
Superficies mínimas: estabilidad y grupos continuos de isometrías



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

Tesis doctoral
Programa de Doctorado en Matemáticas

David Moya Hinojosa

Director:

Joaquín Pérez Muñoz

«... es ist wahr, ein Mathematiker, der nicht etwas Poet ist, wird nimmer ein vollkommener Mathematiker sein»

Karl Weierstrass

Agradecimientos

Quisiera empezar agradeciendo a mi familia, en especial a mis padres, a mi hermano y a mis abuelos, por estar siempre ahí en todo momento y aconsejarme como solo ellos saben hacer.

Por supuesto, agradezco a mi tutor y director Joaquín Pérez, por su dedicación, voluntad, paciencia, consejo y por todas las horas que hemos pasado en su despacho del IMAG.

Como no podía ser de otra forma, agradezco a todos los compañeros de doctorado que han pasado por el despacho B8 del IMAG (son muchos): Antonio, Jesús, Julián, Fidel, Diego, Philipp y Melanie. Pero no me olvido del resto de compañeros: Jorge, Tjasa, José Santiago, Daniel, José Gabriel, Andrea y en especial gracias a todos aquellos con los que he compartido las tardes-noches de los jueves.

Gracias también a los compañeros y amigos de toda la vida, especialmente a la gente que forma parte del grupo "23".

Gracias a todas las personas que me acogieron en mi estancia en L'Aquila, sobre todo a Barbara Nelli, con la que compartí despacho durante tres meses. Gracias también a Giuseppe, Mario, Riccardo y Marcos, por toda vuestra ayuda allí.

Gracias a todos los compañeros del Departamento de Geometría y Topología. Mención aparte merecen Magdalena y José María, que de vez en cuando han hecho las veces de segundo director. Agradezco también aquí la ayuda que me ha prestado Ezequiel desde Brasil.

Y por último, quiero agradecer a Sheila. Esta tesis no hubiera sido posible sin su apoyo incondicional cada día.

A todos ellos, gracias.

Índice general

Summary and conclusions	1
0. Introducción	9
1. Preliminares	23
1.1. Métricas conformes	24
1.2. Hipersuperficies y fórmula de variación del área	26
1.3. Representación de Weierstrass	30
1.3.1. Familia asociada	33
1.3.2. Ejemplos	34
1.4. Problema de Björling	36
1.5. Superficies mínimas completas con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 .	37
1.6. Principio del Máximo	39
1.7. Superficies mínimas no orientables en \mathbb{R}^3	42
1.8. Estabilidad	43
1.9. Espacios homogéneos tridimensionales	47
1.9.1. Espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$	48
1.9.2. Variedades homogéneas tridimensionales con grupo de isometrías de dimensión 3	51
2. Superficies de Henneberg generalizadas	59
2.1. Motivación del problema	59

2.2.	Superficies no orientables, estables y mínimas con puntos de ramificación	61
2.3.	Superficies no orientables, no estables y mínimas con puntos de ramificación	64
2.4.	La superficie de Henneberg clásica	65
2.4.1.	Isometrías de H_1	66
2.4.2.	Familia asociada y superficie conjugada H_1^*	67
2.5.	Superficies de Henneberg generalizadas	69
2.5.1.	Forma general de f	69
2.5.2.	Resolviendo el problema de períodos para el caso de un final	71
2.5.3.	El caso más simétrico	73
2.5.4.	Familia asociada y superficie conjugada H_m^*	73
2.5.5.	Caso m impar	74
2.5.6.	Caso m par	74
2.5.7.	Revisitando el caso m impar: H_m^* como solución a un problema de Björling para una hipocicloide	75
2.5.8.	Isometrías de H_m	78
2.6.	Espacio de moduli de los ejemplos para una complejidad dada	79
2.6.1.	Soluciones con complejidad $m = 1$	80
2.6.2.	Soluciones con complejidad $m = 2$	82
3.	Hipersuperficies mínimas en el espacio de Schwarzschild	91
3.1.	Introducción	91
3.2.	Hipersuperficies mínimas, rotacionalmente simétricas, con borde libre	95
3.3.	Cálculo del índice de Σ_0	104
4.	Superficies mínimas verticalmente invariantes en productos semidirectos unimodulares	111
4.1.	Introducción	111
4.2.	La curvatura media de una superficie verticalmente invariante	113

4.3. Productos semidirectos unimodulares	116
4.4. Superficies mínimas verticalmente invariantes en Nil_3	118
4.5. Superficies mínimas verticalmente invariantes en $\tilde{E}(2)$	122
4.5.1. Soluciones de tipo I	123
4.5.2. Soluciones de tipo II	123
4.5.3. Superficies mínimas verticalmente invariantes en $\tilde{E}(2)$ con una métrica no llana	128
4.6. Superficies con curvatura de Gauss cero	131
Bibliografía	135

Summary and conclusions

A surface in \mathbb{R}^3 is minimal if and only if it is a critical point of the area functional for any variation with compact support. One of the most interesting properties of a minimal surface Σ is stability. When the surface is minimal and the second derivative of the area functional is non-negative for any variation with compact support, we will say that our minimal surface is stable. Roughly speaking, a minimal surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ is stable if for each relatively compact set $\Omega \subset \Sigma$, the restriction of Σ to Ω is the surface with the smallest area among surfaces that have boundary $\partial\Omega$ and are "close" to Σ .

Complete stable minimal immersions in \mathbb{R}^3 are planes [25, 31, 79]. But if we allow our surfaces to have branch points, then more examples appear. In the first result of this thesis, we study non-orientable, finitely branched, complete, minimal conformal immersions $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ with $\Sigma = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}$, where \mathcal{E} is finite, that are stable. We exhibit a family of such surfaces, $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, called generalized Henneberg surfaces. To do this, we take Weierstrass data $(g, \omega = f dz)$ of the form

$$g(z) = z, \quad f(z) = \frac{c}{z^{m+3}} \frac{\prod_{j=1}^M (z - a_j)}{\prod_{j=1}^N (z - b_j)}, \quad z \in \Sigma, \quad (1)$$

where $c, a_j, b_j \in \mathbb{C}^*$, $m \in \mathbb{N}$ and $M, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ have to be determined. Geometrically, the points a_j are the branch points of the branched minimal surface and the points b_j , together with $0, \infty$, represent the ends.

To keep computations simple, we restrict ourselves to the family of non-orientable minimal surfaces with a single end in the quotient ($N = 0$), and prove that the Weierstrass data (1) gives rise to a non-orientable, finitely branched, complete, stable minimal surface if and only if $2 + 2m - M = 0$, the branch points are $m + 1$ pairs of antipodal points in \mathbb{C}^* and the following compatibility equations are verified:

$$-\frac{\bar{c}}{c} = \prod_{j=1}^{m+1} \frac{a_j}{\bar{a}_j}, \quad (2)$$

$$\overline{cA_m} = -cA_{m+2}, \quad \text{Im}(cA_{m+1}) = 0, \quad (3)$$

where we are using the notation

$$P(z) := \prod_{j=1}^{m+1} (z - a_j) \left(z + \frac{1}{\overline{a_j}} \right) = \sum_{h=0}^{2m+2} A_h z^h, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Equation (3) is equivalent to solving the associated period problem for this Weierstrass data in \mathbb{C}^* , while equation (2) expresses the condition for the branched minimal immersion to descend to the quotient $\mathbb{C}^*/\langle I \rangle$, I being the antiholomorphic involution $I(z) = -1/\overline{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$, as a non-orientable surface considering that the period problem is solved. The number $m+1 \in \mathbb{N}$ is the number of branch points of the non-orientable minimal surface generated by the Weierstrass data (g, ω) . The number $m \in \mathbb{N}$ is called the *complexity*.

Theorem A. *For every $m \in \mathbb{N}$ there exists a non-orientable, complete, stable, minimal surface $H_m \subset \mathbb{R}^3$ which has $m+1$ branch points.*

For $m=1$, H_1 is the classical Henneberg surface [38] studied by Henneberg in 1875 but already known by Catalan in 1858. In Section 2.5 we will describe the family of surfaces $\{H_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. The examples $\{H_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ are the most symmetric ones within each complexity level, and we will call them generalized Henneberg surfaces. We will also describe the group of extrinsic isometries of H_m , and show that depending on the parity of m , either H_m or its conjugate surface H_m^* can be obtained as a solution of a Björling problem over certain hypocycloid for which we fix as the normal vector the normal vector to the hypocycloid as a plane curve. This produces a symmetry of H_m (or H_m^*) with the plane $\{x_3 = 0\}$.

We will also analyze the moduli space $\mathcal{M}(m)$ of solutions of equations (2) and (3) for a given complexity m . For complexity $m=1$ we find the following result.

Theorem B. *The moduli space $\mathcal{M}(1)$ consists solely of the Henneberg surface H_1 .*

For higher complexity, the above uniqueness result fails to hold. In fact, in Proposition 2.17 we will present a 1-parameter family $\{\Sigma_\theta\}_{\theta \in [0,1)} \subset \mathcal{M}(2)$. This family contains H_2 when $\theta=0$ and the limit when $\theta \rightarrow 1$, after rescaling, is the Henneberg surface H_1 . In Section 2.6.2 we will prove, using the implicit function Theorem, that the moduli space $\mathcal{M}(2)$ is a smooth manifold of real dimension 2 around H_2 .

Up to this point, we have dealt with minimal surfaces without boundary. Given a region $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ with smooth boundary $S = \partial\Omega$, it is natural to study

the area functional among surfaces $\Sigma \subset \Omega$ with $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$. By the first variation of area formula, the critical points of the area functional in this context are the minimal surfaces in Ω that intersect S orthogonally. Such surfaces are called free boundary minimal surfaces in Ω [32, 53]. Perhaps, the most studied situation in this context is the case when Ω is the open unit ball B^3 of \mathbb{R}^3 and S is the unit sphere [12, 28, 33, 47], but the case $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B^3}$ has also geometrical and physical content, for instance when $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B^3}$ is endowed with the rotationally symmetric Riemannian metric that models the Schwarzschild space. More generally, fix $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{R}^+$ and define the exterior domain

$$M^n = M^n(m, n) = \{p \in \mathbb{R}^n : |p| \geq R_0\},$$

where $R_0 = R_0(m, n) = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{n-2}}$, endowed with the following Riemannian metric conformal to the Euclidean metric $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in \mathbb{R}^n :

$$g_{1,m} = \left(1 + \frac{m}{2|p|^{n-2}}\right)^{\frac{4}{n-2}} \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

and $|p|^2 = |(p_1, \dots, p_n)|^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2$. The classical Schwarzschild space is the Riemannian manifold $(M^n, g_{1,m})$ which we denote by $M_{1,m}^n$. In Physics, $M_{1,m}^3$ is used in the modelling of static black holes. Studying the minimal surfaces that this kind of spaces admit can provide physical properties of the space itself [86]. The most natural free boundary minimal hypersurface in $M_{1,m}^n$ is the totally geodesic hypersurface

$$\Sigma_0 = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| \geq R_0, x_n(p) = 0\}. \quad (4)$$

It is natural to seek other examples of free boundary minimal hypersurfaces in $M_{1,m}^n$, starting with the simplified case of rotationally symmetric hypersurfaces. In Chapter 3, we will study the existence of a new family of free boundary minimal hypersurfaces with rotational symmetry in $M_{1,m}^n$ for $n \in \mathbb{N}$ large enough.

Theorem C. *Given $m > 0$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that for all $n > n_0$ there exists $\varepsilon(n, m) < R_0(n, m)$ and a family of hypersurfaces $\{\Sigma_{t_0}\}_{t_0 \in [0, \varepsilon(n, m))} \subset M_{1,m}^n$ verifying that for $t_0 = 0$ we have the hypersurface defined in (4) and for every $t_0 \in (0, \varepsilon(n, m))$, $\Sigma_{t_0} \subset M_{1,m}^n$ is a properly embedded, rotationally symmetric, free boundary minimal hypersurface with $\partial\Sigma_{t_0} = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| = R_0, x_n(p) = t_0\}$.*

The techniques we will use to prove Theorem C are based on analyzing the ODE that expresses minimality of a rotationally symmetric hypersurface in

$M_{1,m}^n$, and producing a complete solution of this ODE that generates by rotation the desired hypersurface.

A way of measuring the lack of stability of a minimal surface in a Riemannian manifold is by counting the number of negative eigenvalues of its Jacobi operator, which is an elliptic symmetric operator that appears when studying the second variation formula of the area functional for such minimal surface. R. Montezuma [72] proved that the Morse index of Σ_0 as a free boundary minimal surface in $M_{1,m}^3$ is one. In Section 3.1, we will describe the k -Schwarzschild metrics $g_{k,m}$, for $k \geq 1$, $k \neq \frac{3}{2}$, such that the domain M^n together with the metric $g_{k,m}$ is an asymptotically flat manifold that generalizes the Schwarzschild space. We will call $(M^n, g_{k,m})$ the generalized k -Schwarzschild space, $M_{k,m}^n$. In these spaces, we will prove a generalization of the result by R. Montezuma, assuming some extra conditions on the parameters m, k .

Theorem D. *If $k \in (1, \frac{3}{2})$, then the Morse index of $\Sigma_0 \subset M_{k,m}^3$ as a free boundary minimal surface is one for all $m > 0$. Moreover, if we choose m sufficiently large, then for all $k > 1$ the Morse index of $\Sigma_0 \subset M_{k,m}^3$ is one.*

So far, we have studied minimal surfaces in \mathbb{R}^3 and $M_{k,m}^n$. Both ambient Riemannian manifolds have a very rich isometry group, which makes the study of their minimal hypersurfaces more tractable than in a generic n -manifold. Another situation in which we have abundance of ambient isometries is that of homogeneous manifolds. A Riemannian manifold (M, g) is homogeneous if for any two points $p, q \in M$ there is an isometry $f \in \text{Iso}(M, g)$ such that $f(p) = q$. Among homogeneous manifolds, a remarkable subfamily are those given by Lie groups endowed with left invariant metrics, called metric Lie groups. In low dimension, and assuming that the manifold is simply-connected, these examples of algebraic nature are almost the only possible ones: In dimension 2, the simply-connected homogeneous manifolds reduce to the plane \mathbb{R}^2 , the hyperbolic plane \mathbb{H}^2 and the sphere \mathbb{S}^2 , and this last one is the only one not being a Lie group. In dimension 3, except for the product manifold $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, every simply-connected homogeneous 3-manifold is isometric to a metric Lie group.

Among three-dimensional simply-connected metric Lie groups, the semidirect products of the form $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ for a matrix $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, are specially relevant since they cover all cases except for the special unitary group $SU(2)$ and the universal cover $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ of the special linear group $SL(2, \mathbb{R})$. In the last chapter, we will focus on unimodular metric Lie groups which can be written as a semidirect product, which means that $\text{trace}(A) = 0$. The special role of the vertical direction in $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ justifies the study of minimal surfaces in $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ which are invariant by left translations by elements in the vertical axis $\{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Every

such surface $\Sigma_\gamma \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ is described by a generating curve of the form $\{\gamma(t) = (x(t), y(t), 0); t \in I\} \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\}$, where I is an open interval in \mathbb{R} and γ is a regular curve. Without loss of generality, we can assume that γ is parameterized by its arc length (the induced metric on $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\}$ by the natural one on $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ is the standard Euclidean metric on $\{z = 0\}$), and thus there exists a function $\theta(t)$ verifying $x'(t) = \cos \theta(t)$, $y'(t) = \sin \theta(t)$, $t \in I$. Imposing that Σ_γ is minimal reduces to a system of differential equations for $x(t)$, $y(t)$, $\theta(t)$. There are previous works [56, 57] that use this approach to describe minimal surfaces which are invariant under a one-parameter group of isometries in Sol_3 , the orientation-preserving group of rigid motions in the Lorentz-Minkowski plane. It turns out that Sol_3 can be written as a semidirect product. In our results, we focus on other metric Lie groups that can also be written as semidirect products: the Heisenberg space Nil_3 , and the universal cover of the group of orientation-preserving rigid motions of the Euclidean plane $\tilde{E}(2)$. Together with \mathbb{R}^3 and Sol_3 , they cover all the unimodular metric Lie groups of dimension 3 that can be written as a semidirect product (Theorem 1.34). From another point of view, not using semidirect products, the results we obtain for Nil_3 , were obtained by Figueroa, Mercuri and Pedrosa [30]. The case of the metric Lie group $\tilde{E}(2)$ carries a one parameter family of metrics of which a particular case is the standard flat one. Even in this standard case, the study of vertically invariant minimal surfaces in $\tilde{E}(2)$ is relevant because of the algebraic behaviour of the minimal surfaces we are studying. When we fix the flat metric on $\tilde{E}(2)$, we can view the resulting surface as a helicoidal minimal surface in \mathbb{R}^3 , which are classified in [97]. From our point of view, we get the following result.

Theorem E. *If $\gamma \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} = \tilde{E}(2)$, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, is the generating curve of a vertically invariant minimal surface Σ_γ and the ambient metric on $\tilde{E}(2)$ is flat, then the maximal interval of definition of γ is \mathbb{R} , and the following properties hold:*

1. *If γ passes through the origin $(0, 0)$, then γ is a straight line. Otherwise, γ is a strictly convex curve, i.e., the curvature κ of γ is a nowhere vanishing function.*
2. *Suppose that $(0, 0) \notin \gamma(\mathbb{R})$. Then:*
 - $|\kappa(t)| \leq 1/2$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\kappa(t)$ goes to 0 when $t \rightarrow \pm\infty$ and κ satisfies the ODE $\langle \gamma, \gamma' \rangle \kappa + (1 + |\gamma|^2) \kappa' = 0$.
 - *Given $B \in \text{SO}(2)$, the curve $B\gamma$ is also a generating curve of a vertically invariant minimal surface in $\tilde{E}(2)$.*

- *There exists a unique $t_0 \in \mathbb{R}$ such that $\kappa'(t_0) = 0$. Moreover, the distance from γ to the origin reaches its unique critical point at $\gamma(t_0)$, which is a global minimum, the image of γ is symmetric with respect to the reflection through the straight line r normal to γ at t_0 and the support function ξ of γ has a unique critical point at t_0 .*
- *Up to a translation in t , we will assume $t_0 = 0$. In this setting, all the self-intersection points of γ occur for opposite values of its parameter (i.e. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = \pm t_2$) and they all lie in r . Moreover, the angle of intersection between r and γ at t is $\pi/2$ if and only if $t = 0$.*

When we consider $\tilde{E}(2)$ with a non-flat left invariant metric, several of the properties of this Theorem E are preserved but others fail to hold. To be more precise, we consider on $\tilde{E}(2)$ the left invariant metric g_c which makes $(\tilde{E}(2), g_c)$ isometric and isomorphic to $\mathbb{R}^2 \rtimes_{A(c)} \mathbb{R}$ where

$$A(c) = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1/c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{for } c \in [1, \infty) \quad (5)$$

(for $c = 1$ we recover the flat metric).

Proposition. *If $\gamma \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_{A(c)} \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_{A(c)} \mathbb{R} = (\tilde{E}(2), g_c)$ is a generating curve of a vertically invariant minimal surface, then the maximal interval of definition of γ is \mathbb{R} and following properties hold:*

1. *The function $\theta(t)$ is constant if and only if γ is the x -axis or the y -axis.*
2. *The curvature κ of γ verifies $|\kappa(t)| \leq c/2$, $\forall t \in \mathbb{R}$, and $\kappa(t)$ goes to 0 when $t \rightarrow \pm\infty$.*
3. *We define $\hat{\theta} = \arctan(c \tan \theta)$ (observe that for $c = 1$, the derivative $(\hat{\theta})'$ is the curvature of γ). Then*

$$(\hat{\theta})' = c \frac{xy' - c^2yx'}{c^2 + x^2 + c^4y^2}.$$

Coming back to $\tilde{E}(2)$ with its flat metric, we also describe the vertically invariant surfaces with zero Gaussian curvature. For other three-dimensional metric Lie groups that can be written as a semidirect product, this problem had already been studied: in \mathbb{R}^3 by Hartman and Nirenberg [37], in the Heisenberg space (with constant extrinsic Gaussian curvature) by Belarbi [9] and in Sol_3 with its standar metric (with constant extrinsic or intrinsic Gaussian curvature) by López and Munteanu [56, 57]. The cases of zero intrinsic Gaussian curvature in Nil_3 and the case of Sol_3 with its non-standard metric still remain unstudied.

Proposition. *Let $\Sigma_\gamma \subset \tilde{E}(2)$ with its flat metric, be a vertically invariant surface with zero Gaussian curvature. Then:*

- *If Σ_γ is complete, then Σ_γ is a vertical cylinder over a circumference in $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\}$ centered at the origin (here $A=A(1)$ is given by (5)).*
- *Suppose that Σ_γ is not complete. Then, γ is completely determined by $(x_0, y_0, 0) = \gamma(0)$ and a parameter $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so that in polar coordinates $\gamma = r(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$, the polar angle α is given by*

$$\alpha(t) = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \frac{\operatorname{sgn}(a\tau + x_0^2 + y_0^2)}{2a} \left(g(\tau) - a \operatorname{arccot}\left(\frac{a}{g(\tau)}\right) \right) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t},$$

where $g(t) = \sqrt{-a^2 + 4at + 4(x_0^2 + y_0^2)}$, the modulus r of γ is given by

$$r(t) = \sqrt{at + x_0^2 + y_0^2},$$

and the maximal interval of definition I of γ is given by

$$\begin{cases} I = [a/4 - (x_0^2 + y_0^2)/a, \infty) & \text{if } a > 0, \\ I = (-\infty, a/4 - (x_0^2 + y_0^2)/a] & \text{if } a < 0. \end{cases}$$

Introducción

Una superficie Σ en \mathbb{R}^3 se dice mínima si y sólo si Σ es un punto crítico del funcional área para cualquier variación con soporte compacto. La teoría de superficies mínimas en \mathbb{R}^3 se remonta al cálculo de variaciones desarrollado por Euler y Lagrange en el siglo XVIII. Hasta el siglo XIX, eran pocos los ejemplos que se tenían de este tipo de superficies, que se reducían al plano, la catenoide (Euler, 1741, Figura 1.1) y el helicoides (Meusnier, 1776, Figura 1.1). Por su parte, Euler caracterizó a la catenoide como la única superficie mínima completa¹ no plana que se genera por revolución, en este caso de una catenaria; mientras que de forma posterior el helicoides se caracterizó, también junto al plano, como la única superficie mínima completa¹ que se puede foliar por rectas (Catalan [14]). Desde el punto de vista de las EDP's, si queremos que el grafo de una función $f = f(x, y)$ sea una superficie mínima, entonces f debe cumplir la siguiente ecuación cuasilineal elíptica y de segundo orden:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} + (1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} = 0. \quad (1)$$

No fue hasta el siglo XIX, con Scherk (1835, [84]), que se tuvieron nuevos ejemplos de superficies mínimas, de entre las que destacamos las superficies de Scherk simplemente periódica y doblemente periódica (ver Figura 1). Posteriormente en este siglo también aparecieron los ejemplos de Schwarz (1865, [89], ver Figura 1) y otros dados por Enneper, Riemann y Weierstrass entre otros.

Fue también en el siglo XIX cuando se probó que una superficie es mínima si y sólo si las funciones coordenadas son armónicas respecto a la estructura conforme asociada a la métrica inducida, lo cual conecta el campo de las superficies

¹Existen versiones locales de estas caracterizaciones.

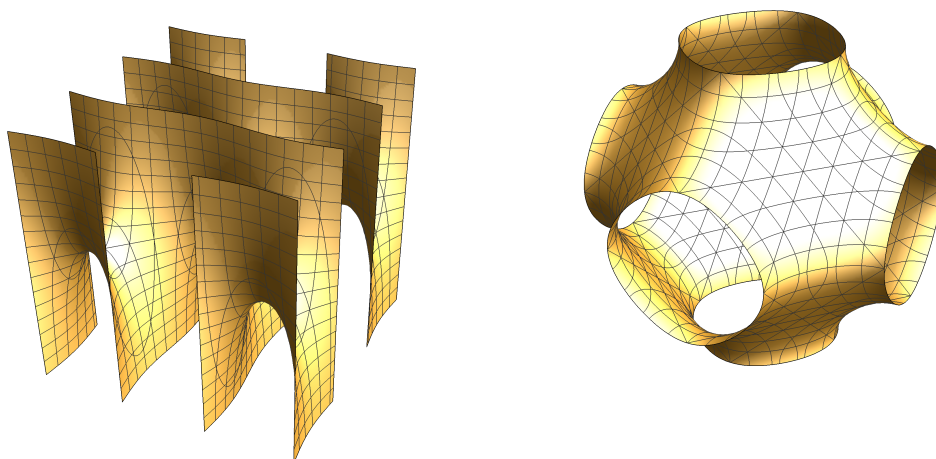


Figura 1: Izquierda: superficie de Scherk doblemente periódica. Derecha: P-superficie de Schwarz.

mínimas con el análisis complejo. Otras relaciones de las superficies mínimas con el análisis complejo fueron descubiertas más o menos al mismo tiempo a través de la representación de Weierstrass (que da fórmulas explícitas para una superficie mínima en términos de dos datos holomorfos) y la fórmula de Björling (que expresa una superficie mínima que contenga una curva dada con un vector normal prescrito a lo largo de ella). Las superficies mínimas también se relacionaron con la física vía el problema de Plateau, consistente en minimizar el área entre superficies que tengan un contorno prefijado. Resolver un problema de Plateau, usar la representación de Weierstrass o la fórmula de Björling son algunos de los procedimientos que permitieron en el siglo XIX dar nuevos ejemplos de superficies mínimas. De entre estos, el problema de Björling será un procedimiento que usaremos en el Capítulo 2.

Los ejemplos concretos de superficies mínimas en \mathbb{R}^3 que acabamos de mencionar son también importantes porque aparecen frecuentemente caracterizando las superficies mínimas más sencillas desde ciertos puntos de vista topológicos o geométricos. Por ejemplo, podemos citar el siguiente resultado publicado en 2005.

Teorema 0.1 (Meeks-Rosenberg [68], Colding-Minicozzi [19]). *Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie completa, embebida, simplemente conexa y mínima. Entonces Σ es un plano o un helicoides.*

Siguiendo con esta perspectiva histórica, aparecieron nombres especialmente

relevantes en la primera mitad del siglo XX. En la segunda década de ese siglo, Bernstein demostró que las únicas soluciones de la ecuación (1) definidas en todo \mathbb{R}^2 son los planos afines [10]. El problema de Bernstein y el hecho de que la aplicación de Gauss de un grafo en \mathbb{R}^3 tome valores en un hemisferio de \mathbb{S}^2 sugirieron estudiar qué conjuntos pueden ser la imagen por la aplicación de Gauss de una superficie mínima y completa en \mathbb{R}^3 que no sea un plano. Este problema fue completamente resuelto por Fujimoto [34] en 1988, que fue capaz de demostrar que la imagen por la aplicación de Gauss debe ser la esfera salvo a lo más cuatro puntos (existen ejemplos, como la superficie de Scherk doblemente periódica, que omiten cuatro puntos, por lo que el resultado es óptimo). Citamos también a Douglas [26] y Radó [81], que en 1931 publicaron sus soluciones al problema de Plateau. Esta solución le valió a Douglas la primera medalla Fields. Un autor especialmente relevante en el siglo XX fue Osserman, quien contribuyó de manera muy notable a la teoría de superficies mínimas en \mathbb{R}^3 . En especial destacan sus resultados sobre representación de Weierstrass global y sus resultados involucrando a la subfamilia de superficies mínimas completas en \mathbb{R}^3 con curvatura total finita, es decir, aquellas para las que la integral de la curvatura de Gauss a lo largo de la superficie es finita. La topología de este último tipo de superficies se codifica mediante dos números enteros no negativos que son el género de la compactificación conforme de la superficie y el número de puntos que hay que añadir para obtener dicha compactificación, que se llaman finales.

Teorema 0.2 (Huber, [44], Osserman [77]). *Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie inmersa, mínima, completa y con curvatura total finita. Entonces, Σ tiene la estructura conforme de una superficie de Riemann compacta menos una cantidad finita de puntos.*

Hasta 1984, los únicos ejemplos que se conocían de superficies mínimas, completas y embebidas con curvatura total finita eran el plano (género 0 y un final) y la catenoide (género 0, dos finales). En dicho año, Costa [20] presentó un nuevo ejemplo que tiene 3 finales y género 1 (Figura 2). Posteriormente Hoffmann y Meeks [40, 41] generalizaron la construcción de Costa para género $k > 1$ y 3 finales.

Como hemos comentado, Osserman también dio una versión global de la representación de Weierstrass para superficies mínimas en \mathbb{R}^3 tal y como presentamos en la Sección 1.3, en la que a partir de una función meromorfa (que salvo proyección estereográfica es la aplicación de Gauss de la superficie) y una diferencial holomorfa se consigue recuperar explícitamente la inmersión mínima.

Desde el punto de vista de las aplicaciones al mundo real, las propiedades

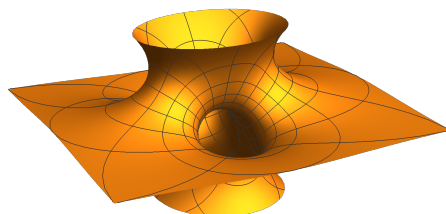


Figura 2: Superficie de Costa.

locales de minimización de las superficies mínimas han propiciado su aparición en arquitectura, por ejemplo, en la cubierta del Estadio Olímpico de Munich. También se pueden encontrar presentes en la naturaleza, por ejemplo, en las estructuras que conforman las alas de ciertas mariposas [36].

Otra propiedad interesante para una superficie mínima es la estabilidad (ver Sección 1.8), de hecho en la naturaleza sólo se observan sistemas estables. Las superficies mínimas son los puntos críticos del funcional área. Por tanto, es natural estudiar el comportamiento de la segunda derivada del funcional área en una superficie mínima. Si dicha segunda derivada es no negativa para cualquier variación normal de la superficie con soporte compacto, diremos que nuestra superficie mínima es estable. En otras palabras, una superficie mínima $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es estable si para cada dominio relativamente compacto $\Omega \subset \Sigma$, la restricción de Σ a $\bar{\Omega}$ minimiza el área dentro del conjunto de superficies "próximas" que tienen la misma frontera $\partial\Omega$. Uno de los teoremas más importantes sobre estabilidad de superficies mínimas completas en \mathbb{R}^3 fue la siguiente generalización de Teorema de Bernstein, demostrada de forma independiente por Do Carmo y Peng, Fischer-Colbrie y Schoen y Pogorelov de forma casi simultánea.

Teorema 0.3 ([25, 31, 79]). *Si $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ es una inmersión orientable, completa, mínima y estable, entonces Σ es un plano.*

La versión no orientable del teorema anterior es un resultado mucho más reciente. La noción precisa de estabilidad para superficies no orientables se puede ver en la Definición 1.25.

Teorema 0.4 (Ros, [82]). *No existen inmersiones mínimas y estables de superficies no orientables completas en \mathbb{R}^3 .*

Sea $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ una aplicación armónica de una superficie Σ cuya diferencial tiene núcleo distinto de cero en algún punto de Σ . La armonicidad de X garantiza

que el conjunto de los puntos donde la diferencial de X tiene núcleo (llamados puntos de ramificación) tiene acumulación vacía. Los dos resultados anteriores no contemplan la posibilidad de que una superficie mínima, completa y estable pueda tener puntos de ramificación. Si consideramos superficies mínimas completas con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 y con puntos de ramificación, la familia de superficies estables es mucho más rica. Meeks y Pérez [66] probaron que una tal superficie ha de ser no orientable y existen al menos 2 puntos de ramificación. Un ejemplo es la superficie clásica de Henneberg [38], que presenta exactamente dos puntos de ramificación.

El Capítulo 2 en esta memoria tiene como objetivo estudiar las superficies no orientables, completas y mínimas $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ con $\Sigma = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}$, donde \mathcal{E} es finito (es el conjunto formado por los finales y los puntos de ramificación), que además sean estables. Construimos una familia de este tipo de superficies, $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que llamamos superficies de Henneberg generalizadas. Para ello asumimos que la aplicación de Gauss g de Σ es un difeomorfismo y que X es una inmersión con curvatura total finita, lo que nos permite (Sección 2.5) partir de datos de Weierstrass $(g, \omega = f dz)$ de la forma

$$g(z) = z, \quad f(z) = \frac{c}{z^{m+3}} \frac{\prod_{j=1}^M (z - a_j)}{\prod_{j=1}^N (z - b_j)}, \quad z \in \Sigma, \quad (2)$$

donde $c, a_j, b_j \in \mathbb{C}^*$, $m \in \mathbb{N}$ y $M, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ son constantes a determinar. Geométricamente, los puntos a_j son los ceros de la métrica inducida (es decir, los puntos de ramificación de la inmersión ramificada) y los puntos b_j son, junto 0 y ∞ , los finales.

En este contexto, restringiéndonos a la familia de superficies no orientables y mínimas con un solo final en el cociente ($N = 0$), probamos que los datos de Weierstrass (2) producen una superficie no orientable, completa, mínima y estable si y sólo si $2 + 2m - M = 0$, los puntos de ramificación vienen dados como $m + 1$ pares de puntos antípodas $\{a_1, \dots, a_{m+1}\} = \left\{ \frac{-1}{a_1}, \dots, \frac{-1}{a_{m+1}} \right\} \subset \mathbb{C}^*$ y se verifican las siguientes ecuaciones de compatibilidad:

$$-\frac{\bar{c}}{c} = \prod_{j=1}^{m+1} \frac{a_j}{\bar{a}_j}, \quad (3)$$

$$\overline{cA_m} = -cA_{m+2}, \quad \text{Im}(cA_{m+1}) = 0, \quad (4)$$

donde hemos usado la siguiente notación:

$$P(z) := \prod_{j=1}^{m+1} (z - a_j) \left(z + \frac{1}{\bar{a}_j} \right) = \sum_{h=0}^{2m+2} A_h z^h, \quad z \in \Sigma.$$

La ecuación (4) es equivalente a resolver el problema de periodos asociado para estos datos de Weierstrass en \mathbb{C}^* , mientras que la ecuación (3) expresa la condición para que la inmersión ramificada descienda al cociente $\mathbb{C}^*/\langle I \rangle$, donde I es la involución aniholomorfa $I(z) = -1/\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$ (ver Sección 1.7), como superficie ramificada no orientable teniendo en cuenta que el problema de periodos se resuelve. Cabe destacar aquí que el número $m + 1 \in \mathbb{N}$ indica la cantidad de puntos de ramificación de la superficie no orientable generada por los datos de Weierstrass. Al número $m \in \mathbb{N}$ lo llamaremos complejidad.

A lo largo de la Sección 2.5 describimos una familia de superficies $\{H_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ cuyos datos de Weierstrass resuelven las ecuaciones (3) y (4) para cualquier complejidad $m \in \mathbb{N}$ prefijada (ver Figura 2.4). Para $m = 1$, H_1 es la superficie de Henneberg clásica. A lo largo de dicha sección también describimos el grupo de isometrías extrínsecas de las superficies H_m y demostramos que, o bien H_m , o bien su conjugada H_m^* se puede obtener como solución a un problema de Björling para cierta hipocicloide cuando se fija, como vector normal a la curva, el vector normal como curva plana.

Posteriormente analizaremos el espacio de moduli $\mathcal{M}(m)$ de soluciones de las ecuaciones (3) y (4) para una complejidad m (suponemos siempre la hipótesis de un solo final). Para complejidad $m = 1$ encontraremos el siguiente resultado de unicidad.

Teorema 0.5. *El espacio de moduli $\mathcal{M}(1)$ contiene únicamente a la superficie de Henneberg clásica H_1 .*

Cuando queremos estudiar cualquier complejidad superior, la situación cambia. En la Proposición 2.17 damos una familia 1-paramétrica de ejemplos $\{\Sigma_\theta\}_{\theta \in [0,1]} \subset \mathcal{M}(2)$. Dicha familia contiene a H_2 para $\theta = 0$ y converge cuando $\theta \rightarrow 1$, tras reescalar de forma adecuada, a la superficie de Henneberg H_1 , de donde se deduce que $\mathcal{M}(2)$ no es compacto. Además, en la Sección 2.6.2 veremos que el espacio de moduli $\mathcal{M}(2)$ es una variedad de dimensión 2 alrededor de H_2 , usando para ello el Teorema de la Función Implícita.

Hipersuperficies con frontera libre. Espacio de Schwarzschild

En el Capítulo 3 estudiamos cierto tipo de superficies mínimas con frontera libre. Fue también en la primera mitad del siglo XX cuando se empezaron a estudiar (Courant, [21]) a las superficies mínimas con frontera (o borde) libre

en \mathbb{R}^3 . Dada una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con frontera diferenciable $S = \partial\Omega$, es natural estudiar el funcional área entre las superficies $\Sigma \subset \Omega$ con $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$. Usando la primera fórmula de variación del área, los puntos críticos para el funcional área en este contexto son las superficies mínimas en Ω que intersecan S de forma ortogonal. Dichas superficies son conocidas como superficies mínimas con frontera libre en Ω [32, 53]. Quizás la situación más estudiada en este contexto sea el caso en que Ω es la bola unidad B^3 de \mathbb{R}^3 y S es la esfera unidad [12, 28, 33, 47]. Sin embargo, el caso $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B^3}$ tiene también un contenido geométrico y físico, por ejemplo, cuando a $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B^3}$ se le equipa con una métrica riemanniana rotacionalmente simétrica que modela al espacio de Schwarzschild. En este espacio ambiente, distinto de \mathbb{R}^3 , desarrollamos el Capítulo 3 de esta memoria. Fijado $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{R}^+$, se define $R_0 = R_0(m, n) = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{n-2}}$ y se considera el dominio $M^n = M^n(m, n) = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| \geq R_0\}$, dotado con la siguiente métrica riemanniana conforme a la métrica usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbb{R}^n :

$$g_{1,m} = \left(1 + \frac{m}{2|p|^{n-2}}\right)^{\frac{4}{n-2}} \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

donde $|p|^2 = |(p_1, \dots, p_n)|^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2$. El espacio de Schwarzschild clásico es la variedad riemanniana $(M^n, g_{1,m})$ que denotamos por $M_{1,m}^n$. En física, el espacio de Schwarzschild se utiliza en la modelización de agujeros negros estáticos. Estudiar las superficies mínimas que presenta un espacio de este tipo puede proporcionar propiedades físicas del mismo [86]. La hipersuperficie mínima con frontera libre más natural en $M_{1,m}^n$ es la hipersuperficie totalmente geodésica

$$\Sigma_0 = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| \geq R_0, x_n(p) = 0\}. \quad (5)$$

Es natural buscar otros ejemplos de superficies mínimas con borde libre en $M_{1,m}^n$, comenzando por el caso de hipersuperficies rotacionalmente simétricas. En el Capítulo 3 de esta memoria, estudiamos la existencia de una nueva familia de superficies mínimas y con frontera libre con una simetría rotacional en el espacio de Schwarzschild clásico cuando la dimensión $n \in \mathbb{N}$ es lo suficientemente grande.

Teorema 0.6. *Dado $m > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ existe $\varepsilon(n, m) < R_0(n, m)$ y una familia de hipersuperficies $\{\Sigma_{t_0}\}_{t_0 \in [0, \varepsilon(n, m))} \subset M_{1,m}^n$ verificando que para $t = 0$ recuperamos la hipersuperficie (5) y que para cada $t_0 \in (0, \varepsilon(n, m))$, $\Sigma_{t_0} \subset M_{1,m}^n$ es una hipersuperficie propiamente embebida, mínima, rotacionalmente simétrica, con frontera libre y con $\partial\Sigma_{t_0} = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| = R_0, x_n(p) = t_0\}$.*

Las simulaciones numéricas que hemos realizado en el caso $n = 3$ nos aportan evidencias de que el problema propuesto por Chodosh y Ketover en [16]: estudiar la existencia de superficies mínimas y con frontera libre que no sean totalmente geodésicas en el espacio de Schwarzschild de dimensión 3, tiene una respuesta positiva.

Las técnicas que usamos para probar el Teorema 0.6 se basan en el análisis de la EDO que se obtiene cuando se impone que una superficie rotacionalmente simétrica en $M_{1,m}^n$ sea mínima. Produciremos una solución completa de dicha EDO que genera, por revolución, la hipersuperficie deseada.

Una forma de medir la falta de estabilidad de una superficie mínima en una variedad riemanniana se consigue contando el número de autovalores negativos de su operador de Jacobi, que es el operador elíptico y simétrico que aparece cuando se estudia la segunda derivada del funcional área en una superficie mínima. Esta cantidad de autovalores negativos se llama el índice de Morse de la superficie. Para la superficie mínima de frontera libre Σ_0 en $M_{1,m}^3$, Montezuma [72] probó que el índice de Morse como superficie mínima de frontera libre es uno. Antes del resultado de Montezuma ya se conocía (Carlotto, [11]), que el índice de Σ_0 en $M_{1,m}^3$ no es cero. Sin embargo, si la dimensión n es mayor o igual a 4, Barbosa y Espinar [6] probaron que el índice de Morse de $\Sigma_0 \subset M_{1,m}^n$ es cero. En la Sección 3.1, describimos las métricas de k -Schwarzschild $g_{k,m}$, para $k \geq 1$, $k \neq 3/2$, de tal forma que el dominio $M^n := \{p \in \mathbb{R}^n; |p| \geq R_0\}$ junto con la métrica $g_{k,m}$ es una variedad asintóticamente llana que generaliza al espacio de Schwarzschild y a la que llamaremos k -espacio de Schwarzschild $M_{k,m}^n$.

Teorema 0.7 ([72]). *El índice de Morse de Σ_0 en $M_{1,m}^3$ es 1.*

El resultado que presentamos en la Sección 3.3 generaliza el resultado de Montezuma para k -espacios de Schwarzschild de dimensión 3.

Teorema 0.8. *Si $k \in (1, \frac{3}{2})$ entonces el índice de Morse de $\Sigma_0 \subset M_{k,m}^3$ como superficie mínima con frontera libre es uno. Además, si elegimos m lo suficientemente grande, entonces para todo $k > 1$ el índice de Morse de $\Sigma_0 \subset M_{k,m}^3$ es uno.*

Superficies mínimas verticalmente invariantes en productos semidirectos unimodulares

Es de especial interés el estudio de superficies mínimas, así como de superficies con curvatura media constante (CMC), en las variedades riemannianas tridi-

mensionales más sencillas, por ejemplo en términos de su grupo de isometrías $\text{Iso}(M, g)$. Desde este punto de vista, los espacios con un mayor número de isometrías son los espacios homogéneos. Una variedad riemanniana (M^n, g) (de cualquier dimensión) se dice homogénea si para cualesquiera $p, q \in M$ existe una isometría $\phi : (M, g) \rightarrow (M, g)$ tal que $\phi(p) = q$. Inmediatamente se deduce, gracias al Teorema de Hopf-Rinow, que las variedades homogéneas son también completas. Dentro de las variedades homogéneas, una familia especialmente importante es la dada por los grupos de Lie dotados de métricas invariantes a izquierda, llamados grupos de Lie métricos.

El conjunto de isometrías de una variedad riemanniana (M, g) en sí misma $\text{Iso}(M, g)$ tiene una estructura de grupo con la composición. Si la variedad (M^n, g) es homogénea, $\text{Iso}(M, g)$ tiene estructura de variedad y su dimensión k , cumple $n \leq k \leq n(n+1)/2$. En el caso $n = 3$, esto lleva a $k = 3, 4, 5, 6$. Si nos restringimos al caso simplemente conexo encontramos:

- a) Si la dimensión de $\text{Iso}(M, g)$ es 6, entonces M tiene curvatura seccional constante y, por tanto, es uno de los espacios modelo $\mathbb{M}^3(\kappa)$: el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , la esfera tridimensional \mathbb{S}^3 o el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 .
- b) El caso de dimensión 5 no puede ocurrir por un argumento de álgebra lineal que detallaremos en el Capítulo 1.
- c) Cuando la dimensión de $\text{Iso}(M, g)$ es 4, podremos describir estos espacios a través de una familia biparamétrica dependiendo de dos variables $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$. Son los conocidos como espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Todo espacio $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ admite una submersión de Killing a una superficie modelo $\mathbb{M}^2(\kappa)$, donde κ indica la curvatura de Gauss de dicha superficie forma y τ es la curvatura del fibrado.
- d) En el caso genérico en que la dimensión de $\text{Iso}(M, g)$ es 3, se tiene que (M, g) es isométrico a un grupo de Lie con una métrica donde las traslaciones a izquierda de la estructura de grupo son isometrías.

Los grupos de Lie métricos tridimensionales están clasificados en términos de ciertos invariantes algebraicos [64, 70]. Además, se tiene que, salvo por la variedad producto $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ (que es un caso particular de espacio $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ para $\kappa > 0$ y $\tau = 0$), donde $\mathbb{S}^2(\kappa)$ es la esfera de curvatura constante $\kappa > 0$, toda variedad homogénea simplemente conexa de dimensión 3 es isométrica a un grupo de Lie métrico. Por tanto, la estructura de grupo de Lie métrico que encontramos en d) también se tiene en los otros casos a) y c) salvo por esta excepción.

En los últimos años, los espacios homogéneos tridimensionales han sido de gran importancia, sobre todo con la generalización de ciertos resultados clásicos

de la teoría de superficies mínimas y de curvatura media constante a éstos. Podemos citar, por ejemplo:

- La generalización de la diferencial de Hopf para superficies de curvatura media constante [43] en espacios modelo $\mathbb{M}^3(\kappa)$ a la diferencial de Abresch-Rosenberg [2, 3], con la que se consigue demostrar un teorema tipo Hopf para espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, que nos dice que una inmersión con curvatura media constante de una esfera topológica en un espacio $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ es rotacionalmente simétrica [24].
- La generalización de la correspondencia de Lawson [52], para superficies con curvatura media constante en espacios modelo $\mathbb{M}^3(\kappa)$, a la correspondencia de Daniel [22, 23] para superficies con curvatura media constante en espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.
- La resolución del problema de Bernstein para superficies mínimas en el espacio de Heisenberg $\text{Nil}_3 = \mathbb{E}(0, \tau)$ con $\tau \neq 0$ de Fernández y Mira [29] usando la correspondencia de Daniel entre estas superficies mínimas y las superficies de curvatura media $1/2$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{E}(\kappa, 0)$, $\kappa < 0$.
- Los teoremas de tipo semi-espacio de Mazet [59].
- La clasificación de esferas con curvatura media constante en grupos de Lie métricos por Meeks, Mira, Pérez y Ros en [60, 63].

