

# Aplicaciones de las Matemáticas en la Síntesis de Imágenes por Ordenador

**Carlos Ureña Almagro**

**Departamento de  
Lenguajes y Sistemas Informáticos.**  
Universidad de Granada

**Curso: Matemáticas para el siglo XXI**  
**Centro Mediterráneo**  
Universidad de Granada

# Esquema de la presentación

- Informática gráfica y síntesis de imágenes
- El proceso de síntesis de imágenes, y el papel de las matemáticas.
- Modelos matemáticos de entornos virtuales
- Modelos matemáticos básicos de la radiación y su propagación
- Herramientas matemáticas básicas para el cálculo de la distribución de la radiación
  - Métodos de elementos finitos
  - Métodos estocásticos.

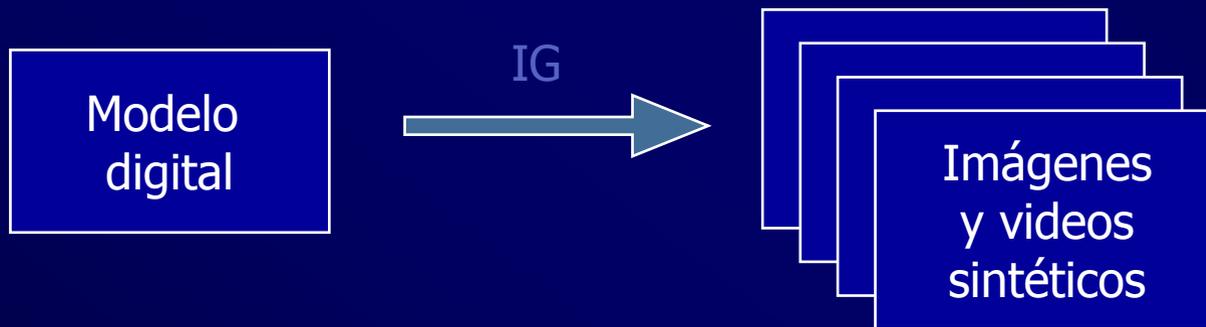
# Informática Gráfica

Es el conjunto de técnicas destinadas a la creación y manipulación, mediante ordenadores, de información digital visual (imágenes, animaciones, películas, modelos tridimensionales, etc..)

Al tratarse de un procesamiento automático de la información, es una rama de la Informática.

# Informática Gráfica

Normalmente se parte de unos determinados datos de entrada (que codifican de alguna forma lo que se quiere ver), y se producen imágenes o secuencia de imágenes como salida.



El proceso puede llevarse a cabo de forma interactiva, respondiendo a cambios en el tiempo del modelo (videojuegos, por ejemplo).

# Informática Gráfica

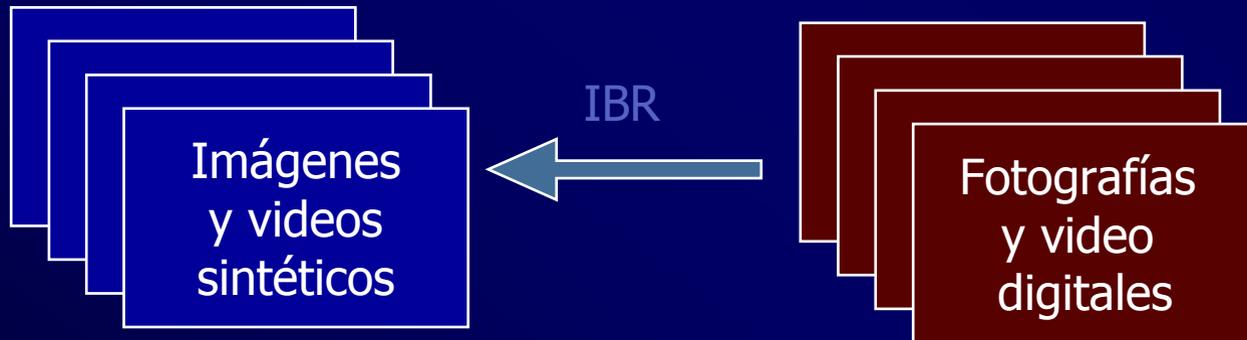
La informática gráfica también contempla:

- La obtención de los modelos digitales a partir de objetos reales (p.ej. mediante scanners 3D)
- La transformación de los modelos digitales (p.ej. compresión de modelos).



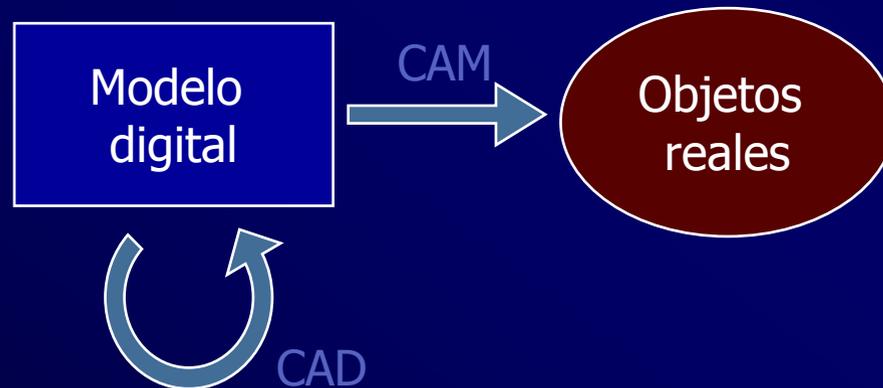
# Image Based Rendering

Dentro de la informática gráfica, el *Image Based Rendering* (IBR) permite obtener nuevas imágenes de objetos reales sin mediar un modelo digital explícito de dichos objetos:



# Diseño Asistido por Ordenador (CAD)

Es el campo que trata esencialmente de la creación y manipulación interactivos de los modelos, orientado a la fabricación automatizada (CAM) de objetos reales a partir de dichos modelos.



