Ejercicios Tema 1
2020/2021
Continuidad y Derivación

Asignatura: Matemáticas. Grado: Ciencias Ambientales.

---

1. Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 1$
2. $f(x) = x^3 - 7x + 6$
3. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3 - 7x + 6}$
4. $f(x) = x + \sqrt{x^3 - 7x + 6}$
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^3 - 7x + 6}}$
6. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
7. $f(x) = \ln\left(x^2 - 4\right)$
8. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$
9. $f(x) = \arctan(x^2 + 1)$
10. $f(x) = \tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2. Calcula los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 1}(x^3 - 7x^2 + x + 4)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x+3}$
3. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{16 - x^4}$
5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$
6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2-9}$
7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+5x+23}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{5+3^{\frac{1}{x}}}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2+2^{\frac{1}{x}}}{2+5^{\frac{1}{x}}}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$
12. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+5^{-1/x}}{2+5^{-1/x}}$
14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-3}{x}$

3. Calcula los siguientes límites:

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{x-4}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^3-4x^2-2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x-4}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^4}{3x^2+3x-2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+4}{x^4-3x^2-2}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4}{6+x-3x^2}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+5x+6}{2x+2}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+2x)\operatorname{sen} x}{x^2+3}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x-4^{-x}}{4^x+4^{-x}}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x-4^{-x}}{4^x+4^{-x}}$

4. Calcula los siguientes límites:

1. $\displaystyle\lim_{x\to-3^-}\frac{x-1}{(x+1)(2x-4)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-3^+}\frac{x-1}{(x+1)(2x-4)}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to2^-}\frac{x-1}{(x+1)(2x-4)}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to2^+}\frac{x-1}{(x+1)(2x-4)}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{-1}{x}}}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{-1}{x}}}$

5. Estudiar la continuidad de la función $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1, & x<0\\ x+1, & 0\le x<1\\ 2, & x\ge 1\end{cases}$$

6. Estudiar la continuidad de la función $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x<0\\ \arctan(x)-1, & 0\le x<\frac{2}{\pi}\\ \arctan(x)-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x\ge\frac{2}{\pi}\end{cases}$$

7. En los siguientes ejemplos la función está definida en todo punto excepto para $x_0=2$. En cada caso, calcula el valor que se debe asignar a $f(2)$, si es que existe tal valor, para que la función f sea continua en $x=2$.

1. $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$
2. $f(x)=\begin{cases} x-1 & x>2\\ 1-x^2 & x<2\end{cases}$

8. Estudiar la continuidad de la función $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x<0\\ 0 & x=0\\ e^{\frac{-1}{x}} & x>0\end{cases}$$

Estudiar también los límites en $+\infty$ y en $-\infty$.

9. Estudiar la continuidad y los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

1. $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$
2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x}, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ \sqrt[3]{x}, & x \geq 1. \end{cases}$

10. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f y los límites en $+\infty$ y en $-\infty$.

11. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Estudiar para qué valores de α existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y para qué valores es f continua en $x = 0$.

12. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \cos(5x)$
2. $f(x) = \dfrac{\ln(2)}{\sqrt{2+3x^2}}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x^3+x}$
4. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^a}, \quad a \in \mathbb{R}$
5. $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x + \arccos x$
6. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$
7. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1+x}{1-x}$
8. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}$
9. $f(x) = \dfrac{x\operatorname{sen}(1/x)}{\ln(2x)}$
10. $f(x) = (2+x)^{1/x}$
11. $f(x) = \dfrac{x^2+5x^2+1}{x^4+x^2+2}$
12. $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$
13. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{x}{1+x^2}$
14. $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x+1}) - \operatorname{sen}(\sqrt{x-1})$
15. $f(x) = \ln(1+\operatorname{tg}(x))$

13. Sea $f(x) = (x-2)^{2/3} + 2x^3$. ¿Es f derivable en $x = 2$?.

14. Hallar los puntos en los que la tangente a la curva de ecuación $y = x^4 - 2x + 1$ es paralela a la recta $2x - y - 3 = 0$.