Dentro de los grupos de Lie métricos tridimensionales simplemente conexos, los productos semidirectos de la forma $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ para una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ son especialmente relevantes ya que cubren todos los casos salvo por el grupo especial unitario $SU(2)$ y el recubridor universal $\tilde{SL}(2, \mathbb{R})$ del grupo especial lineal $SL(2, \mathbb{R})$. En el último capítulo de esta memoria nos centraremos en los grupos de Lie métricos unimodulares que pueden escribirse como producto semidirecto, lo cual es equivalente a exigir $\text{traza}(A) = 0$. El papel fundamental que juega la dirección vertical en $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ justifica el estudio de las superficies en $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ que son invariantes por traslaciones verticales por elementos en el eje vertical $\{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$. Cada una de estas superficies Σ_γ se describe a través de una curva regular (generatriz) de la forma $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0) \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\}$, donde I es un intervalo abierto en \mathbb{R} . No perdemos generalidad parametrizando γ por la longitud del arco, por lo que obtenemos la existencia de una función θ cumpliendo $x'(t) = \cos \theta(t)$, $y'(t) = \sin \theta(t)$, $t \in I$. Cuando imponemos que la superficie Σ_γ que genera γ a través de traslaciones verticales sea mínima, llegamos a un sistema de ecuaciones diferenciales de orden 2 para $x(t)$, $y(t)$, $\theta(t)$, cuyas soluciones

no son, en general, explícitas, pero que nos permitirá estudiar propiedades geométricas de la curva generatriz y, por tanto, de la superficie verticalmente invariante. Ya existían trabajos previos [56, 57] que toman este enfoque para describir superficies invariantes bajo un grupo uniparamétrico de isometrías en Sol_3 (el grupo de movimientos rígidos en el plano de Lorentz-Minkowski que preservan la orientación), el cual se puede escribir como un producto semidirecto. Los resultados que obtenemos para el espacio de Heisenberg Nil_3 , están también contenidos (con un enfoque diferente, no como producto semidirecto) en el artículo de Figueroa, Mercuri y Pedrosa [30]. En el caso de $\tilde{E}(2)$, el recubridor universal del grupo de movimientos rígidos en el plano euclídeo que preservan la orientación, hay una familia 1-paramétrica de métricas invariantes a izquierdas sobre $\tilde{E}(2)$, de las cuales la métrica llana es un caso particular. Cuando fijamos la métrica llana en $\tilde{E}(2)$, obtenemos la siguiente descripción de las superficies mínimas verticalmente invariantes.

Teorema 0.9. *Si $\gamma \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} = \tilde{E}(2)$ es curva generatriz de una superficie mínima verticalmente invariante $\Sigma_\gamma \subset \tilde{E}(2)$ con la métrica llana, entonces el intervalo maximal de definición de γ es \mathbb{R} , y se tiene:*

1. *Si γ pasa por el origen $(0, 0)$, entonces γ es una recta. En otro caso, γ es una curva estrictamente convexa, i.e. la curvatura κ de γ es una función que no se anula.*
2. *Si $(0, 0) \notin \gamma(\mathbb{R})$, entonces:*
 - *$|\kappa(t)| \leq 1/2, \forall t \in \mathbb{R}$, $\kappa(t)$ tiende a 0 cuando $t \rightarrow \pm\infty$ y κ verifica la EDO $\langle \gamma, \gamma' \rangle \kappa + (1 + |\gamma|^2) \kappa' = 0$.*
 - *Dada $B \in SO(2)$, la curva $B\gamma$ también es una curva generatriz de una superficie mínima verticalmente invariante en $\tilde{E}(2)$.*
 - *Existe un único $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\kappa'(t_0) = 0$. Además, la distancia de γ al origen alcanza su único punto crítico en $\gamma(t_0)$, que es su mínimo global, la traza de γ es simétrica con respecto a la reflexión en la recta afín r normal a γ en t_0 y la función soporte ξ de γ tiene un único punto crítico en t_0 .*
 - *Salvo una traslación en t , suponemos que $t_0 = 0$. Entonces, todos los puntos de autointersección de γ ocurren para valores opuestos del parámetro (i.e. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = \pm t_2$) y están todos en r . Además, el ángulo de intersección entre r y γ en t es $\pi/2$ si y sólo si $t = t_0$.*

Observación 0.10. *Las superficies mínimas en $\tilde{E}(2)$ con la métrica llana son superficies mínimas helicoidales en \mathbb{R}^3 . Éstas superficies son la familia asociada a la catenoide [97]. Desde otra aproximación, usamos técnicas de análisis de EDO para describir la curva generatriz γ en este contexto.*

Cuando consideramos $\tilde{E}(2)$ con una métrica invariante a izquierda no llana, algunas de las propiedades del caso anterior se siguen manteniendo, pero otras se pierden. Concretamente, consideramos $\tilde{E}(2)$ con la métrica g_c que lo hace isométrico e isomorfo a $\mathbb{R}^2 \rtimes_{A(c)} \mathbb{R}$ donde

$$A(c) = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1/c & 0 \end{pmatrix}, \quad c \in [1, \infty) \quad (6)$$

(para $c = 1$ se tiene la métrica llana).

Proposición 0.11. *Si $\gamma \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} = (\tilde{E}(2), g_c)$, $c > 1$, es curva generatriz de una superficie mínima verticalmente invariante, entonces el dominio maximal de γ es \mathbb{R} y las siguientes propiedades se cumplen:*

1. *La función $\theta(t)$, es constante si y sólo si γ es el eje x o el eje y .*
2. *κ verifica $|\kappa(t)| \leq c/2$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Además, κ tiende a 0 cuando $t \rightarrow \pm\infty$.*
3. *Si definimos $\hat{\theta} = \arctan(c \tan \theta)$ (para $c = 1$, $(\hat{\theta})'$ es la curvatura de γ), entonces se cumple*

$$(\hat{\theta})' = c \frac{xy' - c^2yx'}{c^2 + x^2 + c^4y^2}.$$

Cabe mencionar aquí el reciente artículo de Zang [98], donde se construyen superficies mínimas y embebidas (y por tanto diferentes de las que presentamos en esta memoria) de tipo helicoidal en $\tilde{E}(2)$. Para ello, la principal herramienta que utiliza es la representación de tipo Weierstrass que introdujeron Meeks, Mira, Pérez y Ros en [60].

También describiremos las superficies verticalmente invariantes con curvatura de Gauss cero en $\tilde{E}(2)$ con la métrica llana. Estas superficies son también superficies llanas en \mathbb{R}^3 invariantes por movimientos helicoidales y estudiadas [5]. En el resto de grupos de Lie métricos unimodulares que pueden escribirse como un producto semidirecto, este tipo de superficies ya habían sido estudiadas: en \mathbb{R}^3 por Hartman y Nirenberg [37], en Nil_3 por Belarbi [9] y en Sol_3 por López y Munteanu [56, 57].

Proposición 0.12. *Sea $\Sigma_\gamma \subset \tilde{E}(2)$ con la métrica llana, una superficie verticalmente invariante con curvatura de Gauss cero.*

- *Si Σ_γ es completa, entonces Σ_γ es un cilindro vertical recto sobre una circunferencia en $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ centrada en el origen (aquí $A = A(c)$ dada por (6) para $c = 1$).*
- *En caso contrario, γ está completamente determinada por $(x_0, y_0, 0) = \gamma(0)$ y un parámetro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, de forma que en coordenadas polares $\gamma = r(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$, el ángulo α viene dado por*

$$\alpha(t) = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \frac{\operatorname{sgn}(a\tau + x_0^2 + y_0^2)}{2a} \left(g(\tau) - a \operatorname{arccot}\left(\frac{a}{g(\tau)}\right) \right) \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t},$$

donde $g(t) = \sqrt{-a^2 + 4at + 4(x_0^2 + y_0^2)}$, el módulo r de γ viene dado por

$$r(t) = \sqrt{at + x_0^2 + y_0^2}, \quad \forall t \in I,$$

y el intervalo maximal de definición I de γ viene dado por:

$$\begin{cases} I = [a/4 - (x_0^2 + y_0^2)/a, \infty) & \text{si } a > 0, \\ I = (-\infty, a/4 - (x_0^2 + y_0^2)/a] & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Preliminares

En este primer capítulo introduciremos la notación, las herramientas y los resultados auxiliares que usaremos en el resto de capítulos.

Sea M^n una variedad diferenciable de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $C^\infty(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de funciones y campos diferenciables (por diferenciable entendemos de clase C^∞) sobre una variedad M . Una conexión afín sobre una variedad diferenciable M es una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que verifica

$$\begin{aligned}\nabla_{fX+gY}Z &= f\nabla_XZ + g\nabla_YZ, \\ \nabla_X(fY + Z) &= X(f)Y + f\nabla_XY + \nabla_XZ,\end{aligned}$$

para todos los campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y funciones $f, g \in C^\infty(M)$.

Una métrica riemanniana g en M es una aplicación que asocia a cada punto $p \in M$ un producto escalar g_p en el espacio tangente T_pM a la variedad en ese punto, de forma diferenciable (dado un abierto $\Omega \subset M$, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$ la función $g(X, Y)$ es diferenciable en Ω). Llamaremos variedad riemanniana al par (M, g) formado por una variedad diferenciable M equipada con una métrica riemanniana g .

Dada una variedad riemanniana (M, g) , existe una única conexión afín ∇ sobre M que es simétrica, es decir,

$$\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

y a la vez compatible con la métrica,

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

A esta conexión ∇ la conocemos por el nombre de conexión de Levi-Civita. A partir de la conexión de Levi-Civita, definimos el operador curvatura R de (M, g) como la aplicación $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

También escribiremos $R(X, Y, Z, W) := g(R(X, Y)Z, W)$, $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

El tensor de Ricci de (M, g) es el campo de tensores $(2, 0)$ simétricos $\text{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ que viene dado por la siguiente contracción de R :

$$\text{Ric} = C_1^4(R).$$

La curvatura escalar ρ de (M, g) viene definida como otra contracción:

$$\rho = C_1^1(\text{Ric}) \in C^\infty(M).$$

Dada una función diferenciable $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$, definimos el gradiente de f como el único campo $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ verificando $g(\nabla f, X) = X(f)$ para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos la divergencia $\text{div}(X)$ de X como la función que a cada punto $p \in M$ le asocia la traza del endomorfismo

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \rightarrow & T_p M \\ v & \mapsto & \nabla_v X \end{array}.$$

El laplaciano Δf de f es la divergencia de su gradiente. Equivalentemente, se puede definir como la traza de su hessiano $\nabla^2 f$, que es el tensor simétrico dado por

$$(\nabla^2 f)(X, Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

1.1. Métricas conformes

Sea M^n una variedad diferenciable. Dos métricas g, \bar{g} en M se dicen conformes si existe una función $f \in C^\infty(M)$ tal que

$$\bar{g} = e^{2f} g.$$

Si consideramos la relación de equivalencia que se genera en el espacio de métricas riemannianas sobre una variedad M con la relación de ser conforme, a cada par $(M, [g])$, donde

$$[g] = \{e^{2f} g : f \in C^\infty(M)\},$$

se le conoce como estructura conforme sobre M .

Existen distintos elementos geométricos que se preservan dentro de una clase conforme, por ejemplo, el ángulo entre cualesquiera dos vectores en el espacio tangente a un punto se conserva, aunque no lo hacen, en general, sus longitudes. Las subvariedades totalmente umbilicales también se preservan cuando hacemos un cambio conforme de métrica.

Definimos una superficie de Riemann como una variedad compleja orientable de dimensión uno. También se puede definir como una superficie orientable junto con una estructura conforme. Una aplicación $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ es un biholomorfismo si f es holomorfa y biyectiva. Diremos que dos superficies de Riemann Σ, Σ' son conformemente equivalentes si entre ellas se puede establecer un biholomorfismo. En relación a superficies de Riemann y estructuras conformes, uno de los resultados básicos más importante es el Teorema de uniformización, probado de forma casi simultánea por Poincaré [80] y Koebe [50] en 1907.

En lo relativo a métricas conformes, las herramientas que vamos a utilizar, principalmente durante el Capítulo 3 de esta memoria, son las relaciones que existen entre los principales operadores ya definidos en este capítulo: gradiente, divergencia, laplaciano, y hessiano. Recogemos aquí estas relaciones.

Proposición 1.1. Sean (M^n, g) una variedad riemanniana, $f \in C^\infty(M)$, y \bar{g} la métrica dada por $\bar{g} = e^{2f}g$. Entonces, se verifica que:

1. $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)\nabla f, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
2. $\bar{\nabla} h = e^{-2f}\nabla h, \forall h \in C^\infty(M)$.
3. $\bar{\nabla}^2 h = \nabla^2 h - \nabla f \otimes \nabla h - \nabla h \otimes \nabla f + g(\nabla f, \nabla h)g, \forall h \in C^\infty(M)$, donde $(\nabla f_1 \otimes \nabla f_2)(X, Y) := g(\nabla f_1, X)g(\nabla f_2, Y)$.
4. $\bar{\text{div}} X = \text{div} X + ng(X, \nabla f), \forall X \in \mathfrak{X}(M)$.
5. $\bar{\Delta} h = e^{-2f}(\Delta h + (n-2)g(\nabla h, \nabla f)), \forall h \in C^\infty(M)$.
6. $e^{2f}\bar{\rho} = \rho - 2(n-1)\Delta f - (n-1)(n-2)|\nabla f|^2,$

donde hemos usado la notación $\bar{\cdot}$ sobre un objeto para indicar que se ha calculado con respecto a la métrica \bar{g} y $\rho, \bar{\rho}$ denotan a la curvatura escalar de (M, g) y (M, \bar{g}) respectivamente.

1.2. Hipersuperficies y fórmula de variación del área

Con frecuencia, presentaremos una superficie riemanniana Σ a través de una inmersión $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ al espacio euclídeo tridimensional o a una 3-variedad riemanniana $(\overline{M}^3, \langle, \rangle)$ y tomaremos en Σ la métrica g inducida por la métrica ambiente \langle, \rangle , de forma que $X : (\Sigma, g) \looparrowright (\overline{M}^3, \langle, \rangle)$ sea una inmersión isométrica. De hecho, abusando del lenguaje, identificaremos con frecuencia a Σ con su imagen a través de la inmersión X . De forma más general, si $f : (M^n, g) \looparrowright (\overline{M}^m, \overline{g})$ es una inmersión isométrica entre dos variedades riemannianas y denotamos por $\mathfrak{X}^\perp(M) = \{\xi \in C^\infty(M, T\overline{M}) : \xi_p \perp df_p(T_p M) \ \forall p \in M\}$ al fibrado normal de la inmersión, entonces se tienen

$$\overline{\nabla}_{df(X)} df(Y) = df(\nabla_X Y) + \sigma(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

$$\overline{\nabla}_{df(X)} \xi = -df(A_\xi X) + \nabla_\xi^\perp X, \quad X \in \mathfrak{X}(M), \quad \xi \in \mathfrak{X}^\perp(M),$$

que son las ecuaciones de Gauss y Weingarten respectivamente. Hemos usado la notación $\nabla, \overline{\nabla}$ para hacer referencia a las conexiones de Levi-Civita de (M, g) y $(\overline{M}, \overline{g})$ respectivamente. Con $\sigma : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(M)$ estamos denotando a la segunda forma fundamental de la inmersión y con $A_\xi : TM \rightarrow TM$ al endomorfismo de Weingarten asociado a $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M)$.

Definición 1.2. Una inmersión isométrica $f : (M^n, g) \looparrowright (\overline{M}^m, \overline{g})$ se dice *mínima* si su vector curvatura media

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \text{traza}(\sigma),$$

es idénticamente nulo.

Cuando M es una hipersuperficie (por hipersuperficie inmersa siempre entenderemos $f : (M^n, g) \looparrowright (\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$), dados $p \in M$ y $\eta \in (T_p M)^\perp$, $|\eta| = 1$ (η es único salvo el signo), si consideramos el endomorfismo de Weingarten $A_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$, entonces A_η es autoadjunto respecto a g , y existe una base g -ortonormal de vectores propios $\{e_1, \dots, e_n\}$ de A_η en $T_p M$. Cuando tanto M como \overline{M} son orientables, el vector η se puede escoger de forma única si exigimos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ sean bases positivamente orientadas. En este caso, los valores propios k_1, \dots, k_n de A_η se conocen como curvaturas principales respecto de η . De ellas se obtiene la curvatura media (escalar) $H = \frac{1}{n}(k_1 + \dots + k_n)$ y la curvatura de Gauss-Kronecker $K = k_1 \cdots k_n$.

Si consideramos hipersuperficies en \mathbb{R}^n , la relación que existe entre curvaturas principales y curvatura media de una hipersuperficie, calculadas con la métrica usual \langle, \rangle , frente a las calculadas con una métrica conforme $\bar{g} = e^{2f}\langle, \rangle$ al producto escalar usual \langle, \rangle para cierta $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 1.3. *Sea $\Sigma^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$ una hipersuperficie y sea $\bar{g} = e^{2f}\langle, \rangle$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ una métrica conforme a \langle, \rangle . Si ξ es un campo normal unitario respecto a \langle, \rangle y con \bar{g} consideramos el campo normal unitario $\bar{\xi} = e^{-f}\xi$, entonces*

$$\bar{k}_i = e^{-f}(k_i - \xi(f)), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (1.1)$$

donde k_i y \bar{k}_i , $i = 1, \dots, n-1$ son las curvaturas principales de Σ calculadas con respecto a la métrica \langle, \rangle y \bar{g} , respectivamente. En particular, $\bar{H} = e^{-f}(H - \xi(f))$.

Además, en el caso en que $\Sigma \looparrowright (\mathbb{R}^3, \bar{g})$ sea mínima se tiene

$$|\bar{A}|_{\bar{g}}^2 = e^{-2f} (|A|_{\langle, \rangle}^2 - 2H^2), \quad (1.2)$$

donde H denota a la curvatura media de M con respecto a la métrica usual y $|A|_{\langle, \rangle}$ y $|\bar{A}|_{\bar{g}}$ denotan a la norma del endomorfismo de Weingarten respecto a \langle, \rangle y \bar{g} , respectivamente.

Demostración: Para la primera afirmación, denotemos por e_1, \dots, e_{n-1} a las direcciones principales (i.e. $A(e_i) = k_i e_i$, $i = 1, \dots, n-1$). Éstas se relacionan con las direcciones principales $\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{n-1}$ de la siguiente forma:

$$\bar{e}_i = \frac{e_i}{e^f}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{e^f},$$

donde $\bar{\xi}$ es un vector normal unitario con respecto a \bar{g} , que apunta en el mismo sentido que ξ . Entonces,

$$\begin{aligned} e^{2f}\bar{k}_i &= \bar{g}(\bar{A}(e_i), e_i) = -\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i}\bar{\xi}, e_i) \\ &= -\bar{g}(\nabla_{e_i}\bar{\xi} + e_i(f)\bar{\xi} + \bar{\xi}(f)e_i - \langle e_i, \bar{\xi} \rangle \nabla f, e_i) \\ &= -\bar{g}(\nabla_{e_i}\bar{\xi}, e_i) + \bar{\xi}(f)\bar{g}(e_i, e_i) \\ &= (e^{-f}k_i - e^{-f}\xi(f))e^{2f}, \quad i = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

lo que prueba (1.1). La fórmula $\bar{H} = e^{-f}(H - \xi(f))$ se deduce directamente de (1.1).

Para probar (1.2), partimos de (1.1). Como $\bar{H} = 0$, obtenemos

$$0 = e^{-f}(H - \xi(f)) \Rightarrow H = \xi(f).$$

Usando esta igualdad y la relación entre las curvaturas principales conseguimos:

$$\begin{aligned} |\bar{A}|_g^2 &= e^{-2f} ((k_1 - H)^2 + (k_2 - H)^2) \\ &= e^{-2f} (k_1^2 + k_2^2 - 2H^2) = e^{-2f} (|A|_{\langle, \rangle}^2 - 2H^2). \end{aligned}$$

□

Sean (x_1, x_2, x_3) las funciones coordenadas de una inmersión isométrica $X : (\Sigma^2, g) \looparrowright (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$. Si definimos $\Delta X := (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$ entonces se tiene

$$\Delta X = 2HN, \quad (1.3)$$

donde $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la aplicación de Gauss de X . Por tanto, las funciones coordenadas de una inmersión conforme mínima en $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ son armónicas. Se trata de un vínculo fundamental que enlaza la teoría de superficies mínimas en el espacio euclídeo y el análisis complejo y las EDP's. Otro vínculo profundo con el análisis viene dado por el siguiente teorema, que es una versión geométrica del teorema homónimo en el ámbito del análisis.

Teorema 1.4 (Principio de reflexión de Schwarz, [39]). *Sea $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ una superficie mínima que contiene un segmento de recta s . Entonces, Σ es invariante por la rotación de ángulo π alrededor de la recta $r \subset \mathbb{R}^3$ que contiene a s .*

Como ya hemos explicado en la introducción, es clásico introducir las superficies mínimas como puntos críticos del funcional área. Por simplicidad, lo hacemos para $n = 2$ y en \mathbb{R}^3 (para el caso general se puede consultar [4]). Consideramos $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ una inmersión orientable en el espacio euclídeo, con aplicación de Gauss $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Sigma)$ a las funciones diferenciables en Σ con soporte compacto. Sea F una variación normal de Σ con soporte compacto, dada como

$$\begin{aligned} F : \Sigma \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (p, t) &\mapsto F(p, t) = X(p) + tf(p)N_p, \end{aligned}$$

para cierta función $f \in C_0^\infty(\Sigma)$.

Consideremos la función $F_t : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F_t(p) = F(p, t)$, $p \in \Sigma$. Existe un $\varepsilon > 0$ tal que, para $|t| < \varepsilon$, F_t es una inmersión. Denotamos por g_t a la métrica pullback por F_t del producto escalar usual en \mathbb{R}^3 : $g_t = F_t^* \langle, \rangle$. El funcional área sobre un abierto relativamente compacto $\Omega \subset \Sigma$ tal que $\text{sop}(f) \subset \Omega$ viene dado por

$$\begin{aligned} \text{Area} : (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \text{Area}(t) := \int_{\Omega} dv_{g_t}. \end{aligned}$$

Proposición 1.5 (Primera fórmula de variación del área, [4]). Sean $X : (\Sigma, g) \looparrowright (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una inmersión isométrica de una superficie orientable Σ , con aplicación de Gauss N , $f \in C_0^\infty(\Sigma)$ y $\Omega \subset \Sigma$ un abierto relativamente compacto con $\text{sop}(f) \subset \Omega$. Entonces, se tiene

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Area}(t) = -2 \int_{\Omega} f H dA,$$

donde H es la curvatura media de Σ respecto de N y dA es el elemento de área asociado a la métrica g .

En vista de la primera fórmula de variación del área, las superficies mínimas se caracterizan como los puntos críticos del funcional área.

Corolario 1.6. Sea $X : \Sigma^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ una inmersión. Entonces X es mínima si y sólo si $A'(0) = 0$ para toda variación normal de X con soporte compacto.

Ahora admitimos que la superficie $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ pueda tener borde, y tomamos una métrica arbitraria \bar{g} sobre \mathbb{R}^3 . Llamamos variación con campo variacional $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ a la función $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(p, t) = X(p) + tY_p$, $p \in \Sigma$, $t \in \mathbb{R}$. Con ello, la primera fórmula de variación del área con borde se escribe como sigue.

Teorema 1.7 (Primera fórmula de variación del área con borde). Sea $X : \Sigma^2 \rightarrow (\mathbb{R}^3, \bar{g})$ una inmersión de una superficie con borde Σ en (\mathbb{R}^3, \bar{g}) y sea Y un campo vectorial con soporte compacto. Si $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ es una variación de Σ con campo variacional Y , entonces

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Area}(t) = -2 \int_{\Sigma} g(Y, \vec{H}) dA + \int_{\partial \Sigma} g(Y, \eta) ds, \quad (1.4)$$

donde $\eta \in C^\infty(\partial \Sigma, T\Sigma)$ es el conormal unitario exterior a lo largo $\partial \Sigma$, \vec{H} es el vector curvatura media y dA y ds son los correspondientes elementos de área y longitud asociados a la métrica inducida en Σ y $\partial \Sigma$ (respectivamente) por la métrica \bar{g} .

Dada una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con frontera diferenciable $S = \partial \Omega$, consideramos el caso $\Sigma \subset \Omega$ con $\partial \Sigma \subset S$ (estamos abusando del lenguaje e identificando a Σ con su imagen a través de la inmersión $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$) y tomamos variaciones con campos variacionales Y que sean tangentes a S . Entonces, de (1.4) se deduce que Σ es un punto crítico para el funcional área para este tipo de variaciones si y sólo si Σ es mínima y además interseca a S a lo largo de su borde de forma ortogonal. A dichas superficies se las denomina superficies mínimas en (Ω, \bar{g}) con frontera libre.

1.3. Representación de Weierstrass

Tal y como se ha mencionado en la introducción, fue Weierstrass [95] quien en 1860 introdujo por primera lo que ahora se conoce como representación de Weierstrass para superficies mínimas en $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Lo hizo de forma casi coetánea a Enneper (1864, [27]) y es por ello que también se la conoce como representación de Enneper-Weierstrass. La forma de presentarla aquí es más reciente y es debida a Osserman [77].

Sea $X = (x_1, x_2, x_3) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión mínima. Tomaremos $(\Omega, (x, y))$ parámetros locales isotermos, es decir, parámetros para los que la métrica inducida ds^2 en Σ por la métrica usual de \mathbb{R}^3 tenga la forma $ds^2 = E(dx^2 + dy^2)$, y usaremos la notación $z = x + iy$ (coordenada local holomorfa). Observemos que toda superficie riemanniana admite una parametrización conforme (Chern [15], 1955), lo que en particular implica que toda superficie riemanniana orientable admite una parametrización como superficie de Riemann. Si definimos en Ω las funciones holomorfas

$$\phi_j = \frac{\partial x_j}{\partial x} - i \frac{\partial x_j}{\partial y}, \quad j = 1, 2, 3,$$

entonces a la forma $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)dz$ se la denomina forma de Weierstrass asociada a X y está globalmente definida en Σ . Otra forma de introducir Φ es la siguiente: sea $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, la aplicación cuyas coordenadas son las conjugadas armónicas de (x_1, x_2, x_3) , que están bien definidas en un recubridor de Σ . Entonces, $d(X + iX^*)$ está bien definida en Σ , es una diferencial holomorfa valuada en \mathbb{C}^3 , y

$$d(X + iX^*) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} - i \frac{\partial X}{\partial y} \right) dz = 2 \frac{\partial X}{\partial z} dz$$

globalmente en Σ . Así, $\Phi = 2 \frac{\partial X}{\partial z} dz$ en Σ .

Como las coordenadas x_j de X son armónicas, se deduce que las funciones ϕ_j , $j = 1, 2, 3$, son holomorfas en Ω . Como (x, y) son parámetros isotermos, se tiene que

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial x} \right|^2 - \left| \frac{\partial X}{\partial y} \right|^2 - 2i \left\langle \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y} \right\rangle = 0,$$

$$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial X}{\partial y} \right|^2 = 2E.$$

Bajo estas condiciones, es fácil probar que existe una función f holomorfa en Ω (usamos la notación $f \in \mathcal{H}(\Omega)$) y una función meromorfa g ($g \in \mathcal{M}(\Omega)$) de

forma que, salvo por el caso en que $\phi_1 = i\phi_2$ y $\phi_3 = 0$, las funciones ϕ_j , $j = 1, 2, 3$ pueden escribirse como

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi_3 = fg. \quad (1.5)$$

Esto prueba que, al menos en Ω , o también para el caso en que Σ es simplemente conexa, podemos recuperar la inmersión X como

$$X(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (\phi_1, \phi_2, \phi_3) dz + C, \quad (1.6)$$

siendo $z_0 \in \Sigma$ y $C \in \mathbb{R}^3$, donde ϕ_j , $j = 1, 2, 3$, vienen dadas por (1.5). Nos hemos restringido aquí al caso simplemente conexo para que la integral en (1.6) no dependa del camino elegido. De hecho, en general, $\int_{\Gamma} \Phi$ es un invariante en el primer grupo de homología de Σ , $H_1(\Sigma)$.

El recíproco es cierto, es decir, partiendo de funciones $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ cumpliendo que si $z_0 \in \Omega$ es un polo de g de orden m entonces z_0 es un cero de f de orden $2m$, podemos construir una inmersión mínima $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ a través de (1.6), supuesto que

$$\operatorname{Per}(\Gamma) := \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \Phi = 0, \quad \forall [\Gamma] \in H_1(\Sigma). \quad (1.7)$$

(nótese que esta condición es necesaria para que X esté bien definida). Al vector $\operatorname{Per}(\Gamma)$ lo llamaremos período de X asociado a $[\Gamma]$ y, si se cumple (1.7), diremos que los datos de Weierstrass (g, f) cierran períodos. Al hecho de comprobar que dos funciones $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ cierran períodos se le conoce en la literatura como resolver un problema de períodos. Además, la función g que aparece en (1.5) resulta ser, salvo composición con la proyección estereográfica, la aplicación de Gauss N de la inmersión X , es decir

$$N = \left(\frac{2\operatorname{Re}(g)}{1 + |g|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(g)}{1 + |g|^2}, \frac{|g|^2 - 1}{1 + |g|^2} \right). \quad (1.8)$$

Una inmersión ramificada es una aplicación $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida sobre una superficie que es inmersión salvo por un conjunto discreto de puntos. En el caso mínimo y con la notación del desarrollo anterior, estos puntos van a ser aquellos que anulen la expresión $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2$ y se les llamará puntos de ramificación.

De forma más general y rigurosa, la representación de Weierstrass se explica en el siguiente resultado.

Teorema 1.8 (Representación de Weierstrass, [77]). *Sea $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ una inmersión mínima, conforme y orientable con aplicación de Gauss $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$. Entonces, existe una función $g \in \mathcal{M}(\Sigma)$ y una 1-forma holomorfa ω definida en Σ , que permiten recuperar la inmersión X como*

$$X = \operatorname{Re} \int (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad (1.9)$$

con

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\omega, \quad \phi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)\omega, \quad \phi_3 = g\omega, \quad (1.10)$$

y además g es la aplicación de Gauss de X tras proyectarla estereográficamente.

Recíprocamente, sea $g \in \mathcal{M}(\Sigma)$ y ω una 1-forma holomorfa en Σ , que cumplen

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = 0,$$

para cualquier curva cerrada Γ contenida en Σ , donde ϕ_j , $j = 1, 2, 3$, vienen dadas por (1.10). Entonces, la aplicación dada por (1.9) es una inmersión mínima conforme posiblemente ramificada en \mathbb{R}^3 , cuya aplicación de Gauss (salvo proyección estereográfica) viene dada por g .

Definición 1.9. Al par (g, ω) que aparece en el Teorema 1.8 se le denomina datos de Weierstrass de X .

En función de los datos de Weierstrass podemos extraer expresiones para distintos elementos geométricos de la inmersión que generan. Ponemos algunos ejemplos.

- La métrica riemanniana ds^2 inducida en Σ se escribe como

$$ds^2 = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial X}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial X}{\partial y} \right|^2 \right) |dz|^2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 = \frac{1}{4} (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2,$$

donde estamos notando por (x, y) a los parámetros isoterms.

Podemos detectar los puntos de ramificación de X como aquellos puntos que anulan $|ds|^2$. De manera equivalente, tenemos que X definida en (1.9) es inmersión si y sólo si se verifica la siguiente propiedad: $z_0 \in \Sigma$ es un cero o polo de g de orden m si y sólo si z_0 es un cero de ω de orden $2m$.

- Las curvaturas principales para la aplicación de Gauss N dada por (1.8) son

$$\frac{k_1}{|dz|} = \frac{4|dg|}{|\omega|(1 + |g|^2)^2}, \quad \frac{k_2}{|dz|} = \frac{-4|dg|}{|\omega|(1 + |g|^2)^2},$$

donde $dg = g'(z)dz$.

- El producto de las dos expresiones anteriores nos proporciona la curvatura de Gauss K que viene dada por:

$$\frac{K}{|dz|^2} = - \left(\frac{4|dg|}{|\omega|(1+|g|^2)^2} \right)^2 \leq 0.$$

Que la curvatura de Gauss no pueda tomar valores positivos es una propiedad elemental que podemos deducir de la desigualdad $H^2 - K \geq 0$ que se cumple para cualquier superficie de \mathbb{R}^3 .

Otra manera equivalente de expresar la fórmula (1.9) de la representación de Weierstrass es la siguiente:

$$X(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} - g \right) dh, \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g} + g \right) dh, dh \right) + C, \quad (1.11)$$

donde $z_0 \in \Sigma$, $C \in \mathbb{R}^3$, y $dh = g\omega$ es la llamada diferencial altura, ya que cumple $\operatorname{Re} \int dh = x_3$.

1.3.1. Familia asociada

Consideremos una inmersión mínima, conforme y orientable $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ con datos de Weierstrass (g, ω) . Se define la aplicación flujo de X como

$$\text{Flujo}(\Gamma) = \operatorname{Im} \int_{\Gamma} (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad (1.12)$$

donde ϕ_j , $j = 1, 2, 3$ vienen dadas por (1.10) y $\Gamma \subset \Sigma$ es una curva cerrada. De nuevo el flujo sólo depende de la clase de homología de Γ , y por tanto la aplicación flujo está definida en $H_1(\Sigma)$.

En este contexto, dado $\theta \in [0, 2\pi)$, la inmersión X_θ dada por

$$X_\theta : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3 : X_\theta(z) = \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \int_{z_0}^z (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \right),$$

en caso de estar bien definida, se dice que es una inmersión asociada a X . Las inmersiones asociadas a X son, en particular, localmente isométricas a X . A la inmersión $X_{\frac{\pi}{2}}$ se la denomina inmersión conjugada o, abusando del lenguaje, superficie conjugada. Usaremos la notación $X^* := X_{\frac{\pi}{2}}$ para referirnos a la superficie conjugada de X . Es fácil ver que el flujo de X a lo largo de una curva $\Gamma \subset \Sigma$ coincide con el opuesto del período de X^* a lo largo de dicha curva.

Por tanto, la superficie conjugada (y también la familia asociada) estarán bien definidas siempre que comprobemos que la aplicación flujo, definida sobre $H_1(\Sigma)$, se anula. La siguiente propiedad será relevante para la descripción de la familia de superficies de Henneberg generalizadas que daremos en el Capítulo 2.

Propiedad: Sea $\gamma \subset \Sigma$ una curva plana de simetría para una inmersión mínima $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $X^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ está bien definida. Entonces, $X^*(\gamma)$ es un segmento de recta contenido en la superficie conjugada $X^*(\Sigma^*)$.

En el caso en que X sea una inmersión ramificada y que la curva γ tenga por extremos dos puntos de ramificación de X , entonces en la superficie conjugada X^* se observará un segmento entre puntos de ramificación. Usaremos esta propiedad en la descripción de la superficie de Henneberg clásica en la Sección 2.4.

1.3.2. Ejemplos

Veamos algunos de los ejemplos clásicos que podemos generar con distintos datos de Weierstrass.

- Si tomamos $\Sigma = \mathbb{C}$ y los datos de Weierstrass $g = 0$, $\omega = dz$, se tiene

$$X(z) = \left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{2}, -\frac{\operatorname{Im}(z)}{2}, 0 \right),$$

que es una parametrización del plano $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$.

- Tomando $\Sigma = \mathbb{C}^*$ y los datos de Weierstrass $g(z) = z$, $\omega = \frac{dz}{z^2}$, conseguimos

$$X(z) = \left(-\frac{\operatorname{Re}(z)}{2} \left(1 + \frac{1}{|z|^2} \right), -\frac{\operatorname{Im}(z)}{2} \left(1 + \frac{1}{|z|^2} \right), \log(|z|) \right),$$

que en coordenadas polares $z = re^{it}$ se escribe

$$X(re^{it}) = \left(-\frac{1+r^2}{2r} \cos(t), -\frac{1+r^2}{2r} \sin(t), \log(r) \right),$$

que parametriza a una catenoide (ver Figura 1.1 izquierda).

- Tomando $\Sigma = \mathbb{C}^*$ y los datos de Weierstrass $g(z) = z$, $\omega = \frac{idz}{z^2}$ conseguimos

$$X(z) = \left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{2} \left(1 - \frac{1}{|z|^2} \right), -\frac{\operatorname{Re}(z)}{2} \left(1 - \frac{1}{|z|^2} \right), -\arg(z) \right),$$

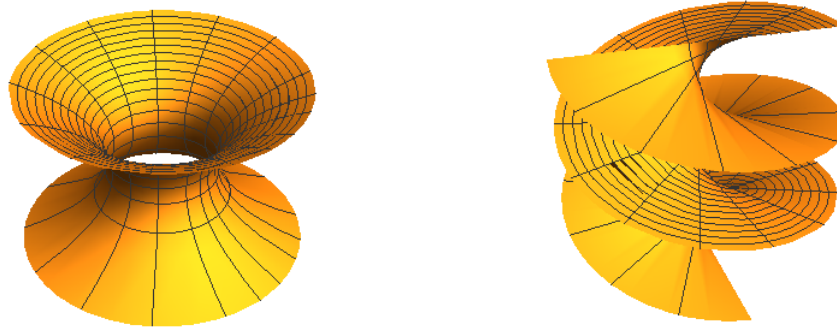


Figura 1.1: Izquierda: catenoide. Derecha: helicoid.

donde $\arg(z)$ denota al argumento principal de $z \in \mathbb{C}$. En coordenadas polares $z = re^{it}$, dicha expresión se escribe como

$$X(re^{it}) = \left(\frac{r^2 - 1}{2r} \sin(t), -\frac{r^2 - 1}{2r} \cos(t), -t \right).$$

Se trata de la parametrización de un helicoid (ver Figura 1.1 derecha). La relación que existe entre los datos de Weierstrass de la catenoide y el helicoid nos dicen que éstas son superficie conjugadas. En el helicoid, la curva $\{|z| = 1\}$ produce un periodo $(0, 0, 2\pi)$, por lo que si queremos representarlo de forma univaluada debemos hacerlo sobre el recubridor universal de \mathbb{C}^* :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ \xi &\mapsto e^\xi. \end{aligned}$$

- Como último ejemplo, si tomamos $\Sigma = \mathbb{C}$ y los datos de Weierstrass $g(z) = z$ y $\omega = z dz$, obtenemos una superficie no embebida, conocida como superficie de Enneper (ver Figura 1.2). En coordenadas polares $z = re^{it}$, podemos parametrizarla como

$$X(re^{it}) = \left(r \cos t - \frac{r^3}{3} \cos(3t), -r \sin t - \frac{r^3}{3} \sin(3t), r^2 \cos(2t) \right).$$

La superficie de Enneper tiene aplicación flujo idénticamente cero y es autoconjugada, es decir, su superficie conjugada coincide con ella misma como conjunto de puntos en \mathbb{R}^3 (de hecho toda su familia de superficies asociadas coincide con ella misma).

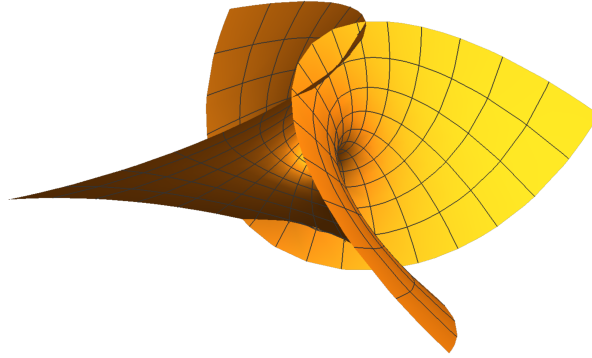


Figura 1.2: Superficie de Enneper.

1.4. Problema de Björling

Recordamos ahora los conceptos fundamentales sobre lo que se conoce como problema de Björling y que serán usados en el Capítulo 2. En 1844, Björling se preguntó si era posible encontrar una superficie mínima que contuviese a una curva prefijada y fuese tangente a un campo sobre ella. Una de las primeras soluciones a este problema fue dada por Schwarz en [89] y refinada posteriormente por Nitsche en [75].

Dada una curva analítica $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, una extensión holomorfa de γ es una aplicación analítica compleja $\tilde{\gamma} : O \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida en un abierto $O \subset \mathbb{C}$ con $I \subset O$ y con $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(u)$ para todo $u \in I$. Dicha extensión siempre existe y es única [1].

Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva analítica regular y η un campo de vectores analítico a lo largo de γ de forma que $\langle \gamma'(t), \eta(t) \rangle = 0$ y $|\eta(t)| = 1$ para todo $t \in I$. El resultado clásico, conocido como problema de Björling, afirma que la siguiente parametrización genera una superficie mínima Σ que contiene a γ y tiene a η como vector normal unitario a lo largo de γ [75]:

$$X(u, v) = \operatorname{Re} \left(\tilde{\gamma}(w) - i \int_{w_0}^w \tilde{\eta}(w) \times \tilde{\gamma}'(w) dw \right), \quad (1.13)$$

donde $\tilde{\gamma}, \tilde{\eta}$ son extensiones holomorfas de las correspondientes γ, η y $w = u + iv$ está definida en un abierto Ω con $I \subset \Omega$. En particular, la superficie Σ es localmente única alrededor de γ con estos datos, y es llamada solución al problema de Björling con datos γ, η .

Durante el Capítulo 2, consideraremos diferentes problemas de Björling para curvas analíticas planas $\gamma \subset \{z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ que no son regulares en un conjunto

finito de puntos. La construcción ya mencionada en esta sección se puede aplicar a cada uno de los arcos regulares de dicha curva que se forman cuando no consideramos los ceros de γ' . Además, en todas nuestras aplicaciones, tomaremos η como una de las dos elecciones del vector normal unitario a γ como curva plana. En el caso particular en que γ es una curva plana en \mathbb{R}^2 , una demostración sencilla de que la fórmula de Björling (1.13) parametriza a una superficie mínima Σ donde $\gamma \subset \Sigma$ es una geodésica se puede encontrar en [1].

1.5. Superficies mínimas completas con curvatura total finita en \mathbb{R}^3

Las superficies mínimas orientables y completas con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 han sido ampliamente estudiadas dentro del espacio de superficies mínimas, especialmente tras los resultados de Osserman [77, 78] para esta clase de superficies, por su relación con el análisis complejo.

Definición 1.10. *Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Definimos la curvatura total de Σ , que denotamos por $C(\Sigma)$, como:*

$$C(\Sigma) = \int_{\Sigma} K dA,$$

donde K denota a la curvatura de Gauss de Σ y dA es el elemento de área asociado a la métrica inducida en Σ por la métrica usual de \mathbb{R}^3 . En el caso en que Σ sea mínima, $C(\Sigma) \in [-\infty, 0]$ y diremos que Σ tiene curvatura total finita si $C(\Sigma) > -\infty$.

Los ejemplos más sencillos de superficies mínimas completas con curvatura total finita son el plano (curvatura 0) y la catenoide (curvatura total -4π).

Si Σ es orientable y denotamos por N a la aplicación de Gauss de Σ , llamamos imagen esférica de Σ al conjunto $N(\Sigma) \subset \mathbb{S}^2(1)$. Por la fórmula del área, la curvatura total coincide, salvo el signo, con el área de la imagen esférica de Σ , contando multiplicidades.

A continuación exponemos algunos de los resultados más relevantes referidos a superficies mínimas completas y orientables de curvatura total finita en \mathbb{R}^3 , que usaremos más adelante.

Teorema 1.11 ([44]). *Sea $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión mínima, orientable, completa y con curvatura total finita. Entonces, Σ es conforme a una superficie*

de Riemann compacta $\bar{\Sigma}$ menos una cantidad finita de puntos $p_1, \dots, p_r \in \bar{\Sigma}$, $r \geq 1$. Además, si (g, ω) son los datos de Weierstrass de $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$, entonces g y ω se extienden de forma meromorfa a $\bar{\Sigma}$.

Los puntos p_i , $i = 1, \dots, r$, del Teorema 1.11 se denominan finales de Σ . Llamaremos compactificación conforme de Σ a la superficie de Riemann $\bar{\Sigma}$ del Teorema 1.11.

El resultado anterior nos permite definir el grado de la aplicación de Gauss g (salvo proyección estereográfica) de una superficie mínima, completa, con curvatura total finita $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ con datos de Weierstrass (g, ω) como el grado de la extensión meromorfa $G : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ de g . Como la curvatura total coincide salvo un signo con el área de la imagen esférica, tenemos

$$C(\Sigma) = -4\pi \text{grado}(G),$$

lo que en particular nos dice que la curvatura total de una superficie mínima orientable y completa en \mathbb{R}^3 no puede tomar cualquier valor real menor o igual que cero, sino que toma valores en $\{-4\pi k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

En esta situación, como consecuencia de que g se extiende de forma meromorfa, se define el plano tangente en el infinito para un final $p = p_i$ de Σ como el plano de \mathbb{R}^3 pasando por el origen cuyo vector normal es igual al límite de vectores normales de cualquier sucesión de puntos $\{q_k\}_k \subset \bar{\Sigma} \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$ tal que $\{q_k\} \rightarrow p$.