# Visión por Ordenador (CV)

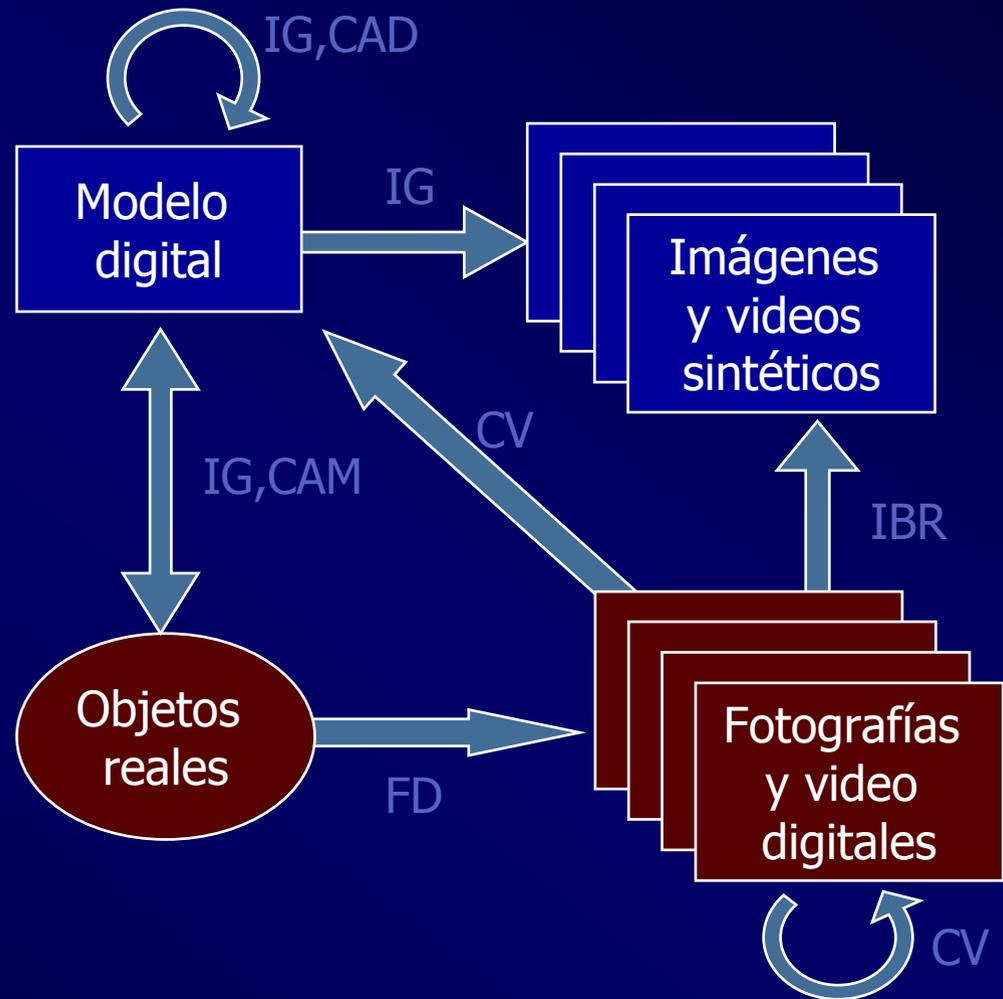
Muy relacionado con la informática gráfica. Se trata de:

- Obtención los modelos a partir de las imágenes digitales obtenidas con fotografías o vídeo (p.ej. fotogrametría)
- Tratamiento de imágenes (p.ej. compresión de imágenes)



# Computación Visual (VC)

En la actualidad las fronteras entre estos campos no están claras.



# Síntesis de Imágenes Realistas

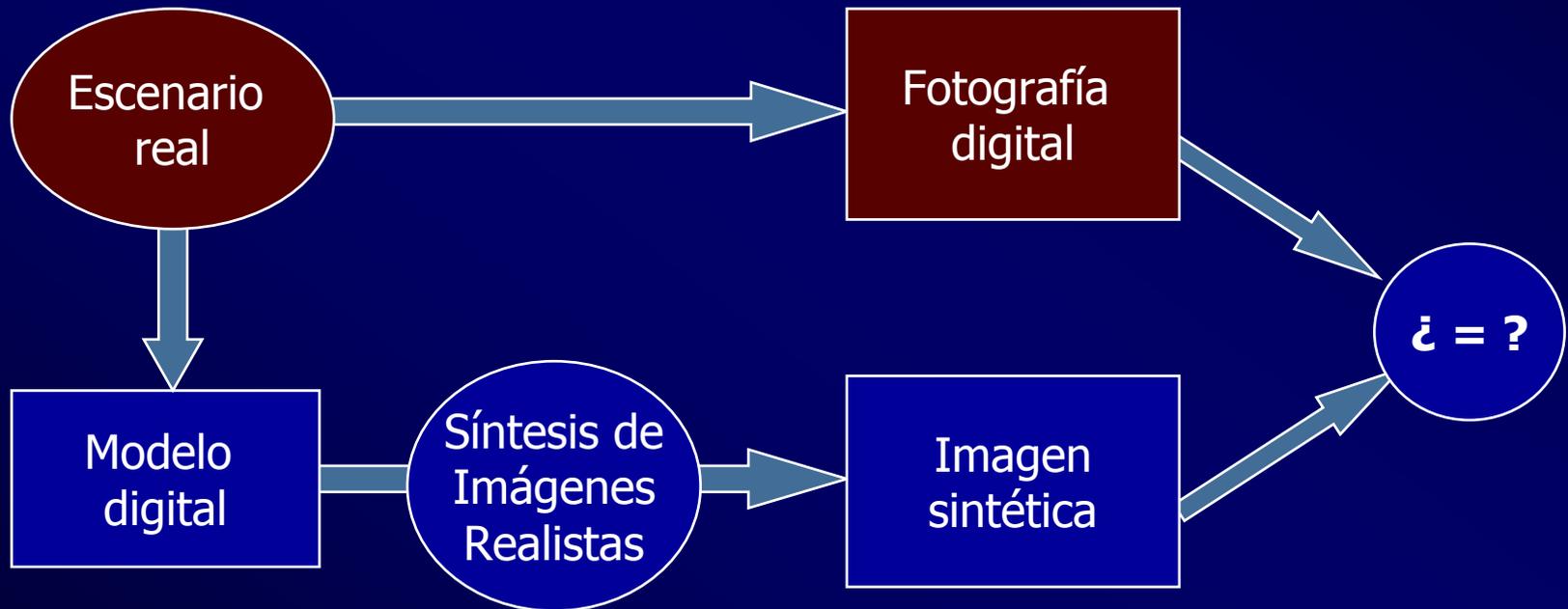
En esta charla, nos centraremos en la síntesis de imágenes realistas (SIR), el objetivo es:

*La producción (usando ordenadores) de imágenes que no se pueden distinguir de las obtenidas con fotografías.*

