

Ejercicios de Matemáticas I

Relación 1: Números complejos

1. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma $a + ib$:

a) $(7 - 2i)(5 + 3i)$

b) $(i - 1)^3$

c) $\overline{(1 + i)(2 + i)}(3 + i)$

d) $\frac{3 + i}{2 + i}$

e) $\frac{(4 - i)(1 - 3i)}{-1 + 2i}$

f) $(1 + i)^{-2}$

g) $\frac{1 + 2i}{2 - i}$

h) $i^2(1 + i)^3$

2. Calcula la parte real e imaginaria de las funciones:

a) $f_1(z) = \bar{z}^2$

b) $f_2(z) = z^3$

c) $f_3(z) = \frac{1}{z}$

d) $f_4(z) = \frac{1}{1 + z^2}$

e) $f_5(z) = \frac{z + i}{z - i}$

3. Calcula las siguientes cantidades:

a) $|(1 + i)(2 - i)|$

b) $\left| \frac{4 - 3i}{2 - i\sqrt{5}} \right|$

c) $|(1 + i)^{20}|$

d) $|\sqrt{2} + i(\sqrt{2} + 1)|$

4. Calcula los números complejos z tales que $\frac{1 + z}{1 - z}$ es:

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

5. Expresa en forma polar los siguientes números complejos:

a) $-\sqrt{3} - i$

b) $-\sqrt{3} + i$

c) $\frac{3}{\sqrt{3} + i}$

d) $\frac{1 + i\sqrt{3}}{(1 + i)^2}$

6. Expresa los siguientes números en la forma $a + ib$:

a) $(-1 + i\sqrt{3})^{11}$

b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$

c) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6$

d) $(-\sqrt{3} + i)^{13}$

7. Probar la veracidad de las siguientes afirmaciones sobre números complejos:

a) $|1 - \bar{z}w|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$

b) $||z| - |w|| = |z - w|$

c) $|z - w| \leq |1 - \bar{z}w|$

d) $|z - w| = |1 - \bar{z}w|$

Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

8. Resuélvanse las siguientes ecuaciones entre números complejos:

a) $|z| - z = 1 + 2i$

b) $|z| + z = 2 + i$

c) $\bar{z} = z^2$

d) $z^3 = 1 + i$

e) $z^4 = i$

f) $z^3 = -1 + i\sqrt{3}$

g) $z^8 = 1$

-
9. Encuentre los vértices de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en el punto $z = 0$ y uno de sus vértices z_1 es conocido.
10. Resolver la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$, donde a, b, c , son números complejos conocidos y $a \neq 0$.
11. Calcular las siguientes raíces:
- a) $\sqrt[4]{16}$
 - b) $\sqrt[6]{1+i}$
 - c) $\sqrt[3]{-27}$