Si nos restringimos a superficies embebidas (de hecho es suficiente que los finales sean embebidos), los finales de una superficie mínima con curvatura total finita pueden ser asintóticos o bien a una semicatenoide (final de tipo catenoidal) o a un plano (final de tipo plano) [88]. En términos de la representación de Weierstrass, la disyuntiva anterior se refleja de la siguiente forma. Tras una rotación de \mathbb{R}^3 de manera que el vector normal en el límite cuando nos aproximamos a un final sea $(0, 0, -1)$, podemos usar el disco punteado $\{0 < |z| < \varepsilon\}$ para parametrizar un entorno de Σ alrededor del final usando los datos de Weierstrass

$$g(z) = z^k, \quad \omega = z^k \left(\frac{a}{z^2} + h(z) \right) dz,$$

para ciertos $k \geq 1$, h función holomorfa y $a \in \mathbb{C} - \{0\}$. El caso $k = 1$ corresponde a un final de tipo catenoidal y, en este caso, la constante a es real y se la conoce como crecimiento logarítmico del final. Por otro lado, el caso $k \geq 2$ se tiene para los finales de tipo plano.

Es un resultado ya clásico que la catenoide y la superficie de Enneper son las dos únicas superficies mínimas completas y orientables en \mathbb{R}^3 con curvatura

total -4π , [77]. Para ver una clasificación superficies mínimas completas con curvatura total finita mayor o igual que -8π o mayor o igual que -12π , el lector puede consultar [61] o [55] respectivamente.

Otro resultado importante sobre superficies mínimas completas y con curvatura total finita, que se deriva de la fórmula de Gauss-Bonnet, es la conocida como fórmula de Jorge-Meeks, que se puede enunciar como sigue.

Teorema 1.12 ([46]). *Sea $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ una inmersión completa, mínima, orientable, con curvatura total finita y con $r \geq 1$ finales. Entonces,*

$$C(\Sigma) \leq 2\pi(\chi(\Sigma) - r),$$

donde $\chi(\Sigma)$ es la característica de Euler de Σ . Además, la igualdad se da cuando Σ es embebida en entornos de sus finales.

Existe una versión del Teorema 1.12 en la que la desigualdad anterior se traduce en igualdad incluso en el caso en que los finales son no embebidos [46], y que tiene en cuenta la multiplicidad de cada final al escribirlo como multigrafo sobre el plano tangente límite.

1.6. Principio del Máximo

El principio del máximo es un resultado muy empleado en la teoría de superficies mínimas. Localmente, podemos expresar cualquier superficie de \mathbb{R}^3 como grafo sobre su plano tangente en un punto. Como se dijo en la introducción, si la superficie es mínima entonces, localmente, podremos expresarla como una solución f de la ecuación:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} + (1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} = 0, \quad (1.14)$$

donde los subíndices indican derivadas parciales. Se establece así una relación entre la teoría de superficies mínimas y la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. En este caso, la ecuación (1.14) es una ecuación cuasilineal, simétrica y elíptica.

A lo largo de esta sección, denotaremos por $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a un dominio relativamente compacto que sea regular, es decir, el borde de Ω es unión disjunta y finita de curvas de Jordan regulares.

Definición 1.13. *Un operador $Q : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ se dice que es cuasilineal y simétrico si puede escribirse de la forma:*

$$Q(f) = \langle B(\nabla f), \nabla^2 f \rangle + \langle b(\nabla f), \nabla f \rangle,$$

donde $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2(\mathbb{R})$ es una función diferenciable de \mathbb{R}^2 en las matrices simétricas de orden 2, $S_2(\mathbb{R})$ y $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es también diferenciable. Además, Q se dice elíptico cuando B es definida positiva en cada punto.

El operador curvatura media, dado por

$$H = \frac{1}{2(1 + |\nabla f|^2)^{3/2}} \left((1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} \right),$$

es un operador cuasilineal, simétrico y elíptico porque se puede escribir de la forma $H(f) = \langle B(\nabla f), \nabla^2 f \rangle$ para $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2(\mathbb{R})$ dada por

$$B(x, y) = \frac{1}{2(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 + y^2 & -xy \\ -xy & 1 + x^2 \end{pmatrix}.$$

Para los operadores cuasilineales simétricos y elípticos es bien conocido, dentro de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, el siguiente resultado clásico, conocido como principio del máximo. Para ver más detalles, el lector puede consultar [35].

Teorema 1.14 (Principio del máximo para EDP's cuasilineales elípticas). *Sea Q operador cuasilineal simétrico y elíptico en un dominio regular relativamente compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $f, g \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tales que $Qf \geq Qg$ en Ω . Se verifica:*

1. Si $f - g$ alcanza su máximo en Ω , entonces $f - g$ es constante.
2. Si $f - g$ alcanza su máximo en $\partial\Omega$, entonces o bien $f - g$ es constante o bien $\frac{\partial f}{\partial \eta} > \frac{\partial g}{\partial \eta}$, donde η denota al conormal exterior unitario a Ω a lo largo de $\partial\Omega$.
3. Si $f \leq g$ en $\partial\Omega$, entonces $f \leq g$ en Ω .
4. Si $f = g$ en $\partial\Omega$ y $Qf = Qg$ en Ω , entonces $f = g$ en Ω .

Sean $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies orientables sin borde en \mathbb{R}^3 . Supongamos que existe un punto $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ donde dichas superficies son tangentes. Entonces, existe un entorno común Ω de 0 en $T_p \Sigma_1 = T_p \Sigma_2$ donde ambas superficies se pueden representar como grafo sobre Ω . Elegimos aplicaciones de Gauss N_1, N_2 para Σ_1 y Σ_2 cumpliendo $N_1(p) = N_2(p)$. Si f_1, f_2 denotan a dichas funciones grafo para las superficies Σ_1, Σ_2 respectivamente, diremos que Σ_1 está a un lado de Σ_2 alrededor de p si se cumple $f_1 \leq f_2$ o bien $f_2 \leq f_1$ en Ω . En tal caso escribiremos $\Sigma_1 \leq \Sigma_2$ o bien $\Sigma_2 \leq \Sigma_1$, respectivamente.

El Principio del máximo para ecuaciones en derivadas parciales tiene los siguientes corolarios cuando usamos el lenguaje de superficies mínimas y de curvatura media constante.

Corolario 1.15 (Principio del máximo para la curvatura media). *Sean Σ_1 y Σ_2 superficies en \mathbb{R}^3 con aplicaciones de Gauss N_1 y N_2 y funciones curvatura media H_1, H_2 respectivamente. Sea $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ con $\Sigma_2 \geq \Sigma_1$ alrededor de p y $H_1 \geq H_2$ para la elección de la aplicación de Gauss tal que $N_1(p) = N_2(p)$. Entonces existe un entorno de p en \mathbb{R}^3 , O tal que $O \cap \Sigma_1 = O \cap \Sigma_2$.*

En el caso en que las superficies Σ_1 y Σ_2 tengan borde con $p \in \partial\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_2$, diremos que Σ_1 y Σ_2 son tangentes en p si $T_p\Sigma_1 = T_p\Sigma_2$ y $T_p\partial\Sigma_1 = T_p\partial\Sigma_2$. En esta situación también se puede probar un resultado análogo al anterior.

Corolario 1.16 (Principio del máximo para la curvatura media con borde). *Sean Σ_1 y Σ_2 dos superficies con borde en \mathbb{R}^3 con funciones curvatura media H_1, H_2 , para las que existe un punto de tangencia en el borde $p \in \partial\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_2$ alrededor del cual $\Sigma_2 \geq \Sigma_1$ para la elección de la aplicación de Gauss tal que $N_1(p) = N_2(p)$. Supongamos que $H_1 \geq H_2$, entonces Σ_1 y Σ_2 coinciden en un entorno de p .*

En el caso particular de que tomemos superficies mínimas en los resultados anteriores, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.17 ([88]). *Sean $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies mínimas y sea $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ un punto de tangencia en el interior de ambas superficies, o bien un punto de tangencia en $\partial\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_2$. Entonces, existe un entorno de p donde $\Sigma_1 \leq \Sigma_2$ si, y sólo si, $\Sigma_1 = \Sigma_2$ en dicho entorno.*

Hay una versión en infinito del último resultado, probado por Langevin y Rosenberg [51], y por Meeks y Rosenberg [67].

Teorema 1.18 (Principio del máximo en infinito, [51], [67]). *Sean $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 , mínimas, conexas y disjuntas. Supongamos que el borde de Σ_1 y Σ_2 (puede ser vacío) es compacto. Se tiene:*

- Si $\partial\Sigma_1$ o $\partial\Sigma_2$ es no vacío, entonces existen $(x, y) \in [(\partial\Sigma_1) \times \Sigma_2] \cup [\Sigma_1 \times (\partial\Sigma_2)]$ tales que $|x - y| = \text{dist}(\Sigma_1, \Sigma_2)$.
- Si $\partial\Sigma_1 = \partial\Sigma_2 = \emptyset$, entonces Σ_1 y Σ_2 son dos planos paralelos.

1.7. Superficies mínimas no orientables en \mathbb{R}^3

Consideremos ahora una inmersión mínima de una superficie no orientable $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ en el espacio euclídeo tridimensional. En este caso, denotamos por $\mu : \widehat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ al recubridor de dos hojas orientable de Σ , de manera que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Sigma} & & \\ \mu \downarrow & \searrow \widehat{X} = X \circ \mu & \\ \Sigma & \xrightarrow{X} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Si en $\widehat{\Sigma}$ consideramos la métrica pullback inducida por μ de la métrica inducida en Σ por X , entonces la aplicación \widehat{X} que hace el diagrama anterior conmutativo, es una inmersión mínima de la superficie orientable $\widehat{\Sigma}$ en \mathbb{R}^3 , cuyos datos de Weierstrass denotaremos por (g, ω) . Como conjuntos de puntos en \mathbb{R}^3 , $X(\Sigma)$ y $\widehat{X}(\widehat{\Sigma})$ son idénticos. La diferencia reside en que \widehat{X} pasa dos veces por cada punto de $X(\Sigma)$ con orientaciones locales diferentes. Llamaremos datos de Weierstrass de X a los datos de Weierstrass (g, ω) de su recubridor de dos hojas orientable \widehat{X} .

En esta situación, existe una involución antiholomorfa sin puntos fijos $I : \widehat{\Sigma} \rightarrow \widehat{\Sigma}$ de manera que se tiene la siguiente identificación

$$\mu(\widehat{\Sigma}) = \Sigma \equiv \frac{\widehat{\Sigma}}{\langle I \rangle},$$

y podemos identificar μ con la proyección natural $\pi : \widehat{\Sigma} \rightarrow \widehat{\Sigma}/\langle I \rangle$. A partir de los datos de Weierstrass (g, ω) de \widehat{X} , generamos las funciones ϕ_j , $j = 1, 2, 3$, dadas por (1.10), que se comportan de la siguiente forma con la involución

$$I \circ \phi_j = \overline{\phi_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Esto es equivalente a

$$-1/\overline{g} = g \circ I, \quad I^* \omega = -\overline{g^2 \omega}. \quad (1.15)$$

Recíprocamente, toda superficie mínima no orientable se puede construir de esta forma.

Observación 1.19. En el caso particular en que la compactificación de $\widehat{\Sigma}$ sea $\overline{\mathbb{C}}$ (es decir, $\widehat{\Sigma}$ tiene género cero), podemos asumir que $I(z) = -1/\overline{z}$ y escribir $\omega = f dz$ globalmente. En este ambiente, las ecuaciones (1.15) resultan en

$$-1/\overline{g(z)} = g(-1/\overline{z}), \quad f \circ I = -\overline{z^2 g^2 f}. \quad (1.16)$$

Las superficies mínimas no orientables presentan tanto propiedades compartidas con el caso orientable como propiedades que cambian con respecto a éste. Si $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ es una superficie no orientable, completa y mínima con curvatura total finita y datos de Weierstrass (g, ω) , entonces, por el Teorema 1.11, su recubridor de 2 hojas $\widehat{\Sigma}$ es conforme a una superficie de Riemann compacta $\overline{\Sigma}$ salvo por una cantidad finita de puntos $\{p_1, \dots, p_r\} \subset \overline{\Sigma}$. Además, la involución antiholomorfa $I : \widehat{\Sigma} \rightarrow \widehat{\Sigma}$ se extiende a $\overline{\Sigma}$.

Como los finales vienen, en esta situación, identificados en pares de puntos a través de la involución I , el grado de la aplicación g está bien definido:

$$-4\pi \text{grado}(g) = C(\widehat{\Sigma}) = 2C(\Sigma).$$

Además, definimos la aplicación de Gauss no orientable $\tilde{g} : \Sigma \rightarrow \mathbb{RP}^2$ como aquella que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Sigma} & \xrightarrow{g} & \mathbb{S}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ \Sigma & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbb{RP}^2 \end{array}$$

donde $\tilde{\pi} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ es la proyección natural (su involución antiholomorfa asociada, en vista a la Observación 1.19, es la aplicación antípoda $\tilde{I}(z) = -1/\bar{z}$). La aplicación $\tilde{\pi} \circ g : \widehat{\Sigma} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ se puede extender de forma meromorfa a $\overline{\Sigma}$ y se conoce como aplicación de Gauss no orientable extendida.

1.8. Estabilidad

En esta sección recordaremos el concepto de estabilidad en las diferentes situaciones que vamos a desarrollar en el resto de capítulos.

Consideramos primero el caso de una superficie mínima orientable $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$. Las superficies mínimas son los puntos críticos del funcional área, y por ello es interesante preguntarse por el signo de la segunda derivada del funcional área en una superficie mínima. Usando la notación y los cálculos para desarrollar la primera fórmula de variación del área (Teorema 1.5) se puede demostrar el siguiente resultado.

Teorema 1.20 (Segunda fórmula de variación del área, [4]). *Sea $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ una inmersión mínima de una superficie orientable, $f \in C_0^\infty(\Sigma)$ y $\Omega \subset M$ un*

dominio relativamente compacto con $\text{sop}(f) \subset \Omega$. Entonces, se tiene

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Area}(t) = \int_{\Omega} (|\nabla f|^2 - |A|^2 f^2) dv_g,$$

donde $|A|$ denota a la norma de la segunda forma fundamental de X .

Definición 1.21. Una inmersión mínima y orientable $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ se dice estable cuando

$$\int_{\Sigma} (|\nabla f|^2 - |A|^2 f^2) dv_g \geq 0, \quad (1.17)$$

para toda función $f \in C_0^\infty(\Sigma)$. En caso contrario, X se dice no estable.

Toda superficie mínima es localmente estable (de hecho, la desigualdad (1.17) se cumple de forma estricta siempre que $f \not\equiv 0$ para un entorno pequeño de cada punto $p \in \Sigma$), sin embargo, la estabilidad global es muy restrictiva: el resultado demostrado de forma independiente por Do Carmo y Peng (1979), Fischer-Colbrie y Schoen (1980) y Pogorelov (1981) muestra que sólo hay un ejemplo de superficie mínima globalmente estable en \mathbb{R}^3 .

Teorema 1.22 ([25],[31],[79]). Si $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ es una superficie orientable, completa, mínima y estable, entonces Σ es un plano.

La estabilidad de una superficie mínima $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es equivalente al hecho de que su operador de Jacobi $L = \Delta + |A|^2$ cumpla

$$- \int_{\Sigma} f L f dv_g \geq 0, \text{ para toda } f \in C_0^\infty(\Sigma).$$

L es un operador de tipo Schrödinger L^2 -autoadjunto sobre Σ , en particular podemos hablar de su espectro. A las funciones en el núcleo del operador de Jacobi se las denomina funciones de Jacobi en Σ . En estos términos, podemos definir el concepto de estabilidad de forma equivalente: el espectro del operador L en un dominio relativamente compacto $\Omega \subset \Sigma$ está formado por una sucesión no decreciente de autovalores λ_j , $j \in \mathbb{N}$, que diverge a $+\infty$. Si denotamos por $\text{Spec}(L, \Omega) = \{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots\}$ al espectro de L , entonces Σ es estable si y sólo si no existen valores propios negativos en $\text{Spec}(L, \Omega)$, para todo dominio relativamente compacto Ω contenido en Σ .

Definiremos el índice $\text{Ind}(\Omega)$ (o índice de Morse) de Ω como el número de autovalores negativos en $\text{Spec}(L, \Omega)$. En el caso en que $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ sea estable entonces $\text{Ind}(\Omega) = 0$. Geométricamente, el índice de una superficie mínima,

compacta y con borde se interpreta como el número de direcciones en que podemos deformar la superficie con borde fijo de tal modo que su área decrezca infinitesimalmente. Es bien conocido que $\text{Ind}(\Omega) \leq \text{Ind}(\Omega')$ si $\Omega \subset \Omega'$. El índice $\text{Ind}(\Sigma)$ de Σ se define como el supremo de las cantidades $\text{Ind}(\Omega)$ sobre el conjunto de dominios relativamente compactos contenidos en Σ .

Si en lugar de considerar una inmersión al espacio euclídeo tridimensional, consideramos una inmersión de una hipersuperficie Σ^n en una variedad riemanniana (M^{n+1}, g) , y suponemos que Σ admite un campo normal unitario ξ , la segunda fórmula de variación del funcional área n -dimensional en un abierto relativamente compacto $\Omega \subset \Sigma$ (definido de forma análoga al funcional área en dimensión tres), se escribe como sigue.

Teorema 1.23 (Segunda fórmula de variación del área). *Sea $X : \Sigma^n \looparrowright M^{n+1}$ una inmersión isométrica de una hipersuperficie mínima en una variedad riemanniana (M^{n+1}, g) . Supongamos que Σ admite un campo normal unitario ξ . Sea $f \in C_0^\infty(\Sigma)$ y $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una variación de Σ con campo variacional $\frac{\partial F}{\partial t}(p, 0) = f(p)\xi_p$, $p \in \Sigma$. Entonces:*

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Area}(t) = - \int_{\Omega} |\nabla f|^2 - (|A_{\Sigma}|^2 + \text{Ric}_M(\xi, \xi)) f^2 dV,$$

donde $|A_{\Sigma}|$ denota a la norma de la segunda forma fundamental de X , Ric_M es el tensor de Ricci de (M^{n+1}, g) y dV es el elemento de volumen n -dimensional en Σ .

En las condiciones del Teorema 1.23, el operador de Jacobi L de X ahora viene dado por

$$L = \Delta_{\Sigma} + |A_{\Sigma}|^2 + \text{Ric}_M(\xi, \xi),$$

donde Δ_{Σ} indica laplaciano en Σ con la métrica inducida. La caracterización de la estabilidad como el número de autovalores negativos en el espectro de L para cualquier dominio relativamente compacto sigue siendo válida.

Un resultado que relaciona el concepto de estabilidad y el de curvatura total en el caso de superficies mínimas de \mathbb{R}^3 , que usaremos en el Capítulo 2, es el siguiente.

Teorema 1.24 ([8]). *Sea $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ una inmersión mínima y orientable. Sea $\Omega \subset \Sigma$ un dominio relativamente compacto tal que*

$$\int_{\Omega} |K| dA < 2\pi.$$

Entonces, $X|_{\Omega}$ es estable.

En el contexto de superficies mínimas no orientables en \mathbb{R}^3 , usando la notación introducida en la Sección 1.7, tendremos la siguiente noción de estabilidad.

Definición 1.25. Sea $X: \Sigma \equiv \widehat{\Sigma}/\langle I \rangle \looparrowright \mathbb{R}^3$ una inmersión mínima no orientable, $\Omega \subset \Sigma$ un dominio relativamente compacto y sea $\widehat{\Omega} := \pi^{-1}(\Omega)$. Denotemos por Δ , $|A|$ al laplaciano y a la norma de la segunda forma fundamental de X . En este contexto, el índice $\text{Ind}(\Omega)$ de Ω se define como el número de autovalores negativos el operador autoadjunto elíptico $L = \Delta + |A|^2$ (operador de Jacobi de X) definido sobre el espacio de funciones diferenciables con soporte compacto $\phi: \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\phi \circ I = -\phi$.

El índice de X se define como el supremo de las cantidades $\text{Ind}(\Omega)$ sobre el conjunto de dominios relativamente compactos contenidos en Σ . X se dice estable si su índice es cero.

Por último, consideremos el caso de una hipersuperficie mínima con frontera libre Σ inmersa en una variedad con borde (M^3, \bar{g}) , de forma que $\partial\Sigma \subset \partial M$.

Teorema 1.26 (Segunda fórmula de variación del área con borde). *Sea $X: \Sigma \rightarrow M^3$ una inmersión de una superficie mínima, con frontera libre $\partial\Sigma \subset \partial M$ en una variedad riemanniana (M^3, \bar{g}) . Supongamos que Σ admite un campo normal unitario ξ globalmente definido. Sea $f \in C_0^\infty(\Sigma)$ y $F: \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una variación de Σ con campo variacional $\frac{\partial F}{\partial t}(p, 0) = f(p)\xi_p$, $p \in \Sigma$. Entonces:*

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Area}(t) = \int_{\Sigma} (|\nabla f|^2 - (|A_{\Sigma}|^2 + \text{Ric}_M(\xi))f^2) + \int_{\partial\Sigma} A_{\partial M}(\xi, \xi)f^2,$$

donde A_{Σ} y $A_{\partial M}$ denotan a la segunda forma fundamental de Σ y ∂M en (M^3, \bar{g}) , respectivamente.

De igual forma, diremos que una superficie $\Sigma \looparrowright M$ es estable como superficie con frontera libre cuando

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Area}(t) \geq 0,$$

para toda variación de Σ cuyo campo variacional venga dado de la forma $Y = f\xi$ con $f \in C_0^\infty(\Sigma)$.

Tras aplicar integración por partes, podemos escribir la fórmula para la segunda derivada del funcional área como

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Area}(t) = & - \int_{\Sigma} f (\Delta f + (\text{Ric}_M(\xi, \xi) + |A_{\Sigma}|^2)f) \\ & + \int_{\partial\Sigma} f \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - A_{\partial M}(\xi, \xi)f \right), \quad f \in C_0^\infty(\Sigma), \end{aligned} \tag{1.18}$$

donde η denota al conormal interior unitario a lo largo de ∂M .

Dado $R_0 > 0$, en el Capítulo 3 usaremos la segunda fórmula de variación del área en el caso en que $M^3 = \{p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : |p| \geq R_0\}$, donde $|p|^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, con una métrica conforme a la usual en \mathbb{R}^3 . En este contexto, dado $R > R_0$ y una superficie mínima propia $\Sigma \subset M^3$ con frontera libre $\partial\Sigma \subset \partial M$, definimos $\Sigma(R) := \Sigma \cap \{p \in M : |p| \leq R\}$. El índice de Morse $\text{Ind}(\Sigma(R))$ de $\Sigma(R)$ como superficie con frontera libre viene dado como el número de autovalores negativos, contando multiplicidades, del problema

$$\begin{cases} \Delta\psi + (\text{Ric}_M(\xi, \xi) + |A_\Sigma|^2)\psi = -\lambda\psi & \text{en } \Sigma(R), \\ \psi = 0 & \text{en } \mathbb{S}^2(R) \cap \Sigma, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta} + A_{\partial M}(\xi, \xi)\psi = 0 & \text{en } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (1.19)$$

Como en los casos anteriores, podemos definir el índice de Morse de Σ como superficie con frontera libre, que denotamos por $\text{Ind}(\Sigma)$:

$$\text{Ind}(\Sigma) := \limsup_{R \rightarrow +\infty} \text{Ind}(\Sigma(R)).$$

1.9. Espacios homogéneos tridimensionales

Definición 1.27. Sea (M^n, g) una variedad riemanniana. Diremos que M es homogénea si su grupo de isometrías $\text{Iso}(M, g)$, actúa de forma transitiva sobre M .

Como consecuencia directa del Teorema de Hopf-Rinow, se tiene que toda variedad homogénea es también completa.

El grupo de isometrías de una variedad homogénea (M^n, g) es una variedad de dimensión $k \in [n, n(n+1)/2]$. En el caso de variedades homogéneas tridimensionales obtenemos $k \in \{3, 4, 5, 6\}$. Veremos enseguida que el caso de dimensión 5 no es posible.

Definición 1.28. Diremos que un conjunto G es un grupo de Lie si G es una variedad diferenciable dotada de estructura de grupo de forma que la aplicación multiplicación $\cdot : G \times G \rightarrow G$ y la aplicación inversión $\cdot^{-1} : G \rightarrow G$ de la estructura de grupo son aplicaciones diferenciables.

Dos grupos de Lie G y G' se dicen isomorfos si entre ellos existe un isomorfismo de grupos $\phi : G \rightarrow G'$ diferenciable.

Un grupo de Lie métrico es un grupo de Lie G , dotado de una métrica riemanniana, donde las traslaciones a izquierda de la estructura de grupo son isometrías. A dicha métrica se la conoce como métrica invariante a izquierda.

Teniendo en cuenta la discusión previa a la Definición 1.28, si además suponemos que nuestra variedad homogénea (M^3, g) es simplemente conexa, encontramos las siguientes posibilidades.

- Si $\dim(\text{Iso}(M^3, g)) = 6$, entonces (M, g) tiene curvatura seccional constante y por tanto es isométrica a un espacio forma $\mathbb{M}^3(\kappa)$: el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 para $\kappa = 0$, el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 para $\kappa < 0$ y la esfera tridimensional \mathbb{S}^3 para $\kappa > 0$.
- El caso $\dim(\text{Iso}(M^3, g)) = 5$ no puede darse por el siguiente argumento de álgebra lineal: como $\dim(\text{Iso}(M^3, g)) = 5$ y $\dim(M) = 3$, el álgebra de Lie del grupo de isotropía $G_p = \{\phi \in \text{Iso}(M, g) : \phi(p) = p\}$ es un subálgebra de dimensión 2 dentro del álgebra de Lie de $O(3)$, que es isomorfa a (\mathbb{R}^3, \times) . Pero (\mathbb{R}^3, \times) no tiene subálgebras de dimensión 2.
- En el caso de en que $\dim(\text{Iso}(M^3, g)) = 4$, podremos clasificar estas variedades riemannianas en función de dos parámetros, con $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$, $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$. Describiremos dicha clasificación en la Subsección 1.9.1.
- Si $\dim(\text{Iso}(M^3, g)) = 3$, entonces (M, g) es isométrica a un grupo de Lie métrico.

Teorema 1.29 ([64]). *Salvo por la variedad producto $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{S}^2(\kappa)$ es la esfera de curvatura $\kappa > 0$, toda variedad homogénea y simplemente conexa de dimensión 3 es isométrica a un grupo de Lie métrico.*

1.9.1. Espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

Presentaremos brevemente la clasificación de las variedades homogéneas simplemente conexas con $\dim(\text{Iso}(M^3, g)) = 4$ (se puede consultar una clasificación detallada en [22]) dentro de la teoría de submersiones de Killing.

Definición 1.30. *Dada una submersión $\pi : (\mathbb{E}^m, \bar{g}) \rightarrow (M^n, g)$, con $m > n$, un vector $v \in T_x \mathbb{E}$ se dice horizontal si $v \in \ker(d\pi_x)^\perp$ y se dice vertical si $v \in \ker(d\pi_x)$.*

Diremos que $\pi : (\mathbb{E}^m, \bar{g}) \rightarrow (M^n, g)$ es una submersión riemanniana si para todo $x \in \mathbb{E}$ se cumple que $d\pi_x$ conserva la longitud de los vectores horizontales,

es decir,

$$g_{\pi(x)}(d\pi_x(v), d\pi_x(w)) = \bar{g}(v, w)_x,$$

para todo $x \in \mathbb{E}$ y todo $v, w \in T_x\mathbb{E}$ horizontales. Al espacio M se le denomina base de la submersión. Además, el conjunto $\pi^{-1}(p)$, $p \in M$ es una subvariedad de \mathbb{E} a la que llamaremos fibra sobre p .

Sea $\pi : (\mathbb{E}^{n+1}, \bar{g}) \rightarrow (M^n, g)$ una submersión riemanniana. Se dice que π es una submersión de Killing cuando exista un campo de Killing $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}^{n+1})$ unitario, completo y vertical, es decir, cuando las curvas integrales de ξ sean las fibras.

Si (\mathbb{E}, \bar{g}) es una variedad riemanniana orientable de dimensión 3, entonces dada una submersión de Killing $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$, existe una única función $\tau \in C^\infty(\mathbb{E})$ cumpliendo

$$\bar{\nabla}_X \xi = \tau X \wedge \xi, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}),$$

donde ξ denota al campo de Killing asociado a la submersión y \wedge al producto vectorial en el espacio tangente a \mathbb{E} . Llamaremos curvatura del fibrado a la función $\tau \in C^\infty(\mathbb{E})$.

Dado $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$, existe una única variedad riemanniana tridimensional orientable y simplemente conexa $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ que admite una submersión de Killing $\pi : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$ con curvatura de fibrado constante τ sobre una variedad modelo $\mathbb{M}^2(\kappa)$ [58]. La familia $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ está formada por las variedades homogéneas de dimensión 3 con grupo de isometrías de dimensión 4 cuando $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$.

Podemos resumir la clasificación de espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ en la siguiente tabla:

	$\kappa < 0$	$\kappa = 0$	$\kappa > 0$
$\tau = 0$	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	—	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
$\tau \neq 0$	$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$	$\text{Nil}_3(\tau)$	$\mathbb{S}_B^3(\kappa, \tau)$

donde $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ es el recubridor universal del grupo especial lineal $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$, $\text{Nil}_3(\tau)$ es el espacio de Heisenberg que definiremos a continuación y por $\mathbb{S}_B^3(\kappa, \tau)$ denotamos a las esferas de Berger que vienen dadas

como $(\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2, g)$, donde la métrica g está dada por

$$g(X, Y) = \frac{4}{\kappa} \left(\langle X, Y \rangle + \left(\frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) \langle X, V \rangle \langle Y, V \rangle \right),$$

con $V_{(z,w)} = (iz, iw)$ para todo $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ y hemos denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a la métrica usual de \mathbb{C}^2 .

El espacio de Heisenberg: $\text{Nil}_3(\tau)$

Por su importancia en el Capítulo 4, a continuación damos más detalles sobre $\text{Nil}_3(\tau)$. Describimos el espacio de Heisenberg $\text{Nil}_3(\tau)$ como $(\mathbb{R}^3, ds_\tau^2)$ donde la métrica ds_τ^2 viene dada por

$$ds_\tau^2 = dx^2 + dy^2 + (dt + \tau(y dx - x dy))^2. \quad (1.20)$$

Se puede inducir una estructura de grupo de Lie en $\text{Nil}_3(1/2)$ que viene dada por

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \right),$$

para todo $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Dicha estructura hace isomorfo a $\text{Nil}_3(1/2)$ con el grupo de matrices nilpotentes dado por:

$$\text{Nil}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

a través de la exponencial de matrices:

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 + \frac{1}{2}x_1 x_2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde hemos hecho la siguiente identificación

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1.9.2. Variedades homogéneas tridimensionales con grupo de isometrías de dimensión 3

Toda variedad homogénea, tridimensional y simplemente conexa (M, g) con $\dim(\text{Iso}(M, g)) = 3$ es isométrica a un grupo de Lie métrico. Por el Teorema 1.29, sabemos que salvo $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ toda variedad homogénea y simplemente conexa es isométrica a un grupo de Lie métrico. Para encontrar una demostración detallada de los resultados de esta sección, el lector puede consultar [64] y [70].

Dado un grupo de Lie G , y un elemento $a \in G$ denotaremos por l_a a la traslación a izquierda a través de a , es decir, a la biyección dada por

$$\begin{aligned} l_a : G &\rightarrow G \\ b &\mapsto ab. \end{aligned}$$

De forma análoga podemos definir la traslación a derecha r_a . Por otro lado, denotaremos por \mathfrak{g} al álgebra de Lie que se forma tomando los campos invariantes a izquierda dentro de G (su corchete de Lie es el corchete de campos), es decir:

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{X}(G) : (l_g)_*X = X, \forall g \in G\}.$$

\mathfrak{g} es isomorfo como espacio vectorial al espacio tangente en el elemento neutro $e \in G$ que denotamos por T_eG , donde dicho isomorfismo viene dado por

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow T_eG \\ X &\mapsto X_e. \end{aligned}$$

A partir de dicho isomorfismo, podemos inducir sobre T_eG una estructura de álgebra de Lie que lo hace isomorfo a \mathfrak{g} . A \mathfrak{g} se la conoce como el álgebra de Lie de G .

Dado $g \in G$, a partir de las traslaciones a izquierda l_g y a derecha r_g podemos definir la aplicación adjunta $\text{Ad}_g = d(r_{g^{-1}} \circ l_g)_e$, donde $e \in G$ denota al elemento neutro.

En este contexto, denotaremos por Ad a la aplicación

$$\begin{aligned} \text{Ad} : X &\rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \text{Ad}_g, \end{aligned}$$

donde $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ denota al conjunto de automorfismos de \mathfrak{g} .

Definición 1.31. Diremos que un grupo de Lie es unimodular si y sólo si $\det(\text{Ad}_g) = 1$ para todo $g \in G$. En caso contrario diremos que G es no unimodular.

Productos semidirectos tridimensionales

Definición 1.32. Sean N, H subgrupos de un grupo G , donde N es un subgrupo normal. Dado un homomorfismo de grupos $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$, se define el producto semidirecto de N y H a través de φ , denotado por $N \rtimes_{\varphi} H$, como el producto cartesiano de N y H : $\{(n, h) : n \in N, h \in H\}$ dotado de la siguiente operación de grupo (que denotamos con yuxtaposición):

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1 * \varphi_{h_1}(n_2), h_1 + h_2),$$

donde $\varphi_{h_1} = \varphi(h_1)$, $*$ es la operación de grupo en N y $+$ la operación de grupo en H .

En nuestro caso, tomaremos $N = \mathbb{R}^2$, $H = \mathbb{R}$. Dada $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, tomaremos $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$ dado por $z \mapsto \varphi(z)(p) = e^{zA}p$ para todo $z \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^2$. Denotaremos al correspondiente producto semidirecto por $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$. Con ello, la operación de grupo en el producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, con $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ viene dada por

$$(p_1, z_1)(p_2, z_2) = (p_1 + e^{z_1 A} p_2, z_1 + z_2), \quad (1.21)$$

donde $(p_1, z_1), (p_2, z_2) \in \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$.

A partir de ahora, durante esta subsección, G denotará al producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ con $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Respecto a las coordenadas cartesianas usuales $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$ generan el espacio $\mathfrak{X}(G)$ de campos diferenciables sobre G y denotamos

$$e^{zA} = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (1.22)$$

Una base $\{E_1, E_2, E_3\}$ de campos invariantes a izquierda para el álgebra de Lie $\mathfrak{g} \equiv T_e G$ de G viene dada por:

$$E_1(x, y, z) = a_{11}(z)\partial_x + a_{21}(z)\partial_y, \quad E_2(x, y, z) = a_{12}(z)\partial_x + a_{22}(z)\partial_y, \quad E_3 = \partial_z. \quad (1.23)$$

Denotaremos por \langle, \rangle a la métrica canónica de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$. Ésta viene definida como aquella que hace que la base $\{E_1, E_2, E_3\}$ dada por (1.23) sea ortonormal o, equivalentemente, aquella que se consigue extendiendo por traslaciones a izquierda el producto escalar usual en $T_e G \equiv \mathbb{R}^3$, $e = (0, 0, 0)$ (esto último porque $E_1(0, 0, 0) = \partial_x$, $E_2(0, 0, 0) = \partial_y$, $E_3(0, 0, 0) = \partial_z$). \langle, \rangle toma la siguiente forma expresada respecto de la base $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$:

$$\begin{aligned} \langle, \rangle &= [a_{11}(-z)^2 + a_{21}(-z)^2] dx^2 + [a_{12}(-z)^2 + a_{22}(-z)^2] dy^2 + dz^2 \\ &\quad + [a_{11}(-z)a_{12}(-z) + a_{21}(-z)a_{22}(-z)](dx \otimes dy + dy \otimes dx). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Observación 1.33. Sean $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matrices congruentes. Entonces $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$ son grupos de Lie isomorfos, y $(\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}, \langle, \rangle)$, $(\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}, \langle, \rangle)$ son variedades riemannianas isométricas, donde \langle, \rangle denota las respectivas métricas canónicas en $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$.

Si notamos de la siguiente forma a los coeficientes de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

entonces podemos calcular los siguientes corchetes para los campos en (1.23):

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_3, E_1] = aE_1 + cE_2, \quad [E_3, E_2] = bE_1 + dE_2. \quad (1.26)$$

Usando estas relaciones y la fórmula de Koszul, se pueden probar las siguientes igualdades para la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica canónica en $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l} \nabla_{E_1} E_1 = aE_3 \\ \nabla_{E_2} E_1 = \frac{b+c}{2} E_3 \\ \nabla_{E_3} E_1 = \frac{c-b}{2} E_2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \nabla_{E_1} E_2 = \frac{b+c}{2} E_3 \\ \nabla_{E_2} E_2 = dE_3 \\ \nabla_{E_3} E_2 = \frac{b-c}{2} E_1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \nabla_{E_1} E_3 = -aE_1 - \frac{b+c}{2} E_2 \\ \nabla_{E_2} E_3 = -\frac{b+c}{2} E_1 - dE_2 \\ \nabla_{E_3} E_3 = 0. \end{array} \quad (1.27)$$

Por último, vamos a introducir la siguiente base de campos invariantes a derecha de G (recordemos que los campos invariantes a derecha son campos de Killing):

$$F_1 = \partial_x, \quad F_2 = \partial_y, \quad F_3(x, y, z) = (ax + by)\partial_x + (cx + dy)\partial_y + \partial_z. \quad (1.28)$$

El siguiente teorema describe la familia de grupos de Lie unimodulares de dimensión 3 que se pueden representar como un producto semidirecto.

Teorema 1.34 ([64], Teorema 2.15). Sea (G, \langle, \rangle) un grupo de Lie métrico unimodular, que se puede representar como producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, para $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Entonces, tras reescalar la métrica, la matriz A se puede escoger de forma única como una de las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pm \frac{1}{c} \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } c \in [1, \infty) \text{ o } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cada una de las elecciones en el Teorema anterior hace a $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ isométrico a uno de los grupos de Lie que se describen en la Sección 4.3.

En cuanto al caso no unimodular, destacamos el siguiente resultado.

Teorema 1.35. *Sea G un grupo de Lie métrico tridimensional no unimodular. Entonces, existe una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con $\text{traza}(A) \neq 0$ que hace a G isomorfo e isométrico al producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ con su métrica canónica.*

Grupos de Lie métricos unimodulares de dimensión 3

Sea G un grupo de Lie métrico unimodular de dimensión tres. Notaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a la métrica en G . Una vez elegida una orientación en $\mathfrak{g} = T_e G$, tendremos bien definido el producto vectorial de $X, Y \in \mathfrak{g}$. Si notamos por \det al elemento de volumen orientado en $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, entonces el producto vectorial de X e Y , que denotamos por $X \times Y$, es el único campo en \mathfrak{g} verificando

$$\langle X \times Y, Z \rangle = \det(X, Y, Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Por tanto, si $X, Y \in \mathfrak{g}$ son linealmente independientes, entonces $\{X, Y, X \times Y\}$ es una base positivamente orientada de \mathfrak{g} . Por otra parte, el hecho de que tanto el producto vectorial, como el corchete de Lie de campos, sean formas bilineales antisimétricas en el espacio vectorial tridimensional \mathfrak{g} , garantiza la existencia y unicidad de un endomorfismo $L : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que cumple

$$L(X \times Y) = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Se tiene que $L : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es autoadjunto si y sólo si G es unimodular [70].

En esta subsección asumimos que G es unimodular. Por tanto, L es autoadjunto y con ello podemos encontrar una base ortonormal positiva $\{E_1, E_2, E_3\}$ formada por vectores propios de L , es decir, existen $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ verificando:

$$[E_2, E_3] = c_1 E_1, \quad [E_3, E_1] = c_2 E_2, \quad [E_1, E_2] = c_3 E_3. \quad (1.29)$$

A las constantes c_1, c_2, c_3 se las conoce como constantes de estructura del grupo de Lie unimodular G . Un cambio en la métrica invariante a izquierda de G puede cambiar el valor de las constantes de estructura. Como consecuencia de las ecuaciones (1.29), en caso de cambiar las longitudes de E_1, E_2, E_3 para hacer un cambio de métrica, los signos de las constantes de estructura permanecen. En otras palabras, el álgebra de Lie asociada a G viene unívocamente determinada por los signos de sus constantes de estructura. Como además, un cambio en la orientación de G produce que los valores de las constantes de estructura cambien de signo, reducimos la lista de posibles estructuras de grupo a estudiar, en función del signo de las constantes de estructura, a la lista de casos que se

aprecian en la siguiente tabla.

Signo de			Grupo de Lie simplemente conexo
c_1	c_2	c_3	
+	+	+	$SU(2)$
+	+	-	$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$
+	+	0	$\widetilde{E}(2)$
+	-	0	Sol_3
+	0	0	Nil_3
0	0	0	\mathbb{R}^3

Describimos a continuación la estructura de grupo de Lie de Sol_3 y $\widetilde{E}(2)$, que usaremos en el Capítulo 4.

El grupo $\widetilde{E}(2)$ y sus métricas invariantes a izquierda

Denotamos por $\widetilde{E}(2)$ al recubridor universal de $E(2)$, el grupo de movimientos rígidos del plano que conservan la orientación. Usando coordenadas (x, y, z) , este grupo es isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ donde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{zA} = \begin{pmatrix} \cos z & -\sin z \\ \sin z & \cos z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (1.30)$$

Por tanto, la operación de grupo, dada por (1.21), se escribe como:

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2 \cos z_1 - y_2 \sin z_1, y_1 + x_2 \sin z_1 + y_2 \cos z_1, z_1 + z_2).$$

En este caso, si calculamos (1.29) para $E_i = E_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$, dados por

$$E_1 = \cos z \partial_x + \sin z \partial_y, \quad E_2 = -\sin z \partial_x + \cos z \partial_y, \quad E_3 = \partial_z,$$

obtenemos $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = 0$.

El resto de métricas invariantes a izquierda en $\widetilde{E}(2)$ se consiguen cuando consideramos el producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_{A(c)} \mathbb{R}$, $c > 0$ donde

$$A(c) = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1/c & 0 \end{pmatrix},$$

con su métrica usual. En este caso, el cómputo de (1.23), junto con la ecuación (1.29) implican que las constantes de estructura c_1, c_2, c_3 vienen dadas por $c_1 = c$, $c_2 = 1/c$, $c_3 = 0$. Como las matrices $A(c)$ y $A(1/c)$ son congruentes, en vista a la Observación 1.33, nos restringiremos al caso $c > 1$.

El grupo soluble Sol_3 y sus métricas invariantes a izquierda

Denotamos por Sol_3 al grupo de movimientos rígidos en el plano de Lorentz-Minkowski que conservan la orientación [70]. Describimos este espacio de forma análoga al anterior. Usamos coordenadas (x, y, z) , de forma que este grupo es isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ donde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{zA} = \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (1.31)$$

Por tanto, la operación de grupo, dada por (1.21), se escribe como:

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2e^{-z_1}, y_1 + y_2e^{z_1}, z_1 + z_2).$$

Calculamos ahora (1.29) para $E_i = E_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$, dados por

$$E_1 = e^{-z}\partial_x, \quad E_2 = e^z\partial_y, \quad E_3 = \partial_z,$$

de donde obtenemos $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 0$.

El resto de métricas invariantes a izquierda en Sol_3 se consiguen ([64], Sección 2.7) cuando consideramos el producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_{A(c)} \mathbb{R}$, $c > 0$ donde

$$A(c) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1/c & 0 \end{pmatrix},$$

con su métrica usual. El cómputo de (1.23), junto con la ecuación (1.29) implican que las constantes de estructura c_1, c_2, c_3 vienen dadas por $c_1 = c$, $c_2 = -1/c$, $c_3 = 0$. Como, de nuevo, las matrices $A(c)$ y $A(1/c)$ son congruentes, la Observación 1.33 implica que podemos restringirnos al caso $c > 1$.

El espacio de Heisenberg Nil_3 como producto semidirecto

En la subsección anterior, el espacio de Heisenberg $\text{Nil}_3(\tau)$ se ha introducido como el espacio $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ con $\kappa = 0$ y curvatura del fibrado $\tau \neq 0$. Nos centramos

aquí en el caso $\tau = 1/2$. Como ya especificamos, la estructura de grupo de Lie viene dada por \mathbb{R}^3 con el siguiente producto interno:

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \right).$$

Considerando la base canónica $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ de \mathbb{R}^3 se tiene que

$$E_1 = \partial_x - \frac{y}{2}\partial_z, \quad E_2 = \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z, \quad E_3 = \partial_z$$

son los únicos campos invariantes a izquierda que verifican $(E_1)_0 = \partial_x$, $(E_2)_0 = \partial_y$, $(E_3)_0 = \partial_z$. La métrica canónica de Nil_3 dada por (1.20) para $\tau = 1/2$, se puede definir, de forma equivalente en este contexto, como la única métrica invariante a izquierda para la que $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ sea una base ortonormal en $(0, 0, 0)$. Para esta métrica, $\{E_1, E_2, E_3\}$ es una base ortonormal global de campos.

Por otro lado, podemos presentar a Nil_3 como el producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ dotado de su métrica canónica, donde la matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

que hace que la operación de grupo dada por (1.21) se escriba como:

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2 + z_1 y_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

No es necesario estudiar aquí otras métricas ambiente, ya que son todas homotéticas.

Podemos dar un isomorfismo Ξ para las dos estructuras de grupo de Lie explicadas en esta subsección, entre el modelo de $\text{Nil}_3(1/2)$ con la estructura de grupo de Lie que describimos en la subsección 1.9.1 y el producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ con $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dada por (1.32):

$$\begin{aligned} \Xi : \quad \text{Nil}_3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto \left(z + \frac{xy}{2}, y, x \right). \end{aligned}$$

Cuando dotamos a $\text{Nil}_3(1/2)$ y a $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ de sus respectivas métricas canónicas, Ξ también es una isometría entre variedades riemannianas. Por tanto, Ξ identifica $\text{Nil}_3(1/2)$ y $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ como grupos de Lie métricos.

