

Ejercicios Tema 3
2021/2022
Matrices y Sistemas de Ecuaciones

Asignatura: Matemáticas. Grado: Ciencias Ambientales.

1. Sean A y B dos matrices de orden 4×5 y C, D, E matrices con órdenes 5×2 , 4×2 y 5×2 respectivamente. Determinar cuáles de las siguientes expresiones matriciales están bien definidas y, en tal caso, calcular el orden de la matriz resultante

$i) BA$, $ii) AC + D$, $iii) AE + B$, $iv) AB + B$
 $v)(A + B)E$, $vi)(AC)E$, $vii)E^t C$, $viii)(A^t + E)D$

2. Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Sin usar la fórmula, halla la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Calcula x, y, z, t para que se cumpla

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 21 \\ 69 & 59 \end{pmatrix}.$$

5. Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen:

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

6. Calcula la matriz $M = P^2 - 3P - 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Justifica que no es cierta la igualdad matricial

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

8. Calcula los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 15 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & 9 & 11 & 11 \\ 2 & 1 & 33 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

9. Teniendo en cuenta el resultado del siguiente determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcula el resto sin desarrollar:

$$a) \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

10. Calcula el rango de las siguientes matrices

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -15 & 10 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 1 & 6 & 2 & 9 \\ 1 & 8 & 1 & 11 & 6 & 17 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 10 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

11. Hallar el rango de las siguientes matrices según el valor de los parámetros:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & a \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Prueba que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

13. Hallar la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

14. Aplica el Teorema de Rouché-Frobenius para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles determinados, compatibles indeterminados o incompatibles:

$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y = 5 \\ 3y + z = 1 \end{cases} & c) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y = -1 \\ x - 4y + 3z = 2 \end{cases} \\
 b) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y = -1 \\ x - 4y + 3z = 4 \end{cases} & d) \begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = 4 \\ x - 4y + 3z = 2 \end{cases}
 \end{array}$$

15. Discutir y resolver mediante el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} & c) \begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases} \\
 b) \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases} &
 \end{array}$$

16. Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer:

$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \\ 4x - 2y + z = 3 \end{cases} & b) \begin{cases} x - y + z - 2t = 2 \\ 2x + y - z - t = 1 \\ x - 4y + 4z - 5t = 5 \\ x + 5y - 5z + 4t = -4 \end{cases}
 \end{array}$$

17. Discute según los valores del parámetro y resuelve cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases} & b) \begin{cases} 2x - my + 6z = 0 \\ x + 3y - mz = 0 \end{cases} \\
 & c) \begin{cases} x + (1 - \lambda)y = \lambda \\ (1 + \lambda)x - 3y = -\lambda \end{cases}
 \end{array}$$