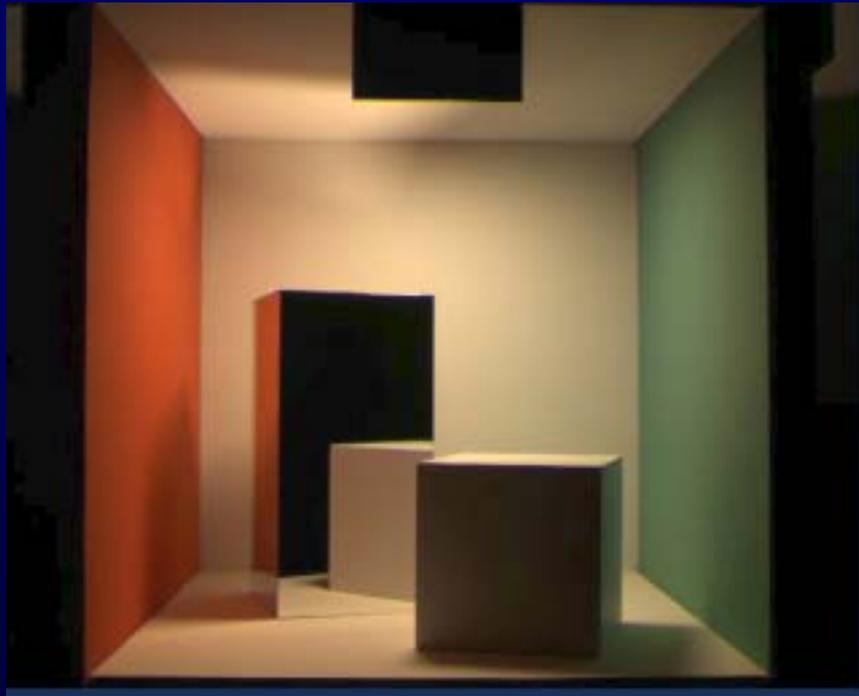
*[ Shirley, 1990 ]*

# Síntesis de Imágenes Realistas

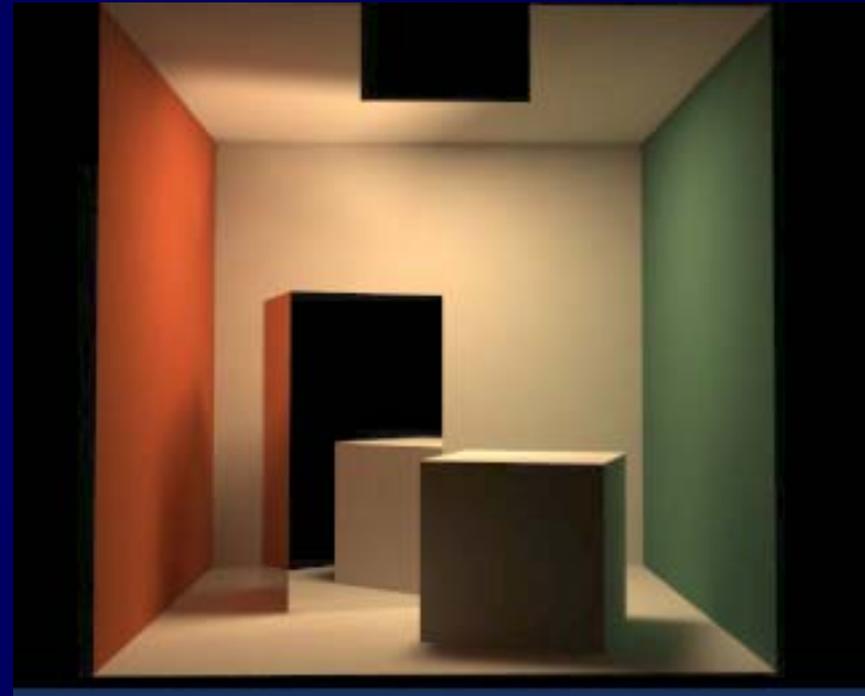
Se parte de un escenario real y se comparan fotografías del mismo con imágenes sintéticas obtenidas a partir de un modelo digital de dicho escenario.



# Ejemplo de comparación de imágenes

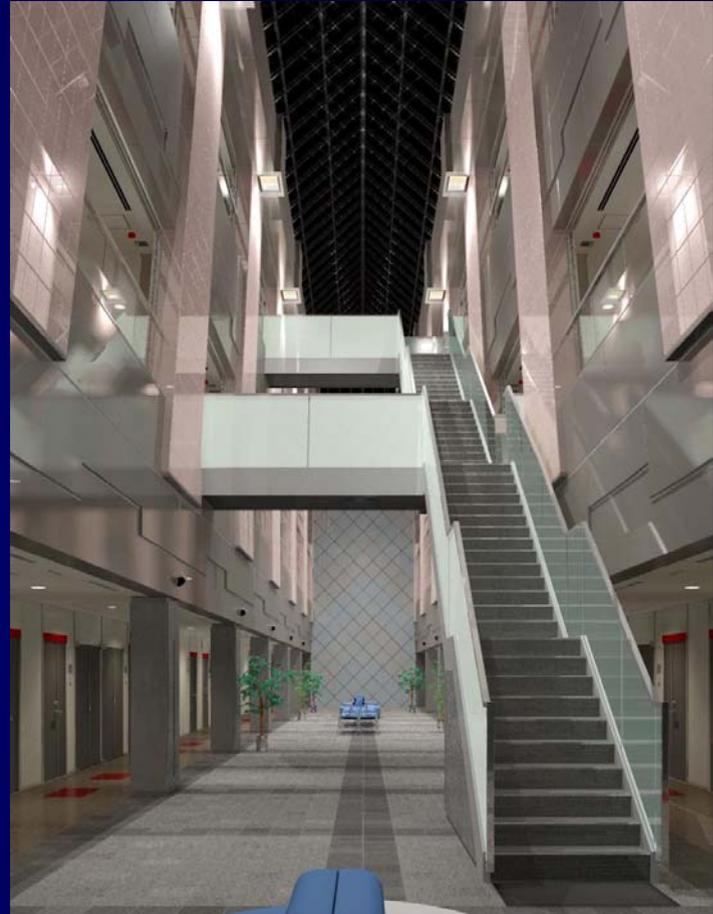


**Fotografía**



**Imagen Sintética**

## Ejemplo de comparación de imágenes (2)



Software e imágenes creadas por Frederic Drago y Karol Myszkowsky, mas información en:  
<http://www.mpi-inf.mpg.de/resources/atrium/>

# Aplicaciones

- Videojuegos
- Películas generadas por ordenador (total o parcialmente)
- Diseño de edificios
- Decoración
- Diseño de mobiliario
- Estudios de impacto en diseño de interiores y diseño ambiental
- Diseño de luminarias y predicción de sus propiedades
- Ingeniería civil: posicionamiento de luminarias
- Realismo para sistemas de realidad virtual

y muchos otros.....

# Arquitectura



image by indigooo  
rendered in Arnold

# Urbanismo



# Arqueología



# Decoración



# Publicidad



# Diseño industrial



# Videojuegos



# Videojuegos





"Finding Nemo" © Disney / Pixar



Star Wars: Episode II, Attack of the Clones © 2002 Lucasfilm Ltd & TM. All rights reserved.  
Photo Credit: Industrial Light & Magic



Inspector Gadget © 1999 Walt Disney Pictures.  
Visual Effects by Dream Quest Images.