Superficies de Henneberg generalizadas

En este capítulo se recogen los resultados que se encuentran en el artículo [74]. Generalizamos una superficie mínima clásica con el nombre de superficie de Henneberg dando una familia infinita de superficies en \mathbb{R}^3 , no orientables, con género cero, completas, mínimas, no llanas y estables, cada una con una cantidad finita de puntos de ramificación. Estas superficies se pueden agrupar en subfamilias dependiendo de un entero positivo m (al que llamaremos complejidad), de forma que $m + 1$ mide el número de puntos de ramificación. La superficie clásica de Henneberg H_1 se caracteriza como el único ejemplo en la familia con la complejidad más simple posible $m = 1$, mientras que para $m \geq 2$ conseguimos encontrar familias multiparamétricas. El grupo de isometrías de los ejemplos más simétricos para una complejidad $m \in \mathbb{N}$ dada, H_m , es isomorfo al grupo diédrico D_{2m+2} en el caso en que m es impar, o bien a $D_{m+1} \times \mathbb{Z}_2$ en el caso de m par. Además, para m par, la superficie H_m es la única solución al problema de Björling sobre una hipocicloide de $m + 1$ puntas cuando se toma su normal como curva plana, mientras que para m impar la superficie conjugada H_m^* (H_m siempre tiene bien definida a su superficie conjugada porque su aplicación flujo se anula) es la única solución al problema de Björling para una hipocicloide con $2m + 2$ puntas.

2.1. Motivación del problema

Recordemos el Teorema 1.22 donde, de forma independiente, do Carmo y Peng [25], Fischer-Colbrie y Schoen [31] y Pogorelov [79] establecen que si M

es una superficie orientable, completa, mínima y estable en \mathbb{R}^3 , entonces M es un plano. Por su parte, Ros [82] probó que se tiene la misma caracterización sin asumir orientabilidad. Sin embargo una plétora de superficies mínimas, completas, estables en \mathbb{R}^3 aparecen si permitimos a estas superficies tener puntos de ramificación. El ejemplo más simple se consigue con la superficie clásica de Henneberg [38].

La clase de superficies completas, mínimas, con curvatura total finita y que presentan una cantidad finita de componentes conexas y puntos de ramificación (dentro de las cuales, las estables son un caso particular) aparece de forma natural en la siguiente situación: dado $\varepsilon_0 > 0$, $I \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $H_0, K_0 \geq 0$, sea $\Lambda = \Lambda(I, H_0, \varepsilon_0, K_0)$ el conjunto de inmersiones $F: M \looparrowright X$ donde X es una 3-variedad riemanniana completa con radio de inyectividad $\text{Inj}(X) \geq \varepsilon_0$ y curvatura seccional acotada en valor absoluto por K_0 , F es una inmersión con curvatura media constante $H \in [0, H_0]$ de una superficie completa M en X , y el índice de Morse es a lo más I . La sucesión de segundas forma fundamentales $|A_{F_n}|$ asociadas a las superficies en una sucesión $\{F_n\}_n \subset \Lambda$ puede no estar uniformemente acotada, lo que produce una falta de compacidad de Λ . Sin embargo, se puede probar que la geometría extrínseca de las inmersiones F_n está localmente bien organizada alrededor de, como mucho, I puntos $p_{1,n}, \dots, p_{k,n} \in M_n$ ($k \leq I$) donde $|A_{F_n}|$ toma máximos locales arbitrariamente grandes. Tras suponer que $\sup_{M_n} |A_{F_n}|$ tiende a infinito, alrededor de cualquiera de estos puntos $p_{i,n}$, podemos hacer un análisis por reescalamiento y encontrar un límite de (una subsucesión de) expansiones $\lambda_n F_n$ de F_n (esto es, podemos ver F_n como una inmersión con curvatura media constante H_n/λ_n en la variedad ambiente escalada $\lambda_n X_n$ para una sucesión $\{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{R}^+$ tendiendo a ∞). Este límite es una superficie inmersa, completa y mínima $f: \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ con curvatura total finita, que pasa por el origen $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ y cuyo índice de Morse es a lo más I . Recordemos que dicha f tiene un número finito de finales, cada uno de los cuales es un grafo multivaluado de multiplicidad finita (spinning) $s \in \mathbb{N}$, sobre el exterior de un disco en el plano tangente en infinito a f (definido en la Sección 1.5) en dicho final. Por lo tanto, se pueden reproducir copias casi perfectamente formadas y arbitrariamente pequeñas de grandes porciones compactas de $f(\Sigma)$ en $F_n(M_n)$ alrededor de $F_n(p_{i,n})$ para un n lo suficientemente grande. En \mathbb{R}^3 , las superficies completas, mínimas, con curvatura total finita y con un número finito de componentes conexas y puntos de ramificación aparecen de forma natural cuando se consideran fenómenos de "clustering" en este marco de trabajo: puede ocurrir que diferentes límites por reescalamiento de F_n alrededor de $p_{i,n}$ en diferentes escalas $\lambda_{1,n} > \lambda_{2,n}$ con $\lambda_{1,n}/\lambda_{2,n} \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, produzcan diferentes límites $f_j: \Sigma_j \looparrowright \mathbb{R}^3$, $j = 1, 2$, con $\text{Índice}(f_1) + \text{Índice}(f_2) \leq I$; en este caso, toda la geometría de $f_1(\Sigma_1)$ colapsa alrededor de $\vec{0} \in f_2(\Sigma_2)$, y cada

final de $f_1(\Sigma_1)$ con multiplicidad $m \geq 3$ produce un punto de ramificación en el origen para $f_2(\Sigma_2)$ con un orden $s - 1$. Para los detalles de este fenómeno de "clustering" y cómo organizar estos límites por reescalamiento en jerarquías que aparecen alrededor de $\{p_{i,n}\}_n$, se puede ver el artículo de Pérez y Meeks [66].

A continuación explicamos la distribución por secciones de los resultados de este capítulo. El objetivo principal de este capítulo es el de generalizar la superficie mínima de Henneberg clásica H_1 a una familia de superficies conexas, no orientables, completas, mínimas, estables y con una cantidad finita de puntos de ramificación en \mathbb{R}^3 . No se pueden evitar los puntos de ramificación si buscamos superficies completas, mínimas y estables que no sean planas debido a los resultados previamente mencionados [25, 31, 79, 82]; la no orientabilidad es también una condición necesaria para la estabilidad (ver Proposición 2.1). Nuestros ejemplos se pueden agrupar en subfamilias dependiendo del número de puntos de ramificación (este número vendrá esencialmente dado por el entero $m \in \mathbb{N}$, al que llamaremos complejidad). Los ejemplos más simétricos H_m en cada subfamilia de complejidad m se estudiarán en detalle (Sección 2.5.3). Dependiendo de la paridad de m , se tiene que H_m o su superficie mínima conjugada H_m^* (que no produce una superficie no orientable, ver Sección 2.5.4) se puede ver como la única solución de un problema de Björling para una hipocicloide plana (Sección 2.5.7). El grupo de isometrías de H_m es isomorfo al grupo diédrico D_{2m+2} si m es impar o al grupo $D_{m+1} \times \mathbb{Z}_2$ si m es par (Sección 2.5.8). También probaremos que H_1 es el único elemento en la subfamilia con complejidad $m = 1$ (Teorema 2.13), mientras que para $m \geq 2$, H_m se puede deformar de forma multiparamétrica: la Proposición 2.17 da una familia 1-paramétrica explícita de ejemplos que interpolan entre H_2 y un límite que, tras reescalar, resulta ser H_1 (Sección 2.6.2). La subfamilia de ejemplos con complejidad $m = 2$ resulta ser una variedad real analítica de dimensión 2 alrededor de H_2 (Sección 2.6.2).

2.2. Superficies no orientables, estables y mínimas con puntos de ramificación

Comenzamos considerando los datos de Weierstrass (g, ω) en una superficie de Riemann Σ , de manera que (g, ω) resuelve el problema de períodos y produce una aplicación conforme armónica $X: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por la fórmula clásica descrita en la Sección 1.3.

$$X = \operatorname{Re} \int (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \operatorname{Re} \int \left(\frac{1}{2}(1 - g^2)\omega, \frac{i}{2}(1 + g^2)\omega, g\omega \right). \quad (2.1)$$

Asumiremos que X es una inmersión fuera de un conjunto finito de puntos $\mathcal{B} \subset \Sigma$, donde X no es una inmersión (los puntos \mathcal{B} son llamados puntos de ramificación de X). Dicha X será llamada inmersión mínima ramificada. La métrica inducida (que deja de ser definida positiva en los puntos de \mathcal{B}) viene dada por

$$|ds|^2 = \frac{1}{4}(1 + |g|^2)^2 |\omega|^2. \quad (2.2)$$

La estructura local de X alrededor de un punto de ramificación \mathcal{B} es bien conocida, consultar por ejemplo Micallef y White [69, Teorema 1.4] para ver los detalles. Dado $p \in \mathcal{B}$, existe una coordenada conforme (D, z) para Σ centrada en p (aquí D es el disco unidad cerrado en el plano), un difeomorfismo u de D y una rotación ϕ de \mathbb{R}^3 de manera que $\phi \circ X \circ u$ tiene la forma

$$z \mapsto (z^q, x(z)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^3$$

para z cercano a 0, donde $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, x es de clase C^2 , y $x(z) = o(|z|^q)$. En este ambiente, el orden de un punto de ramificación p se define como $q - 1 \in \mathbb{N}$. Geométricamente, el orden de un punto de un punto de ramificación se puede ver como el número de vueltas de la superficie alrededor de dicho punto.

Como pretendemos producir nuevos ejemplos de superficies mínimas, completas y estables, en vista a la Proposición 2.1, supondremos que X en no orientable. Como se describe en la Sección 1.7, X induce otra aplicación armónica $\widehat{X}: \widehat{\Sigma} \looparrowright \mathbb{R}^3$, donde $\mu: \widehat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ el recubridor de dos hojas orientable de Σ , que verifica $\widehat{X} = X \circ \mu$. La relación (1.15) aquí nos dice que en particular, I debe preservar el conjunto \mathcal{B} . Como suponemos que \widehat{X} tiene una cantidad finita de puntos de ramificación, los autovalores y las autofunciones del operador de Jacobi $L = \Delta + |A|^2$ de X están bien definidos abordándose de forma variacional, y como la codimensión del conjunto singular \mathcal{B} es dos (ver [94]), el concepto de estabilidad también tiene sentido. El siguiente resultado, probado por Meeks y Pérez en [66] utiliza la noción de estabilidad en una superficie con puntos de ramificación, por completitud, incluimos aquí su demostración.

Proposición 2.1. *Sea $X: \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ una inmersión completa, no plana, mínima, con una cantidad finita de puntos de ramificación $\mathcal{B} \subset \Sigma$. Entonces:*

1. [66, Lema 3.4] *Si X es estable, entonces Σ es no orientable.*
2. [65] *Supongamos que Σ es no orientable, X tiene curvatura total finita y su aplicación extendida de Gauss $G: \overline{\Sigma} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ es un difeomorfismo, donde $\overline{\Sigma}$ denota a la compactificación de Σ . Entonces, X es estable.*

Demostración: 1. Para el primer apartado asumimos que $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ es estable y por reducción al absurdo, supongamos que Σ es orientable. Denotemos por $\bar{\Sigma}$ a la compactificación de Σ y por g a la aplicación de Gauss de $\bar{\Sigma}$. Denotemos por $\mathcal{C} \subset \bar{\Sigma}$ al conjunto de puntos de ramificación de g y sea $\Omega(\varepsilon) \subset \mathbb{S}^2$ el complemento de la unión de discos de radio $\varepsilon > 0$ (con la distancia usual de \mathbb{S}^2), disjuntos dos a dos, alrededor de los puntos del conjunto $g(\mathcal{E} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C})$, donde \mathcal{E} denota al conjunto de los finales de Σ . Si elegimos ε lo suficientemente pequeño y denotamos por Δ al laplaciano esférico, entonces el operador $\Delta + 2$ tiene primer autovalor negativo para el problema de Dirichlet asociado en $\Omega(\varepsilon)$. El hecho de que $g|_{g^{-1}(\Omega(\varepsilon))} : g^{-1}(\Omega(\varepsilon)) \rightarrow \Omega(\varepsilon)$ es un recubridor finito implica que cada componente de $g^{-1}(\Omega(\varepsilon))$ es un dominio compacto no estable en Σ , lo cual es una contradicción con la estabilidad de X , de donde se tiene la primera afirmación.

2. De nuevo por reducción al absurdo, supongamos que X no es estable. Denotemos por $I : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ a la aplicación antípoda y por λ_1 al primer autovalor asociado al operador de Jacobi L del recubridor orientable de dos hojas $\mu : \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$. Si X es no estable, entonces $\lambda_1 < 0$ y, por la Definición 1.25, existe una función propia ϕ asociada a dicho autovalor verificando $\phi \circ I = -\phi$ y $L\phi + \lambda_1\phi = 0$. Sea Ω una componente de $\phi^{-1}(0, \infty)$. Como ϕ es impar $I(\Omega) \subset \phi^{-1}(-\infty, 0)$ y $\mu|_{\Omega} : \Omega \rightarrow \mu(\Omega)$ es un difeomorfismo. Así, $\mu(\Omega) \subset \Sigma$ es un dominio orientable y, por ser G un difeomorfismo, $G(\mu(\Omega)) \subset \mathbb{RP}^2$ también es un dominio orientable. Sea $g : \hat{\Sigma} \rightarrow \mathbb{S}^2$ la aplicación de Gauss de $\hat{\Sigma}$, entonces $g(\Omega)$ y $(g \circ I)(\Omega)$ son dos levantamientos difeomorfos y disjuntos de $G(\mu(\Omega))$ en \mathbb{S}^2 , que por tanto cumplen $\text{Area}((g \circ I)(\Omega)) = \text{Area}(g(\Omega)) \leq 2\pi$, lo cual implica que el primer valor propio de L en Ω es no negativo (estamos usando el Teorema 1.24 y la relación entre el área de la imagen esférica de Ω con la curvatura total), que es una contradicción.

□

Aunque no lo usaremos, en las condiciones de la proposición anterior, es decir, si $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ es una inmersión completa, no plana, mínima, con una cantidad finita de puntos de ramificación, se puede probar que si X es estable, entonces $X(\mathcal{B})$ contiene más de 1 punto. Una forma de demostrar esto último consiste en emplear las cotas para el índice de una inmersión mínima completa y conexa con un número finito de puntos de ramificación dadas por Chodosh y Maximo [17] y Karpukhin [48] junto con la fórmula de monotonía de las superficies mínimas en \mathbb{R}^3 . Se puede consultar esta demostración en [65].

2.3. Superficies no orientables, no estables y mínimas con puntos de ramificación

En cuanto al estudio de superficies mínimas completas no orientables y con una cantidad finita de puntos de ramificación en \mathbb{R}^3 , caben destacar los resultados de Ross [83] que involucran no estabilidad.

Teorema 2.2 (Ross, [83]). *Sea $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ una superficie no orientable, completa, mínima, con curvatura total finita y con una cantidad finita de puntos de ramificación. Denotamos por $\bar{\Sigma}$ a la compactificación del recubridor de dos hojas de Σ y por $g : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ a su aplicación de Gauss extendida. Supongamos que existe una función meromorfa $h : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, cumpliendo $\text{grado}(h) \leq \text{grado}(g)$, $h \circ I = -1/\bar{h}$ y tal que h no se obtiene a partir de g mediante una composición con una transformación de Möbius. Entonces X es no estable.*

Definición 2.3. *Una superficie de Riemann compacta $\bar{\Sigma}$ se dice hipereĺiptica si existe una función meromorfa $z : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ de grado 2.*

Usando el Teorema 2.2 y la definición anterior, Ross prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.4 (Ross, [83]). *Sea $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ una superficie no orientable, completa, mínima, con curvatura total finita y con una cantidad finita de puntos de ramificación. Supongamos que la compactificación del recubridor de dos hojas de Σ es hipereĺiptica y de género γ . Entonces X es no estable en los siguientes casos:*

- $\gamma = 0$ y la curvatura total de Σ es menor que -2π ,
- $\gamma = 1$,
- $\gamma \geq 2$ y γ par,
- $\gamma \geq 3$, γ impar y la curvatura total de Σ es menor que -4π .

De este resultado se deducen, entre otras, las siguientes afirmaciones:

- No existen planos proyectivos mínimos, estables y con una cantidad finita de puntos de ramificación a menos que su aplicación de Gauss sea un difeomorfismo.
- No existen botellas de Klein mínimas estables con una cantidad finita de puntos de ramificación.
- No existen ejemplos de una superficie no orientable, completa, mínima, estable, con curvatura total finita y con una cantidad finita de puntos de ramificación que tengan recubridor orientable de género 2.

2.4. La superficie de Henneberg clásica

La superficie de Henneberg clásica $H_1 \equiv X' : \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \setminus \{[0]\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la superficie no orientable, completa, estable y mínima en \mathbb{R}^3 dada por los datos de Weierstrass:

$$g(z) = z, \quad \omega = z^{-4}(z \pm i)(z \pm 1)dz = z^{-4}(z^4 - 1)dz, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}. \quad (2.3)$$

H_1 tiene dos puntos de ramificación¹ en $[1] = \{1, -1\}$, $[i] = \{i, -i\} \in \mathbb{P}^2 = \overline{\mathbb{C}}/\langle A \rangle$, donde $A(z) = -1/\bar{z}$ es la aplicación antípoda. Por la Proposición 2.1, se tiene que H_1 es estable.

H_1 se puede parametrizar de forma armónica y conforme (salvo traslaciones) a través de la ecuación (2.1). Después de trasladar $X : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de forma que $X(e^{i\pi/4}) = \vec{0}$, los puntos de ramificación de H_1 se aplican por X en $(0, 0, \pm 1)$ y una parametrización de H_1 en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$ en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ viene dada por

$$X(re^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) - \frac{\cos(3\theta)}{6} \left(r^3 - \frac{1}{r^3} \right) \\ -\frac{\sin \theta}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) - \frac{\sin(3\theta)}{6} \left(r^3 - \frac{1}{r^3} \right) \\ \frac{\cos(2\theta)}{2} \left(r^2 + \frac{1}{r^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Como $X(e^{i\theta}) = (0, 0, \cos(2\theta))$, se tiene que X lleva la circunferencia unidad en el segmento vertical $\{(0, 0, t) : t \in [-1, 1]\}$. De esta forma, $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto X(e^{i\theta})$ oscila entre la imagen por X de los dos puntos de ramificación de H_1 . Obsérvese que el complemento de este segmento en el eje x_3 no está contenido en H_1 (aquí H_1 denota al subconjunto de \mathbb{R}^3 dado por $X(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\})$). Esto sería imposible si no pasamos por un punto de ramificación, tal y como se observó en la propiedad expuesta en la Subsección 1.3.1), ver Figura 2.1.

La superficie de Henneberg también aparece frecuentemente en la literatura como la solución al problema de Björling sobre la parábola semicúbica [38] cuando se fija, como vector normal a la curva, el vector normal como curva plana. La parábola semicúbica o parábola de Neile viene dada por:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - a^2x^3 = 0, a \neq 0\}.$$

La parametrización explícita dada en (2.4) para la superficie de Henneberg es la solución al problema de Björling sobre la parábola semicúbica dada por $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z - 1)^3 = \frac{9x^2}{2}, y = 0 \right\}$.

¹Los puntos de ramificación de H_1 tienen todos orden 1 (localmente la superficie se comporta como el grafo de $z \mapsto z^2$ alrededor de cada punto de ramificación); esto se sigue de un razonamiento directo, o de la Proposición 21 en las notas de White "Lectures on minimal surfaces theory" [96].

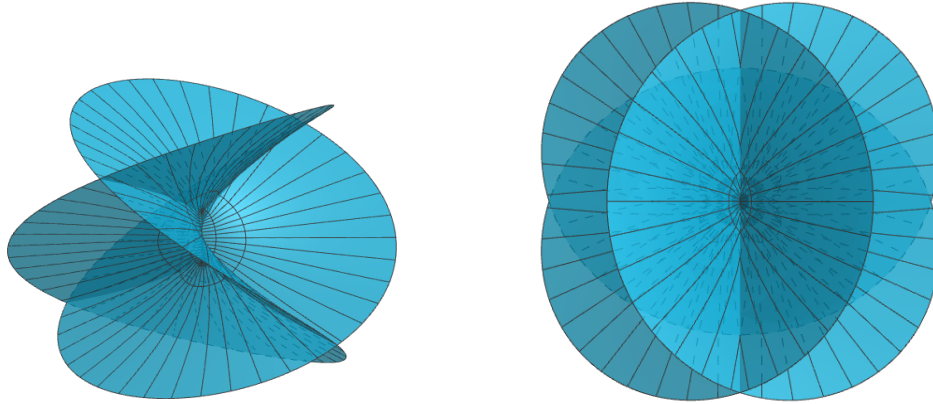


Figura 2.1: La superficie de Henneberg H_1 . Después de una traslación, las imágenes por la inmersión ramificada $X : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de los puntos de ramificación $\{1, -1\}$, $\{i, -i\}$ de H_1 son $\pm(0, 0, 1)$. Además del segmento vertical cerrado, simétrico respecto del origen, cuyos extremos son las imágenes por X de los puntos de ramificación, H_1 contiene dos rectas horizontales, que se cortan de forma ortogonal y bisecan a los ejes x_1 y x_2 . A la izquierda: Intersección de H_1 con una bola de radio 8. A la derecha: vista cenital de H_1 .

2.4.1. Isometrías de H_1

Se puede comprobar lo siguiente:

- (I1) La aplicación antípoda $A: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ (en coordenadas polares $(r, \theta) \mapsto (1/r, \pi + \theta)$) deja a la superficie invariante, es decir, cuando vemos a $H_1 \subset \mathbb{R}^3$ como el conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 que se obtienen como $X(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\})$ donde X viene dada por (2.4), entonces $X(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}) = X(A(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}))$. Es la aplicación llamada "cambio de hoja", que invierte la orientación.
- (I2) La aplicación $z \mapsto -z$ (en coordenadas polares $(r, \theta) \mapsto (r, \pi + \theta)$) induce la rotación de ángulo π alrededor del eje x_3 en la superficie.
- (I3) La inversión del plano z con respecto al círculo unidad, $z \mapsto 1/z$, (en coordenadas polares $(r, \theta) \mapsto (1/r, \theta)$) es la composición de A con $z \mapsto -z$, y por tanto, también induce una rotación de ángulo π alrededor del eje x_3 de la superficie.
- (I4) La aplicación conjugación $z \mapsto \bar{z}$ (en coordenadas polares $(r, \theta) \mapsto (r, -\theta)$) induce la reflexión de la superficie alrededor del plano (x_1, x_3) .
- (I5) La reflexión con respecto al eje imaginario (en coordenadas polares $(r, \theta) \mapsto (r, \pi - \theta)$) induce la reflexión de la superficie con respecto al plano (x_2, x_3) .

- (I6) X lleva a la semirrecta $\{re^{-i\pi/4} \mid r \in (0, \infty)\}$ (respectivamente $\{re^{i\pi/4} \mid r \in (0, \infty)\}$) de forma inyectiva en $l_1 = \text{Span}(1, 1, 0)$ (respectivamente $l_2 = \text{Span}(1, -1, 0)$). Por lo tanto (véase el Teorema 1.4, Principio de reflexión de Schwarz), las rotaciones R_1, R_2 de ángulo π alrededor de l_1, l_2 son isometrías de X (R_1 está inducida por $z \mapsto -i\bar{z}$ y R_2 por $z \mapsto i\bar{z}$).
- (I7) La aplicación $z \mapsto iz$ (en coordenadas polares $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \pi/2)$) induce la rotación de ángulo $\pi/2$ alrededor del eje x_3 compuesta con la reflexión respecto al plano (x_1, x_2) .

Estas isometrías, junto con la aplicación identidad, forman un subgrupo del grupo de isometrías extrínsecas de H_1 que denotamos por $\text{Iso}(H_1)$, isomorfo al grupo diédrico D_4 . Cabe preguntarse si no hay más isometrías (intrínsecas) que éstas; la respuesta es afirmativa.

Lema 2.5. *Todas las isometrías (intrínsecas) de H_1 están contenidas en el subgrupo de $\text{Iso}(H_1)$ generado por I1, I2, I3, I4, I5, I6, I7, I8. En particular, $\text{Iso}(H_1)$ es isomorfo al grupo diédrico D_4 .*

Demostración: Si ϕ es una isometría de H_1 entonces ϕ debe preservar la unión de las dos líneas horizontales l_1 y l_2 contenidas en H_1 . Por tanto, ϕ conserva el origen y se tiene $\phi \in O(3)$. Además ϕ también debe conservar, salvo un signo, la dirección vertical y, por otro lado, conserva el plano (x_1, x_2) . La restricción de ϕ a dicho plano será un elemento de $O(2)$ que preserva $l_1 \cup l_2$ de donde podemos deducir que ϕ debe de ser una de las isometrías presentadas anteriormente. \square

2.4.2. Familia asociada y superficie conjugada H_1^*

La aplicación flujo de H_1 (definida en (1.12)) para una curva cerrada y embebida $\Gamma \subset \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ que encierre al origen de \mathbb{C} (y tomada de tal forma que no pase por los puntos de ramificación) se anula (en otras palabras, la forma de Weierstrass $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ asociada a H_1 es exacta). Esto implica que todas las superficies asociadas (definidas en la Subsección 1.3.1) $\{\tilde{H}_1(\varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi)\}$ al recubridor orientable de dos hojas $\tilde{H}_1 = \tilde{H}_1(0)$ de H_1 están bien definidas como superficies en \mathbb{R}^3 (la inmersión mínima ramificada $\tilde{H}_1(\varphi)$ tiene como datos de Weierstrass $g_\varphi = g$, $\omega_\varphi = e^{i\varphi}\omega$ y es isométrica a \tilde{H}_1 , en particular tiene el mismo conjunto de puntos de ramificación que \tilde{H}_1).

Ninguna de las superficies $\tilde{H}_1(\varphi)$ excepto por $\varphi = 0$ desciende al cociente no orientable $\mathbb{P}^2 \setminus \{[0]\}$ porque la segunda ecuación en (1.15) no se conserva si

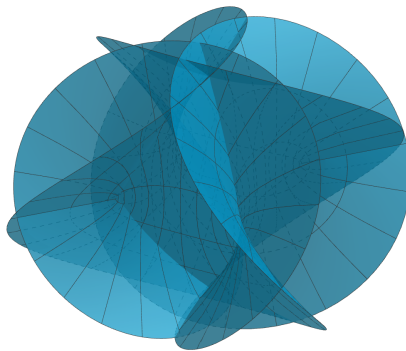


Figura 2.2: Superficie conjugada $H_1^* := \tilde{H}_1(\pi/2)$.

cambiamos ω por $e^{i\varphi}\omega$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. En particular, ninguna de estas superficies asociadas son congruentes a H_1 .

La superficie conjugada $H_1^* := \tilde{H}_1(\pi/2)$ es simétrica por la reflexión en el plano (x_1, x_2) . La intersección entre H_1^* y $\{x_3 = 0\}$ está formada por una astroide (la astroide es un caso particular de hipocicloide, definida en (2.9)) γ_4 parametrizada por

$$t \mapsto \gamma_4(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) + \frac{\sin(3\theta)}{3} \\ -\cos(\theta) - \frac{\cos(3\theta)}{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

junto con 4 semirrectas en las puntas de la astroide en la dirección de sus vectores de posición, ver Figura 2.3.

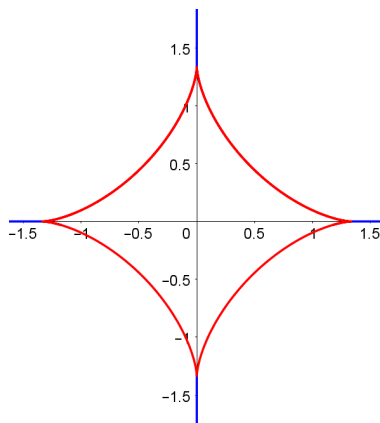


Figura 2.3: La astroide γ_4 (en rojo) y las 4 semirrectas obtenidas intersecando H_1^* con el plano (x_1, x_2) (en azul).

En particular, H_1^* es la solución al problema de Björling para la curva γ_4 y la elección del campo normal unitario como el campo normal a γ_4 , excluyendo sus cuatro vértices, como curva plana. Véase también la Observación 2.10.

2.5. Superficies de Henneberg generalizadas

Nuestro objetivo ahora es buscar superficies no orientables, completas, mínimas y estables $X: \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ con $\Sigma = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}$, \mathcal{E} finito que generalicen a H_1 . Denotamos por $(g, \omega = f dz)$ a los correspondientes datos de Weierstrass. Imponemos que la aplicación de Gauss del recubridor de dos hojas orientable sea un difeomorfismo, ya que es una hipótesis necesaria para aplicar la Proposición 2.1 y obtener estabilidad. Por tanto, podemos suponer sin perder generalidad que, salvo una transformación de Möbius, tomamos $g(z) = z$. Por lo tanto, $I(z) = -1/\bar{z}$, $\widehat{X} = X/\langle I \rangle: \Sigma/\langle I \rangle \looparrowright \mathbb{R}^3$ es estable y (1.16) se escribe como

$$f(-1/\bar{z}) = -z^4 \overline{f(z)}. \quad (2.5)$$

2.5.1. Forma general de f

Tener curvatura total finita es otra hipótesis necesaria para aplicar la segunda afirmación de la Proposición 2.1. Por ello, tomamos una función racional general de la forma

$$f(z) = \frac{c \prod_{j=1}^M (z - a_j)}{z^{m+3} \prod_{j=1}^N (z - b_j)}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}, \quad (2.6)$$

donde $c, a_j, b_j \in \mathbb{C}^*$, $m \in \mathbb{N}$ y $M, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ son constantes a determinar. Hemos tomado f sin pérdida de generalidad como una función racional puesto que el Teorema 1.11 implicará que, bajo la hipótesis de tener curvatura total finita, la función f es una función meromorfa en la esfera de Riemann, y por tanto f debe de ser racional.

Con el par de datos de Weierstrass dado por $(g, \omega = f dz)$ en $\overline{\mathbb{C}}$, estudiamos cuándo éstos resuelven el problema de periodos asociado y generan una aplicación $X: \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que desciende al cociente $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ como superficie no orientable.

Observación 2.6. 1. La superficie de Henneberg H_1 tiene $f(z) = z^{-4}(z^4 - 1)$, en consecuencia $c = 1$, $m = 1$, $N = 0$, $M = 4$, $\{a_j\} = \{\pm 1, \pm i\}$.

2. Los ceros de la métrica inducida (2.2) (puntos de ramificación de la superficie) ocurren precisamente en los puntos a_j ; los finales ocurren en $0, \infty$ y en

los puntos b_j (en particular, ambas familias $\{a_j\}_j, \{b_j\}_j$ deben presentarse en pares de puntos antípodos, véase también (2.10) más adelante).

3. Una consecuencia de la última observación es que las rotaciones en \mathbb{R}^3 de nuestras superficies (manteniendo el hecho de que los datos de Weierstrass cierren períodos) no están permitidas a menos que el eje de rotación sea vertical.

Si imponemos (2.5) a (2.6) obtenemos

$$f(-1/\bar{z}) = c(-1)^{m-1+M-N} z^{3+m-M+N} \frac{\prod_{j=1}^M (1 + a_j \bar{z})}{\prod_{j=1}^N (1 + b_j \bar{z})} =$$

$$-z^4 \overline{f(z)} = -\frac{\bar{c}}{z^{m-1}} \frac{\prod_{j=1}^M (\bar{z} - \bar{a}_j)}{\prod_{j=1}^N (\bar{z} - \bar{b}_j)},$$

por tanto para cada $z \in \bar{\mathbb{C}}$,

$$\bar{c}(-1)^{m+M-N} z^{2+2m-M+N} \prod_{j=1}^M (1 + \bar{a}_j z) \prod_{j=1}^N (z - b_j) = c \prod_{j=1}^M (z - a_j) \prod_{j=1}^N (1 - \bar{b}_j z), \quad (2.7)$$

de donde deducimos que

$$2 + 2m - M + N = 0, \quad (2.8)$$

en particular $M - N$ es par. Substituyendo $z = 0$ en (2.7) obtenemos

$$\bar{c}(-1)^m \prod_{j=1}^N b_j = c \prod_{j=1}^M a_j. \quad (2.9)$$

Usando (2.9), podemos rescribir (2.7) como una igualdad entre polinomios mónicos en z :

$$\prod_{j=1}^M \left(\frac{1}{a_j} + z \right) \prod_{j=1}^N (z - b_j) = \prod_{j=1}^M (z - a_j) \prod_{j=1}^N \left(\frac{1}{b_j} + z \right),$$

de donde deducimos que

$$\{a_1, \dots, a_M\} = \{-1/\bar{a}_1, \dots, -1/\bar{a}_M\}, \quad \{b_1, \dots, b_N\} = \{-1/\bar{b}_1, \dots, -1/\bar{b}_N\}. \quad (2.10)$$

esto es, M, N son pares y los puntos a_j (resp. b_j) vienen dados por $\widetilde{M} := M/2$ (resp. $\widetilde{N} := N/2$) pares de puntos antípodos en \mathbb{C}^* . Ahora (2.8) y (2.9) se escriben respectivamente:

$$1 + m - \widetilde{M} + \widetilde{N} = 0, \quad (2.11)$$

$$-\bar{c} \prod_{j=1}^{N/2} \frac{b_j}{\bar{b}_j} = c \prod_{j=1}^{M/2} \frac{a_j}{\bar{a}_j}. \quad (2.12)$$

2.5.2. Resolviendo el problema de períodos para el caso de un final

De (1.15) y (2.6) observamos que los puntos donde ds^2 puede explotar (finales) son $z = 0, b_1, \dots, b_N$ y sus puntos antípodos. Para mantener los cálculos simples asumiremos que no hay ningún b_j , i.e. $N = 0$ (o equivalentemente que $M/2 = m + 1$), lo que reduce la homología de la superficie a la de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ y el problema de períodos a imponer

$$\overline{\int_{\gamma} g^2 \omega} = \int_{\gamma} \omega, \quad \operatorname{Re} \int_{\gamma} g \omega = 0,$$

donde $\gamma = \{|z| = 1\}$, o equivalentemente,

$$\overline{\operatorname{Res}_0(g^2 f)} = -\operatorname{Res}_0(f), \quad \operatorname{Im} \operatorname{Res}_0(gf) = 0. \quad (2.13)$$

Podemos simplificar (2.6) para escribir

$$f(z) = \frac{c}{z^{m+3}} \prod_{j=1}^{m+1} (z - a_j) \left(z + \frac{1}{a_j} \right), \quad (2.14)$$

que cumple (2.5) (esta es la condición para que $X : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ descienda al cociente $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \setminus \{0\}$ como superficie no orientable asumiendo que el problema de períodos (2.13) se resuelva) si y sólo si (2.12) se cumple, lo que en este caso se reduce a

$$-\frac{\bar{c}}{c} = \prod_{j=1}^{m+1} \frac{a_j}{\bar{a}_j}. \quad (2.15)$$

Llamamos

$$P(z) := \prod_{j=1}^{m+1} (z - a_j) \left(z + \frac{1}{a_j} \right) = \sum_{h=0}^{2m+2} A_h z^h. \quad (2.16)$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Res}_0(f) = c \operatorname{Res}_0\left(\sum_{h=0}^{2m+2} A_h z^{h-m-3}\right) = cA_{m+2},$$

$$\operatorname{Res}_0(g^2 f) = c \operatorname{Res}_0\left(\sum_{h=0}^{2m+2} A_h z^{h-m-1}\right) = cA_m,$$

$$\operatorname{Res}_0(gf) = c \operatorname{Res}_0\left(\sum_{h=0}^{2m+2} A_h z^{h-m-2}\right) = cA_{m+1}.$$

Es decir, el problema de períodos (2.13) se reduce a

$$\overline{cA_m} = -cA_{m+2}, \quad \operatorname{Im}(cA_{m+1}) = 0. \quad (2.17)$$

Observación 2.7. Podemos asumir $|c| = 1$ debido al hecho de que multiplicar la forma de Weierstrass por un número positivo solo altera a la superficie resultante en una homotecia. De forma similar, intercambiar c por $-c$ no cambia el problema de períodos.

También escribimos $a_j = |a_j|e^{i\theta_j}$, $\theta_j \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$-a_j + \frac{1}{a_j} = \left(-|a_j| + \frac{1}{|a_j|}\right)e^{i\theta_j}, \quad \frac{a_j}{a_j} = e^{2i\theta_j},$$

y tenemos,

$$P(z) = \prod_{j=1}^{m+1} \left(z^2 + \left(-|a_j| + \frac{1}{|a_j|}\right)e^{i\theta_j} z - e^{2i\theta_j} \right) \quad (2.18)$$

Definición 2.8. Dado $m \in \mathbb{N}$, llamaremos *solución al problema de períodos no orientable con complejidad m* a una lista $(c, a_1, \dots, a_{m+1}) \in \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{C}^*)^{m+1}$ resolviendo las ecuaciones (2.15), (2.17). Notemos que, geoméricamente, a_1, \dots, a_{m+1} son los puntos de ramificación de nuestra inmersión mínima ramificada.

La forma con la que hemos tomado los datos de Weierstrass $(g, \omega = f dz)$, garantizan que $X : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene curvatura total finita. Se cumplen todas las hipótesis para aplicar la segunda afirmación de la Proposición 2.1 y, por tanto, las inmersiones producidas por este procedimiento son estables.

2.5.3. El caso más simétrico

Para cada complejidad m , hay una configuración maximal con respecto al número de simetrías que da lugar a una solución del problema de períodos para dicha complejidad y que describimos ahora.

Tomemos como a_j las soluciones de la ecuación $a^{2m+2} = 1$ (i.e. $|a_j| = 1$ y $\theta_j = \frac{\pi}{m+1}(j-1)$, $j = 1, \dots, m+1$). Observemos que

$$\prod_{j=1}^{m+1} \frac{a_j}{\bar{a}_j} = \prod_{j=1}^{m+1} e^{2i\theta_j} = e^{2i \sum_{j=1}^{m+1} \theta_j} = e^{\frac{2\pi i}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} (j-1)} = e^{\frac{2\pi i}{m+1} \frac{m(m+1)}{2}} = e^{i\pi m},$$

y por tanto se cumple la ecuación (2.15) si y sólo si

$$c = \pm i^{m-1}. \quad (2.19)$$

Para la ecuación (2.17), notemos que (2.18) se puede escribir como

$$P(z) = \prod_{j=1}^{m+1} (z^2 - e^{2i\theta_j}) = z^{2m+2} - 1,$$

y por tanto $A_m = 0$ (porque $m > 0$), $A_{m+2} = 0$ (porque $m+2 < 2m+2$) y $A_{m+1} = 0$. En particular, (2.17) se cumple trivialmente para cada valor de $c \in \mathbb{C}^*$. En consecuencia, los datos de Weierstrass

$$g(z) = z, \quad \omega = i^{m-1} z^{-m-3} (z^{2m+2} - 1) dz, \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad (2.20)$$

dan lugar a una superficie no orientable, completa, estable, mínima, con curvatura total -2π , $H_m = X(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\})$, donde X viene dada por (2.1). Para $m = 1$ recuperamos a la superficie de Henneberg clásica. Por lo tanto, podemos ver a H_m como la generalización natural de la superficie de Henneberg, de donde se deriva el título de este capítulo. Estas superficies responden también a la cuestión planteada por Choe en [18], donde se pregunta si la superficie de Henneberg es la única superficie no orientable, completa y mínima con curvatura total -2π .

2.5.4. Familia asociada y superficie conjugada H_m^* .

Como $A_m = A_{m+1} = A_{m+2} = 0$, la aplicación flujo de H_m para una curva cerrada alrededor del origen en \mathbb{C} se anula y la forma de Weierstrass $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ asociada a H_m es exacta. Por lo tanto, todas las superficies asociadas $\{\tilde{H}_m(\varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi)\}$ al recubridor orientable $\tilde{H}_m = \tilde{H}_m(0)$ de H_m están

bien definidas. Como pasaba en el caso $m = 1$ (ver Sección 2.4.2), ninguna de estas superficies asociadas desciende al cociente no orientable salvo por $\pm H_m$. Denotaremos por $H_m^* := \tilde{H}_m(\pi/2)$ a la superficie conjugada a H_m .

El comportamiento de H_m es muy diferente dependiendo de la paridad del parámetro m . Una justificación naif de esta dependencia de la paridad de m viene del hecho de que el coeficiente para ω cambia de ± 1 para m impar a $\pm i$ para m par. Una interpretación más geométrica de esta dependencia se puede ver a continuación.

2.5.5. Caso m impar

Si $m \in \mathbb{N}$ es impar, (2.20) nos da $\omega = z^{-m-3}(z^{2m+2} - 1)dz$. Aunque H_m tiene $m + 1$ puntos de ramificación en $\Sigma = \mathbb{P}^2 \setminus \{[0]\}$ (la clases de las raíces $(2m + 2)$ -ésimas de la unidad bajo la aplicación antípoda), éstos van a través de X a solo dos puntos diferentes en \mathbb{R}^3 : después de trasladar la superficie en \mathbb{R}^3 de modo que $X(e^{i\frac{\pi}{2(m+1)}}) = \vec{0}$ (estamos usando la notación de (2.1)), los puntos de ramificación de H_m se aplican en $(0, 0, \pm 1)$ y una parametrización para H_m en coordenadas polares es (compárese con (2.4))

$$X(re^{i\theta}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(m\theta)}{2m} \left(r^m - \frac{1}{r^m}\right) - \frac{\cos((m+2)\theta)}{2(m+2)} \left(r^{m+2} - \frac{1}{r^{m+2}}\right) \\ -\frac{\sin(m\theta)}{2m} \left(r^m - \frac{1}{r^m}\right) - \frac{\sin((m+2)\theta)}{2(m+2)} \left(r^{m+2} - \frac{1}{r^{m+2}}\right) \\ \frac{\cos((m+1)\theta)}{m+1} \left(r^{m+1} + \frac{1}{r^{m+1}}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

X lleva a la circunferencia unidad en el segmento vertical $\{(0, 0, t) : t \in [-1, 1]\}$. $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto X(e^{i\theta})$ oscila entre las imágenes por X de los puntos de ramificación de H_m (que se aplican en $(0, 0, \pm 1)$), y el complemento de este segmento cerrado en el eje x_3 no está contenido en H_m . La intersección $H_m \cap \{x_3 = 0\}$ está formada por un sistema equiangular de $m + 1$ líneas rectas pasando por el origen (las imágenes a través de X de las líneas rectas de argumentos $\theta = \frac{\pi/2+k\pi}{m+1}$, $k = 0, \dots, m$ en coordenadas polares). Se puede ver una imagen para H_3 en la parte derecha de la Figura 2.4.

2.5.6. Caso m par

Si m es par (y es distinto de cero), (2.20) produce $\omega = iz^{-m-3}(z^{2m+2} - 1)dz$. En este caso, una parametrización de H_m en coordenadas polares es

$$X(re^{i\theta}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(m\theta)}{2m} \left(r^m + \frac{1}{r^m}\right) + \frac{\sin((m+2)\theta)}{2(m+2)} \left(r^{m+2} + \frac{1}{r^{m+2}}\right) \\ -\frac{\cos(m\theta)}{2m} \left(r^m + \frac{1}{r^m}\right) - \frac{\cos((m+2)\theta)}{2(m+2)} \left(r^{m+2} + \frac{1}{r^{m+2}}\right) \\ \frac{\sin((m+1)\theta)}{m+1} \left(\frac{1}{r^{m+1}} - r^{m+1}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

A continuación estudiaremos la relación de H_m con cierta hipocicloide.

Definición 2.9. Una hipocicloide de radio interno $r > 0$ y radio externo $R > r$ es la curva plana que traza un punto sobre una circunferencia de radio r cuando ésta rueda en el interior de otra circunferencia (que está fija) de radio R . Puede ser parametrizada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, donde

$$x(t) = -(R-r) \sin t + r \sin \left(\frac{R-r}{r} t \right), \quad y(t) = -(R-r) \cos t - r \cos \left(\frac{R-r}{r} t \right).$$

X lleva la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1 = \{z = |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ en una cierta hipocicloide contenida en el plano $\{x_3 = 0\}$, de la forma en que explicamos a continuación. Usando (2.22), deducimos que la imagen por X de \mathbb{S}^1 tiene la siguiente parametrización:

$$\theta \in [0, 2\pi) \mapsto X(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(m\theta)}{m} + \frac{\sin((m+2)\theta)}{m+2} \\ -\frac{\cos(m\theta)}{m} - \frac{\cos((m+2)\theta)}{m+2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

De (2.23) deducimos que, salvo una reparametrización $t = m\theta$, $X(\mathbb{S}^1)$ es la hipocicloide de radio interior $r = \frac{1}{m+2}$ y radio exterior $R = \frac{2m+2}{m(m+2)}$, que tiene exactamente $m + 1$ puntas. Estas puntas son las imágenes por X de los $m + 1$ puntos de ramificación de H_m . En particular, H_m es la única superficie mínima obtenida como solución al problema de Björling para la hipocicloide de $m + 1$ puntas (este número de puntas es cualquier entero positivo impar a partir de tres), radio interior $r = \frac{1}{m+2}$ y radio exterior $R = \frac{2m+2}{m(m+2)}$, cuando tomamos como vector normal unitario η (ver Sección 1.4 para la notación) a un vector normal a la hipocicloide como curva plana, tras eliminar sus vértices.

Representamos a dicha curva plana en los casos más simples: $m = 2, 4, 6$ en la Figura 2.5 en color rojo.

