periódica con período N . Entonces

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] \delta_N[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 10.6. La señal

$$f[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ 0, & \text{si } n = 1, \\ -1, & \text{si } n = 2, \\ 0, & \text{si } n = 3 \end{cases}$$

Definición 10.7. La señal *salto unidad*:

$$\epsilon[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n \geq 0, \\ 0, & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

es un ejemplo de señal causal.

10.1.1 Ejercicios

Ejercicio 10.1

Dibuja la gráfica de la señal $f[n] = 2\delta_4[n - 1] + \epsilon[n + 1]$.

Ejercicio 10.2

Sea $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$. Demuestra que $f[n] = z^n$ es periódica.

10.2 Reconstrucción de una señal

El muestreo de una señal continua nos deja con una señal discreta. Es evidente que en este proceso se puede perder parte de la información original. En esta sección vamos a estudiar como podemos reconstruir la señal primitiva.

Hay muchos métodos de reconstrucción. Quizá el más sencillo sea la interpolación lineal: construimos una función continua que coincida en los puntos $(nT, f[n])$ uniendo mediante rectas dichos puntos.

La reconstrucción de señales mediante interpolación lineal se puede escribir fácilmente como superposición de pulsos triangulares. Esto es consecuencia de que sabíamos escribir una señal discreta como superposición de trasladados del pulso unidad. Recordemos que

$$\delta[n - k] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = k, \\ 0, & \text{si } n \neq k, \end{cases}$$

y, utilizando interpolación lineal:

$$q_T[n - k] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = k, \\ 0, & \text{si } n \neq k, \end{cases}$$

MENTIRA!!!!!!!!!! + DIBUJO!!!!!!!!!!

Sabíamos que

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]\delta[n - k]$$

y es de esperar que la operación de interpolar nos de

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]q_T(t - kT).$$

En efecto, este resultado es cierto.

Teorema 10.8. Sea $f[n]$ un muestreo de $f(t)$ con período de muestreo T y sea $g(t)$ la señal obtenida de $f[n]$ mediante interpolación lineal. Entonces

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]q_T(t - kT).$$

De lo que hemos visto hasta ahora, sabemos que la interpolación lineal puede ser una buena aproximación si la frecuencia de muestreo es suficientemente alta. En cualquier caso, es posible que esta aproximación no sea tan buena en los puntos de la forma $t = nT$. Los cambios bruscos de dirección añaden frecuencias altas a la reconstrucción que la señal original no tiene porqué tener.

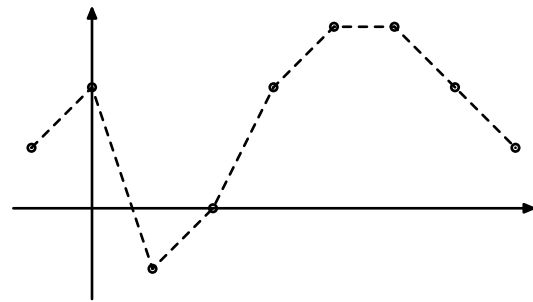


Ilustración 10.5 Interpolación lineal

10.3 El Teorema de Shannon

Definición 10.9. Una señal $f(t)$ con espectro $F(w)$ diremos que es de *banda acotada* o *espectro acotado* si existe $w_c > 0$ tal que $F(w) = 0$ cuando $|w| > w_c$.

Ejemplo 10.10.

a) La señal $f(t) = \text{sen}(t) + 3 \text{sen}(2t)$ es de banda limitada.

b) La señal $f(t) = \frac{\text{sen}(\alpha t)}{t}$ es de banda limitada. Comprueba que $F(w) = 0$ si $|w| > \alpha$.

Cuando tengamos una señal con espectro acotado, digamos que $F(w) = 0$ si $|w| > w_c$, veremos que si la frecuencia de muestreo es mayor que dos veces w_c entonces *no hay ninguna pérdida de información*. La señal puede recuperarse completamente.

Evidentemente, si w_c es una cota del espectro de f , cualquier otro valor mayor también lo será y, por tanto, la frecuencia de muestreo debería ser mayor. La situación idónea sería conocer el menor valor w_c que es válido.

Definición 10.11. Si w_c es el menor real positivo tal que $F(w) = 0$, si $|w| > w_c$, entonces $2w_c$ se suele llamar *frecuencia de Nyquist*. La condición $w_s > 2w_c$ se suele llamar *condición de muestreo*, donde w_s es la frecuencia de muestreo.