Copyright 2000 Gilles Tran



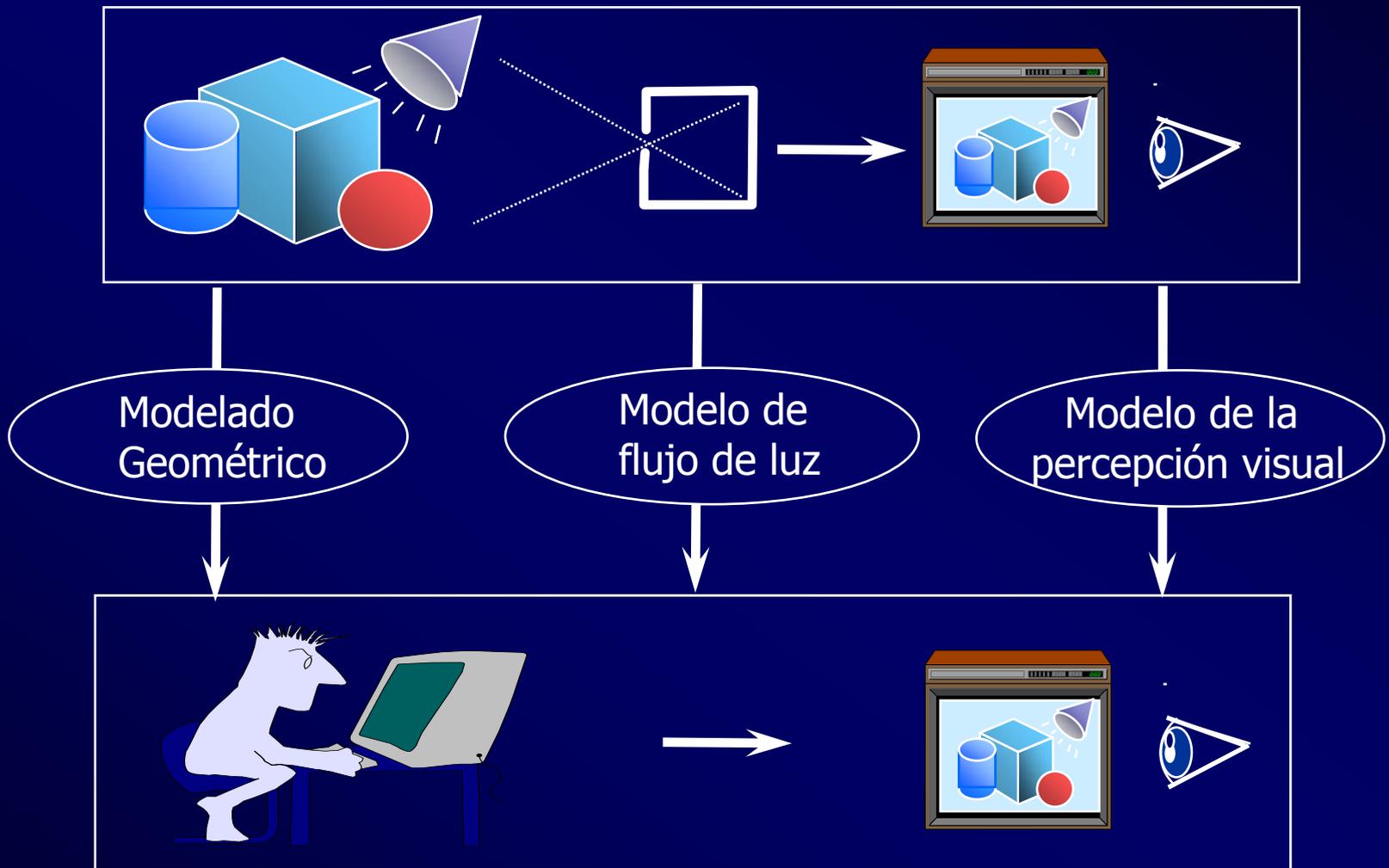
# Técnicas involucradas

Este objetivo abarca varias técnicas

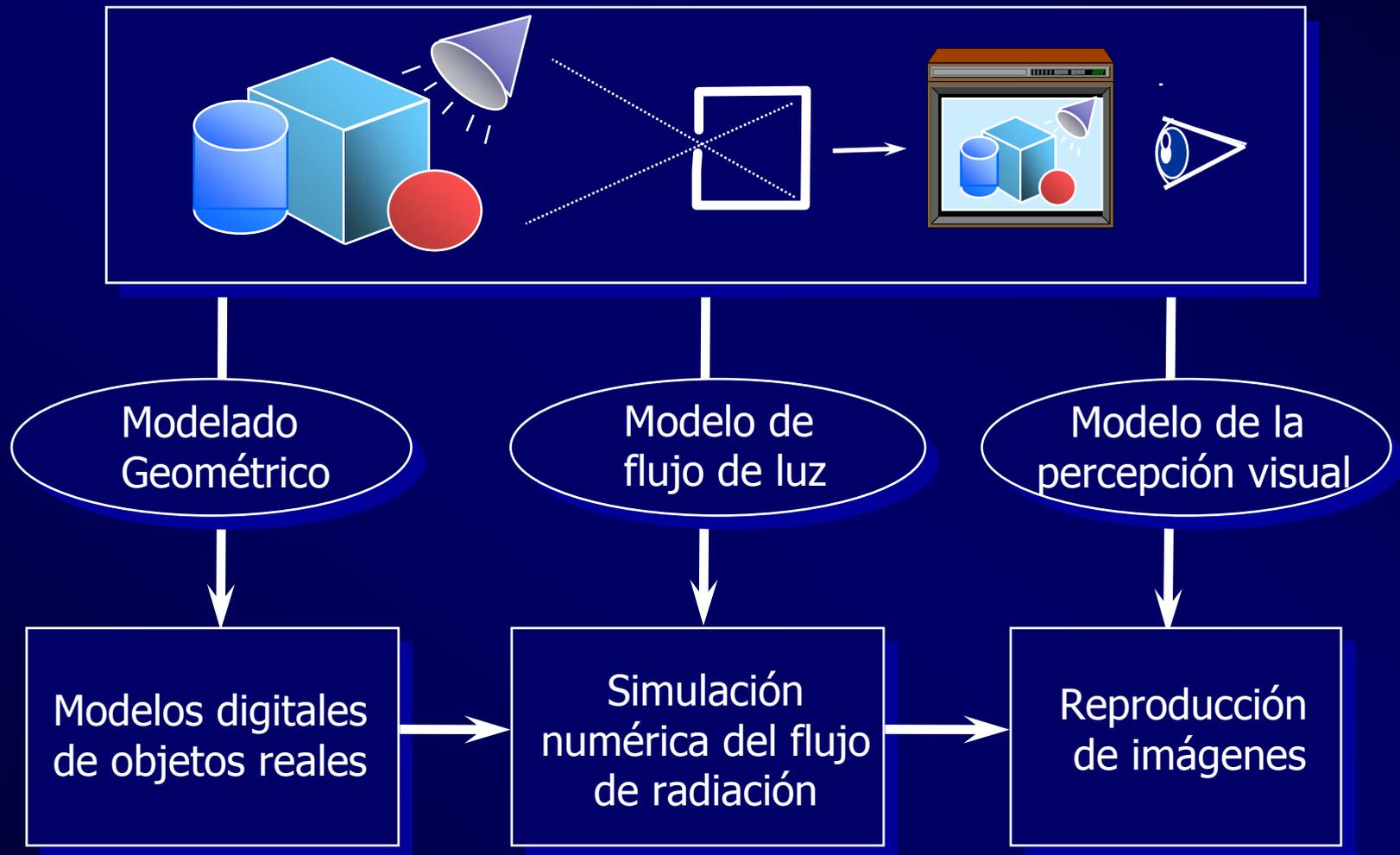
- **Informática Gráfica** (modelado geométrico, síntesis de imágenes)
- **Ingeniería del Software** (análisis y diseño orientado a objetos)
- **Física** (transporte de radiación, modelo de partículas, óptica geométrica)
- **Matemática** (ecuaciones integrales, espacios de Hilbert)
- **Métodos Numéricos** (métodos de elementos finitos y de Monte-Carlo)
- **Psicología y biología** (sistema humano de percepción visual)

[ *Glassner,1995* ]