2.5.7. Revisitando el caso m impar: H_m^* como solución a un problema de Björling para una hipocicloide

Utilizando la fórmula de Weierstrass (2.1), se puede ver fácilmente que la superficie conjugada H_m^* de H_m para m impar puede ser parametrizada en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$ por la expresión $X^*(re^{i\theta})$ dada por la misma fórmula de la parte derecha de (2.22). $X^*(\mathbb{S}^1)$ parametriza una hipocicloide γ_{2m+2} con radio interior $r = \frac{1}{m+2}$ y radio exterior $R = \frac{2m+2}{m(m+2)}$. Como

$$\frac{R}{r} = \frac{2m+2}{m},$$

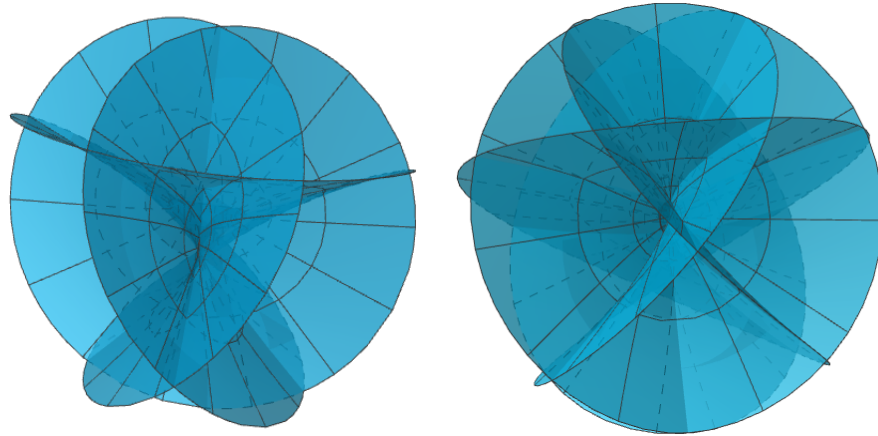


Figura 2.4: Izquierda: H_2 . Derecha: H_3 .

deducimos que γ_{2m+2} tiene $2m + 2$ puntas². Observamos que $2m + 2$ es un número múltiplo de 4 debido a que m es impar; y de la misma forma, cada múltiplo de 4 se puede escribir como $2m + 2$ para un único $m \in \mathbb{N}$ impar. Esto nos dice que, para cada $m \in \mathbb{N}$ impar, H_m^* es la única solución al problema de Björling (ver Sección 1.4) para la hipocicloide γ_{2m+2} , cuando tomamos como vector normal unitario η a un vector normal a γ_{2m+2} como curva plana, tras eliminar sus vértices.

Observación 2.10. 1. En el caso particular de una hipocicloide de 4 puntas (llamada astroide), recuperamos la superficie H_1^* conjugada a la superficie de Henneberg clásica. Este resultado fue descrito por Odehnal [76], que también estudia el problema de Björling para la hipocicloide γ_3 de tres puntas desde un punto de vista de superficies algebraicas.

2. Hemos descrito las superficies mínimas que se obtienen como solución de un problema de Björling sobre una hipocicloide en el caso en que el número de puntas es un número impar o bien un múltiplo de cuatro. El caso que queda discutir es en el que consideramos una hipocicloide de $4k + 2$ puntas, $k \in \mathbb{N}$. La correspondiente solución al problema de Björling también se puede describir a través de la parametrización explícita (2.22), si consideramos un parámetro $m \in \mathbb{Q}$. A saber, si elegimos m con la forma

²Para una hipocicloide de radio interior $r > 0$ y radio exterior $R > r$, el cociente R/r expresa el número de veces que la circunferencia interior puede rodar a lo largo de la circunferencia exterior hasta que completa una vuelta. Si R/r es un número racional y a/b es la fracción irreducible de R/r , entonces $b \cdot a/b = a$ cuenta el número de veces que la circunferencia interior rueda hasta que el punto que genera la hipocicloide vuelve a alcanzar su posición inicial. Este número a coincide con el número de puntas.

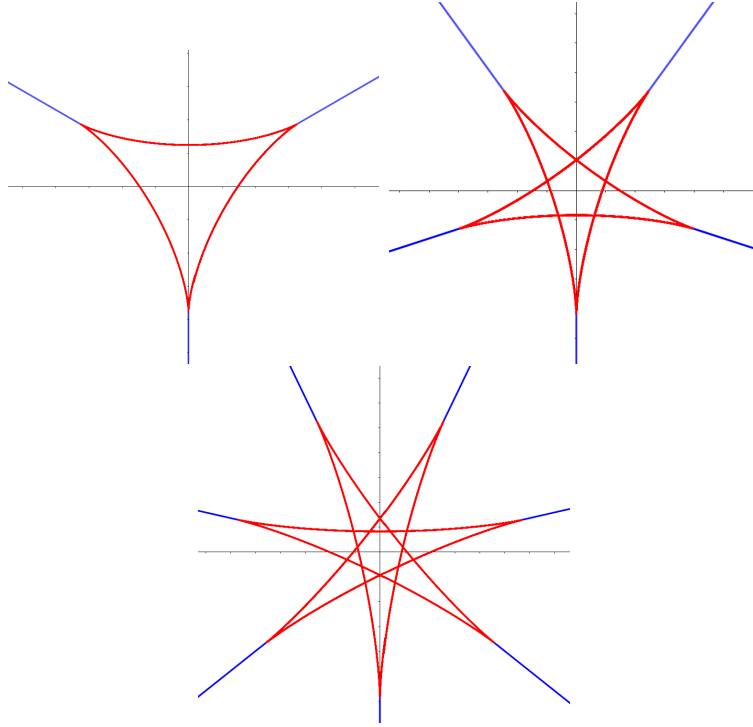


Figura 2.5: La intersección de H_m (con $m > 0$ par) con $\{x_3 = 0\}$ está formada de una hipocicloide de $m + 1$ puntas (en rojo) junto con semirrectas de la forma $\{tp \mid t \geq 1\}$ que comienzan en cada una de sus puntas p . Arriba a la izquierda: $H_2 \cap \{x_3 = 0\}$, donde los puntos de ramificación tienen coordenadas $(0, -\frac{3}{4}, 0)$, $(-\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{3}{8}, 0)$, $(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{3}{8}, 0)$. Arriba a la derecha: $H_4 \cap \{x_3 = 0\}$. En la segunda fila: $H_6 \cap \{x_3 = 0\}$.

$m = \frac{1}{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, elegimos un radio interior de la forma $r = \frac{1}{m+2}$ y radio exterior de la forma $R = \frac{2m+2}{m(m+2)}$, entonces

$$\frac{R}{r} = \frac{2m+2}{m} = 4k+2,$$

lo que asegura que la superficie completa, mínima y con puntos de ramificación $H_{\frac{1}{2k}} = X(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\})$ (aquí X viene dada por la expresión (2.22)) es simétrica por la reflexión en el plano (x_1, x_2) , y $X(\mathbb{S}^1)$ es una hipocicloide con $4k+2$ puntas. $H_{\frac{1}{2k}}$ no desciende al cociente no orientable.

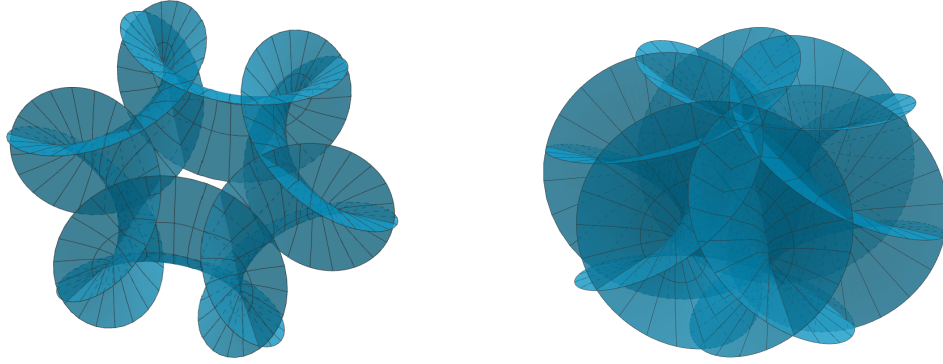


Figura 2.6: Distintas secciones de $H_{\frac{1}{2}}$: solución al problema de Björling sobre una hipocicloide de 6 puntas.

2.5.8. Isometrías de H_m

Como es de esperar, el grupo de isometrías de H_m depende de la paridad del parámetro m .

Supongamos primero que m es impar. En este caso, de (2.21) se obtiene que:

- (O1) La reflexión en el plano z respecto al eje imaginario, $re^{i\theta} \mapsto re^{i(\pi-\theta)}$, produce, a través de X , la simetría con respecto al plano (x_2, x_3) en H_m .
- (O2) La rotación $re^{i\theta} \mapsto re^{i(\theta+\pi+\frac{\pi}{m+1})}$ de ángulo $\pi + \frac{\pi}{m+1}$ alrededor del origen en el plano z , hace que H_m sea simétrica bajo rotaciones de ángulo $\frac{\pi}{m+1}$ alrededor del eje x_3 compuesta con una reflexión con respecto al plano (x_1, x_2) .

(O1), (O2) generan un subgrupo de isometrías extrínsecas del grupo de isometrías extrínsecas $\text{Iso}(H_m)$ de H_m , isomorfo al grupo diédrico D_{2m+2} .

Asumimos ahora que m es par. Usando (2.22), obtenemos:

- (E1) La reflexión $re^{i\theta} \mapsto re^{i(\pi-\theta)}$ en el plano z respecto del eje imaginario produce, a través de X , la simetría respecto al plano (x_2, x_3) en H_m (esto es una característica común tanto para la dimensión par como para la impar).
- (E2) La rotación $re^{i\theta} \mapsto re^{i(\theta+\frac{2\pi}{m+1})}$ de ángulo $\frac{2\pi}{m+1}$ alrededor del origen en el plano z hace que H_m sea simétrica con respecto a rotaciones de ángulo $\frac{2\pi}{m+1}$.

(E3) La aplicación antípoda $re^{i\theta} \mapsto re^{i(\theta+\pi)}$ en el plano z , produce una simetría de H_m con respecto al plano (x_1, x_2) .

(E1), (E2), (E3) generan un subgrupo de $\text{Iso}(H_m)$ isomorfo al grupo prismático $D_{m+1} \times \mathbb{Z}_2$.

Estás son, esencialmente, todas las isometrías (intrínsecas) de H_m , $m \in \mathbb{N}$.

Lema 2.11. *Dado $m \in \mathbb{N}$, todas las isometrías (intrínsecas) de H_m están contenidas en el subgrupo de $\text{Iso}(H_m)$ generado por O1, O2 en el caso en que m sea impar o en el subgrupo de $\text{Iso}(H_m)$ generado por E1, E2, E3 en el caso en que m sea par.*

Demostración: Si m es impar, argumentando como en el Lema 2.5, la intersección de H_m con el plano $x_3 = 0$ es un sistema equiangular de $m + 1$ líneas l_1, \dots, l_{m+1} . Toda isometría ϕ de H_m debe de preservar l_1, \dots, l_{m+1} y también la dirección vertical ya que preserva el conjunto de puntos de ramificación de H_m . De aquí concluimos que el grupo de isometrías de H_m con m impar es isomorfo a D_{2m+2} .

En el caso en que m sea par, sean s_1, \dots, s_m las semirrectas que empiezan en la imagen de los puntos de ramificación con la dirección dada por el vector que une el origen y los puntos de ramificación (en azul en la Figura 2.5) están contenidas en H_m . Si ϕ es una isometría de H_m , entonces ϕ preserva el conjunto de los puntos de ramificación. Como la imagen de estos puntos de ramificación genera el plano $\{x_3 = 0\}$, entonces ϕ deja invariante a este plano, luego también preserva al eje vertical; en otras palabras, el eje x_3 es un espacio propio de ϕ . Tenemos entonces dos posibilidades, que el autovalor de ϕ asociado al eje vertical sea 1 o -1 . Ambos casos se pueden dar puesto que H_m es simétrica con respecto al plano $\{x_3 = 0\}$. De aquí se deduce que el grupo de isometrías de H_m para m par es isomorfo al grupo prismático $D_{m+1} \times \mathbb{Z}_2$. \square

2.6. Espacio de moduli de los ejemplos para una complejidad dada

Nuestro siguiente objetivo es el de analizar la estructura de las familias de soluciones del problema de períodos para una complejidad dada siguiendo la Definición 2.8. Para $m = 1$, obtendremos la unicidad de la superficie de Henneberg clásica H_1 . Esta unicidad es una característica especial del caso $m = 1$ debido a que para complejidades $m \geq 2$ se pueden encontrar familias multiparamétricas de soluciones.

Definimos la función $R: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $R(r) = r - \frac{1}{r}$.

2.6.1. Soluciones con complejidad $m = 1$

Como $m = 1$, resolver el problema de períodos (2.17) de forma que la superficie producida descienda al cociente no orientable se reduce a

$$\overline{cA_1} = -cA_3, \quad \text{Im}(cA_2) = 0, \quad -\frac{\bar{c}}{c} = \frac{a_1 a_2}{\overline{a_1 a_2}}. \quad (2.24)$$

Supongamos que una lista $(c, a_1, a_2) \in \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{C}^*)^2$ es una solución del problema de períodos no orientable (2.24), y llamemos $X : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a la inmersión mínima ramificada, que induce una superficie mínima, estable, no orientable y con ramificación. Recordemos que $g(z) = z$ es su aplicación de Gauss y que la lista que genera H_1 (superficie de Henneberg clásica) es $(\pm 1, 1, i)$.

Observación 2.12. Si rotamos los puntos de ramificación, con una rotación de cualquier ángulo centrada en el origen, entonces generamos superficies que son congruentes a través de una rotación respecto al eje vertical (ver Observación 2.6). Esto hace que podemos asumir $a_1 \in \mathbb{R}^+$ de ahora en adelante, aunque no podemos asumir que $a_1 = 1$ debido a que ya hemos realizado una homotecia para asumir que $|c| = 1$ (Observación 2.7).

Escribimos a_1, a_2 en coordenadas polares como $a_1 = r_1, a_2 = r_2 e^{i\theta_2}, r_1, r_2 > 0, \theta_2 \in [0, 2\pi)$. (2.16) se puede escribir como

$$\begin{aligned} P(z) &= z^4 - [R(r_1) + R(r_2)e^{i\theta_2}] z^3 - [1 + e^{2i\theta_2} - R(r_1)R(r_2)e^{i\theta_2}] z^2 \\ &\quad + [R(r_1)e^{2i\theta_2} + R(r_2)e^{i\theta_2}] z + e^{2i\theta_2}, \end{aligned}$$

por tanto

$$A_1 = R(r_1)e^{2i\theta_2} + R(r_2)e^{i\theta_2}, \quad (2.25)$$

$$A_2 = -[1 + e^{2i\theta_2} - R(r_1)R(r_2)e^{i\theta_2}], \quad (2.26)$$

$$A_3 = -[R(r_1) + R(r_2)e^{i\theta_2}]. \quad (2.27)$$

Escribiendo $c = e^{i\beta}$, tenemos

$$\begin{aligned} \overline{cA_1} + cA_3 &= R(r_1) [e^{-i(\beta+2\theta_2)} - e^{i\beta}] + R(r_2) [e^{-i(\beta+\theta_2)} - e^{i(\beta+\theta_2)}] \\ &= R(r_1)e^{-i\theta_2} [e^{-i(\beta+\theta_2)} - e^{i(\beta+\theta_2)}] - 2R(r_2) \sinh(i(\beta + \theta_2)) \\ &= -2e^{-i\theta_2} R(r_1) \sinh(i(\beta + \theta_2)) - 2iR(r_2) \sin(\beta + \theta_2) \\ &= -2i [R(r_1)e^{-i\theta_2} + R(r_2)] \sin(\beta + \theta_2), \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} cA_2 &= -e^{i\beta} (1 + e^{2i\theta_2}) + R(r_1)R(r_2)e^{i(\beta+\theta_2)} \\ &= -e^{i(\beta+\theta_2)} (e^{-i\theta_2} + e^{i\theta_2}) + R(r_1)R(r_2)e^{i(\beta+\theta_2)} \\ &= -[2 \cosh(i\theta_2) - R(r_1)R(r_2)] e^{i(\beta+\theta_2)} \\ &= -[2 \cos \theta_2 - R(r_1)R(r_2)] e^{i(\beta+\theta_2)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Por tanto, una lista (c, a_1, a_2) resuelve el problema de períodos (dos primeras ecuaciones de (2.24)) si y sólo si la parte derecha de (2.28) se anula y la parte derecha de (2.29) es real.

Por otro lado, la tercera ecuación en (2.24) se reduce a

$$e^{2i(\beta+\theta_2)} = -1. \quad (2.30)$$

Teorema 2.13. *La superficie de Henneberg H_1 es la única superficie con $m = 1$ que resuelve el problema de períodos y descende al cociente no orientable.*

Demostración: Por los argumentos dados anteriormente, tenemos que la expresión a la derecha de (2.28) se anula, la expresión a la derecha de (2.29) es real y se cumple (2.30).

(2.30) implica que $\sin(\beta + \theta_2) = \pm 1$. Como la expresión a la derecha de (2.28) se anula, tenemos

$$R(r_1)e^{-i\theta_2} + R(r_2) = 0. \quad (2.31)$$

Se presentan dos posibilidades:

- $r_1 = 1$. Por tanto, (2.31) implica $r_2 = 1$. De (2.30) tenemos $\beta + \theta_2 \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$ y de (2.29) tenemos $\cos \theta_2 = 0$, por tanto $\theta_2 = \pi/2$ o $\theta_2 = 3\pi/2$. Esto genera las listas $(1, 1, i)$, $(-1, 1, i)$, $(1, 1, -i)$ y $(-1, 1, -i)$. Todas ellas producen a la superficie de Henneberg.
- $r_1 \neq 1$. Esto implica que $e^{-i\theta_2} = -\frac{R(r_2)}{R(r_1)}$ es un número real. En consecuencia, $e^{-i\theta_2} = \pm 1$. Como la función $r \mapsto R(r)$ es inyectiva, deducimos que $r_1 = r_2$ y $\theta_2 = \pi$ o $r_2 = 1/r_1$ y $\theta_2 = 0$. Como la parte derecha de (2.29) es real y se cumple (2.30), entonces $2 \cos \theta_2 - R(r_1)R(r_2) = 0$. Pero en ambos casos $2 \cos \theta_2 - R(r_1)R(r_2)$ no se anula. Por tanto, esta posibilidad no puede ocurrir.

□

Teniendo en cuenta las hipótesis necesarias para llegar a las ecuaciones (2.15) y (2.17), podemos reformular el Teorema 2.13 como sigue.

Teorema 2.14. *Sea $X : \mathbb{RP}^2 \setminus \{[0]\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión ramificada completa, mínima, con curvatura total finita y con un solo final (dado por $\{[0]\}$). Supongamos también que su aplicación de Gauss extendida es un difeomorfismo y que X presenta exactamente 2 puntos de ramificación. Entonces, X es la superficie de Henneberg clásica H_1 .*

La condición de que la aplicación de Gauss sea un difeomorfismo es necesaria. Excluyendo esta hipótesis, Segawa [91] describe una familia de superficies $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ no orientables, completas, mínimas, con un solo final y con exactamente 2 puntos de ramificación, dadas por los datos de Weierstrass

$$g(z) = z^{2k-1}, \quad \omega = f(z) dz = \frac{z^{4k} - 1}{z^{4k}} dz.$$

X_k tiene curvatura total finita $C(X_k) = -2\pi(2k - 1)$ y su índice de Morse viene dado por $\text{Ind}(X_k) = 2(k - 1)$.

2.6.2. Soluciones con complejidad $m = 2$

Supongamos que una lista $(c = e^{i\beta}, a_1 = r_1, a_2 = r_2 e^{i\theta_2}, a_3 = r_3 e^{i\theta_3}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{C}^*)^2$ es una solución del problema de períodos que desciende al cociente no orientable y que su inmersión mínima con puntos de ramificación es $X : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\} \rightarrow \mathbb{R}^3$. La lista que genera H_2 es $(\pm i, 1, e^{i\pi/3}, e^{2i\pi/3})$.

Resolver el problema de períodos no orientable es equivalente a resolver

$$\overline{cA_2} = -cA_4, \quad \text{Im}(cA_3) = 0, \quad -\frac{\bar{c}}{c} = \frac{a_2 a_3}{\bar{a}_2 \bar{a}_3} \quad (2.32)$$

La tercera ecuación en (2.32) se reduce a

$$e^{2i(\beta+\theta_2+\theta_3)} = -1. \quad (2.33)$$

(2.16) se puede escribir como

$$P(z) = z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0,$$

donde

$$A_2 = e^{2i(\theta_2+\theta_3)} + e^{2i\theta_2} + e^{2i\theta_3} - R(r_1)R(r_2)e^{i(\theta_2+2\theta_3)} - R(r_1)R(r_3)e^{i(2\theta_2+\theta_3)} - R(r_2)R(r_3)e^{i(\theta_2+\theta_3)}, \quad (2.34)$$

$$A_3 = 2[R(r_3) \cos \theta_2 + R(r_1) \cos(\theta_2 - \theta_3) - \frac{1}{2}R(r_1)R(r_2)R(r_3)]e^{i(\theta_2+\theta_3)} + R(r_2) \cos \theta_3 e^{i(\theta_2+\theta_3)}, \quad (2.35)$$

$$A_4 = -(1 + e^{2i\theta_2} + e^{2i\theta_3}) + R(r_1)R(r_2)e^{i\theta_2} + R(r_1)R(r_3)e^{i\theta_3} + R(r_2)R(r_3)e^{i(\theta_2+\theta_3)}. \quad (2.36)$$

Por tanto,

$$\overline{cA_2} + cA_4 = 2e^{-i[\beta+2(\theta_2+\theta_3)]} F, \quad (2.37)$$

$$cA_3 = \pm 2iG, \quad (2.38)$$

donde

$$F = [2 \cos \theta_2 - R(r_1)R(r_2)] e^{i\theta_2} - R(r_3) [R(r_1) + R(r_2)e^{i\theta_2}] e^{i\theta_3} + e^{2i\theta_3}, \quad (2.39)$$

$$G = R(r_2) \cos \theta_3 + R(r_3) \cos \theta_2 + R(r_1) \cos(\theta_2 - \theta_3) - \frac{1}{2}R(r_1)R(r_2)R(r_3). \quad (2.40)$$

Observación 2.15. (I) De (2.40) deducimos que G es real, por tanto, la condición $\text{Im}(cA_3) = 0$ se tiene si y sólo si $G = 0$. Deducimos que una lista (c, a_1, a_2, a_3) resuelve el problema de períodos no orientable si y sólo si (2.33) se verifica y $F = G = 0$.

(II) La expresión (2.39) es simétrica en $(r_2, \theta_2), (r_3, \theta_3)$. Esto se puede deducir de la simetría de A_2, A_4 , o directamente se puede comprobar usando la igualdad

$$e^{2i\theta} = 2 \cos \theta e^{i\theta} - 1, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (2.41)$$

que transforma (2.39) en

$$F = (1 + e^{2i\theta_2} + e^{2i\theta_3}) - R(r_1) \sum_{j=2}^3 R(r_j) e^{i\theta_j} - R(r_2)R(r_3) e^{i(\theta_2+\theta_3)}. \quad (2.42)$$

Lema 2.16. Si $F = 0$, entonces el coeficiente de $R(r_1)$ en (2.42) no se anula.

Demostración: Supongamos que $R(r_2)e^{i\theta_2} + R(r_3)e^{i\theta_3} = 0$. Esto nos lleva a una de las dos siguientes posibilidades: (a) $e^{i\theta_2} = e^{i\theta_3}$ y $R(r_2) = -R(r_3)$ o por el contrario, (b) $e^{i\theta_2} = -e^{i\theta_3}$ y $R(r_2) = R(r_3)$.

(a) implica que $r_3 = 1/r_2$ y por tanto, (2.42) implica $F = 1 + e^{2i\theta_2}(\frac{1}{r_2^2} + r_2^2)$.

(b) implica $r_2 = r_3$ y (2.42) proporciona la misma expresión para F .

En cualquier caso, de $F = 0$ deducimos que $e^{2i\theta_2}$ es un número real negativo, por tanto $\frac{r_2^2}{r_2^4+1} = -e^{2i\theta_2} = 1$. Esto es imposible, dado que la función $x > 0 \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ tiene un único mínimo en $x = 1$ donde toma el valor $1/2$. \square

El siguiente resultado describe una familia 1-paramétrica de ejemplos no triviales en complejidad $m = 2$ diferentes de H_2 .

Proposición 2.17. Supongamos que una lista (c, a_1, a_2, a_3) resuelve el problema de períodos no orientable. Entonces:

1. Si $r_1 = 1$, y al menos una de las constantes r_2 o r_3 es igual a 1, entonces $(c, a_1, a_2, a_3) = (\pm i, 1, e^{i\pi/3}, e^{2i\pi/3})$ y el ejemplo que producen es H_2 .

2. Si $\theta_2 + \theta_3 = 0 \pmod{\pi}$, entonces $r_2 = r_3$ o $r_2 = 1/r_3$ y (r_1, r_2) vienen dados por la siguiente función de $\theta_2 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$:

$$R(r_1(\theta_2)) = \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\sqrt{f(\theta_2) - 3}}{\cos \theta_2 \cos(2\theta_2)} [f(\theta_2) + 3 + 4 \cos(2\theta_2)], \quad (2.43)$$

$$R(r_2(\theta_2)) = -\frac{\sqrt{f(\theta_2) - 3}}{\sqrt{2}}, \quad (2.44)$$

o bien (r_1, r_2) vienen dados por sus expresiones opuestas a $R(r_1(\theta_2))$, $R(r_2(\theta_2))$, que intercambian (r_1, r_2) por $(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2})$. Aquí, f es la función

$$f(\theta_2) = \sqrt{1 - 8 \cos(2\theta_2) - 8 \cos(4\theta_2)}. \quad (2.45)$$

Demostración: Si $r_1 = 1$, y al menos uno de los parámetros r_2 o r_3 toma el valor 1, entonces de (2.42) se tiene $1 + e^{2i\theta_2} + e^{2i\theta_3} = 0$ y (2.40) implica $R(r_2) \cos \theta_3 + R(r_3) \cos \theta_2 = 0$. Como se tiene que al menos r_2 o r_3 valen 1, entonces al menos R_2 o R_3 vale 0. De hecho, ambos $R_2 = R_3 = 0$ (porque en otro caso se tendría $\cos \theta_2 = 0$ o $\cos \theta_3 = 0$, que hace imposible que $1 + e^{2i\theta_2} + e^{2i\theta_3}$ se anule), y por tanto, $r_2 = r_3 = 1$. Con ello, la igualdad $1 + e^{2i\theta_2} + e^{2i\theta_3} = 0$ implica que $(c, a_1, a_2, a_3) = (\pm i, 1, e^{i\pi/3}, e^{2i\pi/3})$, lo que prueba la afirmación primera.

Ahora asumimos que $\theta_2 + \theta_3 = 0$. Entonces (2.42),(2.40) implican respectivamente que

$$1 + 2 \cos(2\theta_2) - R(r_2)R(r_3) = R(r_1)[R(r_2)e^{i\theta_2} + R(r_3)e^{-i\theta_2}], \quad (2.46)$$

$$(R(r_2) + R(r_3)) \cos \theta_2 + R(r_1) \cos(2\theta_2) = \frac{1}{2}R(r_1)R(r_2)R(r_3). \quad (2.47)$$

Observemos que $R(r_1)$ no se puede anular por el Lema 2.16 (otra razón es que en caso contrario, (2.47) implica $\cos \theta_2 = 0$, y (2.46) implica $-1 - R(r_2)R(r_3) = 0$, lo cual es una contradicción). De (2.46) deducimos que $R(r_2)e^{i\theta_2} + R(r_3)e^{-i\theta_2}$ es real. Esto implica que $[R(r_2) - R(r_3)] \sin \theta_2 = 0$. Afirmamos que $\sin \theta_2 \neq 0$; en caso contrario $\theta_2 \equiv 0 \pmod{\pi}$ y de (2.46),(2.47) obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} 3 - R(r_2)R(r_3) &= \pm R(r_1)[R(r_2) + R(r_3)], \\ R(r_1) \pm (R(r_2) + R(r_3)) &= \frac{1}{2}R(r_1)R(r_2)R(r_3) \end{aligned}$$

(con la misma elección de signos). Se puede comprobar que dicho sistema no admite soluciones.

Por tanto, $\sin \theta_2 \neq 0$, lo que implica $R(r_2) = R(r_3)$ y $r_2 = r_3$. En este contexto, (2.46),(2.47) se reducen a

$$1 + 2 \cos(2\theta_2) - R(r_2)^2 = 2R(r_1)R(r_2) \cos \theta_2, \quad (2.48)$$

$$2R(r_2) \cos \theta_2 + R(r_1) \cos(2\theta_2) = \frac{1}{2}R(r_1)R(r_2)^2. \quad (2.49)$$

Si asumimos $\theta_2 + \theta_3 = \pi$, entonces (2.42),(2.40) implican respectivamente

$$1 + 2 \cos(2\theta_2) + R(r_2)R(r_3) = R(r_1)[R(r_2)e^{i\theta_2} - R(r_3)e^{-i\theta_2}], \quad (2.50)$$

$$(-R(r_2) + R(r_3)) \cos \theta_2 - R(r_1) \cos(2\theta_2) = \frac{1}{2}R(r_1)R(r_2)R(r_3). \quad (2.51)$$

De nuevo, $R(r_1)$ no se puede anular por el Lema 2.16. De (2.50) deducimos que $R(r_2)e^{i\theta_2} - R(r_3)e^{-i\theta_2}$ es real. Esto implica que $[R(r_2) + R(r_3)] \sin \theta_2 = 0$. Afirmamos que $\sin \theta_2 \neq 0$; en caso contrario $\theta_2 \equiv 0 \pmod{\pi}$ y (2.50),(2.51) producen el sistema

$$\begin{aligned} 3 + R(r_2)R(r_3) &= \pm R(r_1)[R(r_2) - R(r_3)], \\ -R(r_1) \pm (-R(r_2) + R(r_3)) &= \frac{1}{2}R(r_1)R(r_2)R(r_3) \end{aligned}$$

(con la misma elección de signos), que de nuevo es un sistema sin soluciones. Por tanto, $\sin \theta_2 \neq 0$, de donde $R(r_2) = -R(r_3)$ y $r_2 = 1/r_3$. En este contexto, (2.46),(2.47) se reducen de nuevo a (2.48) y (2.49).

El sistema (2.48),(2.49) tiene dos ecuaciones y tres incógnitas r_1, r_2, θ_2 . Procedemos a describir sus soluciones. Consideremos la función f dada por (2.45). Se tiene,

$$f(\pi - \theta_2) = f(\theta_2), \text{ para cada } \theta_2, \quad f(\theta_{2,0}) = 0 = f(\pi - \theta_{2,0}),$$

donde $\theta_{2,0} = \frac{1}{2} \cot^{-1} \left(\frac{9}{\sqrt{32\sqrt{10+95}}} \right) \sim 0.499841$, y el dominio de f es $[\theta_{2,0}, \pi - \theta_{2,0}] + \pi\mathbb{Z}$. El conjunto $\{\theta_2 \in [\theta_{2,0}, \pi - \theta_{2,0}] \mid f(\theta_2) \geq 3\}$ coincide con $A := [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}]$.

La única solución (r_1, r_2) al sistema (2.48),(2.49) como función de θ_2 viene dada por (2.43), (2.44) y sus expresiones opuestas para $R(r_1(\theta_2)), R(r_2(\theta_2))$, que intercambian (r_1, r_2) por $(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2})$. \square

La familia 1-paramétrica del apartado 2 de la Proposición 2.17

Observemos que la aplicación $\theta_2 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}] \mapsto \pi - \theta_2 \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$ es un difeomorfismo. Usando la notación del apartado 2 de la Proposición 2.17, para cada $\theta_2 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$, tenemos

$$R(r_1(\pi - \theta_2)) = -R(r_1(\theta_2)), \quad R(r_2(\pi - \theta_2)) = R(r_2(\theta_2)). \quad (2.52)$$

Cada una de estas listas con $\theta_2 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$ resuelve el problema de períodos no orientable y por tanto define una superficie no orientable, mínima y con

puntos de ramificación $H(\theta_2) \subset \mathbb{R}^3$. Además, (2.52) implica que

$$r_1(\pi - \theta_2) = \frac{1}{r_1(\theta_2)}, \quad r_2(\pi - \theta_2) = r_2(\theta_2). \quad (2.53)$$

Afirmamos que las superficies $H(\theta_2)$ y $H(\pi - \theta_2)$ son congruentes. Para ver esto, notemos que el conjunto de puntos $\{a_j, -1/\bar{a}_j : j = 1, 2, 3\}$ que define f a través de (2.14) y genera la superficie $H(\theta_2)$, es:

$$\left\{ r_1, \frac{-1}{r_1}, r_2 e^{i\theta_2}, \frac{1}{r_2} e^{i(\pi+\theta_2)}, r_2 e^{-i\theta_2}, \frac{1}{r_2} e^{i(\pi-\theta_2)} \right\}. \quad (2.54)$$

El conjunto análogo de puntos para la superficie $H(\pi - \theta_2)$ viene dado por (2.53):

$$\left\{ \frac{1}{r_1}, -r_1, -r_2 e^{-i\theta_2}, \frac{1}{r_2} e^{-i\theta_2}, -r_2 e^{-i\theta_2}, \frac{1}{r_2} e^{i\theta_2} \right\},$$

que salvo un signo es el conjunto descrito en (2.54). En consecuencia, la función f definida por la ecuación (2.14) y la correspondiente función \tilde{f} definida por la misma fórmula para la superficie $H(\pi - \theta_2)$ están relacionadas por $\tilde{f}(-z) = -f(z)$, para cada $z \in \mathbb{C}$. Usando que $\omega = f dz$ y $\tilde{\omega} = \tilde{f} dz$ definen, a través de la representación de Weierstrass (2.1) con $g(z) = z$, las correspondientes immersiones mínimas con puntos de ramificación $X = (x_1, x_2, x_3)$ para $H(\theta_2)$ y $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ para $H(\pi - \theta_2)$, obtenemos que $H(\theta_2)$ y $H(\pi - \theta_2)$ son congruentes.

En lo que sigue, restringiremos nuestro estudio a la familia $\{H(\theta_2) \mid \theta_2 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]\}$. De (2.43), (2.44) obtenemos

$$\lim_{\theta_2 \rightarrow \pi/3^-} R(r_1(\theta_2)) = \lim_{\theta_2 \rightarrow \pi/3^-} R(r_2(\theta_2)) = 0,$$

lo que implica que

$$\lim_{\theta_2 \rightarrow \pi/3^-} H(\theta_2) = H_2.$$

Lo siguiente que haremos es identificar el límite (después de reescalar) de las superficies $H(\theta_2)$ cuando $\theta_2 \rightarrow \pi/4^+$. Observamos primero que

$$\lim_{\theta_2 \rightarrow \pi/4^+} R(r_1(\theta_2)) = -\infty, \quad \lim_{\theta_2 \rightarrow \pi/4^+} R(r_2(\theta_2)) = 0. \quad (2.55)$$

Esto implica que el punto de ramificación $a_1 = a_1(\theta_2)$ está tendiendo a cero, por lo que el límite de $H(\theta_2)$ cuando $\theta_2 \rightarrow \pi/4^+$ (si existe) no puede ser un ejemplo con complejidad $m = 2$. Está claro que la complejidad no puede incrementarse

cuando tomamos este tipo de límites (por la forma de f dada en (2.14)), por tanto, por el Teorema 2.13 es natural pensar que el límite después de un proceso en que se va a reescalar a $H(\theta_2)$ cuando $\theta_2 \rightarrow \pi/4^+$ pueda ser H_1 . Continuamos con la formalización de esta idea.

Otra consecuencia de (2.55) es que la lista

$$(c, a_1, a_2, a_3) = (i, r_1(\theta_2), r_2(\theta_2)e^{i\theta_2}, r_2(\theta_2)e^{-i\theta_2})$$

converge cuando $\theta_2 \rightarrow \pi/4^+$ a $(c, a_1, a_2, a_3) = (i, 0, e^{i\pi/4}, e^{-i\pi/4})$. Después de aplicar una homotecia a $H(\theta_2)$ de radio $r_1(\theta_2) > 0$ (que tiende a cero) los datos de Weierstrass de la superficie homotética $r_1(\theta_2)H(\theta_2)$ son $(g(z) = z, r_1(\theta_2)f(z))$, donde $f(z)$ viene dado por (2.14). Para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fijo,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta_2 \rightarrow \pi/4^+} r_1(\theta_2)f(z) &\stackrel{(2.14)}{=} \lim_{\theta_2 \rightarrow \pi/4^+} r_1(\theta_2) \frac{i}{z^5} \prod_{j=1}^3 (z - a_j) \left(z + \frac{1}{a_j} \right) \\ &= \frac{i}{z^5} \prod_{j=2}^3 (z - a_j) \left(z + \frac{1}{a_j} \right) \lim_{\theta_2 \rightarrow \pi/4^+} (z - r_1(\theta_2)) (r_1(\theta_2)z + 1) \\ &= \frac{i}{z^4} (z - e^{i\pi/4}) (z + e^{i\pi/4}) (z - e^{-i\pi/4}) (z + e^{-i\pi/4}) := \widehat{f}(z). \end{aligned}$$

Sustituyendo los datos de Weierstrass $(g(z) = z, \widehat{f} dz)$ en (2.1), obtenemos una parametrización de la superficie límite de $r_1(\theta_2)H(\theta_2)$ cuando $\theta_2 \rightarrow \pi/4^+$ en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$:

$$\widehat{X}(re^{i\theta}) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin \theta}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) + \frac{\sin(3\theta)}{6} \left(r^3 - \frac{1}{r^3} \right) \\ -\frac{\cos \theta}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) - \frac{\cos(3\theta)}{6} \left(r^3 - \frac{1}{r^3} \right) \\ -\cos \theta \sin \theta \left(r^2 + \frac{1}{r^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Afirmamos que esta parametrización genera la superficie de Henneberg H_1 . Para verlo, observamos que si primero hacemos el cambio de variables $\theta = \tilde{\theta} + \pi/4$ y después rotamos la superficie con un ángulo de $-\frac{\pi}{4}$ alrededor del eje x_3 , obtenemos

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \widehat{X}(re^{i(\tilde{\theta} + \frac{\pi}{4})}) \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{\cos \tilde{\theta}}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) - \frac{\cos(3\tilde{\theta})}{6} \left(r^3 - \frac{1}{r^3} \right) \\ -\frac{\sin \tilde{\theta}}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) - \frac{\sin(3\tilde{\theta})}{6} \left(r^3 - \frac{1}{r^3} \right) \\ \frac{\cos(2\tilde{\theta})}{2} \left(r^2 + \frac{1}{r^2} \right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que es, salvo un signo, la parametrización dada en (2.4) para H_1 .

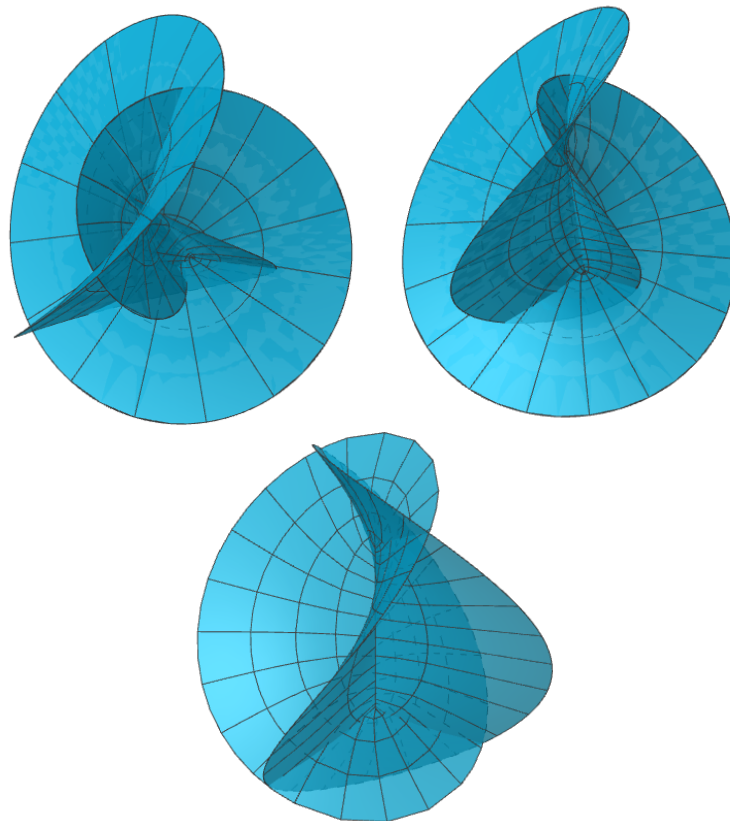


Figura 2.7: Superficies generadas por las listas anteriores $(c, a_1, a_2, a_3) = (i, r_1(\theta_2), r_2(\theta_2)e^{i\theta_2}, r_2(\theta_2)e^{-i\theta_2})$ con $\theta_2 = 1$ (arriba a la izquierda), $\theta_2 = 0.83$ (arriba a la derecha), $\theta_2 = 0.7854$ (segunda fila). El límite de $r_1(\theta_2)H(\theta_2)$ cuando $\theta_2 \rightarrow \pi/4^+ \sim 0.785398$ es la superficie de Henneberg H_1 .

Alrededor de H_2 el espacio de ejemplos con complejidad $m = 2$ es de dimensión 2

La afirmación 2 de la Proposición 2.17 define una familia no compacta de superficies no orientables, mínimas y ramificadas $\{H(\theta_2) \mid \theta_2 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]\}$ dentro del espacio de moduli de ejemplos con dimensión $m = 2$. El hecho de que las variables en esta caso son $r_1, r_2, r_3, \theta_2, \theta_3$ unido a que $F = 0$ es una condición compleja y $G = 0$ es una condición real sugieren que el espacio de soluciones para esta complejidad tiene dimensión real 2. Podemos asegurar esto al menos alrededor de H_2 a través del Teorema de la Función Implícita (esto es consistente con el apartado 2 de la Proposición 2.17, donde imponemos la condición extra $\theta_2 + \theta_3 = 0 \pmod{\pi}$) para hallar una familia uniparamétrica de soluciones con

complejidad 2), tal y como mostramos a continuación.

Consideramos la aplicación período (es diferenciable) dada por

$$P : (\mathbb{R}^+)^3 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ ((r_1, r_2), (r_3, \theta_2, \theta_3)) \longmapsto (F(r_1, r_2, r_3, \theta_2, \theta_3), G(r_1, r_2, r_3, \theta_2, \theta_3)),$$

donde F, G vienen dados por (2.42), (2.40) respectivamente. Dados $(r_1, r_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$, sea $P^{r_1, r_2} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la restricción de P a $\{(r_1, r_2)\} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$. Entonces,

$$d(P^{r_1, r_2})_{(r_3, \theta_2, \theta_3)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial r_3} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial r_3} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial G}{\partial r_3} & \frac{\partial G}{\partial \theta_2} & \frac{\partial G}{\partial \theta_3} \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Recordemos que la lista asociada a H_2 es $(r_1, r_2, r_3, \theta_2, \theta_3) = (1, 1, 1, \pi/3, 2\pi/3)$. Imponiendo esta elección de parámetros y calculando el determinante de (2.57) obtenemos

$$\det [d(P^{1,1})_{(1, \pi/3, 2\pi/3)}] = 2\sqrt{3} \neq 0.$$

Por tanto, el Teorema de la Función Implícita nos da un entorno abierto $U \subset (\mathbb{R}^+)^2$ de $(r_1, r_2) = (1, 1)$, un conjunto abierto $W \subset (\mathbb{R}^+)^3 \times \mathbb{R}^2$ con $(r_1, r_2, r_3, \theta_2, \theta_3) = (1, 1, 1, \pi/3, 2\pi/3) \in W$ y una aplicación diferenciable $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de manera que todas las soluciones $(r_1, r_2, r_3, \theta_2, \theta_3)$ alrededor de $(1, 1, 1, \pi/3, 2\pi/3)$ de la ecuación $P(r_1, r_2, r_3, \theta_2, \theta_3) = 0$ son de la forma $(r_3, \theta_2, \theta_3) = \varphi(r_1, r_2)$. Por la Observación 2.15(I), la lista

$$(c = e^{i\beta(r_1, r_2)}, r_1, r_2 e^{i\theta_2}, r_3 e^{i\theta_3}),$$

con $\beta = \beta(r_1, r_2)$ dado por (2.33), resuelve el problema de períodos no orientable y por tanto define una superficie no orientable, mínima, completa, con puntos de ramificación en $r_1, r_2 e^{i\theta_2(r_1, r_2)}, r_3(r_1, r_2) e^{i\theta_3(r_1, r_2)}$. Esto produce una deformación 2-paramétrica de la superficie H_2 en el espacio de moduli de ejemplos con $m = 2$ alrededor de H_2 , que describe completamente el espacio de moduli de ejemplos alrededor de esta superficie.