15. La población de una colonia de bacterias viene medida por la función, $P(t) = \frac{2000+100t}{0{,}5t^2}$, medida en cientos de bacterias y en un instante de tiempo de t horas después del inicio.

1. Hallar el número de bacterias en un inicio.
2. Hallar la población que habrá al cabo de una semana.
3. ¿Qué ocurre con la población a largo plazo?

16. Calcula los extremos relativos de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$
2. $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$
3. $f(x) = e^x + e^{-x}$
4. $f(x) = (x^2 - 2x)\ln x - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$
5. $f(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x - \dfrac{1}{4}x^2$
6. $f(x) = (\dfrac{1}{2} - x)\cos x + \operatorname{sen} x - \dfrac{x^2 - x}{4}$

17. Hallar los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones cuando sea posible.

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x$
2. $f(x) = \ln(x^2 - 9)$
3. $f(x) = x^{2/3}(x - 1)^4$
4. $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$
5. $f(x) = x^5 + x + 1$
6. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$
8. $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$
9. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$.
10. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$.
11. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x - 1}$.
12. $f(x) = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$.
13. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

18. Estudiar los extremos relativos de las siguientes funciones:

$$f(x) = x \ln|x|, \quad x \neq 0 \text{ y } f(0) = 0. \qquad g(x) = x^2 \ln|x|, \quad x \neq 0 \text{ y } f(0) = 0.$$

19. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+1}, & x \leq -1, \\ \frac{-2}{\pi} \operatorname{arc\,sen} x, & -1 < x < 1, \\ \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad, la derivabilidad e intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

20. Calcular el mínimo valor que se puede obtener al sumar un número positivo con su inverso.

21. Hallar de todos los cilindros (con tapaderas) de volumen fijo 1 m^3 cual es el que tiene menor superficie.

22. Representar las gráficas de las siguientes funciones:

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.
2. $f\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{e}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln x}$.
3. $f(x) =\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
4. $f(x) =\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x} - e^{x}$.
5. $f(x) =\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ \pi/2, & x = 0 \end{cases}$

23. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón, quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse con ese procedimiento si el rectángulo tiene como lados:

(a) 10 y 10, (b) 12 y 18.

24. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcular las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

25. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de 1 m. de largo en dos trozos. Uno de ellos se va a doblar en forma de circunferencia, y el otro en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortar el alambre para que la suma de áreas sea mínima?

26. Un cultivador de naranjas estima que, si planta 60 naranjos, obtendrá una cosecha media de 400 naranjas por árbol. Este número bajará 4 unidades por cada árbol más que se plante en el mismo terreno. Halle el número de árboles que hace máxima la cosecha.

27. Durante la tos, el diámetro de la tráquea disminuye. La velocidad v del aire en la tráquea durante la tos se relaciona con el radio, r, mediante la ecuación $v = Ar2(r_0 - r)$, donde A es una constante y r_0 es el radio en estado de relajación. Determínese el radio de la tráquea cuando la velocidad es máxima, así como esta velocidad.

28. Una fábrica de plásticos recibe del Ayuntamiento de la ciudad un pedido de 10,000 tablas flotadoras para el programa de natación del verano. La fábrica posee 10 máquinas, cada una de las cuales produce 50 tablas por hora. El coste de preparar las máquinas para hacer el trabajo es de 80 Euros por máquina. Una vez que las máquinas están preparadas, la operación es automática y puede ser supervisada por una sóla persona, que gana 10 Euros/hora.

(a) ¿Cuántas máquinas hay que usar para minimizar el coste de producción?

(b) Si se usa el número óptimo de máquinas, ¿cuánto ganará el supervisor durante el proceso?.

(c) ¿Cuántas máquinas hay que usar para minimizar el coste de producción de un pedido de 50.000 tablas?

29. Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio dado.