# El proceso de creación de imágenes



# El proceso de creación de imágenes



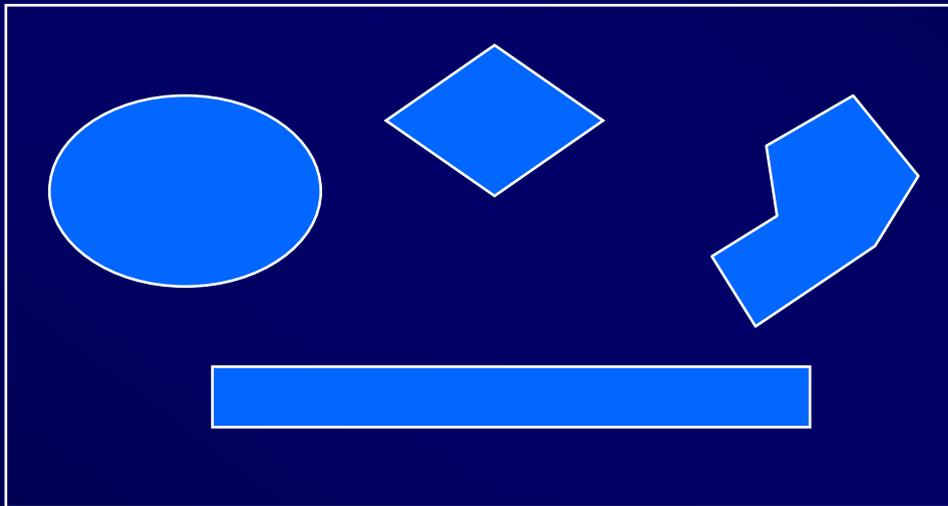
# El papel de las matemáticas en la SIR

Básicamente, las matemáticas son esenciales para:

- Definir y estudiar las propiedades formales de los modelos digitales de los escenarios y objetos a representar.
- Caracterizar formalmente las propiedades relevantes del flujo de radiación luminosa en los entornos reales.
- Escribir programas que implementen métodos de cálculo numérico que permitan conocer cuantitativamente la distribución de la radiación visible en los escenarios digitales.

# Los modelos como conjuntos de puntos

Se supone que un modelo de un escenario consiste en una serie de subconjuntos de puntos del espacio tridimensional.



A cada uno de estos conjuntos se les denomina un objeto

# Los modelos como conjuntos de puntos

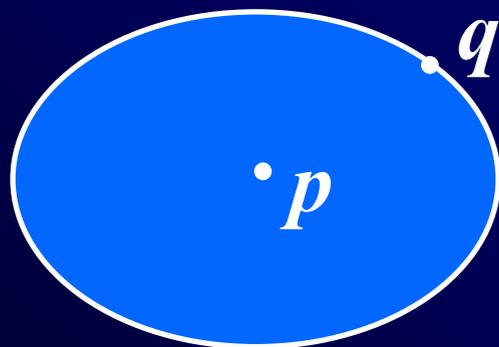
Para describir las propiedades de estos conjuntos, debemos usar conceptos de **topología matemática** y de **geometría**:

- Los conjuntos son *cerrados* (su frontera o superficie pertenece a ellos)
- Normalmente, los conjuntos están *acotados* (no tienen una extensión infinita)
- La *frontera* de cada conjunto forma una *variedad bidimensional* (localmente es una superficie plana), y por tanto:
  - Todos sus puntos tienen asociado un vector *normal* que apunta hacia el exterior de la superficie
  - Se puede hablar de *medida de área* en dicha superficie

# La ecuación implícita

Para cada conjunto de puntos  $\mathcal{S}$ , existirá una *ecuación implícita*  $F$  que los caracteriza, de forma que, si  $\mathbf{x}$  es un punto del espacio,  $F(\mathbf{x})$  es:

- Negativo si  $\mathbf{x}$  está incluido en  $\mathcal{S}$
- Cero si  $\mathbf{x}$  está en la frontera de  $\mathcal{S}$  (la superficie)
- Positivo si  $\mathbf{x}$  no está incluido en  $\mathcal{S}$



•  $r$

$$F(p) < 0$$

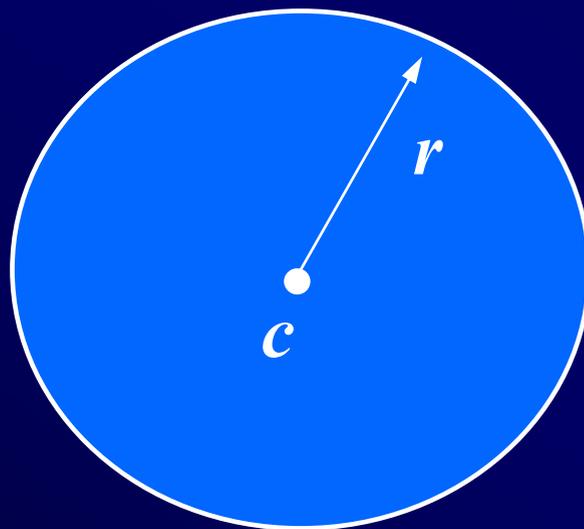
$$F(q) = 0$$

$$F(r) > 0$$

# La ecuación implícita (de una esfera)

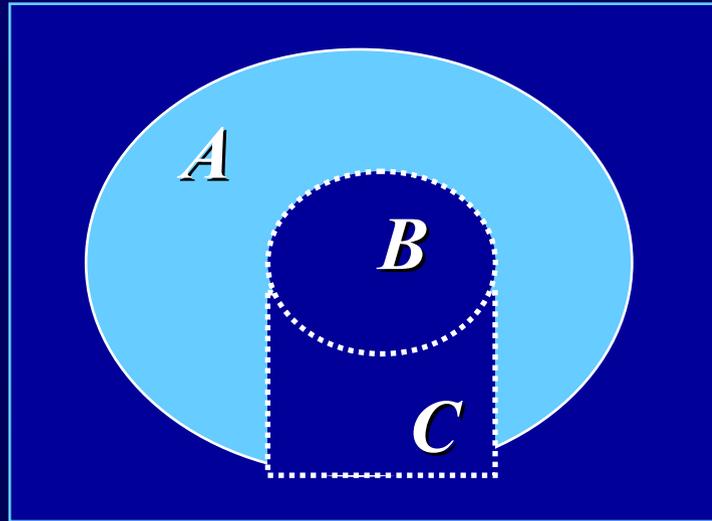
Por ejemplo, una esfera cuyo centro es un punto  $c$  y radio es  $r$ , tiene como función  $F$  la siguiente

$$F(x) = \|x - c\|^2 - r^2$$



# Álgebra de boole de los objetos

Los objetos básicos se pueden combinar para obtener nuevos objetos, usando operadores de *unión*, *intersección* y *diferencia*, lo que permite considerar a los objetos como un *álgebra de boole*