Observación 2.18. Como consecuencia de la fórmula clásica de Leibniz para la derivada de un producto de funciones obtenemos una ley de recursión que

nos da los coeficientes del polinomio $P(z)$ definido por (2.16) en términos de los coeficientes para polinomios de una complejidad inferior con los que se relaciona. Para obtener esta ley de recurrencia, primero adaptamos la notación para reflejar la complejidad:

$$P_{m+1}(z) := \prod_{j=1}^{m+1} (z - a_j) \left(z + \frac{1}{a_j} \right) = \sum_{h=0}^{2m+2} A_{m+1,h} z^h. \quad (2.58)$$

(2.17) puede ser escrita como

$$\overline{cA_{m+1,m}} = -cA_{m+1,m+2}, \quad \text{Im}(cA_{m+1,m+1}) = 0. \quad (2.59)$$

Queremos encontrar expresiones para los coeficientes que aparecen en la línea anterior $A_{m+1,m}$, $A_{m+1,m+2}$, $A_{m+1,m+1}$, dependiendo solo de los coeficientes de tipo $A_{m,h}$ (es decir, de una complejidad inmediatamente inferior). Escribiendo $a_j = r_j e^{i\theta_j}$ en coordenadas polares observamos que

$$P_{m+1}(z) := P_m(z)Q_{m+1}(z), \text{ donde } Q_{m+1}(z) = (z - r_{m+1}e^{i\theta_{m+1}}) \left(z + \frac{e^{i\theta_{m+1}}}{r_{m+1}} \right).$$

Por tanto, para $h \in \{m, m+1, m+2\}$,

$$A_{m+1,h} = \frac{1}{h!} P_{m+1}^{(h)}(0) = \frac{1}{h!} (P_m Q_{m+1})^{(h)}(0) = \frac{1}{h!} \sum_{k=0}^h \binom{h}{k} P_m^{(k)}(0) Q_{m+1}^{(h-k)}(0),$$

donde en la última igualdad hemos usado la fórmula de Leibniz. Como Q_{m+1} es un polinomio de grado dos, sus derivadas de orden tres o más se anulan. Por tanto, podemos reducir la última suma a términos donde el índice k satisface $h - k \leq 2$, i.e., $k \in \{h-2, h-1, h\}$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} A_{m+1,h} &= \frac{1}{h!} \left[\binom{h}{h-2} P_m^{(h-2)}(0) Q_{m+1}''(0) + \binom{h}{h-1} P_m^{(h-1)}(0) Q_{m+1}'(0) \right. \\ &\quad \left. + \binom{h}{h} P_m^{(h)}(0) Q_{m+1}(0) \right] \\ &= \frac{1}{h!} \left[\frac{h!}{(h-2)!2} P_m^{(h-2)}(0) \cdot 2 - h P_m^{(h-1)}(0) R(r_{m+1}) e^{i\theta_{m+1}} - P_m^{(h)}(0) e^{2i\theta_{m+1}} \right] \\ &= \left[\frac{1}{(h-2)!} P_m^{(h-2)}(0) - \frac{1}{(h-1)!} P_m^{(h-1)}(0) R(r_{m+1}) e^{i\theta_{m+1}} - \frac{1}{h!} P_m^{(h)}(0) e^{2i\theta_{m+1}} \right] \\ &= A_{m,h-2} - A_{m,h-1} R(r_{m+1}) e^{i\theta_{m+1}} - A_{m,h} e^{2i\theta_{m+1}}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

que es la relación de recurrencia que se buscaba. (2.60) se puede usar para encontrar soluciones de (2.59) para complejidad $m = 3$ más allá del ejemplo más simétrico dado por H_3 .

Hipersuperficies mínimas en el espacio de Schwarzschild

En este capítulo se recogen los resultados presentes en el artículo de investigación [7]. Mostramos una nueva familia de hipersuperficies propiamente embebidas, mínimas, con frontera libre y rotacionalmente simétricas en el espacio de Schwarzschild de dimensión n , cuando n es lo suficientemente grande. Esta construcción está relacionada con la resolución de un problema propuesto por Chodosh y Ketover [16] sobre la existencia de superficies mínimas que no sean totalmente geodésicas en el espacio de Schwarzschild de dimensión 3. Además, también calculamos el índice de la superficie $\Sigma_0 = \{p \in \mathbb{R}^3 : p_3 = 0, |p| \geq R_0\}$, dentro de ciertas familias de k -espacios de Schwarzschild tridimensionales, que son una generalización natural del espacio clásico de Schwarzschild.

3.1. Introducción

Sean $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, y $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$, $n \neq 2k$. Para cada $m > 0$, consideramos el dominio de dimensión n dado por:

$$M^n = M^n(k, m) = \{p \in \mathbb{R}^n : |p| \geq R_0\},$$

donde $R_0 = R_0(n, k, m) := \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{k}{n-2k}}$, junto con la métrica riemanniana dada por

$$g_{k,m} = \left(1 + \frac{m}{2|p|^{\frac{n}{k}-2}}\right)^{\frac{4k}{n-2k}} \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

donde $|p|^2 = |(p_1, \dots, p_n)|^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2$ y \langle, \rangle denota a la métrica euclídea. Estas métricas son conocidas como métricas de Schwarzschild generalizadas. Cuando $k = 1$ recuperamos el espacio de Schwarzschild clásico. Escribimos $M_{k,m}^n$ para denotar al dominio M^n junto con la métrica riemanniana $g_{k,m}$.

Los espacios de Schwarzschild generalizados son ejemplos de variedades asintóticamente llanas. Diremos que una variedad riemanniana completa y no compacta (M^n, g) es asintóticamente llana si para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K \subset M$, una bola cerrada $\bar{\mathbb{B}} \subset \mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $\varphi : M \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \bar{\mathbb{B}}$ de forma que

$$|g_p(v, w) - \langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)}| < \varepsilon, \quad \forall p \in M \setminus K, \quad \forall v, w \in T_p M,$$

donde \langle, \rangle denota a la métrica euclídea. La solución más simple a las ecuaciones de Einstein que tiene como dato inicial a una variedad asintóticamente llana es el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski, donde el espacio euclídeo juega el papel de dato inicial. La segunda, encontrada en 1916 por Schwarzschild [90], es el llamado espacio-tiempo vacío de Schwarzschild, que es una solución a las ecuaciones de campo de Einstein que describe el campo gravitacional en el exterior de una masa esférica; su dato inicial es la conocida como variedad riemanniana de Schwarzschild o espacio de Schwarzschild. Desde el punto de vista físico, el espacio de Schwarzschild riemanniano $M_{1,m}^n$ es un modelo fundamental en el estudio de agujeros negros estáticos, donde el borde de $M_{1,m}^n$ juega el papel de horizonte de sucesos.

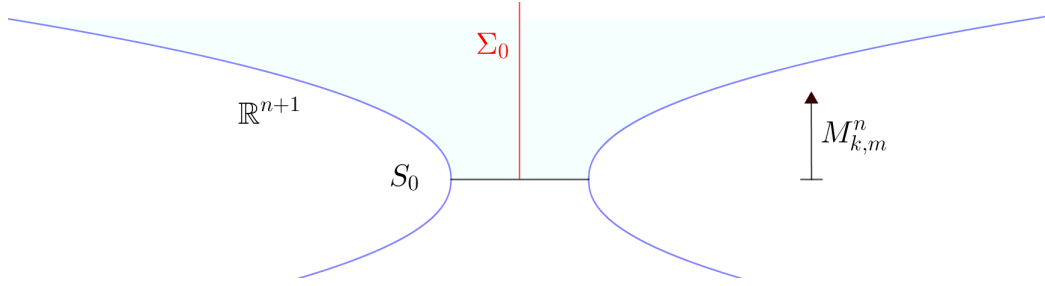
Un ingrediente fundamental para entender las propiedades físicas de estas variedades riemannianas es el estudio de las superficies mínimas que contienen, tal y como se deduce de la demostración del Teorema de masa positiva de Schoen y Yau [85, 87]. En este contexto, llamaremos "horizonte" de $M_{k,m}^n$ al conjunto

$$S_0 = \{p \in \mathbb{R}^n : |p| = R_0\}.$$

S_0 es además el borde de $M_{k,m}^n$ y resulta ser una hipersuperficie cerrada totalmente geodésica en $M_{k,m}^n$ (ver Figura 3.1). En este capítulo nos centraremos en el estudio de cierto tipo de hipersuperficies mínimas de $M_{k,m}^n$ cuyo borde interseca de forma ortogonal al horizonte del espacio de Schwarzschild o de un espacio de Schwarzschild generalizado.

Dentro del conjunto de hipersuperficies mínimas en $M_{k,m}^n$ con frontera libre en S_0 cabe destacar a la hipersuperficie totalmente geodésica Σ_0 que se forma al considerar todos los puntos de $M_{k,m}^n$ a altura 0 :

$$\Sigma_0 = \{p \in \mathbb{R}^n : p_n = 0, |p| \geq R_0\}. \quad (3.1)$$


 Figura 3.1: Hipersuperficies $S_0, \Sigma_0 \subset M_{k,m}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

De forma más general, sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $h(p) = f(|p|^2)$. Consideraremos el cambio conforme $\bar{g} = e^{2h}\langle, \rangle$, en particular $g_{k,m}$ es una métrica de este tipo siendo

$$h(p) = \frac{2k}{n-2k} \ln \left(1 + \frac{m}{2|p|^{\frac{n}{k}-2}} \right), \quad p \in M_{k,m}^n. \quad (3.2)$$

Denotaremos por k_i y \bar{k}_i a las curvaturas principales de una hipersuperficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ con respecto a la métrica euclídea \langle, \rangle y con respecto a la métrica \bar{g} , respectivamente. Fijemos un campo normal N en Σ con respecto a \langle, \rangle ($\bar{N} = N/e^h$ nos da un normal unitario respecto a la métrica \bar{g}). Sabemos por la Proposición 1.3, que las curvaturas principales k_i, \bar{k}_i en un punto $p \in \Sigma$, respecto a N y \bar{N} respectivamente, vienen relacionadas por

$$\bar{k}_i = e^{-h} (k_i - 2f'(|p|^2)\langle p, N_p \rangle) \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (3.3)$$

La función $\langle p, N_p \rangle$ se anula en el caso en que $\Sigma = \Sigma_0$, por lo que la ecuación (3.3) implica que $\bar{k}_i = 0$, $i = 1, \dots, n-1$, que en particular justifica que la hipersuperficie $\Sigma_0 \subset (\mathbb{R}^n, \bar{g})$ es totalmente geodésica (y por tanto mínima). Como Σ_0 interseca a S_0 de forma ortogonal, concluimos que Σ_0 es una superficie mínima en $M_{k,m}^n$ con borde libre en S_0 . Otra forma de comprobar que $\Sigma_0 \subset M_{k,m}^n$ es totalmente geodésica se tiene si vemos que Σ_0 es el conjunto de puntos fijos para una isometría ϕ de $M_{k,m}^n$. En este caso, Σ_0 es el conjunto de puntos fijos para la aplicación $\phi((p_1, \dots, p_{n-1}, p_n)) = (p_1, \dots, p_{n-1}, -p_n)$, $(p_1, \dots, p_n) \in M_{k,m}^n$, que es una isometría de $M_{k,m}^n$.

Para el espacio de Schwarzschild $M_{1,m}^3$ de dimensión 3, Chodosh y Ketover [16] propusieron el problema del estudio del índice de Morse de la superficie anular Σ_0 como superficie de frontera libre en S_0 , y también investigar la existencia de superficies mínimas no acotadas en $M_{1,m}^3$, con borde libre en S_0 y que no sean totalmente geodésicas (página 5 en [16]). Se sigue de un trabajo de A. Carlotto [11] que el índice de Morse de Σ_0 no puede ser cero (demuestra que en $M_{1,m}^3$ no

existen superficies propiamente embebidas, completas, mínimas y estables). Muy recientemente, R. Montezuma calculó el índice de Morse de Σ_0 en $M_{1,m}^3$ [72], donde probó que dicho índice es uno. En este capítulo respondemos de forma parcial al problema propuesto por Chodosh y Ketover y probamos (Teorema 3.2) que existen superficies mínimas con borde libre propiamente embebidas y con simetría rotacional en el espacio de Schwarzschild $M_{1,m}^n$ cuando n es lo suficientemente grande (para cualquier valor de $m \in \mathbb{R}^+$). Este teorema es un caso particular del siguiente resultado que proponemos a modo de conjetura.

Conjetura 3.1. *Para cada $t_0 \in (0, R_0)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ existe una única superficie mínima, con borde libre, propiamente embebida y rotacionalmente simétrica Σ_{t_0} en el espacio de Schwarzschild $M_{k,m}^n$ que no es totalmente geodésica y que interseca a S_0 a altura constante $x_n = t_0$.*

Merece la pena resaltar aquí el resultado de A. Carlotto y A. Mondino donde muestran que, para dimensión 3, no se puede "deformar" una catenoide de forma que se obtenga una superficie mínima en el espacio de Schwarzschild $M_{k,m}^3$ (consultar el Teorema 1.2 en [13]). Sin embargo, muestran que sí es posible aplicar una técnica de deformación cuando la dimensión n es lo suficientemente grande, poniendo en evidencia el papel relevante que la dimensión juega en el problema. El enfoque que usaremos para probar el siguiente resultado está relacionado con las técnicas aplicadas en el trabajo de S. J. Kleene y N. M. Moller [49]. Con él probamos que la conjetura 3.1 es cierta en el caso en que la dimensión n sea grande, $k = 1$ y para valores t_0 cercanos a 0.

Teorema 3.2. *Dado $m > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ existe $\varepsilon(n, m) < R_0(n, 1, m)$ y una familia de hipersuperficies $\{\Sigma_{t_0}\}_{t_0 \in (0, \varepsilon(n, m))}$ verificando que $\Sigma_{t_0} \subset M_{1,m}^n$ es una hipersuperficie propiamente embebida, mínima, rotacionalmente simétrica, con borde libre y con $\partial\Sigma_{t_0} = S_0 \cap \{p_n = t_0\}$.*

Sería interesante calcular el índice de Morse, como superficie mínima de frontera libre, de las superficies producidas en el Teorema 3.2 en el espacio de Schwarzschild $M_{1,m}^n$. En la Sección 3.3, bajo ciertas restricciones para el par (k, m) , calcularemos el índice de Morse de Σ_0 en $M_{k,m}^3$, en particular, bajo las hipótesis del Teorema 3.9, probaremos que $\Sigma_0 \subset M_{k,m}^3$ no es estable para el problema de frontera libre.

Para el espacio de Schwarzschild $M_{1,m}^n$ de dimensión $n \geq 4$ se conocen más resultados sobre la existencia e índice de Morse de ciertas superficies mínimas con frontera libre en S_0 . Sea

$$C_\Gamma := \{\lambda y : y \in \Gamma^{n-2}, \lambda \in (0, \infty)\}$$

un cono en \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, con vértice en el origen. Aquí Γ^{n-2} es una hipersuperficie cerrada, embebida, orientable y mínima en la esfera unidad de dimensión $n - 1$, \mathbb{S}^{n-1} , con la métrica inducida de \mathbb{R}^n , de forma que C_Γ es un cono en $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ sobre Γ . Finalmente, definimos

$$\Sigma_\Gamma := \{p \in C_\Gamma : |p| \geq R_0\}.$$

Se trata de una hipersuperficie propiamente embebida en $M_{1,m}^n$, mínima y con borde libre en S_0 . Notemos que $\Sigma_0 = \Sigma_{\Gamma_0}$ cuando Γ_0 es el ecuador de \mathbb{S}^{n-1} dado por $\mathbb{S}^{n-1} \cap \{p_n = 0\}$. En [6], E. Barbosa y J. Espinar probaron que el índice de Morse como superficie con borde libre es cero en el caso en que $\Sigma_\Gamma = \Sigma_0$. También probaron que, para los conos mínimos Σ_Γ en dimensión $4 \leq n \leq 7$, el índice de Morse es, o bien cero, o bien infinito. En este mismo artículo, se propone el siguiente problema: encontrar hipersuperficies mínimas, con borde libre en S_0 , que sean propiamente embebidas en el espacio de Schwarzschild para $n \geq 4$, con índice de Morse uno (o, al menos, con índice de Morse finito no nulo). Las hipersuperficies mínimas, de borde libre, propiamente embebidas que encontraremos en este capítulo no son, en general, congruentes a los conos Σ_Γ .

3.2. Hipersuperficies mínimas, rotacionalmente simétricas, con borde libre

Sea $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con $x(t) > 0$, $\forall t \in I$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto (puede ser no acotado). Consideremos el grafo dado por

$$\beta(t) = (x(t), 0, \dots, 0, t)$$

(no necesitaremos suponer que la curva β está parametrizada por la longitud del arco) y la hipersuperficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ obtenida por revolución de la curva β alrededor del eje x_n , cuya parametrización $X : I \times \mathbb{S}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n$ viene dada por

$$X(t, \theta) = (x(t)\theta, t), \tag{3.4}$$

donde θ denota a un punto en \mathbb{S}^{n-2} . Dado $(t, \theta) \in I \times \mathbb{S}^{n-2}$ usaremos la notación $p := X(t, \theta)$ y por tanto $|p|^2 = x(t)^2 + t^2$. Viendo a Σ como hipersuperficie de $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$, consideramos la orientación dada por el siguiente vector normal a Σ en un punto $X(t, \theta)$:

$$N_{(t,\theta)} := N_{p=X(t,\theta)} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + 1}}(-\theta, x'(t)).$$

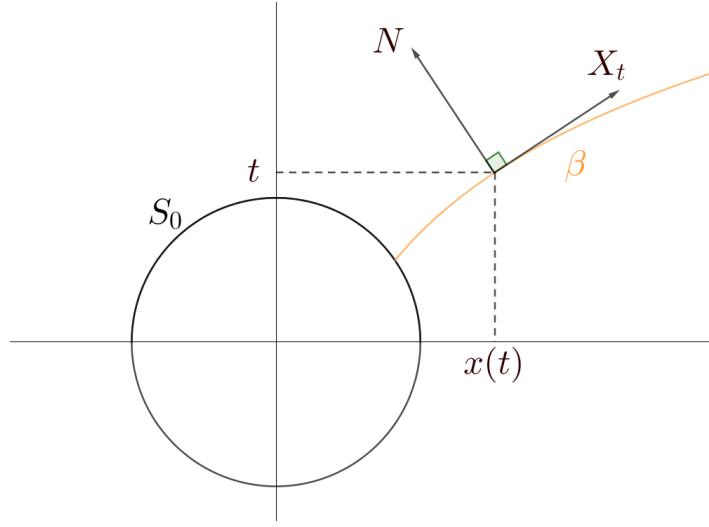


Figura 3.2

Las curvaturas principales k_i , $i = 1, \dots, n-1$ de Σ con respecto a la métrica usual, en un punto (t, θ) se escriben como

$$k_1 = -\frac{x''(t)}{\sqrt{(1+x'(t)^2)^3}}, \quad k_2 = k_3 = \dots = k_{n-1} = \frac{1}{x(t)\sqrt{1+x'(t)^2}}. \quad (3.5)$$

Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $h(p) = f(|p|^2)$, $p \in \mathbb{R}^n$. Por comodidad en la notación, vamos a hacer algunos cálculos en esta situación más general: bajo el cambio conforme $\bar{g} = e^{2h}\langle, \rangle$, las curvaturas principales \bar{k}_i verifican la ecuación (1.1). Además, de la relación $h(p) = f(|p|^2)$, obtenemos que

$$\nabla h_p = 2f'(|p|^2)p,$$

lo que nos permite escribir la ecuación (1.1) como la expresión (3.3), ya descrita anteriormente:

$$\bar{k}_i = e^{-h} (k_i - 2f'(|p|^2)\langle p, N_p \rangle), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Si (3.4) es una parametrización de una hipersuperficie mínima en (M^n, \bar{g}) , entonces las ecuaciones anteriores implican que

$$0 = (n-1)H(p) - 2(n-1)f'(|p|^2)\langle p, N_p \rangle, \quad (3.6)$$

donde $H(p) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} k_i \in \mathbb{R}$ es la curvatura media de Σ en un punto $p \in \Sigma$ con respecto a la métrica usual y el normal N .

Considerando la expresión del vector normal N y el vector de posición p anteriores, tenemos

$$\langle p, N_p \rangle = \frac{x'(t)t - x(t)}{\sqrt{1 + x'(t)^2}}. \quad (3.7)$$

Usamos la expresión para las curvaturas principales k_i y (3.7) para reescribir (3.6) como

$$2(n-1)f'(|p|^2) \frac{tx'(t) - x(t)}{\sqrt{1 + x'(t)^2}} = -\frac{x''(t)}{\sqrt{(1 + x'(t)^2)^3}} + \frac{n-2}{x(t)\sqrt{1 + x'(t)^2}}. \quad (3.8)$$

Por tanto, obtenemos de (3.8) que $x(t)$ es una solución a la EDO de segundo orden:

$$x''(t) = \left[-2(n-1)f'(|p|^2)(x'(t)t - x(t)) + \frac{n-2}{x(t)} \right] (1 + x'(t)^2). \quad (3.9)$$

De esta forma obtenemos una correspondencia entre hipersuperficies mínimas, con borde libre y rotacionalmente simétricas en (M^n, \bar{g}) parametrizadas por (3.4) y soluciones de la ecuación diferencial (3.9), una vez que se fijan las condiciones iniciales

$$x(t_0) = \sqrt{R_0^2 - t_0^2}, \quad x'(t_0)t_0 = x(t_0), \quad t_0 \in (0, R_0). \quad (3.10)$$

La ecuación (3.9) es válida para cualquier métrica conforme a la métrica euclídea. Particularizaremos ahora estos cálculos para la métrica de Schwarzschild clásica, es decir, tomaremos $\bar{g} = g_{k,m}$ con $k = 1$.

La ecuación (3.9) nos dice que Σ es una hipersuperficie mínima y rotacionalmente simétrica en el espacio de Schwarzschild $M_{1,m}^n$, y la condición (3.10) nos dice que Σ tiene borde libre en S_0 (ver Figura 3.3).

Suponiendo que $\bar{g} = g_{1,m}$, la función f que hace que $g_{1,m}$ se escriba de la forma $g_{1,m} = e^{2f} \langle, \rangle$ viene dada por

$$f(|p|^2) = \frac{2}{n-2} \ln \left(1 + \frac{m}{2|p|^{n-2}} \right)$$

de donde obtenemos

$$f'(|p|^2) = -\frac{m}{|p|^2(2|p|^{n-2} + m)}.$$

En consecuencia, para todo $p \in \Sigma$,

$$f'(|p|^2) = -\frac{m}{2(x(t)^2 + t^2)^{\frac{n}{2}} + m(x(t)^2 + t^2)}. \quad (3.11)$$

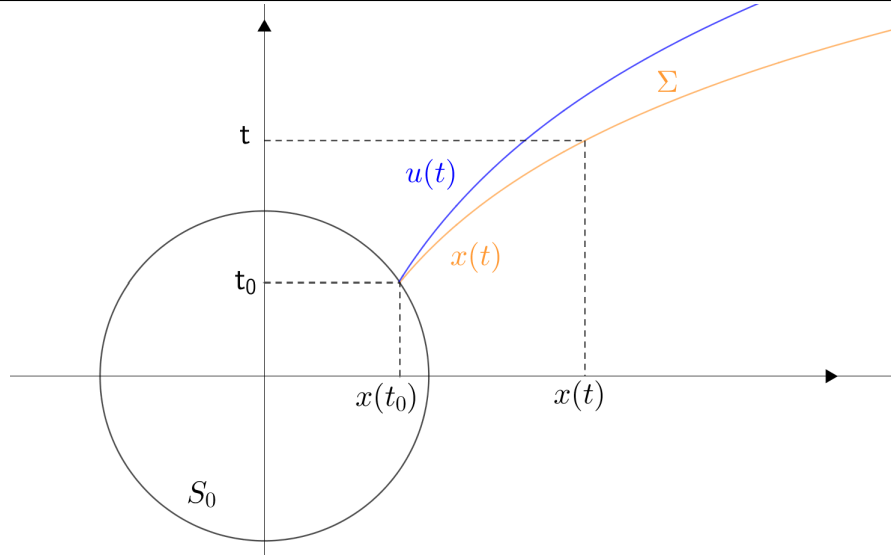


Figura 3.3: Función $x(t)$ solución de (3.9) con condiciones iniciales (3.10). La función $u(t)$ se definirá en la Observación 3.6

Si definimos

$$\chi(x, t) := \frac{2m(n-1)}{2(x^2 + t^2)^{\frac{n}{2}} + m(x^2 + t^2)}, \quad (3.12)$$

podemos reescribir (3.9) como

$$x''(t) = \left[(x'(t)t - x(t))\chi(x(t), t) + \frac{n-2}{x(t)} \right] (1 + x'(t)^2). \quad (3.13)$$

Así, para cada $t_0 \in (0, R_0)$, (3.13) junto con las condiciones iniciales (3.10) produce un problema de valores iniciales (PVI). Denotaremos por $[t_0, t^*)$, donde $t^* = t^*(n, m, t_0) \in (t_0, \infty]$, al intervalo maximal de definición de dicho PVI.

Lema 3.3. *Sea χ la función definida en (3.12). Entonces, la solución $x(t)$ de (3.13), junto con las condiciones iniciales (3.10), es estrictamente creciente en su dominio maximal de definición (t_0, t^*) , $t^* \in (t_0, \infty]$.*

Demostración: Definimos $\Psi(t) := tx'(t) - x(t)$. Notemos que las condiciones iniciales de x son equivalentes a $\Psi(t_0) = 0$. Tomando derivadas tenemos

$$\Psi'(t) = tx''(t) = t \left(\Psi(t)\chi(x(t), t) + \frac{n-2}{x(t)} \right) (1 + x'(t)^2), \quad (3.14)$$

de donde $\Psi \geq 0$ (porque $\Psi'(t_0) > 0$, $\Psi(t_0) = 0$). Por tanto:

$$\Psi'(t) > t\Psi(t)\chi(x(t), t)(1 + x'(t)^2) \geq 0.$$

Como $\Psi' > 0$, entonces $x'(t) \geq x(t)/t > 0$, lo que implica que x es estrictamente creciente en $[t_0, t^*)$ y no puede ocurrir que $x(t) < 0$ para cierto $t \in (t_0, t^*)$. \square

Teorema 3.4. *Dado $m > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ existe $\varepsilon(n, m) < R_0(n, 1, m)$ y una familia de hipersuperficies $\{\Sigma_{t_0}\}_{t_0 \in (0, \varepsilon(n, m))}$ verificando que $\Sigma_{t_0} \subset M_{1, m}^n$ es propiamente embebida, mínima, rotacionalmente simétrica, con borde libre y con $\partial\Sigma_{t_0} = S_0 \cap \{p_n = t_0\}$.*

Demostración: Por el Lema 3.3, tenemos que, o bien el límite de $x(t)$ (solución a (3.13) con condiciones iniciales (3.10)) cuando t tiende a t^* es finito o bien, $x(t)$ diverge cuando t tiende a t^* .

(A) Si $t^* = +\infty$, probaremos que Σ_{t_0} es completa y tiene altura $x(t)$ no acotada con respecto al hiperplano $\{p_n = 0\}$ (en la Figura 3.4 dicha altura se muestra horizontalmente). Por el Lema 3.3 obtenemos que $x(t)$ es estrictamente creciente en $[t_0, t^*)$. Además, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$: por contradicción, si dicho límite fuese un número real, usando (3.13) obtendríamos que $x'' \geq \varepsilon_0$ para cierto $\varepsilon_0 > 0$. En particular, $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = \infty$, lo cual contradice que $x(t)$ tienda a una constante. Sea Σ_{t_0} la superficie que se obtiene a través de la parametrización X dada por (3.4). Al ser X una parametrización usando coordenadas cilíndricas, como $x(t)$ está definida para todo $t \geq t_0$ entonces Σ_{t_0} es completa (estamos usando aquí que $M_{1, m}^n$ es asintóticamente llana) con respecto a $g_{1, m}$ y tiene altura no acotada con respecto al hiperplano $\{p_n = 0\}$ (ver Figura 3.4 izquierda).

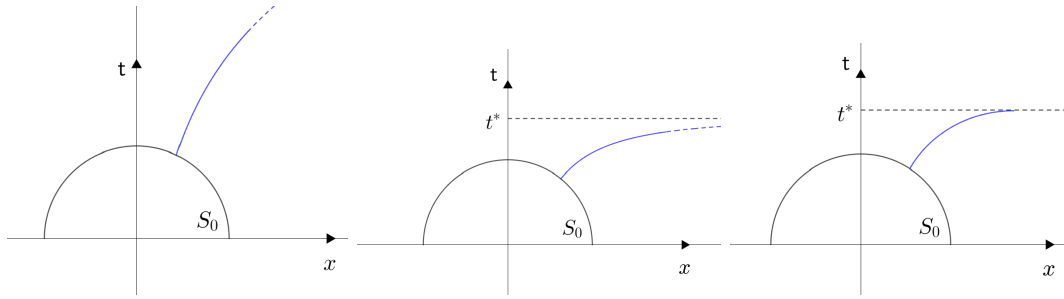


Figura 3.4: Esquema de los posibles casos (A), (B) i) y (B) ii) respectivamente.

(B) Si $t^* < +\infty$ podemos tener dos comportamientos diferentes:

Caso i) La función $x(t)$ diverge cuando t tiende a t^* . Esto es, $x(t)$ explota en tiempo finito, luego Σ_{t_0} converge asintóticamente a un plano a cierta altura y por tanto Σ_{t_0} es completa (de nuevo se necesita que $M_{1, m}^n$ sea asintóticamente llana) con respecto a $g_{1, m}$.

Caso ii) La función $x(t)$ converge a una constante $x^* \in \mathbb{R}^+$ cuando t tiende a t^* por la izquierda, mientras que su derivada tiende a infinito. En este caso

vamos a mostrar que la curva generatriz $\beta(t) = (x(t), 0, \dots, 0, t)$ para $t \in [t_0, t^*)$ se puede extender más allá de t^* para generar una hipersuperficie completa con respecto a $g_{1,m}$ y rotacionalmente simétrica Σ_{t_0} . Como $x(t)$ es estrictamente creciente en (t_0, t^*) , el teorema de la función inversa nos permite considerar la función diferenciable $t(x)$ que está bien definida en $[x(t_0), x(t^*) = x^*]$ (notemos que $\dot{t}(x) = \frac{dt}{dx}(x^*) = 0$). Tomamos la parametrización de $\Sigma_{t_0}^{t^*}$ (Σ_{t_0} será la hipersuperficie completa), $\tilde{X} : [x(t_0), x(t^*)] \times \mathbb{S}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$\tilde{X}(x, \theta) = (x\theta, t(x)).$$

La orientación en $\Sigma_{t_0}^{t^*}$ vendrá dada por

$$N_{(x,\theta)} := N_{p=\tilde{X}(x,\theta)} = \frac{(-\dot{t}(x)\theta, 1)}{\sqrt{1 + \dot{t}(x)^2}}.$$

De esta forma, $\langle p, N_p \rangle$ se escribe como

$$\langle p, N_p \rangle = \frac{-t(x)x + \dot{t}(x)}{\sqrt{1 + \dot{t}(x)^2}}.$$

Las curvaturas principales de la superficie $\Sigma_{t_0}^{t^*}$ en un punto (x, θ) vienen dadas por

$$k_1 = \frac{\ddot{t}(x)}{\sqrt{(1 + \dot{t}(x)^2)^3}}, \quad k_2 = k_3 = \dots = k_{n-1} = \frac{\dot{t}(x)}{t\sqrt{1 + \dot{t}(x)^2}}. \quad (3.15)$$

La ecuación análoga a (3.13) que t debe verificar para generar una superficie mínima es:

$$\ddot{t}(x) = \left[\chi(x, t(x))(\dot{t}(x)x - t(x)) - \frac{(n-2)\dot{t}(x)}{x} \right] (1 + \dot{t}(x)^2). \quad (3.16)$$

Como estamos suponiendo $\lim_{t \rightarrow t^*} x(t) = x^*$ y $\lim_{t \rightarrow t^*} x'(t) = +\infty$, imponemos la condiciones iniciales

$$t(x^*) = t^*, \quad \dot{t}(x^*) = 0. \quad (3.17)$$

Si probamos que la solución del PVI formado por (3.16) junto con (3.17) está definida en $[x^*, \infty)$ entonces tendremos que la curva β se puede extender más allá de t^* para generar, por revolución, una superficie completa con respecto a $g_{1,m}$ (se usa que $M_{1,m}^n$ es asintóticamente llana para probar la completitud). También tendremos una extensión, que genera por revolución a una superficie

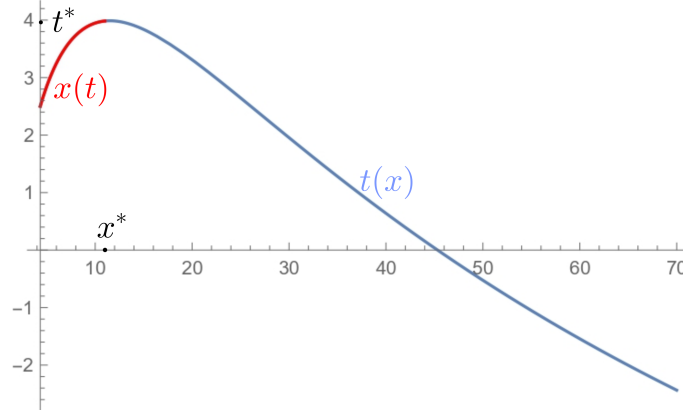


Figura 3.5: Solución numérica de (3.16) para $n = 3$, $m = 10$, $t_0 = 5/2$.

completa, si probamos que existe $\bar{x} > x^*$ de forma que $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} t(x) = \infty$. Además, se tendrá diferenciabilidad al pegar la nueva extensión que, por construcción, es de clase C^1 y de hecho es analítica como consecuencia de la analiticidad de $g_{1,m}$. $t(x)$ puede presentar los comportamientos análogos a los expresados en la Figura 3.4 para $x(t)$. El único comportamiento que debemos descartar de ellos es el comportamiento análogo al caso (B) ii): que exista $\bar{x} > x^*$ tal que $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} t(x) = \bar{t} \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \dot{t}(x) = \infty$ o $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \dot{t}(x) = -\infty$ (ver Figura 3.6).

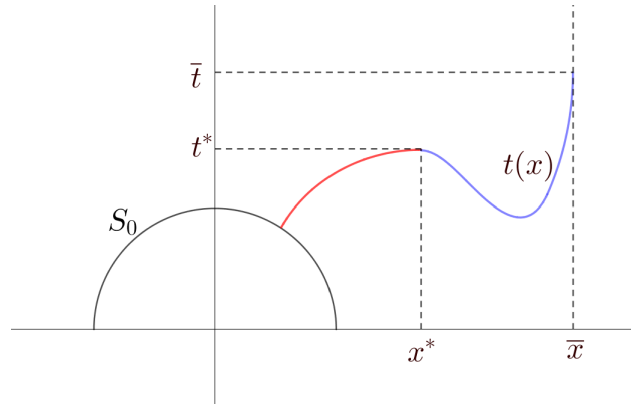


Figura 3.6: Situación en que $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} t(x) = \bar{t} \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \dot{t}(x) = \infty$

Asumiendo que la dimensión $n \geq 3$ es lo suficientemente grande, probaremos que si $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} t(x) = \bar{t} \in \mathbb{R}$, y $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \dot{t}(x) = \infty$ (respectivamente $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \dot{t}(x) = -\infty$) entonces $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \ddot{t}(x) = -\infty$ (respectivamente $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \ddot{t}(x) = \infty$), lo cual es una contradicción ya que la gráfica de $t(x)$ en el plano (x, t) toca tangencialmente a la recta vertical $x = \bar{x}$.

Sea $\varepsilon = \varepsilon(n, m) > 0$ lo suficientemente pequeño de forma que si $t_0 \in (0, \varepsilon)$ entonces $|(\bar{x}, \bar{t})|^{n-2} > R_0^{n-2} + \delta = \frac{m}{2} + \delta$ para cierto $\delta > 0$ (de hecho ε se puede tomar lo suficientemente pequeño para que $|(x, t(x))| > R_0$ para todo $x \in (x^*, \bar{x})$, lo que geoméricamente implica que la curva generatriz de $\Sigma_{t_0}^*$ no interseca a S_0). Para un $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande se tiene

$$\begin{aligned} & 2(n-2)(\bar{x}^2 + \bar{t}^2)^{\frac{n}{2}} + (n-2)m(\bar{x}^2 + \bar{t}^2) \\ & > 2(n-2)\bar{x}^2(\bar{x}^2 + \bar{t}^2)^{\frac{n-2}{2}} + (n-2)m\bar{x}^2 \\ & > (n-2)(m+2\delta)\bar{x}^2 + (n-2)m\bar{x}^2 \\ & = 2(n-2)(m+\delta)\bar{x}^2 > 2(n-1)m\bar{x}^2. \end{aligned}$$

Por tanto, llegamos a la desigualdad

$$2(n-1)m\bar{x}^2 < 2(n-2)(\bar{x}^2 + \bar{t}^2)^{\frac{n}{2}} + (n-2)m(\bar{x}^2 + \bar{t}^2),$$

que reescribimos como

$$\frac{2(n-1)m\bar{x}}{2(\bar{x}^2 + \bar{t}^2)^{\frac{n}{2}} + m(\bar{x}^2 + \bar{t}^2)} - \frac{(n-2)}{\bar{x}} < 0.$$

Como estamos asumiendo que $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} t(x) = \bar{t} \in \mathbb{R}$, y $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \dot{t}(x) = \infty$ (el caso $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \dot{t}(x) = -\infty$ se discute igual), usando (3.16) obtenemos el siguiente límite para $\ddot{t}(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \ddot{t}(x) = \operatorname{sgn} \left(\frac{2(n-1)m\bar{x}}{2(\bar{x}^2 + \bar{t}^2)^{\frac{n}{2}} + m(\bar{x}^2 + \bar{t}^2)} - \frac{(n-2)}{\bar{x}} \right) \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \dot{t}(x) = -\infty, \quad (3.18)$$

lo cual es una contradicción ($\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \dot{t}(x) = \infty$ pero $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \ddot{t}(x) = -\infty$). □

Observación 3.5. *Las hipersuperficies obtenidas en el Teorema 3.4 no son totalmente geodésicas. Las hipersuperficies totalmente umbilicales se preservan por cambios conformes de métricas, por tanto si Σ_{t_0} es totalmente geodésica y, por tanto, totalmente umbilical, entonces Σ_{t_0} debe estar contenida en un hiperplano o esfera de dimensión $n-1$. Descartamos la segunda opción pues las esferas están acotadas (y Σ_{t_0} es no acotada por la demostración anterior). Por tanto, si Σ_{t_0} es rotacionalmente simétrica y totalmente geodésica entonces Σ_{t_0} debe de ser un hiperplano horizontal que interseque a ∂M^n a la altura $p_n = t_0$. Sin embargo, estos hiperplanos horizontales no intersecan de forma ortogonal a S_0 .*

Observación 3.6. Usando un argumento de comparación podemos dar una cota superior para t^* definido en el Lema 3.3 cuando $n \geq 4$. Usando (3.13), obtenemos

$$x''(t) \geq \frac{n-2}{x(t)}(1+x'(t)^2).$$

Por tanto, la solución $u(t)$ para

$$\begin{cases} u''(t) = \frac{n-2}{u(t)}(1+u'(t)^2), \\ u(t_0) = \sqrt{R_0^2 - t_0^2}, \\ u'(t_0)t_0 = u(t_0), \end{cases} \quad (3.19)$$

es una cota inferior en el plano (x, t) para la solución de (3.13) (ver Figura 3.3), es decir $u(t) \leq x(t)$ para todo $t \in (t_0, t^*)$. Multiplicando por $u'(t)$ podemos reescribir (3.19) como

$$\frac{2u'(t)u(t)}{1+u'(t)^2} = 2(n-2)\frac{u'(t)}{u(t)},$$

que se puede integrar:

$$\log(1+u'(t)^2) = 2(n-2)\log(u(t)) + c,$$

para cierto $c \in \mathbb{R}$ dependiendo de las condiciones iniciales. La ecuación anterior es equivalente a

$$u'(t) = \sqrt{e^{cu(t)^{2(n-2)}} - 1},$$

que se puede integrar en la variable u , obteniendo

$$t(u) = t_0 + \int_{u(t_0)}^u \frac{d\mu}{\sqrt{e^{c\mu^{2(n-2)}} - 1}}.$$

Ahora imponemos $u'(t_0)t_0 = u(t_0)$ para llegar a

$$t(u) = t_0 + \int_{\sqrt{R_0^2 - t_0^2}}^u \frac{d\mu}{\sqrt{\left(\frac{R_0}{t_0}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\sqrt{R_0^2 - t_0^2}}\right)^{2(n-2)} - 1}}. \quad (3.20)$$

Para $n \geq 4$,

$$h_0 := \lim_{u \rightarrow +\infty} t(u) = t_0 + \int_{\sqrt{R_0^2 - t_0^2}}^{\infty} \frac{d\mu}{\sqrt{\left(\frac{R_0}{t_0}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\sqrt{R_0^2 - t_0^2}}\right)^{2(n-2)} - 1}} < +\infty,$$

por tanto $u(t)$ explota en tiempo finito. Como $u(t)$ es una cota inferior para $x(t)$ entonces $t^* < h_0$, lo que en particular demuestra que si $n \geq 4$ entonces el caso (A) en el Teorema 3.4 no se puede dar.

Observación 3.7. *Numéricamente, podemos comprobar que el intervalo maximal de definición de una solución de (3.13) para $n = 3$ tiene $t^* < \infty$. De hecho, todos los ejemplos que producimos son del tipo descrito en el Caso ii) en la demostración del Teorema 3.4. Las simulaciones numéricas también sugieren que el Teorema 3.4 es cierto para $n \geq 3$ y $t_0 \in (0, R_0)$.*

3.3. Cálculo del índice de Σ_0

R. Montezuma [72] demuestra que en $M_{1,m}^3$ el índice de Morse de Σ_0 como superficie con borde libre en S_0 es uno. Sin embargo, el índice de Morse de la superficie Σ_0 no se ha calculado en $M_{k,m}^3$ para $k > 1$. En esta sección, calculamos el índice de Σ_0 en $M_{k,m}^3$ para ciertos valores de $k > 1$ y $m > 0$.

Sea $\Sigma \subset M_{k,m}^3$ una superficie completa, mínima y con borde libre en S_0 . En vista al problema (1.19), podemos calcular el índice de Morse como superficie con borde libre de $\Sigma(R) := \Sigma \cap \{|p| \leq R\}$, $R > R_0$, que denotamos por $\text{Ind}(\Sigma(R))$, como el número de autovalores negativos, contando multiplicidades, del problema de contorno:

$$(P) \quad \begin{cases} L_\Sigma \psi := \Delta_\Sigma \psi + (\text{Ric}_M(N, N) + |A_\Sigma|^2)\psi = -\lambda\psi & \text{en } \Sigma(R) \\ \psi = 0 & \text{en } \mathbb{S}^2(R) \cap \Sigma \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 & \text{en } S_0 \cap \partial \Sigma \end{cases}$$

donde $\mathbb{S}^2(R) = \partial\{|p| \leq R\}$, Ric_M es la curvatura de Ricci de $M_{k,m}^3$, $|A_\Sigma|$ es la norma de la segunda forma fundamental de Σ y N es el normal unitario (todo calculado con respecto a $g_{k,m}$). Durante esta sección, si (N, g) es una variedad riemanniana, usaremos la notación $\Delta_{(N,g)}$ para denotar al laplaciano en dicha variedad riemanniana.

A partir de ahora, en este capítulo, usaremos la notación $\bar{g} = g_{k,m} = e^{2f}\langle, \rangle$. Por $\bar{\rho}$, \bar{K} y \bar{A} denotaremos a la curvatura escalar de $M_{k,m}^3$, la curvatura de Gauss y el endomorfismo de Weingarten de Σ calculados con respecto a la métrica \bar{g} y por K y A la curvatura de Gauss y el endomorfismo de Weingarten de Σ calculados con respecto a la métrica euclídea.

Lema 3.8. *Con la notación anterior, el operador de Jacobi*

$$L_\Sigma \psi := \Delta_\Sigma \psi + (\text{Ric}_M(N, N) + |A_\Sigma|^2)\psi = -\lambda\psi \quad \text{en } \Sigma(R)$$

para la superficie $\Sigma_0 \subset M_{k,m}^3$ se puede escribir como:

$$L_{\Sigma_{t_0}} \psi = e^{-2f} \left(\Delta_{(\Sigma_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)} \psi + \left(\frac{1}{2} e^{2f} \bar{\rho} + \Delta_{(\Sigma_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)} f \right) \psi \right),$$

donde $f(|p|) = h(p)$ para $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por (3.2).

Demostración: Sea Σ una superficie mínima, con borde libre en S_0 y rotacionalmente simétrica en el espacio de Schwarzschild generalizado $M_{k,m}^3$. El laplaciano en dimensión 2 verifica:

$$\Delta_{\Sigma} = e^{-2f} \Delta_{(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle)},$$

lo que nos permite usar la relación $\Delta_{(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle)} f - K = -\bar{K} e^{2f}$ y la ecuación de Gauss de Σ , $2K = 4H^2 - |A|^2$, para escribir la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\rho}}{2} - \text{Ric}_M(N, N) - |\bar{A}|^2 &= \bar{K} - \frac{|\bar{A}|^2}{2} \\ &= -e^{-2f} (\Delta_{(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle)} f - K) - \frac{1}{2} (|A|^2 - 2H^2) e^{-2f} \end{aligned}$$

donde H es la curvatura media de Σ calculada con respecto a la métrica euclídea.

Usando la identidad anterior junto a la ecuación (1.2), escribimos:

$$\begin{aligned} L_{\Sigma_{t_0}} u &= \Delta_{\Sigma_0} u + (\text{Ric}_M(N, N) + |\bar{A}|^2) u \\ &= e^{-2f} \left(\Delta_{(\Sigma_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)} u + \left(\frac{1}{2} e^{2f} \bar{\rho} + \Delta_{(\Sigma_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)} f \right) u + (|A|^2 - 3H^2) u \right) \\ &= e^{-2f} \left(\Delta_{(\Sigma_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)} u + \left(\frac{1}{2} e^{2f} \bar{\rho} + \Delta_{(\Sigma_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)} f \right) u \right), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que en Σ_0 se tiene $|A|^2 - 3H^2 = 0$. \square

Teorema 3.9. Si $k \in (1, 3/2)$, entonces el índice de Morse de $\Sigma_0 \subset M_{k,m}^3$ como superficie con borde libre es uno. Además, si elegimos m lo suficientemente grande, de forma que

$$\frac{4mr^{\frac{3}{k}+2}}{(2r^{3/k} + mr^2)^2} \leq \frac{1}{4}, \quad \forall r \geq R_0,$$

entonces para todo $k > 1$, $k \neq \frac{3}{2}$, el índice de Morse de $\Sigma_0 \subset M_{k,m}^3$ es uno.