Para tener una idea intuitiva la frecuencia de Nyquist es dos veces la frecuencia más alta que aparece en la señal. El siguiente resultado nos dice como se hace la reconstrucción.

Teorema 10.12. Sea $f(t)$ una señal de espectro limitado y con frecuencia de Nyquist $2w_c$. Sea $f[n]$ un muestreo de $f(t)$ con frecuencia de muestreo w_s y período de muestreo $T = 2\pi/w_s$. Si $w_s > 2w_c$, entonces

Teorema de Shannon

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] \frac{2 \operatorname{sen}(w_s(t - nT)/2)}{w_s(t - nT)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 10.13. La señal $f(t) = \frac{\operatorname{sen}^2(\pi t)}{\pi t^2}$ tiene espectro $F(w) = \pi q_{2\pi}(w)$, donde $q_{2\pi}$ es el pulso triangular la de figura QUE FALTA!!!!!!!!!!!!!! Por tanto, la frecuencia de Nyquist es 4π . Si la frecuencia de muestreo verifica $w_s > 4\pi$ se puede hacer la reconstrucción completa de f . En este caso hace falta que $2\pi/T > 4\pi$ o, lo que es lo mismo, que $T < \frac{1}{2}$. Por ejemplo, para $T = \frac{1}{4}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi t)}{\pi t^2} &= 16 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n\pi/4)}{\pi n^2} \cdot \frac{\operatorname{sen}(4\pi(t - n/4))}{4\pi(t - n/4)} \\ &= \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen}^2(n\pi/4) \operatorname{sen}(4\pi t)}{n^2(4t - n)} \end{aligned}$$

Observación 10.14. El oído humano medio no percibe sonidos cuya frecuencia sobrepase los 20 kHz. Esto quiere decir que, para nuestro oído, el sonido se comporta como una señal con espectro limitado. El teorema de Shannon se aplica y nos dice que con 40.000 muestras por segundo debe bastar. Este es el fundamento de la mayoría de los métodos de compresión de sonido.

El problema del “aliasing”

El “aliasing” o enmascaramiento se produce cuando la frecuencia de muestreo es demasiado baja como para poder recuperar la señal original. Es posible que la señal que reconstruimos sea muy diferente a la original. Un ejemplo cotidiano de esto lo tenemos en las llantas de un coche: hay veces que parecen estar paradas o ir hacia atrás aún cuando el vehículo se desplaza hacia adelante. PELICULA DE LA RUEDA QUE PARECE IR HACIA ATRAS

10.3.1 Ejercicios

FALTAN

10.4 La transformada de Fourier discreta

Vamos a comenzar intentando dar una definición de transformada de Fourier de señales discretas periódicas. Una manera fácil, como ya hemos visto, de obtener este tipo de señales es muestrear señales continuas y periódicas con una frecuencia de muestreo que sea un múltiplo entero de la frecuencia principal.

Si f es una función periódica con período T e integrable en $[0, T]$, podemos aproximar la integral de la siguiente forma: dividimos el intervalo $[0, T]$ en N trozos iguales

$$\left[\frac{(n-1)T}{N}, \frac{nT}{N} \right]$$

para $n = 1, 2, \dots, N$ y aproximamos por el área de los rectángulos. Obtenemos

$$\int_0^T f(t) dt \approx \frac{T}{N} (f(0) + f(1) + \dots + f(N-1)).$$

Como la función f es integrable

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} = \int_0^T f(t) dt.$$

Igual que en otras ocasiones, así podemos aproximar el valor de la integral de la función utilizando de manera adecuada una muestreo de la función.

Recordemos ahora que los coeficientes de la serie de Fourier de f se calculan mediante integrales. Bueno, pues vamos a aproximarlos de la misma forma. Si

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ikw_0 t} dt,$$

con $w_0 = 2\pi/T$, entonces

$$\begin{aligned} c_k &\approx \frac{1}{T} \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-ikw_0 nT/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-2\pi ink/N} \end{aligned}$$

Si notamos $F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-2\pi ink/N}$, tenemos que

$$c_k \approx \frac{1}{N} F[k].$$

Este es el motivo de la siguiente definición.

Definición 10.15. Sea $f[n]$ una señal discreta y periódica con período N . La sucesión

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-2\pi ink/N}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

es la *transformada discreta* de $f[n]$

A $F[k]$ lo notaré N-DFT de $f[n]$.