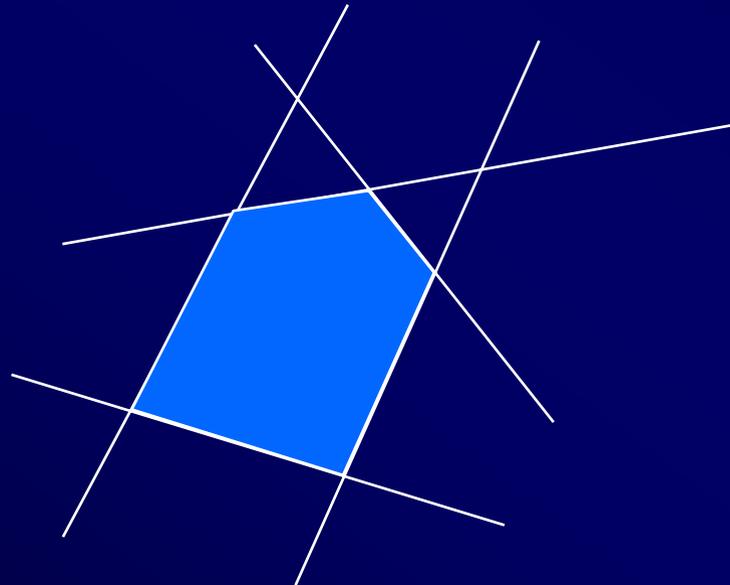


La región azul clara es un objeto que se expresa como  $A - (B \cup C)$

# Poliedros convexos

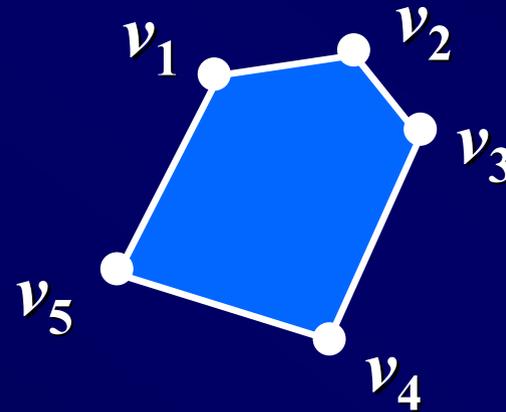
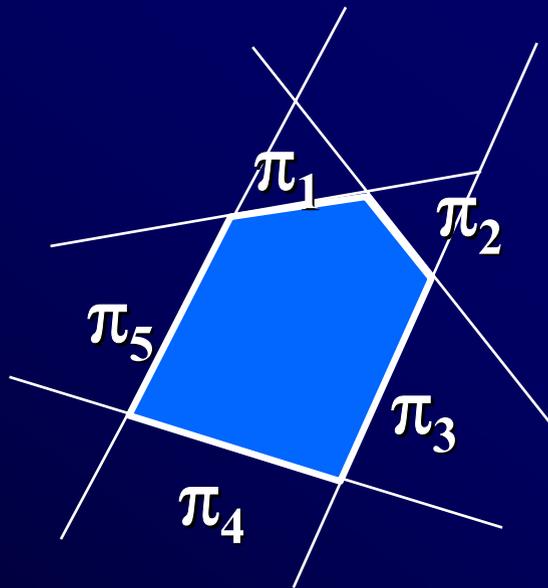
El tipo de objetos más común son los *poliedros*, que son conjuntos de puntos delimitados por caras planas.

Los *poliedros convexos* se pueden expresar como intersección de un número finito de semiespacios, cada uno de ellos definido por un plano.



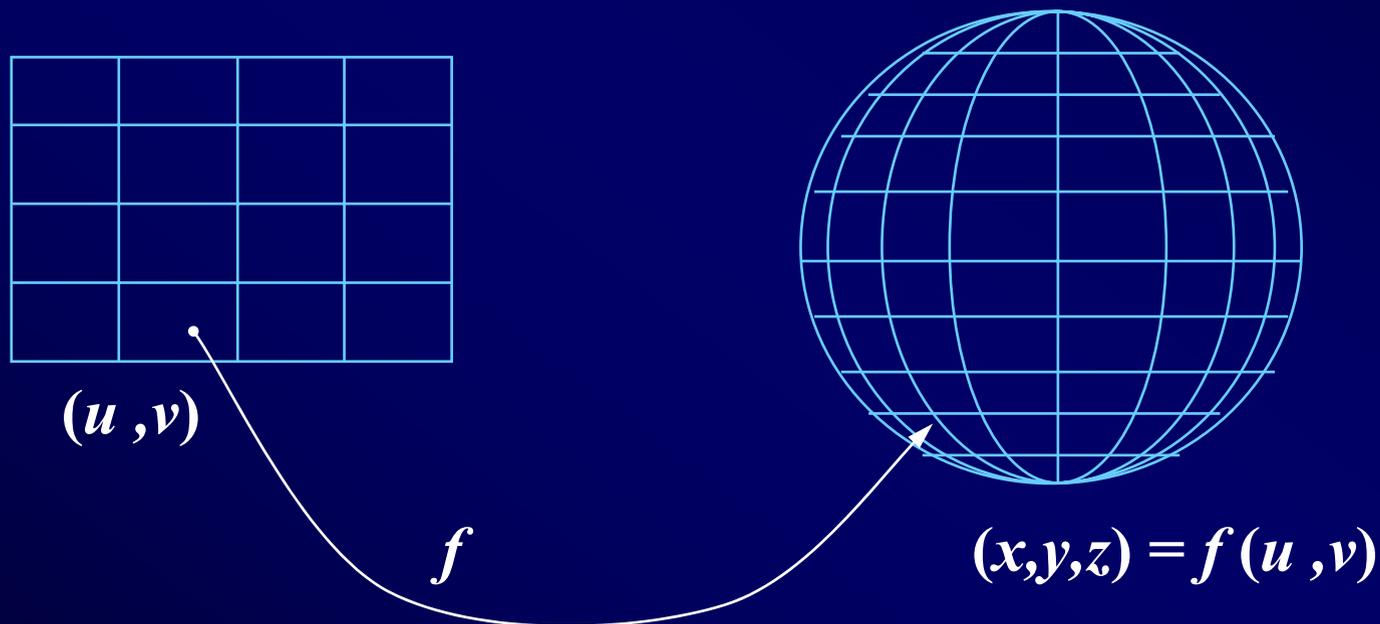
# Representación dual de los poliedros

Un poliedro en  $E^3$  (espacio euclídeo tridimensional) puede representarse como una lista de semiespacios, o mediante una representación dual, constituida por listas de vértices, aristas y caras. Esta última es la más frecuente.