Demostración: Si $p \in M_{k,m}^3$ usaremos la notación $r := |p|$. Podemos calcular la curvatura escalar $\bar{\rho}$ de $M_{k,m}^3$ escribiendo $e^{2f} = v^4$ y usando la siguiente relación:

$$\bar{\rho} = -8e^{-2f}v^{-1}\Delta_{(M_{k,m}^3, \langle, \rangle)}v. \quad (3.21)$$

Con lo que se tiene

$$\bar{\rho} = \frac{48(k-1)mr^{3/k}}{k(2r^{3/k} + mr^2)^2}e^{-2f}.$$

Como la función f es radial podemos calcular el laplaciano de su restricción a Σ_0 como $\Delta_{(\Sigma_0, \langle, \rangle)}f = f'' + \frac{1}{r}f'$:

$$\Delta_{(\Sigma_0, \langle, \rangle)}f = \left(\frac{3-2k}{k}\right)\frac{m}{r^{\frac{3}{k}}}\left(1 + \frac{m}{2r^{\frac{3}{k}-2}}\right)^{-2}.$$

Fijado $R > R_0$, probaremos que el primer valor propio de (P) es el único valor propio que puede ser negativo, y por tanto (el primer valor propio es simple) $\text{Ind}(\Sigma_0(R)) = 0$ o $\text{Ind}(\Sigma_0(R)) = 1$. Usando el lema anterior, dado $R > R_0$, $\psi : \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 es una solución de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_{\Sigma_0}\psi + (\text{Ric}_M(N, N) + |\bar{A}|^2)\psi = -\lambda\psi & \text{en } \Sigma_0(R), \\ \psi = 0 & \text{en } \mathbb{S}^2(R) \cap \Sigma_0, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = 0 & \text{en } S_0 \cap \partial\Sigma_0(R), \end{array} \right.$$

si y sólo si ψ satisface

$$(P') \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta_{(\Sigma_0, \langle, \rangle)}\psi + Q\psi = -\lambda\psi \left(1 + \frac{m}{2r^{\frac{3}{k}-2}}\right)^{\frac{4k}{3-2k}} & \text{en } \Sigma_0(R), \\ \psi = 0 & \text{en } \mathbb{S}^2(R) \cap \Sigma_0, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = 0 & \text{en } S_0 \cap \partial\Sigma_0(R), \end{array} \right.$$

donde

$$\begin{aligned} Q = Q(r) &= \left(\frac{3-2k}{k}\right)\frac{m}{r^{\frac{3}{k}}}\left(1 + \frac{m}{2r^{\frac{3}{k}-2}}\right)^{-2} + \frac{24(k-1)mr^{3/k}}{k(2r^{3/k} + mr^2)^2} \\ &= \frac{4(4k-3)mr^{3/k}}{k(2r^{3/k} + mr^2)^2}. \end{aligned}$$

Como Σ_0 es rotacionalmente simétrica, podemos aplicar separación de variables y escribir toda solución de (P') con la forma

$$v(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} a_l(r)\Phi_l(\theta), \quad \theta \in \mathbb{S}^1, \quad r \geq R_0, \quad (3.22)$$

donde, para cada $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, Φ_l es una función propia del laplaciano asociada al valor propio $\lambda_l = l^2$ en la circunferencia unidad \mathbb{S}^1 (en particular, Φ_0 es constante) y $a_l : [R_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, es una función diferenciable.

Si imponemos (3.22) para las soluciones del problema (P') deducimos que a_l cumple:

$$\begin{cases} L_l(a_l) = 0 & \text{en } [R_0, R], \\ a_l'(R_0) = 0, \\ a_l(R) = 0, \end{cases}$$

donde

$$L_l := \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\lambda_l}{r^2} + Q + \lambda \left(1 + \frac{m}{2r^{\frac{3}{k}-2}} \right)^{\frac{4k}{3-2k}},$$

y $\lambda_l = l^2$, $l \geq 0$.

Si multiplicamos $L_l(a_l) = 0$ por $ra_l(r)$ obtenemos:

$$0 = a_l(r) \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} a_l(r) \right) + \left(\frac{-\lambda_l}{r^2} + Q + \lambda \left(1 + \frac{m}{2r^{\frac{3}{k}-2}} \right)^{\frac{4k}{3-2k}} \right) a_l^2(r)r.$$

Ahora integramos la expresión anterior en $[R_0, R]$ y usamos que $a_l'(R_0) = 0$, $a_l(R) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{R_0}^R a_l(r) (ra_l'(r))' dr + \int_{R_0}^R \left(\frac{-\lambda_l}{r^2} + Q + \lambda \left(1 + \frac{m}{2r^{\frac{3}{k}-2}} \right)^{\frac{4k}{3-2k}} \right) a_l^2(r)r dr \\ &= - \int_{R_0}^R r (a_l'(r))^2 dr + \int_{R_0}^R A_{\lambda,l}(r) a_l^2(r) dr, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos aplicado integración por partes y hemos usado la notación:

$$A_{\lambda,l} = A_{\lambda,l}(r) = -\frac{l^2}{r^2} + Q + \lambda \left(1 + \frac{m}{2r^{\frac{3}{k}-2}} \right)^{\frac{4k}{3-2k}}.$$

Por tanto, se tiene la siguiente igualdad:

$$\int_{R_0}^R r (a_l')^2 dr = \int_{R_0}^R r a_l^2 \cdot A_{\lambda,l} dr. \quad (3.23)$$

En particular, si $A_{\lambda,l}(r) \leq 0$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $r \in [R_0, R]$, entonces (3.23) implica que la correspondiente función $a_l(r)$ es idénticamente nula.

Usando que $\frac{4k-3}{k} \leq 2$, si $k \in (1, 3/2)$, y que

$$\frac{4mr^{3/k}}{(2r^{3/k} + mr^2)^2} = \frac{4mr^{\frac{3}{k}+2}}{(2r^{3/k} + mr^2)^2} \frac{1}{r^2} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{2r^2},$$

donde (*) se tiene al aplicar la desigualdad

$$\frac{2ab}{(a+b)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

tenemos la siguiente cota para $Q(r)$:

$$Q(r) \leq \frac{1}{r^2}, \quad \forall r \in [R_0, R]. \quad (3.24)$$

Como

$$\frac{4mr^{\frac{3}{k}+2}}{(2r^{3/k} + mr^2)^2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

uniformemente en $r \geq R_0$ y

$$\frac{4k-3}{k} \leq 4, \quad k > 1,$$

la cota (3.24) se puede obtener también si $k > 1$ y m es lo suficientemente grande para asegurar que

$$\frac{4mr^{\frac{3}{k}+2}}{(2r^{3/k} + mr^2)^2} \leq \frac{1}{4}, \quad r \geq R_0. \quad (3.25)$$

Por tanto, conseguimos la siguiente cota para $A_{\lambda,l}(r)$:

$$\begin{aligned} A_{\lambda,l}(r) &= -\frac{l^2}{r^2} + Q + \lambda \left(1 + \frac{m}{2r^{\frac{3}{k}-2}} \right)^{\frac{4k}{3-2k}} \\ &\leq \frac{1}{r^2} (1 - l^2) + \lambda \left(1 + \frac{m}{2r^{\frac{3}{k}-2}} \right)^{\frac{4k}{3-2k}}, \quad \forall r \in [R_0, R]. \end{aligned}$$

Notemos que, si $\lambda < 0$, $l \geq 1$ entonces $A_{\lambda,l}(r) \leq 0$, $\forall r \in [R_0, R]$, para todo $1 < k \leq \frac{6}{5}$ o $k > 1$ y m lo suficientemente grande para asegurar (3.25). Como $A_{\lambda,l}(r) \leq 0$, $\forall r \in [R_0, R]$ se concluye que, $a_l(r) = 0$, $\forall r \in [R_0, R]$ y para todo $l \geq 1$. Con lo cual hemos demostrado que la solución de (P'), cuando se parte de $\lambda < 0$, es radial (pues todos los términos en la sumatoria (3.22) se anulan a excepción del correspondiente para $l = 0$).

Aplicamos el cambio de variable $v_l(r) = \sqrt{r} \cdot a_l(r)$ y obtenemos que

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_l}{dr^2} + B_{\lambda,l} \cdot v_l = 0 & \text{en } [R_0, R], \\ v_l'(R_0) = \frac{1}{2R_0} v_l(R_0), \\ v_l(R) = 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

donde

$$B_{\lambda,l} = B_{\lambda,l}(r) = \frac{1}{4r^2} + A_{\lambda,l}.$$

Los ceros de $v_l(r)$ están aislados siempre que v_l no sea idénticamente nula. Esta afirmación se tiene porque si en un punto $r_0 \in (R_0, R)$ se verifica $v_l(r_0) = 0$, entonces $v_l'(r_0)$ no se puede anular (pues, por unicidad de solución en el (3.26), se tendría que v_l es idénticamente nula). Fuera de los ceros de v_l , definimos

$$\gamma_l(r) = \frac{v_l'(r)}{v_l(r)}.$$

Usando la ecuación que cumple v_l , obtenemos

$$\begin{cases} \gamma_l' + (\gamma_l)^2 = -B_{\lambda,l} & r \in [R_0, R] \\ \gamma_l(R_0) = \frac{1}{2R_0} \end{cases} \quad (3.27)$$

Consecuentemente, si $\lambda \leq 0$, usando (3.27) y la cota para $A_{\lambda,l}$ se tiene

$$\begin{aligned} \gamma_l'(r) + \gamma_l^2(r) &\geq -\frac{1}{4r^2} - \frac{1}{r^2} (1 - l^2) - \lambda \left(1 + \frac{m}{2r^{\frac{3}{k}-2}}\right)^{\frac{4k}{3-2k}} \\ &\geq \frac{1}{r^2} \left(\frac{\alpha_0^2}{4} - \frac{1}{4}\right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde $\alpha_0^2 = 4l^2 - 4$. Ahora, observemos que la función

$$b(r) = \frac{1}{2r} \left(1 - \alpha \left(\frac{2}{1 + \left(\frac{2r}{m}\right)^\alpha} - 1\right)\right), \quad r > 0$$

para una constante $\alpha \in \mathbb{R}$, cumple $b\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{1}{m}$ y

$$b'(r) + b^2(r) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{1}{4}\right), \quad r > 0.$$

Consideramos la función

$$g(r) = a_0 b(a_0 r) \quad r > 0,$$

donde $a_0 = \frac{m}{2R_0}$. Esta función cumple $g(R_0) = \frac{1}{2R_0}$ y

$$g'(r) + g^2(r) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{1}{4} \right) \quad \forall r > 0. \quad (3.29)$$

Por tanto, de (3.28) y (3.29) (tomando $\alpha = \alpha_0$) se deduce que $\gamma_l(r) \geq g(r)$, $\forall r > R_0$. Argumentando por contradicción, si v_l cambia de signo en $[R_0, R]$ entonces existe $r_0 \in (R_0, R)$ tal que $v_l(r_0) = 0$. Como $\gamma_l(r) \rightarrow -\infty$ cuando $r \rightarrow r_0^-$, y $g(r)$ no diverge cuando $r \rightarrow r_0^-$ ((3.29) se puede resolver explícitamente y no presenta singularidades en \mathbb{R}^+) llegamos a una contradicción que nos permite concluir que si partimos de $\lambda \leq 0$ entonces v_l (y por tanto a_l) no cambia de signo en $[R_0, R]$.

Como la única función propia del problema (P') que no cambia de signo es la asociada al primer valor propio y los autovalores negativos asociados con el problema de valores propios (P') tienen multiplicidad uno ([72], Corolario 2.3), se tiene que el índice de Morse de $\Sigma_0(R)$ es $\text{Ind}(\Sigma_0(R)) = 0$ o $\text{Ind}(\Sigma_0(R)) = 1$, para cada $R > R_0$.

De la ecuación (3.21) tenemos que $\bar{\rho} > 0$ si $k > 1$. Tras tomar límites, si $\text{Ind}(\Sigma_0) = 0$, se sigue del Teorema de Hong-Saturnino (ver Corolario 4.5 en [42]) que Σ_0 es totalmente geodésica y $\bar{\rho} = 0$ en Σ_0 , lo cual es una contradicción. Por tanto, $\text{Ind}(\Sigma_0) = 1$. □

Superficies mínimas verticalmente invariantes en productos semidirectos unimodulares

En este capítulo recogemos los resultados que se pueden encontrar en [73]. Diremos que una superficie Σ en un grupo de Lie métrico G es invariante por un grupo uniparamétrico Γ de isometrías de G si $\phi(\Sigma) = \Sigma$ para todo $\phi \in \Gamma$. Nos centramos en grupos de Lie métricos unimodulares que puedan ser escritos como un producto semidirecto de la forma $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ para cierta matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y estudiamos las superficies mínimas $\Sigma \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ que son invariantes con respecto al grupo de traslaciones a izquierda Γ generadas por elementos en el eje vertical $\{0\} \rtimes \mathbb{R}$. Nos referiremos a estas superficies como superficies verticalmente invariantes.

4.1. Introducción

Los espacios ambientes en este capítulo son grupos de Lie métricos (descritos en la Sección 1.9.2 del Capítulo 1). Durante este capítulo, salvo que se especifique lo contrario, denotaremos por grupo de Lie métrico a un grupo de Lie de dimensión 3, simplemente conexo y dotado con una métrica invariante a izquierda. Una condición algebraica particularmente interesante dentro de los grupos de Lie métricos es la propiedad de escribirse como un producto semidirecto. Los productos semidirectos abarcan a todos los grupos no unimodulares, tal y como describimos en el Teorema 1.35, y de entre los grupos de Lie unimodulares solo

dos de ellos no pueden ser escritos como un producto semidirecto: el grupo especial unitario $SU(2)$ y el recubridor universal $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ del grupo especial lineal $SL_2(\mathbb{R})$.

De entre las familias de superficies con curvatura media constante en una variedad riemanniana tridimensional, es natural estudiar y describir las superficies que satisfacen alguna condición geométrica extrínseca. Por ejemplo, si el espacio ambiente $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ con $A \in M_2(\mathbb{R})$, entonces en las coordenadas usuales $(p, z) = (x, y, z)$ de G se tiene que la altura de $(p, z) * (p', z')$, con $(p', z') \in G$, es $z + z'$. Existen varias nociones para afirmar que una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ es un grafo, y quizás la más natural es ser un grafo sobre la dirección vertical, $\Sigma = \{(x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R} : z = z(x, y)\}$, siendo $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto. De estos grafos verticales, una subfamilia destacada son los del tipo $z(x, y) = f(x) + g(y)$, donde f, g son funciones diferenciables en cierto intervalo de \mathbb{R} (éstas son conocidas como superficies de traslación), tal y como se hace en los artículos [45] y [54]. También podemos imponer la condición de ser rotacionalmente simétrica, como se puede observar en [92]; o, como haremos nosotros en este capítulo, podemos buscar superficies invariantes por ciertos grupos continuos de isometrías del espacio ambiente, véase también [56],[57],[71]. También es natural imponer estas condiciones geométricas junto con el hecho de tener curvatura de Gauss constante (véase [93]). Imponiendo estas condiciones se suele conseguir una reducción de la EDP que expresa la condición de ser mínima a una EDO, y de ahí a ejemplos explícitos o a una descripción cualitativa de las superficies con las propiedades que se desean.

Organizamos este capítulo como sigue. En la Sección 4.2 damos la definición de qué significa ser verticalmente invariante para una superficie en un producto semidirecto y el concepto de curva generatriz. Posteriormente obtenemos una EDO que expresa la curvatura media de Σ en términos de la geometría de la generatriz. En la Sección 4.3 particularizamos esta ecuación para superficies CMC cuando el grupo de Lie es unimodular y puede ser escrito como un producto semidirecto. Finalmente, en las Secciones 4.4 y 4.5 describimos la subclase de superficies mínimas verticalmente invariantes en el grupo de Heisenberg Nil_3 y en el recubridor universal $\widetilde{E}(2)$ del grupo de movimientos rígidos del plano euclídeo que preservan la orientación. Cuando $G = \text{Sol}_3$, las superficies mínimas invariantes por traslaciones verticales y horizontales fueron estudiadas en [56] y [57]. Desde otro punto de vista, las superficies con CMC verticalmente invariantes en el espacio de Heisenberg Nil_3 fueron clasificadas en [30], donde de hecho se clasifican todas las superficies con CMC invariantes por cualquier grupo uniparamétrico de isometrías de Nil_3 . En la Sección 4.6, también describiremos las superficies verticalmente invariantes con curvatura de Gauss cero en estos

espacios ambiente.

4.2. La curvatura media de una superficie verticalmente invariante

En el contexto de grupos de Lie tridimensionales que pueden escribirse como un producto semidirecto $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, nos centramos en estudiar las superficies con CMC que son invariantes bajo el grupo uniparamétrico de traslaciones verticales a izquierda. Notemos que, durante este capítulo, si $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, usaremos habitualmente la identificación $((p_1, p_2), p_3) \equiv (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$. Comenzamos considerando una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, que es generada por una curva $\gamma \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$, $t \in \mathbb{R}$, a través de traslaciones a izquierda por elementos de la forma $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Una parametrización de Σ es $\Phi(t, s) = \phi_s(\gamma(t))$ donde

$$\phi_s(x, y, z) = (0, 0, s) * (x, y, z) = (e^{sA}(x, y)^T, s + z), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

donde $(x, y)^T$ es la matriz traspuesta de (x, y) .

Definición 4.1. Si γ es una curva de la forma $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$, $t \in I$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, llamaremos *superficie verticalmente invariante* a la imagen Σ_γ por la parametrización $\Phi(t, s) = \phi_s(\gamma(t))$, $t, s \in \mathbb{R}$. A γ se le llama generatriz de Σ_γ .

Sea $\Sigma_\gamma \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, una superficie verticalmente invariante. Calculamos primero los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental de Σ_γ , y los relacionaremos con la geometría de γ . Usando la notación de la Subsección 1.9.2, elegimos coordenadas globales $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}$ de forma que $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$ generen el espacio de campos diferenciables sobre $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ y notamos por $\{E_1, E_2, E_3\}$ a la base de campos invariantes a izquierda dada por (1.23). Por un lado se tiene:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, 0) = \gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ 0 \end{pmatrix}^T = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad \forall t \in I, \quad (4.2)$$

donde estamos usando paréntesis cuando las coordenadas vienen dadas con respecto a la base $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ y corchetes para coordenadas con respecto a $\{E_1, E_2, E_3\}$. Imponemos que γ esté parametrizada por el arco (es decir, que $(x')^2 + (y')^2 = 1$, observemos que la métrica canónica invariante izquierda \langle, \rangle ,

dada por (1.23), coincide con el producto escalar usual de \mathbb{R}^3 a lo largo de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\}$): notaremos por $\theta = \theta(t)$ a una función diferenciable que cumple

$$x'(t) = \cos \theta(t), \quad y'(t) = \sin \theta(t), \quad \forall t \in I. \quad (4.3)$$

En lo que sigue usaremos la notación introducida en (1.25) y (1.22) para las entradas de las matrices A y e^{zA} , $z \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Para calcular $\Phi_s = \frac{\partial \Phi}{\partial s}$, denotamos por $\{F_1, F_2, F_3\}$ a la base de campos invariantes a derecha introducida en (1.28) (en la Subsección 1.9.2) y usamos que $\Phi_s(t, s) = (F_3)_{\Phi(t, s)}$ ([62]):

$$F_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} \delta(x, y) \\ \varepsilon(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}^T = \begin{bmatrix} \delta(x, y)a_{11}(-z) + \varepsilon(x, y)a_{12}(-z) \\ \delta(x, y)a_{21}(-z) + \varepsilon(x, y)a_{22}(-z) \\ 1 \end{bmatrix}^T, \quad (4.4)$$

donde $\delta(x, y) = ax + by$, $\varepsilon(x, y) = cx + dy$. Por tanto,

$$\Phi_s(t, 0) = (F_3)_{\gamma(t)} = \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \varepsilon(t) \\ 1 \end{bmatrix}^T, \quad \forall t \in I, \quad (4.5)$$

donde $\delta(t) = \delta(\gamma(t))$ y $\varepsilon(t) = \varepsilon(\gamma(t))$. Con Φ_t y Φ_s podemos calcular los coeficientes E, F, G de la primera forma fundamental de Σ_γ en $\Phi(t, 0)$ (notemos que esto equivale a calcularlos en cualquier $\Phi(t, s)$ porque la superficie Σ_γ se genera por traslación en la dirección vertical. Dicha traslación es una isometría de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} E(t, 0) &= [(x')^2 + (y')^2](t) = 1, & F(t, 0) &= \delta(t) \cos \theta(t) + \varepsilon(t) \sin \theta(t), \\ G(t, 0) &= 1 + \delta(t)^2 + \varepsilon(t)^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Usando la expresiones para $\nabla_{E_i} E_j$, $i, j = 1, 2, 3$ dadas en (1.27) calculamos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\Phi_t} \Phi_t(t, 0) &= \frac{D}{dt} (\cos \theta(t) E_{1\gamma(t)} + \sin \theta(t) E_{2\gamma(t)}) \\ &= -\theta'(t) \sin \theta(t) E_1 + \theta'(t) \cos \theta(t) E_2 + \cos \theta(t) \nabla_{\gamma'(t)} E_1 + \sin \theta(t) \nabla_{\gamma'(t)} E_2 \\ &= \begin{bmatrix} -\theta'(t) \sin \theta(t) \\ \theta'(t) \cos \theta(t) \\ 0 \end{bmatrix}^T + \cos^2 \theta(t) a E_3 + \cos \theta(t) \sin \theta(t) \frac{b+c}{2} E_3 \\ &+ \sin \theta(t) \cos \theta(t) \frac{b+c}{2} E_3 + \sin^2 \theta(t) d E_3 \\ &= \begin{bmatrix} -\theta'(t) \sin \theta(t) \\ \theta'(t) \cos \theta(t) \\ a \cos^2 \theta(t) + d \sin^2 \theta(t) + \cos \theta(t) \sin \theta(t) (b+c) \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\Phi_t} \Phi_s(t, 0) &= \frac{D}{dt}(\delta(t)E_{1\gamma(t)} + \varepsilon(t)E_{2\gamma(t)} + E_{3\gamma(t)}) \\
&= \begin{bmatrix} \delta'(t) \\ \varepsilon'(t) \\ 0 \end{bmatrix}^T + \delta(t)\nabla_{\gamma'(t)}E_1 + \varepsilon(t)\nabla_{\gamma'(t)}E_2 + \nabla_{\gamma'(t)}E_3 \\
&= \begin{bmatrix} \delta'(t) \\ \varepsilon'(t) \\ 0 \end{bmatrix}^T + \delta(t)\cos\theta(t)aE_3 + \delta(t)\sin\theta(t)\frac{b+c}{2}E_3 + \varepsilon(t)\cos\theta(t)\frac{b+c}{2}E_3 \\
&\quad + \varepsilon(t)\sin\theta(t)dE_3 + \cos\theta(t)\left(-aE_1 - \frac{b+c}{2}E_2\right) + \sin\theta(t)\left(-\frac{b+c}{2}E_1 - dE_2\right) \\
&= \begin{bmatrix} \sin\theta(t)\frac{b-c}{2} \\ \cos\theta(t)\frac{c-b}{2} \\ \delta(t)\left(\cos\theta(t)a + \sin\theta(t)\frac{b+c}{2}\right) + \varepsilon(t)\left(\cos\theta(t)\frac{b+c}{2} + \sin\theta(t)d\right) \end{bmatrix}^T, \tag{4.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\Phi_s} \Phi_s(t, 0) &= (\nabla_{\delta(t)E_1 + \varepsilon(t)E_2 + E_3} \delta(t)E_1 + \varepsilon(t)E_2 + E_3)(t, 0) \\
&= \delta(t)^2aE_3 + \delta(t)\varepsilon(t)\frac{b+c}{2}E_3 + \delta(t)\left(-aE_1 - \frac{b+c}{2}E_2\right) + \varepsilon(t)\delta(t)\frac{b+c}{2}E_3 \\
&\quad + \varepsilon(t)^2dE_3 + \varepsilon(t)\left(-\frac{b+c}{2}E_1 - dE_2\right) + \delta(t)\frac{c-b}{2}E_2 + \varepsilon(t)\frac{b-c}{2}E_1 \\
&= \begin{bmatrix} -c\varepsilon(t) - a\delta(t) \\ -b\delta(t) - d\varepsilon(t) \\ \delta(t)\varepsilon(t)(b+c) + a\delta(t)^2 + d\varepsilon(t)^2 \end{bmatrix}^T. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Un campo normal unitario a Σ_γ , $N : \Sigma_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ es

$$N \circ \Phi = \frac{\Phi_t \times \Phi_s}{|\Phi_t \times \Phi_s|} = \frac{\sin\theta E_1 - \cos\theta E_2 + (\varepsilon \cos\theta - \delta \sin\theta)E_3}{\sqrt{1 + (\varepsilon \cos\theta - \delta \sin\theta)^2}}. \tag{4.10}$$

Con estos cálculos, los coeficientes e, f, g para la segunda forma fundamental de Σ en $(t, 0)$ (y por tanto en cualquier $(t, s) \in I \times \mathbb{R}$) son:

$$e = \langle N, \nabla_{\Phi_t} \Phi_t \rangle = \frac{(\delta \sin\theta - \varepsilon \cos\theta)[-(a-d)\cos(2\theta) - a - (b+c)\sin(2\theta) - d] - 2\theta'}{2\sqrt{1 + (\sin\theta\delta - \cos\theta\varepsilon)^2}}, \tag{4.11}$$

$$f = \langle N, \nabla_{\Phi_t} \Phi_s \rangle \quad (4.12)$$

$$= \frac{(\varepsilon \cos \theta - \delta \sin \theta) [\cos \theta (2a\delta + (b+c)\varepsilon) + \sin \theta ((b+c)\delta + 2d\varepsilon)] + b - c}{2\sqrt{1 + (\delta \sin \theta - \varepsilon \cos \theta)^2}},$$

$$g = \langle N, \nabla_{\Phi_s} \Phi_s \rangle = \frac{\cos \theta [a\delta^2\varepsilon + \delta ((b+c)\varepsilon^2 + b) + d\varepsilon (\varepsilon^2 + 1)]}{\sqrt{1 + (\delta \sin \theta - \varepsilon \cos \theta)^2}} - \frac{\sin \theta [\delta (a\delta^2 + a + (b+c)\delta\varepsilon + d\varepsilon^2) + c\varepsilon]}{\sqrt{1 + (\delta \sin \theta - \varepsilon \cos \theta)^2}}. \quad (4.13)$$

La curvatura media de Σ_γ en $\Phi(t, s)$ viene dada por

$$H = H(t) = \frac{Eg - 2Ff + eG}{2(EG - F^2)},$$

por lo que imponer curvatura media constante $H \in \mathbb{R}$ para Σ_γ es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x' = \cos \theta \\ y' = \sin \theta \\ (4.15) \end{cases}, \quad (4.14)$$

donde (4.15) es la EDO

$$8 [((cx + dy) \cos \theta - (ax + by) \sin \theta)^2 + 1]^{3/2} H = -4\theta' [1 + (ax + by)^2 + (cx + dy)^2] - \sin \theta [(ax + by) [3(a + d) ((ax + by)^2 + (cx + dy)^2) + 5a + 3d] + (3b - c)(cx + dy)] + \cos \theta [(cx + dy) [3(a + d)(ax + by)^2 + 3a + 5d] + \sin(3\theta) [(ax + by) [(a + d) ((ax + by)^2 - 3(cx + dy)^2) - a + d] + (b + c)(cx + dy)] - (b - 3c)(ax + by) + 3(a + d)(cx + dy)^3] + (b + c)(ax + by) + (a + d)(cx + dy)^3] + \cos(3\theta) [-(cx + dy) [3(a + d)(ax + by)^2 - a + d]]. \quad (4.15)$$

4.3. Productos semidirectos unimodulares

Nuestro siguiente objetivo es hacer un estudio cualitativo de las soluciones del sistema (4.14) dependiendo del espacio ambiente (o equivalentemente dependiendo de la matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$). Nos centraremos en grupos de Lie métricos unimodulares para los que, usando el Teorema 2.15 de [64], sabemos que después

de escalar la métrica, la matriz A se puede escoger como una de las siguientes tres opciones:

$$i) A = 0, \quad ii) A = \begin{pmatrix} 0 & \pm c \\ \frac{1}{c} & 0 \end{pmatrix}, \quad c \in [1, \infty), \quad \text{o} \quad iii) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Es decir, un grupo de Lie métrico unimodular G que se pueda escribir como producto semidirecto es isomorfo e isométrico a $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ con su métrica canónica para A dada por una de las opciones de (4.16). Dependiendo de la matriz A , G es isomorfo e isométrico a uno de los siguientes grupos de Lie métricos: \mathbb{R}^3 en el caso i), el grupo soluble Sol_3 de movimientos rígidos en el plano de Lorentz-Minkowski que preservan la orientación en el caso ii) cuando elegimos el signo positivo, el recubridor universal $\tilde{E}(2)$ del grupo de movimientos rígidos del plano euclídeo que preservan la orientación en el caso ii) cuando elegimos el signo negativo, o el grupo de Heisenberg Nil_3 . La familia de métricas invariantes a izquierda para el caso ii) (con la elección del signo positivo o negativo) fueron descritas en la Subsección 1.9.2. A continuación, escribimos la ecuación (4.15) en estos espacios ambiente (no incluimos aquí el caso en que $A = 0$ donde $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ debido a que es bien conocido que las únicas superficies mínimas verticalmente invariantes en \mathbb{R}^3 son planos verticales):

- Si consideramos Sol_3 con la métrica que lo hace isomorfo e isométrico a $\mathbb{R}^2 \rtimes_{A(c)} \mathbb{R}$ donde $A(c) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1/c & 0 \end{pmatrix}$, $c \in [1, \infty)$, entonces (4.15) se escribe como

$$H = \frac{((1 + c^2) \cos(2\theta) + 1 - c^2)(c^2 y \cos \theta + x \sin \theta) - 2\theta'(c^2 + x^2 + c^4 y^2)}{4c^2 \left(1 + \left(\frac{x \cos \theta}{c} - cy \sin \theta\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.17)$$

- En el caso particular $c = 1$ (métrica estándar en Sol_3), la ecuación (4.15) se escribe como:

$$H = \frac{\cos(2\theta)(x \sin \theta + y \cos \theta) - (1 + x^2 + y^2)\theta'}{2(1 + (x \cos \theta - y \sin \theta)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.18)$$

Las superficies mínimas verticalmente invariantes en $\text{Sol}_3 = \mathbb{R}^2 \rtimes_{A(1)} \mathbb{R}$ son descritas desde este punto de vista en [56].

- Si $G = \text{Nil}_3$ con su métrica estándar (todas las métricas invariantes a izquierda en Nil_3 son homotéticas), que es isométrico e isomorfo a $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$

con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces la ecuación (4.15) toma la forma

$$H = -\frac{y \cos \theta \sin^2 \theta + (1 + y^2)\theta'}{2(1 + y^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.19)$$

- Si consideramos $\tilde{E}(2)$ con la métrica que lo hace isométrico e isomorfo a $\mathbb{R}^2 \rtimes_{A(c)} \mathbb{R}$ con $A(c) = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1/c & 0 \end{pmatrix}$ con $c \in [1, \infty)$, entonces (4.15) se escribe como

$$H = \frac{[(c^2 - 1) \cos(2\theta) - c^2 - 1] (c^2 y \cos \theta - x \sin \theta) - 2\theta' (c^2 + x^2 + c^4 y^2)}{4 [(x \cos \theta + c^2 y \sin \theta)^2 + c^2] \sqrt{1 + \left(\frac{x \cos \theta}{c} + cy \sin \theta\right)^2}}. \quad (4.20)$$

El caso $c = 1$ para $\tilde{E}(2)$ será estudiado con más detalle en la Sección 4.5.

4.4. Superficies mínimas verticalmente invariantes en Nil_3

Por la complejidad de los cálculos, nos centraremos en superficies mínimas, lo que significa que imponemos $H = 0$ en las ecuaciones de la sección anterior. Si $\Sigma_\gamma \subset \text{Nil}_3$ es mínima y verticalmente invariante, entonces el sistema (4.14) se puede escribir como:

$$\begin{cases} x' = \cos \theta, \\ y' = \sin \theta, \\ \theta' = \frac{-y \cos \theta \sin^2 \theta}{1 + y^2}. \end{cases} \quad (4.21)$$

La siguiente proposición es clara si anulamos el numerador de la fracción que aparece en (4.21).

Proposición 4.2. *Las únicas soluciones al sistema (4.21) que se obtienen eligiendo θ como una constante vienen dadas por*

$$(x(t), y(t), \theta) = (t, 0, 0) + (x(0), y(0), 0), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.22)$$

$$(x(t), y(t), \theta) = (0, t, \pi/2) + (x(0), y(0), 0), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.23)$$

Proposición 4.3. *Si $x(t)$, $y(t)$, $\theta(t)$ es una solución de (4.21) y $\theta(t)$ es no constante, entonces θ nunca alcanza los valores $\left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.*

Demostración: Supongamos que $\theta(t_0) \in \{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ para algún $t_0 \in I$ (intervalo de definición maximal de la generatriz γ). Consideramos la siguiente solución de (4.21):

$$\tilde{x}(t) = x(t_0) + \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)(t-t_0), \quad \tilde{y}(t) = y(t_0) + \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)(t-t_0), \quad \tilde{\theta}(t) = \frac{k\pi}{2}.$$

Debido a la unicidad del problema de valores iniciales asociado a (4.21), tenemos $\theta(t) \equiv \tilde{\theta}$, lo cual contradice que $\theta(t)$ no se supone constante. \square

Observación 4.4. De la Proposición 4.3 se deduce que toda curva generatriz γ de una solución de (4.21) que no haya sido descrita en la Proposición 4.2 es un grafo simultáneamente sobre su proyección sobre los ejes x e y . Además, como (4.21) implica que las derivadas de las funciones $x(t)$, $y(t)$, $\theta(t)$ están acotadas, entonces el Teorema de Picard-Lindelöf implica que el intervalo maximal de definición de γ es \mathbb{R} .

Para describir las soluciones de (4.21) con una función $\theta(t)$ no constante, podemos asumir que $\theta(t) \in (0, \pi/2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Damos una primera integral para el sistema (4.21):

$$I(t) := (1 + y(t)^2) \tan^2 \theta(t),$$

lo que significa que $I(t)$ es constante a lo largo de cualquier solución de (4.21). Reescribimos I como

$$I = (1 + y^2) \frac{y'^2}{1 - y'^2},$$

lo que hace que resolver (4.21) sea equivalente a resolver

$$\begin{cases} x' = \cos \theta, \\ y' = \sin \theta, \\ (1 + y^2) \frac{y'^2}{1 - y'^2} = a \in [0, \infty). \end{cases} \quad (4.24)$$

Ahora definimos el siguiente difeomorfismo:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{2}(1+a) \ln(t + \sqrt{1+a+t^2}) + \frac{1}{2}t\sqrt{1+a+t^2}, \end{aligned}$$

donde $a \geq 0$. La última ecuación de (4.24) se puede resolver usando integración directa:

$$y(t) = f^{-1}(\sqrt{at} + c_1), \quad c_1 \in \mathbb{R}. \quad (4.25)$$

Si $a = 0$, de (4.24) deducimos que la solución del sistema viene dada por (4.23). En caso contrario podemos integrar explícitamente la función $x(t)$ en (4.24):

$$x(t) = c_2 + \frac{1}{2\sqrt{a}} \left(\operatorname{arcsinh}(f^{-1}(\sqrt{at} + c_1)) + f^{-1}(\sqrt{at} + c_1) \sqrt{1 + (f^{-1}(\sqrt{at} + c_1))^2} \right), \quad (4.26)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Estas expresiones describen todas las superficies mínimas verticalmente invariantes en Nil_3 .

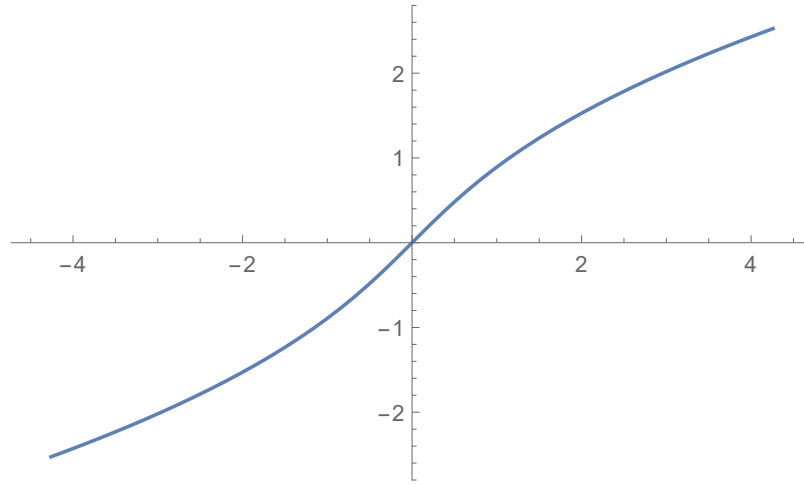


Figura 4.1: La solución γ de (4.24) con condiciones iniciales $\gamma(0) = (0, 0)$, $a = 1$.

Observación 4.5. 1. Estas superficies son ya conocidas; de hecho las superficies con CMC en Nil_3 que son invariantes bajo cualquier subgrupo unidimensional del grupo de isometrías de Nil_3 fueron clasificadas por Figueroa, Mercuri y Pedrosa en [30]. Para ser más preciso, las superficies dadas por (4.25) y (4.26) están descritas en el Teorema 6 de [30], de la forma en que explicamos a continuación.

Utilizaremos la identificación de $\operatorname{Nil}_3(1/2)$ con su estructura de grupo de Lie descrita en la Subsección 1.9.1 (éste es el modelo de Nil_3 usado en [30]), con el producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, $A \in M_2(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dicha identificación viene descrita mediante la aplicación $\Xi : \operatorname{Nil}_3(1/2) \rightarrow \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ en la última parte de la Subsección 1.9.2.

Las superficies mínimas descritas en el Teorema 6 de [30] son, o bien planos verticales, o bien vienen dadas a través de la parametrización

$$z(x, y) = \frac{xy}{2} - c \left[\frac{y\sqrt{1+y^2}}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(y + \sqrt{1+y^2} \right) \right], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Usando Ξ , un punto $(s, u, z(s, u))$, $s, u \in \mathbb{R}$ se aplica en

$$\left(su - c \left[\frac{u\sqrt{1+u^2}}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(u + \sqrt{1+u^2} \right) \right], u, s \right) \in \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}. \quad (4.27)$$

La curva generatriz contenida en el plano $z = 0$ de la parametrización (4.27) es

$$\gamma(u) = \left(-c \left[\frac{u\sqrt{1+u^2}}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(u + \sqrt{1+u^2} \right) \right], u, 0 \right), \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

que genera (4.23) si $c = 0$ o (4.25) y (4.26) cuando $c \neq 0$ después de usar el cambio de variable $u = y(t)$ y la igualdad $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Los planos verticales en $\operatorname{Nil}_3(1/2)$ se aplican por Ξ en planos verticales generados por (4.22).

2. La solución (4.22) en la Proposición 4.2 proporciona, a través de la parametrización $\Phi(t, s) = \phi_s(\gamma(t))$ descrita en (4.1), un plano vertical. Todas las soluciones de (4.21) que no están en la Proposición 4.2 tienen una forma similar a la que se muestra en la Figura 4.2.

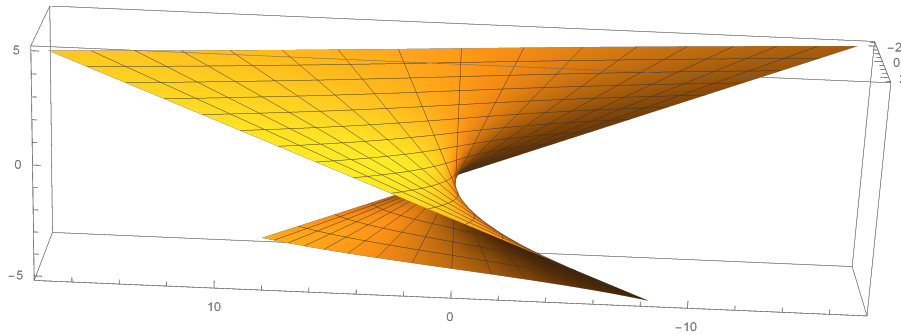


Figura 4.2: Superficie mínima Σ_γ generada a través de $\Phi(t, s) = \phi_s(\gamma(t))$, con $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$, donde x, y son soluciones del sistema (4.24) con condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 0$ y $a = 1$.

3. Cuando $a \rightarrow +\infty$, de la ecuación $(1 + y^2) \cot \theta = a$ tenemos que $\theta \rightarrow 0$ uniformemente. Por tanto, la familia de soluciones descritas por (4.25) y (4.26) converge, cuando $a \rightarrow +\infty$, a la solución (4.22) descrita en la Proposición 4.2.

4.5. Superficies mínimas verticalmente invariantes en $\tilde{E}(2)$

Si $G = \tilde{E}(2)$ con su métrica estándar (isométrica a la métrica llana de \mathbb{R}^3), que es isométrico e isomorfo a $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la ecuación (4.15) se escribe como

$$H = \frac{x \sin \theta - y \cos \theta - (1 + x^2 + y^2)\theta'}{2(1 + (x \cos \theta + y \sin \theta)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.28)$$

La órbita de un punto $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\}$ es

$$\phi_s(x, y, 0) = (x \cos s - y \sin s, x \sin s + y \cos s, s), \quad s \in \mathbb{R},$$

que describe una hélice. Recordemos que la métrica estándar en $\tilde{E}(2)$ es la métrica llana, por tanto, las superficies con cualquier restricción en su curvatura media o de Gauss verticalmente invariantes en $\tilde{E}(2)$ son un subconjunto de las superficies clásicas con la misma restricción sobre su curvatura en \mathbb{R}^3 que son invariantes por un movimiento helicoidal. En particular, las superficies de esta sección son también superficies mínimas clásicas de \mathbb{R}^3 .

Observación 4.6. *Las superficies mínimas helicoidales en \mathbb{R}^3 son superficies asociadas a la catenoide [97]. Desde otra aproximación, usaremos técnicas de análisis de EDO para describir la curva generatriz γ en este contexto.*

De nuevo, si imponemos $H = 0$, la ecuación (4.28) se escribe como:

$$\theta' = \frac{x \sin \theta - y \cos \theta}{1 + x^2 + y^2} \quad (4.29)$$

y el sistema (4.14) toma la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \frac{x \sin \theta - y \cos \theta}{1 + x^2 + y^2} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

(4.30) es un sistema de EDO de primer orden en la variedad tridimensional $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 = \{(x, y, \theta) \mid x, y \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{S}^1\}$ que también podemos ver como un sistema de EDO de segundo orden en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$:

$$x'' = (\cos \theta)' = -\theta' \sin \theta = -\frac{x \sin \theta - y \cos \theta}{1 + x^2 + y^2} y', \quad y'' = \frac{x \sin \theta - y \cos \theta}{1 + x^2 + y^2} x'.$$

4.5.1. Soluciones de tipo I

Dado $\theta \in \mathbb{S}^1$ fijo, la recta $(x, y)(t) = t(\cos \theta, \sin \theta)$, $t \in \mathbb{R}$, es solución de (4.30). Variando $\theta \in \mathbb{S}^1$ éstas son todas las soluciones de (4.30) con $\gamma(0) = (0, 0)$. Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ no podemos dar explícitamente todas las soluciones de (4.30) con $\gamma(0) = (x_0, y_0)$, salvo en el caso en que $\gamma'(0) = \frac{\gamma(0)}{|\gamma(0)|}$ (en este caso γ es una reparametrización de la recta que une $(0, 0)$ con (x_0, y_0)). Diremos que una solución de (4.30) es de tipo I si parametriza a una recta afín que pasa por el origen. Llamaremos soluciones de tipo II a las soluciones de (4.30) que no son de tipo I.

4.5.2. Soluciones de tipo II

El miembro de derecha de (4.29) se escribe como

$$\frac{x \sin \theta - y \cos \theta}{1 + x^2 + y^2} = \frac{\langle J\gamma, \gamma' \rangle}{1 + |\gamma|^2},$$

donde $J(x, y) = (-y, x)$. Con ello, (4.30) es equivalente a

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \frac{\langle J\gamma, \gamma' \rangle}{1 + |\gamma|^2} J\gamma' \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Es decir, si llamamos κ a la función curvatura de γ con respecto a la métrica llana del plano $\{z = 0\}$, nuestra ecuación se transforma en $\kappa J\gamma' = \gamma'' = \frac{\langle J\gamma, \gamma' \rangle}{1 + |\gamma|^2} J\gamma'$, o equivalentemente

$$\kappa = \frac{\langle J\gamma, \gamma' \rangle}{1 + |\gamma|^2} = -\frac{\xi}{1 + |\gamma|^2}, \quad (4.32)$$

donde $\xi = \langle \gamma, J\gamma' \rangle$ es la función soporte de γ . El siguiente teorema proporciona una descripción completa de las soluciones de (4.32).