Ejemplo 10.16. Calcular la 2-DFT de $f[n] = (-1)^n$. Sabemos que $f[0] = 1$ y $f[1] = -1$. Entonces, para $k = 0$,

$$F[0] = \sum_{n=0}^1 f[n]e^{-2\pi ink/2} = 1 \cdot e^0 + (-1) \cdot e^0 = 1 - 1 = 0.$$

Y para $k = 1$

$$F[1] = \sum_{n=0}^1 f[n]e^{-2\pi ink/2} = 1 \cdot e^0 + (-1) \cdot e^{-\pi i} = 1 + 1 = 2.$$

Tablas de transformadas de Fourier y Laplace

A

A.1 Transformadas de Laplace

Función $f(t)$	Transformada $F(s)$	Convergencia	Condiciones
1	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}(s) > 0$	
t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\text{Re}(s) > 0$	$a \in \mathbb{C}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\text{Re}(s) > \text{Re}(a)$	$a \in \mathbb{C}$
$f(t) = \text{sen}(at)$	$\mathcal{L}[f] = \frac{a}{s^2 + a^2}$	$\text{Re}(s) > 0$	$a \in \mathbb{R}$
$f(t) = \text{cos}(at)$	$\mathcal{L}[f] = \frac{s}{s^2 + a^2}$	$\text{Re}(s) > 0$	$a \in \mathbb{R}$
$f(t) = \text{senh}(at)$	$\mathcal{L}[f] = \frac{a}{s^2 - a^2}$	$\text{Re}(s) > a$	$a \in \mathbb{R}$
$f(t) = \text{cosh}(at)$	$\mathcal{L}[f] = \frac{s}{s^2 - a^2}$	$\text{Re}(s) > a$	$a \in \mathbb{R}$

Tablas A.1 Transformada de Laplace

Índice alfabético

a

argumento 8
 argumento principal 8

b

bola
 abierta 11
 cerrada 11

c

cadena 53
 camino 46
 campo de convergencia puntual 39
 ciclo 53
 ciclo nulhomólogo 54
 coeficientes de Fourier 71, 77
 conjugado 6
 conjunto
 abierto 12
 acotado 11
 cerrado 12
 compacto 12
 convergencia
 absoluta 14
 puntual 39
 uniforme 39
 convolución 88, 110
 criterio
 de Abel 40
 de la raíz 40
 del cociente 40
 curva 45
 curva
 cerrada 46
 equivalente 47
 opuesta 46
 regular 46
 regular a trozos 46
 curvas
 yuxtaposición de 46

d

Desigualdad
 de Bessel 85
 desigualdad isoperimétrica 93
 disco
 abierto 11
 cerrado 11
 distancia 6
 dominio 12
 dominio de convergencia 40

e

ecuación
 de Laplace 99
 del potencial 99
 Ecuaciones de Cauchy-Riemann 23

f

forma
 cartesiana 4
 forma polar 8
 fórmula
 de Euler 29
 de Moivre 10
 integral de Cauchy 54

función

analítica 41
 conjugada 21
 continua 21
 derivable 22
 derivada 24
 entera 24
 holomorfa 24
 módulo 21
 periódica 69

i

Identidad
 de Parseval 103
 Identidad de Parseval 88
 índice 53

- l**
Lema
 de Riemann 51
límite
 puntual 39
logaritmo 30
logaritmo
 derivable 52
 principal 30
longitud
 de una curva 46
- m**
módulo 6
- n**
núcleo
 de Dirichlet 85
 de Fejér 90
números
 complejos 4
- p**
Paradoja de Bernoulli 5
parte
 imaginaria 5
 real 5
periodo 69
periodo
 fundamental 69
polinomio trigonométrico 71
polo 55
punto
 interior 11
 regular 55
punto de acumulación 12
- r**
radio
 de convergencia 40
raíz n-ésima principal 10
regla
 de Barrow 45
 de Barrow para integrales curvilíneas 48
 de la cadena 23
reparametrización 47
residuo 55
- s**
serie
 binomial 43
 de Fourier 77
 de Laurent 57
 trigonométrica 75
simplemente conexo 54
singularidad
 esencial 55
 evitable 55
sucesión
 convergente 12
 de Cauchy 13
 divergente 12
 parcial 13
- t**
Teorema
 de Bolzano-Weierstrass 13
 de Cauchy 54
 de complitud 13
 de derivación de una serie de potencias 41
teorema
 de Fejér 90
Teorema
 de inversión 102
 de los residuos 55
 de Riemann 14
 de Riemann-Lebesgue 85
 de Shannon 117
 de Taylor 42
 fundamental del Cálculo 45
transformada
 de Fourier 101
 de Laplace 107
- v**
valor absoluto 6
- y**
yuxtaposición 46