# Función de parametrización

Los objetos con superficie curva se pueden aproximar mediante poliedros ( es fácil si se dispone de una *función de parametrización*  $f$  de su superficie )



# Función de parametrización (esfera)

A modo de ejemplo, una posible función de parametrización de una esfera con centro en  $(c_x, c_y, c_z)$  y radio  $r$  es:

$$(x, y, z) = f(u, v) = (f_x(u, v), f_y(u, v), f_z(u, v))$$

donde

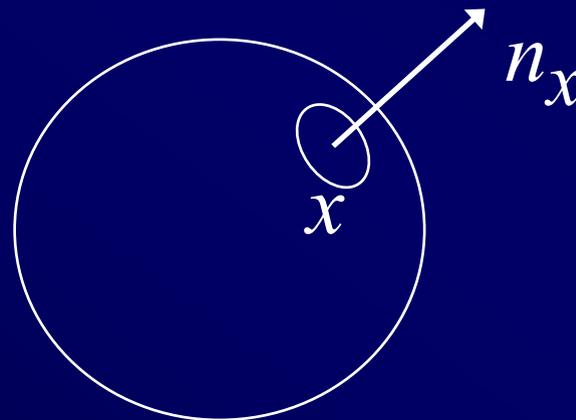
$$f_x(u, v) = c_x + r \cos(\pi(v - 1/2)) \cos(2\pi u)$$

$$f_y(u, v) = c_y + r \cos(\pi(v - 1/2)) \sin(2\pi u)$$

$$f_z(u, v) = c_z + r \sin(\pi(v - 1/2))$$

# El conjunto $S$

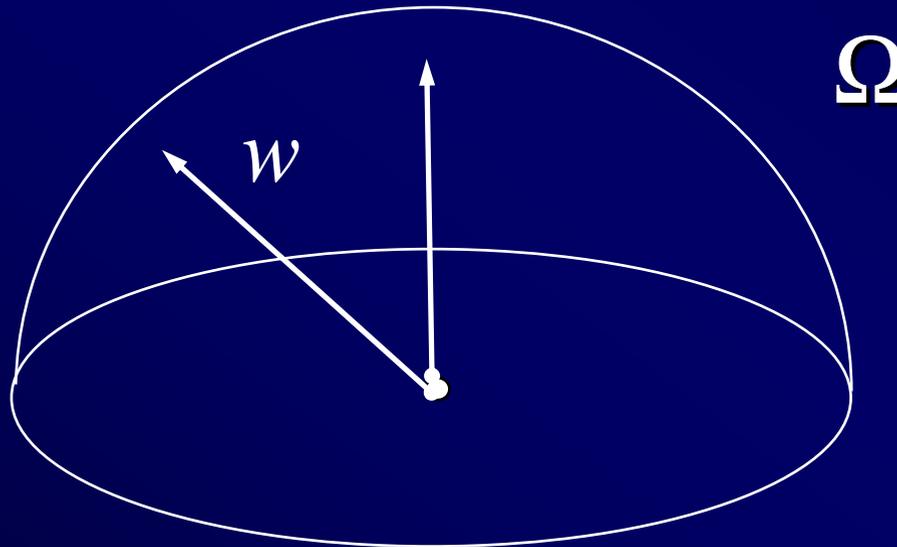
- Dado un escenario arbitrario pero fijo, llamaremos  $S$  al conjunto de los puntos en las fronteras o superficies de los objetos
- Podemos definir sobre  $S$  la medida de área, que notaremos como  $A$
- Si  $x$  pertenece a  $S$ , entonces tendrá asociado un vector normal que llamaremos  $n_x$



# El conjunto $\Omega$

Es el conjunto de todos los vectores de longitud unidad y con componente  $y$  positiva (puntos de un semiesfera)

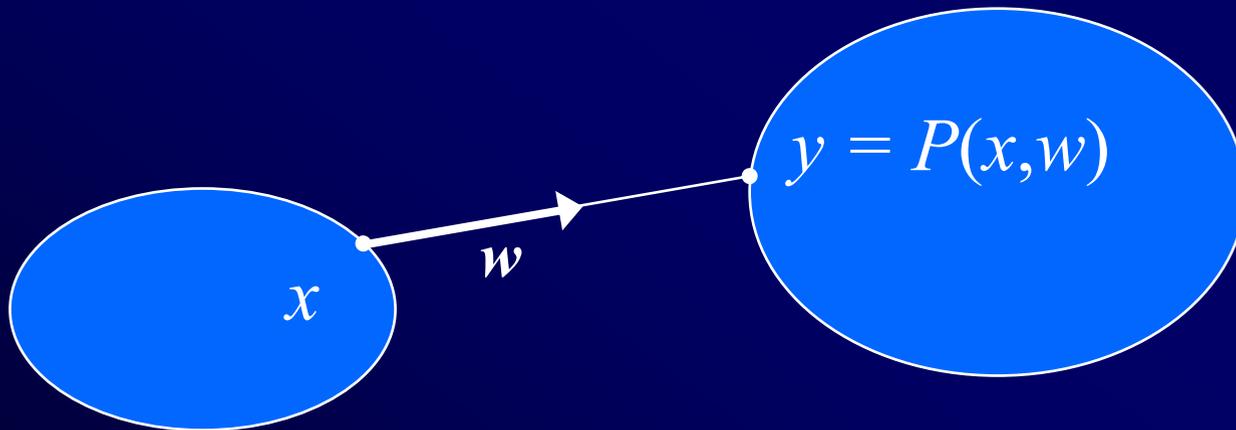
En este conjunto se puede definir la medida de área, también llamada *medida de ángulo sólido*, que notaremos como  $\sigma$



# La función $P$

Es una función con dominio en  $S \times \Omega$  y rango en  $S$

El punto de las superficies  $P(x, w)$  es el primer punto de una superficie visible desde  $x$  en la dirección  $w$



# Cálculo de la función $P$

Existen diversos métodos analíticos y numéricos para el cálculo de la función  $P$ . Esta operación es muy frecuente en síntesis de imágenes.

En general, la semirrecta infinita (rayo) con origen en  $x$  y dirección  $w$  se puede expresar como el conjunto de puntos  $p(t)$  tales que existe  $t > 0$  tal que:

$$p(t) = x + t w$$

A esta definición se le denomina *ecuación paramétrica* de la semirecta

# Cálculo de la función $P$

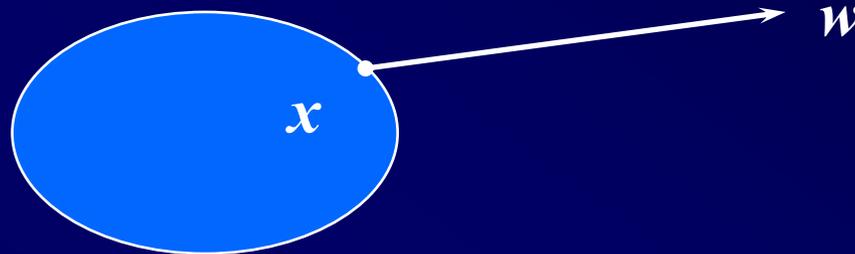
Para encontrar  $P(x, w)$ , hay que calcular el mínimo valor de  $t$  tal que existe algún objeto con función  $F$  cumpliendo:

$$F(p(t)) = 0$$

En el caso de una esfera, por ejemplo, tendríamos:

$$\|x + tw - c\|^2 - r^2 = 0$$

# La radiancia

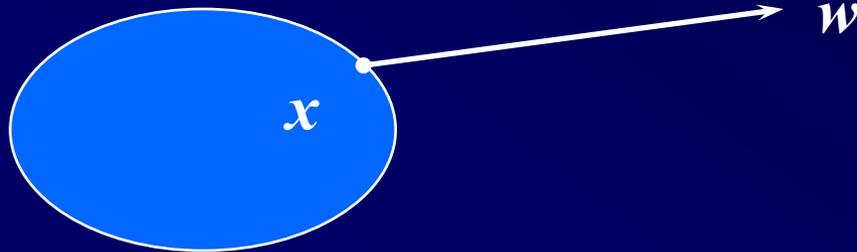


La radiancia  $L_\lambda(x, w, t)$  es la potencia radiante, por unidad de área en torno a  $x$ , y por unidad de ángulo sólido en torno a  $w$ , que abandona el punto de las superficies  $x$  en la dirección  $w$  en el instante de tiempo  $t$