Teorema 4.7. *Si $\gamma \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} = \tilde{E}(2)$ es la curva generatriz de una superficie mínima verticalmente invariante $\Sigma_\gamma \subset \tilde{E}(2)$ (equivalentemente, γ verifica (4.32)), entonces el intervalo de definición maximal de γ es \mathbb{R} , y se tiene:*

1. *La curvatura κ de γ verifica $|\kappa(t)| \leq 1/2, \forall t \in \mathbb{R}$.*
2. *Si γ pasa por el origen $(0, 0)$, entonces γ es de tipo I. En otro caso, γ es una curva estrictamente convexa, i.e. κ es una función que no se anula. En particular, κ tiene signo constante.*
3. *$\kappa(t)$ tiende a 0 cuando $t \rightarrow \pm\infty$.*
4. *κ verifica la EDO $\langle \gamma, \gamma' \rangle \kappa + (1 + |\gamma|^2) \kappa' = 0$.*
5. *Dado $A \in SO(2)$, la curva $A\gamma$ también es una solución de (4.32).*
6. *Si γ no pasa por el origen, entonces existe un único $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\kappa'(t_0) = 0$. Además:*
 - *La distancia de γ al origen alcanza su único punto crítico en $\gamma(t_0)$, que es su mínimo global.*
 - *La traza de γ es simétrica por la reflexión respecto a la recta afín r normal a γ en t_0 .*
 - *La función soporte ξ de γ tiene un único punto crítico en t_0 .*
 - *Salvo una traslación en t , suponemos que $t_0 = 0$. Entonces, todos los puntos de autointersección de γ ocurren para valores opuestos del parámetro (i.e. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = \pm t_2$) y están todos en r . Además, el ángulo de intersección entre r y γ en $t \in \mathbb{R}$ es $\pi/2$ si y solo si $t = t_0$.*

Demostración: De (4.32) y la desigualdad de Schwarz se deduce que

$$|\kappa| \leq \frac{|\xi|}{1 + |\gamma|^2} \leq \frac{|\gamma|}{1 + |\gamma|^2}. \quad (4.33)$$

Viendo (4.31) como una ecuación diferencial del tipo $X' = F(t, X)$ con $X = (\gamma, \gamma') \in \mathbb{R}^4$, la acotación de F (porque γ está parametrizada por la longitud del arco y por (4.33)) y el Teorema de Picard-Lindelöf aseguran que el dominio maximal de X es todo \mathbb{R} . Esto prueba el apartado 1.

Si $\kappa(t_0) = 0$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ entonces, usando (4.32), tenemos $\xi(t_0) = 0$. Por tanto, o bien $\gamma(t_0) = (0, 0)$ (en este caso γ es de tipo I) o bien $\gamma(t_0) \neq (0, 0)$

es ortogonal a $J\gamma'(t_0)$ y por tanto $\gamma(t_0)$ es colineal con $\gamma'(t_0)$. En este caso, la unicidad del problema de valores iniciales asociado a (4.31) implica que γ es de tipo I, lo que prueba el apartado 2.

γ no puede estar acotada: en caso contrario la superficie $\Sigma_\gamma \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ generada por γ a partir de (4.1) estaría dentro de un cilindro vertical recto $\mathbb{D}(R) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, donde $\mathbb{D}(R)$ es el disco abierto de radio $R > 0$ en \mathbb{R}^2 centrado en el origen. Como $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ es isométrico a \mathbb{R}^3 con su métrica llana usual, tendríamos una contradicción aplicando el principio del máximo en infinito (Teorema 1.18) a Σ_γ y a un plano vertical que deje $\mathbb{D}(R) \times \mathbb{R}$ a un lado. Como $|\gamma(t)| \rightarrow \infty$ cuando $|t| \rightarrow \infty$, de (4.33) concluimos que $\kappa(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Multiplicando en cruz en (4.32) y tomando derivadas obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= [(1 + |\gamma|^2)\kappa + \xi]' = 2\langle \gamma, \gamma' \rangle \kappa + (1 + |\gamma|^2)\kappa' + (\langle \gamma, J\gamma' \rangle)' \\ &= 2\langle \gamma, \gamma' \rangle \kappa + (1 + |\gamma|^2)\kappa' + \langle \gamma, -\kappa\gamma' \rangle = \langle \gamma, \gamma' \rangle \kappa + (1 + |\gamma|^2)\kappa', \end{aligned} \quad (4.34)$$

lo que prueba el apartado 4.

Para probar el apartado 5, sea $A \in SO(2)$, y $\tilde{\gamma} = A\gamma$. La curvatura $\tilde{\kappa}$ de $\tilde{\gamma}$ es $\tilde{\kappa} = \kappa$, y $\langle J\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}' \rangle = \langle JA\gamma, A\gamma' \rangle = \langle AJ\gamma, A\gamma' \rangle = \langle J\gamma, \gamma' \rangle$ luego $\tilde{\gamma}$ cumple (4.31).

Para demostrar la afirmación número 6, debido al apartado 2, podemos suponer (salvo orientación) que la curvatura de γ es positiva. Usando el apartado 3, sabemos que $\kappa: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ alcanza un máximo para algún $t_0 \in \mathbb{R}$. Como $\kappa'(t_0) = 0$ y $\kappa(t_0) \neq 0$, el apartado 4 implica que el vector de posición $\gamma(t_0)$ es ortogonal a $\gamma'(t_0)$ (ambos vectores son no nulos). El apartado 5 implica que, salvo una rotación centrada en el origen, podemos asumir que $\gamma(t_0) = (x(t_0), 0)$ y por tanto, $x'(t_0) = 0$, $y'(t_0) = \pm 1$. También, sin pérdida de generalidad, usando una traslación del parámetro t , podemos suponer que $t_0 = 0$.

Ahora probamos que γ es simétrica con respecto al eje real. Sea $t \in \mathbb{R} \mapsto \tilde{\gamma}(t) = (x(t), -y(t))$ una reflexión de γ con respecto al eje real. La curvatura $\tilde{\kappa}$ de $\tilde{\gamma}$ es $\tilde{\kappa} = -\kappa$, y

$$\langle J\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}' \rangle = \langle J(x, -y), (x', -y') \rangle = \langle (y, x), (x', -y') \rangle = x'y - xy' = -\langle J\gamma, \gamma' \rangle,$$

por lo que $\tilde{\gamma}$ verifica (4.31). Como $\tilde{\gamma}(t_0) = \gamma(t_0)$ y $\tilde{\gamma}'(t_0) = -\gamma'(t_0)$, concluimos que γ es simétrica a través de la reflexión con respecto al eje real. En particular, γ interseca ortogonalmente al eje real en $\gamma(0)$.

Para probar que κ' solo se anula en t_0 vamos a suponer que $\kappa'(t_1) = 0$ para cierto $t_1 \neq 0$. Con el mismo argumento que en el párrafo anterior deducimos que γ es simétrica con respecto a la reflexión de la línea normal $r(t_1)$ a γ en t_1 . En esta situación se nos presentan tres opciones:

- $r(t_1)$ es el eje real. En este caso, γ es ortogonal al eje real en t_1 . Usando la simetría de γ con respecto al eje real, se tiene que γ es una curva cerrada. Esto contradice el apartado 3.
- $r(t_1)$ es paralela (y no coincide con) al eje real. Esto implica que γ es simétrica con respecto a reflexiones en dos líneas paralelas distintas, por tanto γ es invariante por una traslación vertical no trivial que se obtiene tras aplicar las dos reflexiones consecutivas. Esto implica que κ es periódica, lo que contradice de nuevo el apartado 3.
- $r(t_1)$ no es paralela al eje real. Se tiene que γ es simétrica con respecto al eje real y con respecto a $r(t_1)$, lo que implica que γ es simétrica con respecto a la composición de ambas reflexiones, que es una rotación de ángulo $\alpha \neq 0, \pi$. Esto implica que κ es periódica, y llegamos a una contradicción con el apartado 3.

En conclusión, $\kappa'(t)$ solo se anula en $t_0 = 0$. Como estamos suponiendo $\kappa(t) > 0$, tenemos que κ alcanza su único máximo global en $t = 0$.

Como, debido al apartado 4, $(|\gamma|^2)' = 2\langle \gamma, \gamma' \rangle$ solo se anula en los ceros de κ' , deducimos que la distancia al origen restringida a γ tiene un único punto crítico en $t = 0$. Este punto crítico es un mínimo global de $|\gamma|$, ya que γ no está acotada.

Ahora analizamos cómo es una de las dos mitades simétricas $\gamma^+ = \gamma(0, \infty)$, $\gamma^- = \gamma(-\infty, 0)$ de γ que comienzan en el punto $\gamma(0)$. De esta forma, γ^+ es una rama de γ que es ortogonal al eje real en el punto inicial $t_0 = 0$. Salvo una rotación de ángulo π alrededor de $\gamma(0)$, podemos suponer que $y(t) > 0$ para $t \in (0, \varepsilon)$ donde $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño. Así, γ^+ empieza estando contenida en el semiplano superior; lo que equivale a escribir $y'(0) = 1$. Como $\kappa > 0$, γ^+ comienza a la izquierda de la recta vertical $\{x = x(0)\}$.

Supongamos que la función altura $\langle \gamma(t), \gamma'(0) \rangle = y(t)$ sobre el eje real no tiene puntos críticos. En este caso, γ^+ es un grafo global convexo sobre su proyección $(-\infty, x(0))$ sobre el eje real (este grafo puede ser no acotado). Por tanto, el normal unitario $J\gamma' = n = (n_1, n_2)$ a lo largo de γ^+ está en una de las semicircunferencias definidas por $\mathbb{S}^1 \setminus \{n_2 = 0\}$. Notemos que γ es un grafo global con respecto a la recta afín tangente a γ en $\gamma(0)$ (porque $y(t)$ no tiene puntos críticos). En particular, γ es embebida. Esto implica que la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ generada por γ a través de (4.1) es una superficie completa, embebida, simplemente conexa, y mínima en \mathbb{R}^3 con su métrica estándar y, en consecuencia (Teorema 0.1), Σ es un plano o un helicoides, lo cual es una contradicción.

En conclusión, la función altura $y(t)$ con respecto al eje real tiene al menos un punto crítico en $t_1 \in (0, \infty)$. Esto implica que la recta afín tangente a γ en t_1 es horizontal, y como $\kappa(t_1) > 0$, $y(t)$ tiene un máximo local estricto en t_1 . Como κ no tiene cambios de signo, deducimos que γ^+ vuelve a cortar al eje real en un nuevo punto $\gamma(t_2)$ con $t_2 > t_1$. En este caso, $\gamma'(t_2)$ no puede ser ortogonal al eje real (si lo fuera concluiríamos que γ es una curva cerrada, lo cual es una contradicción con el apartado 3). Por tanto, $\gamma(t_2)$ es un punto de autointersección transversal de γ^+ con γ^- tal y como se muestra en la Figura 4.3.

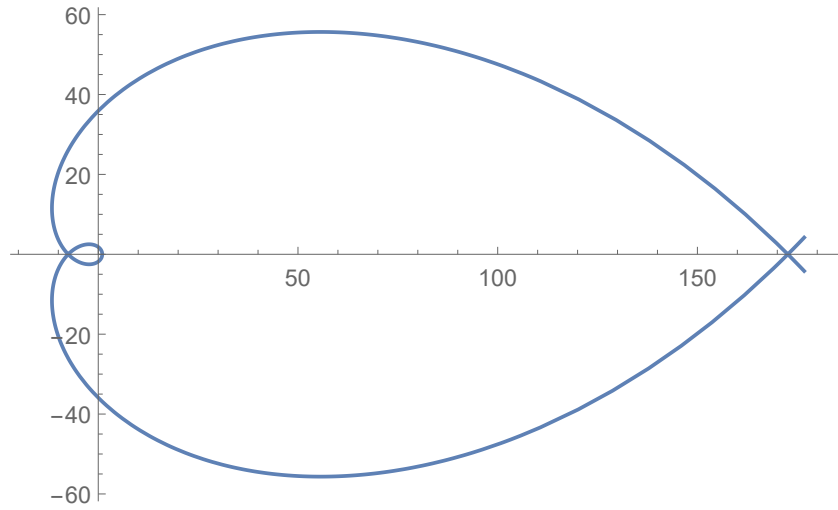


Figura 4.3: La solución numérica γ de (4.32) con condiciones iniciales $\gamma(0) = (1, 0)$, $\gamma'(0) = (0, 1)$. Se muestra a γ para los valores $t \in [-250, 250]$. Para este intervalo encontramos dos puntos de autointersección.

Como γ es simétrica con respecto del eje real y $t_0 = 0$, tenemos que $x(t)$ es una función par (respectivamente $y(t)$ es una función impar). Por tanto, $x'(t)$ es impar (respectivamente $y'(t)$ es par), y deducimos que la función soporte $\xi = \langle \gamma, J\gamma' \rangle$ es par. Como κ es positiva, de (4.32) se deduce que ξ es negativa. Además,

$$\xi' = (\langle \gamma, J\gamma' \rangle)' = \langle \gamma, (J\gamma')' \rangle = -\langle \gamma, \gamma' \rangle \kappa = (1 + |\gamma|^2) \kappa',$$

donde, para la última igualdad, se requiere del apartado 4. Como κ es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ (respectivamente es estrictamente decreciente en $(0, \infty)$), tenemos que $\kappa' > 0$ en $(-\infty, 0)$ (respectivamente $\kappa' < 0$ en $(0, \infty)$), por tanto $\xi' > 0$ en $(-\infty, 0)$ (respectivamente $\xi' < 0$ en $(0, \infty)$), lo que implica que

ξ es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$, estrictamente decreciente en $(0, \infty)$ y ξ tiene un único punto crítico que es un máximo global negativo en $t = 0$.

Ahora probamos que la aplicación $t \mapsto |\gamma(t)|$ es inyectiva en $(0, \infty)$ (el mismo argumento funciona en $(-\infty, 0)$). Si existe t_1, t_2 tal que $0 < t_1 < t_2$ y $|\gamma(t_1)| = |\gamma(t_2)|$, esto implica la existencia de $t_3 \in (t_1, t_2)$ tal que $\xi(t_3) = |\gamma(t_3)|$. Como $\xi = \langle \gamma, J\gamma \rangle \leq |\gamma|$, entonces $\langle \gamma(t_3), \gamma(t_3) \rangle = 0$. Usando la ecuación (4.34) obtenemos que $\kappa'(t_3) = 0$ lo que contradice el hecho de que κ' solo se anula en 0.

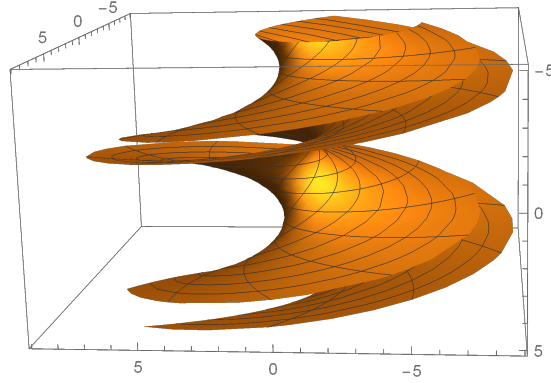


Figura 4.4: Superficie mínima verticalmente invariante de tipo II en $\tilde{E}(2)$ generada a través de $\Phi(t, s) = \phi_s(\gamma(t))$, con $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$, donde x, y son soluciones del sistema (4.30) con condiciones iniciales $x(0) = 1, y(0) = 0, \theta(0) = 1$.

Aún debemos probar que los puntos de autointersección de γ están sobre el eje real y que ocurren para valores opuestos del parámetro de γ . Si $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ pero $t_1 \neq t_2$, entonces t_1, t_2 no pueden tener el mismo signo (porque la aplicación $t \mapsto |\gamma(t)|$ es inyectiva en $(0, \infty)$ y en $(-\infty, 0)$), por lo tanto podemos suponer $t_1 < 0 < t_2$. Como $|\gamma(t_1)| = |\gamma(t_2)| = |\gamma(-t_2)|$ (porque $|\gamma|$ es par) entonces $t_1 = -t_2$, y por tanto $y(t_2) = y(t_1) = y(-t_2) = -y(t_2)$ lo que implica $y(t_2) = 0$. \square

4.5.3. Superficies mínimas verticalmente invariantes en $\tilde{E}(2)$ con una métrica no llana

Consideramos $\tilde{E}(2)$ con la métrica que lo hace isométrico e isomorfo a $\mathbb{R}^2 \rtimes_{A(c)} \mathbb{R}$ con

$$A(c) = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1/c & 0 \end{pmatrix}$$

siendo $c \in (1, \infty)$. Si imponemos $H = 0$ en la ecuación (4.20) obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = \cos \theta, \\ y' = \sin \theta, \\ \theta' = \frac{[1+c^2+(1-c^2)\cos(2\theta)](x \sin \theta - c^2 y \cos \theta)}{2(c^2+x^2+c^4y^2)}. \end{cases} \quad (4.35)$$

Proposición 4.8. *Si γ verifica (4.35) entonces el intervalo maximal de definición de γ es \mathbb{R} .*

Demostración: La función $a \in [-1, 1] \mapsto \frac{1}{2}[1 + c^2 + (1 - c^2)a]$ es no creciente porque $c \geq 1$, por tanto su máximo es $\frac{1}{2}[1 + c^2 - (1 - c^2)] = c^2$. Además, usando la desigualdad de Schwarz,

$$\left| \frac{x \sin \theta - c^2 y \cos \theta}{c^2 + x^2 + c^4 y^2} \right| \leq \frac{\sqrt{x^2 + c^4 y^2}}{c^2 + x^2 + c^4 y^2} \leq \frac{1}{2c}. \quad (4.36)$$

Esto prueba que la derivada de $\theta(t)$ está acotada. De nuevo, (4.35) se puede ver como una EDO de la forma $X' = F(t, X)$, donde F está acotada y el resultado se sigue el Teorema de Picard-Lindelöf. \square

Vemos (4.35) como una EDO de la forma $X' = F(t, X, c)$ para todo $c \in [1, \infty)$. Para cada $c \in [1, \infty)$ el intervalo maximal de definición de la solución γ_c de (4.35) (una vez que hemos fijado las condiciones iniciales) es \mathbb{R} , y la aplicación $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(t, X, c) \mapsto F(t, X, c)$ es localmente Lipschitz (de hecho es diferenciable). Por tanto, podemos usar la dependencia continua en el parámetro c para concluir que, una vez que hemos fijado las condiciones iniciales, para cada $\varepsilon > 0$ y para cada intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que, si $1 \leq c < 1 + \delta$, entonces $|\gamma(t) - \gamma_c(t)| < \varepsilon$ para cada $t \in I$, donde γ es la solución de (4.35) con $c = 1$ la cual hemos descrito en las Subsecciones 4.5.1 y 4.5.2.

El siguiente resultado describe otras propiedades de la curva generatriz γ cuando el espacio ambiente es $\tilde{E}(2)$ con una métrica no llana.

Proposición 4.9. *1. Si $c > 1$, entonces el eje x y el eje y son las únicas soluciones de (4.35) con θ constante.*

2. La curvatura $\kappa = \theta'$ de γ tiende a 0 cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Además $|\kappa(t)| \leq c/2$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

3. Si definimos $\hat{\theta} = \arctan(c \tan \theta)$ (para $c = 1$, $(\hat{\theta})'$ es la curvatura de γ). Entonces

$$(\hat{\theta})' = c \frac{xy' - c^2 yx'}{c^2 + x^2 + c^4 y^2}.$$

Demostración: Para probar el apartado 1, notemos que al resolver la ecuación $1 + c^2 + (1 - c^2)C = 0$ obtenemos $C = \frac{c^2+1}{c^2-1}$ que es estrictamente mayor que 1. Por tanto, el factor $1 + c^2 + (1 - c^2)\cos(2\theta)$ no se puede anular. Concluimos que una solución de (4.35) con $\theta = \theta_0 \in \mathbb{R}$ constante debe verificar

$$x \sin \theta_0 - c^2 y \cos \theta_0 \equiv 0,$$

lo que significa que la curva generatriz γ está contenida en una línea recta que pasa por el origen. Escribimos γ como $\gamma(t) = tv$, donde $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{S}^1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y por tanto tenemos $tv_1 \sin \theta_0 - c^2 tv_2 \cos \theta_0 = t(-1 + c^2)v_1 v_2 = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como estamos asumiendo que $c > 1$, tenemos $v_1 v_2 = 0$, de donde se deduce la primera afirmación.

Para la segunda afirmación, la cota $|\kappa(t)| \leq c/2, \forall t \in \mathbb{R}$ se tiene por la demostración de la Proposición 4.8. Para ver que $\kappa = \theta'$ tiende a 0 cuando $t \rightarrow \pm\infty$, no podemos usar aquí la misma prueba del Teorema 4.8. Sin embargo, los planos verticales son también superficies mínimas en $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, para cualquier $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (ver la Observación 2.10 en [64]). Supongamos que γ está acotada, entonces la superficie $\Sigma_\gamma \subset \tilde{E}(2)$ generada por γ a partir de (4.1) estaría dentro de un cilindro vertical recto $\mathbb{D}(R) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3, R > 0$. Podemos tomar un plano vertical Π que sea disjunto de Σ_γ y moverlo por traslaciones a izquierda hasta encontrar un primer punto de contacto (llamaremos Π' a este nuevo plano vertical). Si el primer punto de contacto entre Π' y Σ_γ ocurre en infinito entonces también existe un punto de contacto finito, ya que la traslación vertical de un punto $(x, y, z) \in \tilde{E}(2)$ describe una hélice $s \mapsto (x \cos s - cy \sin s, \frac{x \sin s}{c} + y \cos s, z + s)$ y, por tanto, la superficie Σ_γ es periódica en la dirección del eje vertical, lo que implica que existen infinitos primeros puntos de contacto que no ocurren en infinito. En consecuencia, podemos aplicar el principio del máximo clásico para obtener una contradicción de la cual deducimos que $|\gamma(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Usando (4.36) tenemos

$$\kappa \leq c^2 F \left(\sqrt{x^2 + c^4 y^2} \right),$$

donde $F(b) = \frac{b}{c^2 + b^2}$. Como $\sqrt{x^2 + c^4 y^2} \rightarrow \infty$ si $|\gamma| \rightarrow \infty$ y $F(b)$ tiende a 0 cuando $b \rightarrow \infty$, tenemos que $\kappa(t) \rightarrow 0$ si $|t| \rightarrow \infty$.

La tercera afirmación es una consecuencia directa de aplicar la definición $\hat{\theta} = \arctan(c \tan \theta)$ junto con la tercera ecuación en (4.35). \square

4.6. Superficies con curvatura de Gauss cero

Supondremos de nuevo que $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie métrico unimodular. Como en la Sección 4.2 hemos calculado los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de Σ_γ , es natural calcular también la curvatura de Gauss de una superficie Σ_γ generada por la ecuación (4.1) y estudiar las superficies verticalmente invariantes en $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ con curvatura de Gauss constante o nula.

En la literatura, las superficies invariantes por grupos uniparamétricos de isometrías con curvatura de Gauss cero dentro de grupos de Lie métricos que se pueden escribir como un producto semidirecto han sido estudiadas en los siguientes espacios ambiente:

1. En \mathbb{R}^3 , Hartman y Nirenberg probaron que (Teorema III en [37]) todas las superficies completas con curvatura de Gauss cero vienen dadas por cilindros rectos sobre curvas en $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ (no necesariamente compactas), lo cual describe a todos los posibles ejemplos.
2. Las superficies invariantes con curvatura de Gauss extrínseca constante en Nil_3 fueron estudiadas por Belarbi en [9], donde considera todas los posibles subgrupos uniparamétricos de traslaciones a izquierda.
3. Las superficies invariantes bajo cualquier subgrupo uniparamétrico con curvatura de Gauss intrínseca o extrínseca constante en Sol_3 con su métrica estándar $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ fueron estudiadas por López [56] y López-Munteanu [57].

Cuando consideramos $\tilde{E}(2)$ con su métrica (llana) estándar, sabemos, por el Teorema III en [37] que, salvo por los cilindros sobre una circunferencia centrada en el origen, no existen otras superficies completas, con curvatura de Gauss cero que sean invariantes por traslaciones verticales en $\tilde{E}(2)$, puesto que dichas traslaciones verticales no producen cilindros rectos salvo para el caso en que la curva base es una circunferencia centrada en el origen. A pesar de todo, podemos dar una descripción completa, usando una curva generatriz plana γ , de todas las superficies verticalmente invariantes en $\tilde{E}(2)$ con curvatura de Gauss cero. Nuevamente, estas superficies son superficies llanas en \mathbb{R}^3 invariantes por movimientos helicoidales estudiadas desde otros puntos de vista, por ejemplo, en [5]. Ninguna de estas superficies puede ser completa salvo los cilindros ya mencionados.

Usando las expresiones para la primera y segunda forma fundamental de la Sección 4.2, y la misma notación de las secciones precedentes, como la curvatura de Gauss K de Σ_γ se puede calcular como

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

obtenemos el siguiente sistema de EDO para una curva $\gamma = (x, y, 0)$ que genera, a través de traslaciones verticales, una superficie con curvatura de Gauss constante $K \in \mathbb{R}$ en $\tilde{E}(2)$ con su métrica estándar:

$$\begin{cases} x' = \cos \theta, \\ y' = \sin \theta, \\ K = -\frac{1+(y \cos \theta - x \sin \theta)\theta'}{(1+(x \cos \theta + y \sin \theta))^2}. \end{cases} \quad (4.37)$$

Si imponemos $K = 0$, dicho sistema se escribe como:

$$\begin{cases} x' = \cos \theta, \\ y' = \sin \theta, \\ (y \cos \theta - x \sin \theta)\theta' = -1. \end{cases} \quad (4.38)$$

Como en la Sección 4.4, podemos dar una primera integral para el sistema (4.38):

$$J = x(t) \cos \theta(t) + y(t) \sin \theta(t),$$

que es constante para cada solución de (4.38). J se puede escribir como

$$J = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x(t)^2 + y(t)^2).$$

Integrando y asumiendo $x(0) = x_0, y(0) = y_0, \theta(0) = \theta_0, x_0, y_0, \theta_0 \in \mathbb{R}$ obtenemos que, para cualquier t en el intervalo maximal I de definición de γ tenemos

$$|\gamma(t)|^2 = x(t)^2 + y(t)^2 = at + x_0^2 + y_0^2, \quad \forall t \in I, \quad (4.39)$$

donde $a := 2J = 2(x_0 \cos \theta_0 + y_0 \sin \theta_0) \in \mathbb{R}$. Sabemos que si $a \neq 0$, no hay soluciones de (4.38) definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. (4.39) implica que I está contenido en $[-(x_0^2 + y_0^2)/a, \infty)$ si $a > 0$ o en $(-\infty, -(x_0^2 + y_0^2)/a]$ si $a < 0$. Ahora escribimos γ en coordenadas polares:

$$x(t) = r(t) \cos \alpha(t), \quad y(t) = r(t) \sin \alpha(t). \quad (4.40)$$

Por (4.39) se tiene que

$$r(t) = \sqrt{at + x_0^2 + y_0^2}, \quad t \in I. \quad (4.41)$$

Como

$$\begin{aligned}x' &= r' \cos \alpha - r \alpha' \sin \alpha, \\y' &= r' \sin \alpha + r \alpha' \cos \alpha,\end{aligned}$$

la ecuación $1 = (x')^2 + (y')^2$ se transforma en

$$1 = (r')^2 + r^2(\alpha')^2,$$

lo que implica

$$\alpha'(t) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-a^2 + 4at + 4(x_0^2 + y_0^2)}}{|at + x_0^2 + y_0^2|}, \quad t \in I. \quad (4.42)$$

Deducimos que el intervalo maximal de definición de α' es

$$\begin{cases} I_1 := [a/4 - (x_0^2 + y_0^2)/a, \infty) & \text{si } a > 0 \\ I_2 := (-\infty, a/4 - (x_0^2 + y_0^2)/a] & \text{si } a < 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Como $I_1 \subset [-(x_0^2 + y_0^2)/a, \infty)$ cuando $a > 0$ (resp. $I_2 \subset (-\infty, -(x_0^2 + y_0^2)/a]$) entonces $I = I_1$ si $a > 0$, $I = I_2$ si $a < 0$, o $I = \mathbb{R}$ si $a = 0$.

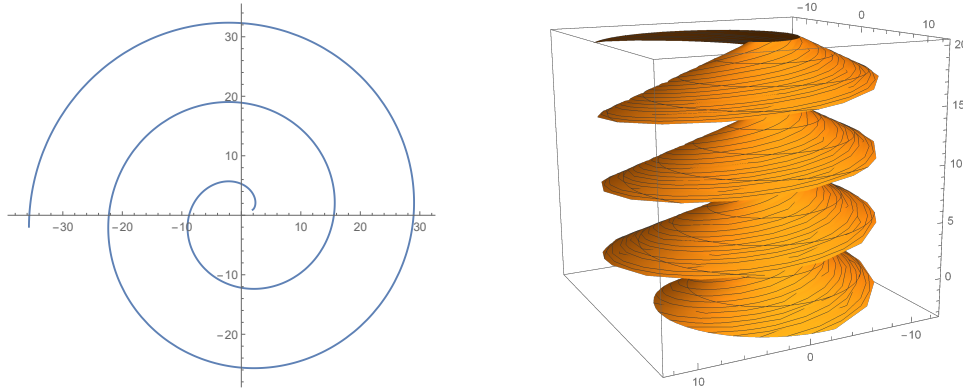


Figura 4.5: Izquierda: solución γ de (4.38) con condiciones iniciales $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ($a > 0$). Derecha: superficie de curvatura de Gauss cero que se genera a través de (4.1).

Definimos

$$g(t) = \sqrt{-a^2 + 4at + 4(x_0^2 + y_0^2)}, \quad t \in I,$$

para simplificar la notación de la expresión para α que se obtiene al integrar (4.42). Esto describe las superficies invariantes en $\tilde{E}(2)$ con curvatura de Gauss cero:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\sqrt{-a^2 + 4a\tau + 4(x_0^2 + y_0^2)}}{|a\tau + x_0^2 + y_0^2|} d\tau \\ &= \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \frac{\operatorname{sgn}(a\tau + x_0^2 + y_0^2)}{2a} \left(g(\tau) - a \operatorname{arccot}\left(\frac{a}{g(\tau)}\right) \right) \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

En conclusión, hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 4.10. *Sea $\Sigma_\gamma \subset \tilde{E}(2)$ una superficie verticalmente invariante con curvatura de Gauss cero, entonces, o bien Σ_γ es un cilindro vertical recto sobre una circunferencia en el plano $\{z = 0\}$ centrada en el origen, o bien la curva generatriz γ de Σ_γ viene dada en coordenadas polares (4.40) por (4.41) y (4.43). En el segundo caso, Σ no es completa.*

Bibliografía

- [1] Elsa Abbena, Simon Salamon y Alfred Gray. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. CRC press, 2017.
- [2] Uwe Abresch y Harold Rosenberg. “A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ”. *Acta Mathematica* 193 (2004), págs. 141-174.
- [3] Uwe Abresch y Harold Rosenberg. “Generalized Hopf differentials”. *Mat. Contemp* 28.1 (2005), págs. 1-28.
- [4] Stephanie Alexander. *Michael Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry*. 1978.
- [5] Christos Baikoussis y Themis Koufogiorgos. “Helicoidal surfaces with prescribed mean or Gaussian curvature”. *Journal of Geometry* 63.1-2 (1998), págs. 25-29.
- [6] Ezequiel Barbosa y José M Espinar. “On free boundary minimal hypersurfaces in the Riemannian Schwarzschild space”. *The Journal of Geometric Analysis* 31.12 (2021), págs. 12548-12567.
- [7] Ezequiel Barbosa y David Moya. “Proper free-boundary minimal hypersurfaces with a rotational symmetry in the Schwarzschild space”. *arXiv preprint arXiv:2108.00693* (2021).

-
- [8] Joao Lucas Barbosa y Manfredo do Carmo. “On the size of a stable minimal surface in \mathbb{R}^3 ”. *American Journal of Mathematics* 98.2 (1976), pág. 515.
- [9] Lakehal Belarbi. “Surfaces with constant extrinsically Gaussian curvature in the Heisenberg group”. *Annales Mathematicae et Informaticae*. Vol. 50. Eszterházy Károly Egyetem Líceum Kiadó. 2019, págs. 5-17.
- [10] Jesse Bernstein. “Sur un théoreme de géométrie et son application aux equations aux dérivées partielles du type elliptique”. *Communications de la Société mathématique de Kharkow* 15 (1915-1917), págs. 38-45.
- [11] Alessandro Carlotto. “Rigidity of stable minimal hypersurfaces in asymptotically flat spaces”. *Calculus of variations and partial differential equations* 55.3 (2016), pág. 54.
- [12] Alessandro Carlotto, Giada Franz y Mario B Schulz. “Free boundary minimal surfaces with connected boundary and arbitrary genus”. *Cambridge Journal of Mathematics* 10.4 (2022), págs. 835-857.
- [13] Alessandro Carlotto y Andrea Mondino. “A non-existence result for minimal catenoids in asymptotically flat spaces”. *Journal of the London Mathematical Society* 95.2 (2017), págs. 373-392.
- [14] Eugène Catalan. “Sur les surface réglées dont l’aire est un minimum”. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 7 (1842), págs. 203-211.
- [15] Shing-Shen Chern. “An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface”. *Proceedings of the American Mathematical Society* 6.5 (1955), págs. 771-782.
- [16] Otis Chodosh y Daniel Ketover. “Asymptotically flat three-manifolds contain minimal planes”. *Adv. in Mathematics* 337 (2018), págs. 171-192.
- [17] Otis Chodosh y Davi Maximo. “On the topology and index of minimal surfaces”. *Journal of Differential Geometry* 104.3 (2016), págs. 399-418.
- [18] Jaigyoung Choe. “Index, vision number and stability of complete minimal surfaces”. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 109 (1990), págs. 195-212.

-
- [19] Tobias H Colding y William P Minicozzi. “The Calabi-Yau conjectures for embedded surfaces”. *Annals of mathematics* (2008), págs. 211-243.
- [20] Celso J Costa. “Example of a complete minimal immersion in \mathbb{R}^3 of genus one and three-embedded ends”. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society* 15 (1984), págs. 47-54.
- [21] R Courant. “The existence of minimal surfaces of given topological structure under prescribed boundary conditions”. *Acta Mathematica* 72.1 (1940), págs. 51-98.
- [22] Benoît Daniel. “Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds”. *Commentarii mathematici helvetici* 82.1 (2007), págs. 87-131.
- [23] Benoît Daniel. “The Gauss map of minimal surfaces in the Heisenberg group”. *Int. Mathematics Research Notices* 2011.3 (2011), págs. 674-695.
- [24] Benoît Daniel, Laurent Hauswirth y Pablo Mira. “Constant mean curvature surfaces in homogeneous manifolds”. *Korea Institute for Advanced Study, Seoul, Korea. Lectures Notes of the 4th KIAS Workshop on Differential Geometry* (2009).
- [25] Manfredo do Carmo y Chia-Kuei Peng. “Stable complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 are planes”. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 1 (1979). MR0546314, Zbl 442.53013, págs. 903-906.
- [26] Jesse Douglas. “Solution of the problem of Plateau”. *Transactions of the American Mathematical Society* 33.1 (1931), págs. 263-321.
- [27] Alfred Enneper. “Analytisch-geometrische Untersuchungen.” *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* 1868 (1868), págs. 421-443.
- [28] Isabel Fernández, Laurent Hauswirth y Pablo Mira. “Free boundary minimal annuli immersed in the unit ball”. *arXiv preprint arXiv:2208.14998* (2022).
- [29] Isabel Fernández y Pablo Mira. “Holomorphic quadratic differentials and the Bernstein problem in Heisenberg space”. *Transactions of the American Mathematical Society* 361.11 (2009), págs. 5737-5752.

-
- [30] Christiam B Figuroa, Francesco Mercuri y Renato HL Pedrosa. “Invariant surfaces of the Heisenberg groups”. *Annali di Matematica pura ed applicata* 177.1 (1999), págs. 173-194.
- [31] Doris Fischer-Colbrie y Richard Schoen. “The Structure of Complete Stable Minimal Surfaces in 3-Manifolds of nonnegative Scalar Curvature”. *Comm. on Pure and Appl. Math.* 33 (1980). MR0562550, Zbl 439.53060, págs. 199-211.
- [32] Giada Franz. “Contributions to the theory of free boundary minimal surfaces”. *arXiv preprint arXiv:2208.12188* (2022).
- [33] Ailana Fraser y Richard Schoen. “Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball”. *Inventiones mathematicae* 203.3 (2016), págs. 823-890.
- [34] Hirotaka Fujimoto. “On the number of exceptional values of the Gauss maps of minimal surfaces”. *Journal of the Mathematical Society of Japan* 40.2 (1988), págs. 235-247.
- [35] David Gilbarg, Neil S Trudinger, David Gilbarg y NS Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Vol. 224. 2. Springer, 1977.
- [36] Lu Han y Shunai Che. “An overview of materials with triply periodic minimal surfaces and related geometry: from biological structures to self-assembled systems”. *Advanced Materials* 30.17 (2018), pág. 1705708.
- [37] Philip Hartman y Louis Nirenberg. “On spherical image maps whose Jacobians do not change sign”. *American Journal of Mathematics* 81.4 (1959), págs. 901-920.
- [38] Lebrecht Henneberg. “Über solche Minimalfläche, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben”. Tesis Doctoral, Eidgenössisches Polytechnikum, Zurich, 1875.
- [39] David Hoffman y Hermann Karcher. *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*. Springer, 1997.
- [40] David A Hoffman y William H Meeks III. “A complete embedded minimal surface in \mathbb{R}^3 with genus one and three ends”. *Journal of differential geometry* 21.1 (1985), págs. 109-127.

-
- [41] David A Hoffman y William H Meeks III. “Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature”. *Bulletin of the American Mathematical Society* 12.1 (1985), págs. 134-136.
- [42] Han Hong y Artur B Saturnino. “Capillary surfaces: stability, index and curvature estimates”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 0 (2023).
- [43] Heinz Hopf. *Differential geometry in the large: seminar lectures New York University 1946 and Stanford University 1956*. Vol. 1000. Springer, 2003.
- [44] Alfred Huber. “On subharmonic functions and differential geometry in the large”. *Commentarii Mathematici Helvetici* 32.1 (1958), págs. 13-72.
- [45] Jun-ichi Inoguchi, Rafael López y Marian-Ioan Munteanu. “Minimal translation surfaces in the Heisenberg group Nil_3 ”. *Geometriae Dedicata* 161 (2012), págs. 221-231.
- [46] Luquésio P Jorge y William H Meeks III. “The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature”. *Topology* 22.2 (1983), págs. 203-221.
- [47] Nikolaos Kapouleas y Martin Man-chun Li. “Free boundary minimal surfaces in the unit three-ball via desingularization of the critical catenoid and the equatorial disc”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2021.776 (2021), págs. 201-254.
- [48] Mikhail Karpukhin. “On the Yang–Yau inequality for the first Laplace eigenvalue”. *Geometric and Functional An.* 29.6 (2019), págs. 1864-1885.
- [49] Stephen Kleene y Niels Møller. “Self-shrinkers with a rotational symmetry”. *Transactions of the American Mathematical Society* 366.8 (2014), págs. 3943-3963.
- [50] Paul Koebe. “Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. II”. *Mathematische Annalen* 69.1 (1910), págs. 1-81.
- [51] Rémi Langevin y Harold Rosenberg. “A maximum principle at infinity for minimal surfaces and applications”. *Duke Math. J.* 56.1 (1988), págs. 819-828.

-
- [52] H Blaine Lawson Jr. “Complete minimal surfaces in \mathbb{S}^3 ”. *Annals of Mathematics* 92.3 (1970), págs. 335-374.
- [53] Martin Li. “Free boundary minimal surfaces in the unit ball: recent advances and open questions”. *arXiv preprint arXiv:1907.05053* (2019).
- [54] Huili Liu. “Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces”. *Journal of Geometry* 64 (1999), págs. 141-149.
- [55] Francisco J López. “The classification of complete minimal surfaces with total curvature greater than -12π ”. *Transactions of the American Mathematical Society* (1992), págs. 49-74.
- [56] Rafael López. “Invariant surfaces in Sol_3 with constant mean curvature and their computer graphics”. *Advances in Geometry* 14.1 (2014), págs. 31-48.
- [57] Rafael López y Marian Ioan Munteanu. “Invariant surfaces in the homogeneous space Sol_3 with constant curvature”. *Mathematische Nachrichten* 287.8-9 (2014), págs. 1013-1024.
- [58] José Miguel Manzano. *Superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, 2013.
- [59] Laurent Mazet. “A general halfspace theorem for constant mean curvature surfaces”. *American Journal of Mathematics* 135.3 (2013), págs. 801-834.
- [60] William H Meeks, Pablo Mira, Joaquín Pérez y Antonio Ros. “Constant mean curvature spheres in homogeneous three-manifolds”. *Inventiones mathematicae* 224.1 (2021), págs. 147-244.
- [61] William H Meeks III. “The classification of complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 with total curvature greater than -8π ”. *Duke Math. J.* 48.1 (1981), págs. 523-535.
- [62] William H Meeks III, Pablo Mira y Joaquín Pérez. “The geometry of stable minimal surfaces in metric Lie groups”. *Transactions of the American Mathematical Society* 372.2 (2019), págs. 1023-1056.

-
- [63] William H Meeks III, Pablo Mira, Joaquín Pérez y Antonio Ros. “Constant mean curvature spheres in homogeneous three-spheres”. *Journal of Differential Geometry* 120.2 (2022), págs. 307-343.
- [64] William H Meeks III y Joaquín Pérez. “Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups”. *Geometric Analysis* 570 (2012), págs. 25-110.
- [65] William H Meeks III y Joaquín Pérez. “Geometry of branched minimal surfaces of finite index”. *arXiv preprint arXiv:2211.03529* (2022).
- [66] William H Meeks III y Joaquín Pérez. “Hierarchy structures in finite index CMC surfaces”. *Advances in Calculus of Variations* 0 (2023).
- [67] William H Meeks III y Harold Rosenberg. “The maximum principle at infinity for minimal surfaces in flat three manifolds”. *Commentarii Mathematici Helvetici* 65.1 (1990), págs. 255-270.
- [68] William H Meeks III y Harold Rosenberg. “The uniqueness of the helicoid”. *Annals of mathematics* (2005), págs. 727-758.
- [69] Mario Micalef y Brian White. “The structure of branch points in minimal surfaces and in pseudoholomorphic curves”. *Ann. of Math.* 141.1 (1995). MR1314031, Zbl 0873.53038, págs. 35-85.
- [70] John Milnor. “Curvatures of left invariant metrics on lie groups”. *Advances in Mathematics* 21.3 (1976), págs. 293-329.
- [71] Stefano Montaldo e Irene I Onnis. “Invariant CMC surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ”. *Glasgow Mathematical Journal* 46.2 (2004), pág. 311.
- [72] Rafael Montezuma. “On free-boundary minimal surfaces in the Riemannian Schwarzschild manifold”. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series* 52.4 (2021), págs. 1055-1071.
- [73] David Moya. “Vertically invariant minimal surfaces in unimodular semidirect products”. *arXiv preprint arXiv:2307.14716* (2023).
- [74] David Moya y Joaquín Pérez. “Generalized Henneberg stable minimal surfaces”. *Results in Mathematics* 78.2 (2023), pág. 53.

-
- [75] Johannes C Nitsche. *Lectures on minimal surfaces: vol. 1*. Cambridge university press, 1989.
- [76] Boris Odehnal. “On algebraic minimal surfaces”. *KoG* 20 (2016), págs. 61-78.
- [77] Robert Osserman. *A survey of minimal surfaces*. Courier Corporation, 2013.
- [78] Robert Osserman. “Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n ”. *Annals of Mathematics* (1964), págs. 340-364.
- [79] Aleksei V Pogorelov. “On the stability of minimal surfaces”. *Soviet Math. Dokl.* 24 (1981). MR0630142, Zbl 0495.53005, págs. 274-276.
- [80] H Poincaré. “Sur l’uniformisation des fonctions analytiques”. *Acta Mathematica* 31 (1908), págs. 1-63.
- [81] Tibor Radó. “On Plateau’s problem”. *Annals of Mathematics* (1930), págs. 457-469.
- [82] Antonio Ros. “One-sided complete stable minimal surfaces”. *J. Differential Geom.* 74 (2006). MR2260928, Zbl 1110.53009, págs. 69-92.
- [83] Marty Ross. “Complete nonorientable minimal surfaces in \mathbb{R}^3 ”. *Commentarii mathematici Helvetici* 67.1 (1992), págs. 64-76.
- [84] HF Scherk. “Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 14 (1835), págs. 185-208.
- [85] Richard Schoen y Shing-Tung Yau. “Positive scalar curvature and minimal hypersurface singularities”. *Surveys in Differential Geometry* (2021), págs. 441-480.
- [86] Richard Schoen y Shing-Tung Yau. “Proof of the positive mass theorem. II”. *Communications in Mathematical Physics* 79 (1981), págs. 231-260.
- [87] Richard Schoen y Shing-Tung Yau. “Proof of the positive mass theorem. II”. *Communications in Mathematical Physics* 79 (1981), págs. 231-260.

-
- [88] Richard M Schoen. “Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces”. *Journal of Differential Geometry* 18.4 (1983), págs. 791-809.
- [89] Hermann Amandus Schwarz. *Gesammelte mathematische abhandlungen*. Vol. 260. American Mathematical Soc., 1972.
- [90] Karl Schwarzschild. “Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie”. *Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften* (1916), págs. 189-196.
- [91] Kaori Segawa. “Morse Indices of Generalized Henneberg’s Surfaces”. *Mathematical Journal of Okayama University* 37.1 (1995), págs. 201-204.
- [92] Francisco Torralbo. “Rotationally invariant constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds”. *Differential Geometry and its Applications* 28.5 (2010), págs. 593-607.
- [93] Francisco Torralbo y Joeri Van der Veken. “Rotationally invariant constant Gauss curvature surfaces in Berger spheres”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 489.2 (2020), pág. 124183.
- [94] Johan Tysk. “Eigenvalue estimates with applications to minimal surfaces”. *Pacific J. of Math.* 128 (1987), págs. 361-366.
- [95] Karl Weierstrass. *Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist*. Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866.
- [96] Brian White. “Lectures on minimal surface theory”. *arXiv preprint arXiv:1308.3325* (2013).
- [97] Walter Wunderlich. “Beitrag zur kenntnis der minimalschraubflächen”. *Compositio Mathematica* 10 (1952), págs. 297-311.
- [98] Yiming Zang. “Constructions of helicoidal minimal surfaces and minimal annuli in $\widetilde{E}(2)$ ”. *Annals of Global Analysis and Geometry* 62.3 (2022), págs. 693-719.