# La radiancia (2)

- Se mide en Vatios por metro cuadrado y por estereoradián.
- La radiancia se refiere a radiación de una única longitud de onda fija  $\lambda$  y a un instante de tiempo  $t$
- Al estar  $\lambda$  y  $t$  fijados usualmente no se escriben en las fórmulas, y por tanto usaremos  $L(x, w)$  en lugar de  $L_\lambda(x, w, t)$

# Radiancia incidente



La radiancia incidente  $L_i(x, w)$  es la potencia radiante, por unidad de área en torno a  $x$ , y por unidad de ángulo sólido en torno a  $w$ , que incide sobre el punto  $x$  procedente de la dirección  $w$

# Percepción de la radiancia

Dado un punto  $x$  y un vector  $w$  la función

$$C(\lambda) = L_\lambda(x, w)$$

determina el color y la luminosidad que un observador humano percibe cuando observa el punto  $x$  desde la dirección  $w$



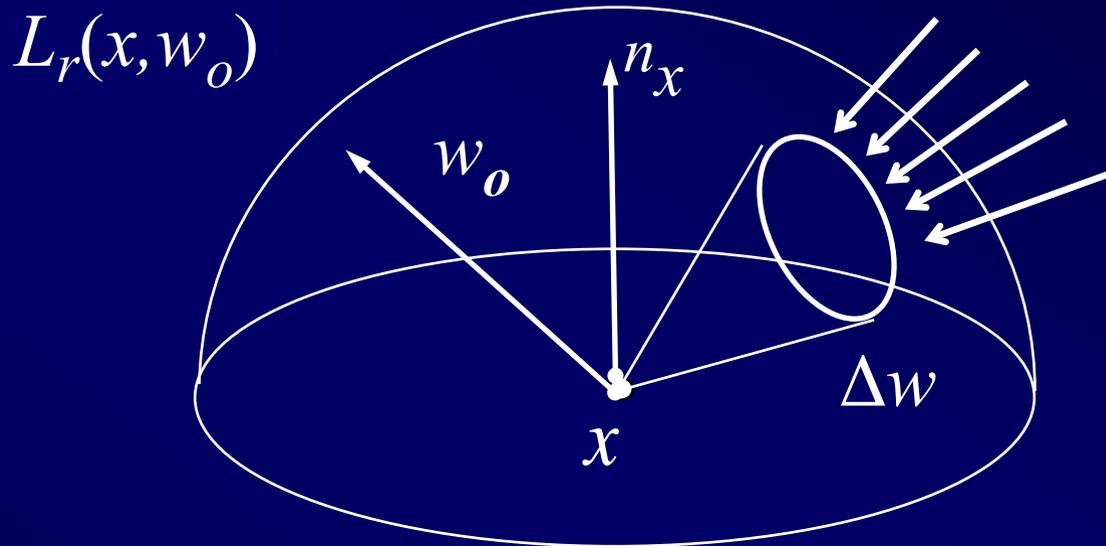
# Radiancia emitida y reflejada

La radiancia  $L(x, \omega)$  que abandona  $x$  en la dirección  $\omega$  es la suma de:

- Radiancia emitida desde ese punto en esa dirección ( se escribe  $L_e(x, \omega)$  )
- Radiancia reflejada desde ese punto en esa dirección (se escribe como  $L_r(x, \omega)$  )

$$L = L_e + L_r$$

# Reflexión de en las superficies



- La radiancia reflejada  $L_r(x, w_o)$  es debida a reflexión de energía proveniente desde todas las direcciones.
- Una parte de  $L_r(x, w_o)$  se debe a radiancia entrante por la región  $\Delta w$

# Reflexión de en las superficies

La semiesfera de todas las direcciones posibles de entrada se puede particionar en un conjunto de pequeñas regiones  $\{ \Delta w_1, \Delta w_2, \dots, \Delta w_n \}$ . Cada región  $\Delta w_j$  contiene un vector  $w_j$

La radiancia reflejada se puede aproximar como una suma sobre todos las regiones:

$$L_r(x, w_o) \approx \sum_{j=1}^n f_r(x, w_o, w_j) L_i(x, w_j) (n_x \cdot w_j) \sigma(\Delta w_j)$$

# Reflexión de en las superficies

Aquí, el símbolo  $f_r$  denota la BRDF (función bidireccional de distribución de la reflectancia)

El valor real  $f_r(x, w_o, w_i)$  indica cuanto de la radiancia incidente sobre  $x$  desde la dirección  $w_i$  se refleja en la dirección  $w_o$

La BRDF determina que aspecto tiene la superficie en el punto  $x$  (especular, mate o difusa, brillante, etc.... )

# Reflexión en las superficies

La suma es una aproximación a un valor exacto que se puede escribir como una integral en  $\Omega$

$$L_r(x, w_o) = \int_{w \in \Omega} f_r(x, w_o, w) L_i(x, w) (n_x \cdot w) d\sigma(w)$$

# Reflexión de en las superficies

Las funciones que hemos visto (radiancia, radiancia incidente, radiancia reflejada, radiancia emitida) son funciones con dominio  $S \times \Omega$  y con valores reales, no negativas y de cuadrado integrable.

(las integrales se consideran respecto de la medida  $A \times \sigma$  en  $S \times \Omega$  )

Para un escenario dado, fijo, podemos considerar el conjunto  $\mathcal{H}$  de todas las funciones con estas características

# Reflexión de en las superficies

Podemos definir un *producto escalar*, una *norma* y una *métrica* para las funciones del conjunto. Supongamos que  $f$ , y  $g$  son dos funciones que pertenecen a  $\mathcal{H}$

$$\langle f | g \rangle = \int_{S \times \Omega} f(x, w) g(x, w) (n_x \cdot w) d\sigma(w) dA(x)$$

$$\| f \| = \sqrt{\langle f | f \rangle} \quad d(f, g) = \| f - g \|$$

# Reflexión de en las superficies

En estas condiciones,  $\mathcal{H}$  es un *Espacio de Hilbert*, el espacio de todas las funciones no negativas, integrables, y de cuadrado integrable en  $S \times \Omega$

Los espacios de Hilbert son un tipo de espacios vectoriales, por tanto se pueden definir en ellos subespacios vectoriales de dimensión finita, dotados de bases finitas, así como operadores, (y en concreto operadores lineales y operadores de proyección).

# El operador de reflexión local

En el espacio se pueden definir operadores, que son funciones cuyo dominio y rango es dicho espacio, es decir, funciones que actúan sobre funciones.

Un operador importante en síntesis de imágenes es el operador  $\mathcal{R}_v$  que transforma una función cualquiera  $f$  en otra función  $g = \mathcal{R}f$

$$g(x, w) = \int_{u \in \Omega} f_r(x, w, u) f(x, u) (n_x \cdot u) d\sigma(u)$$

# El operador de reflexión local

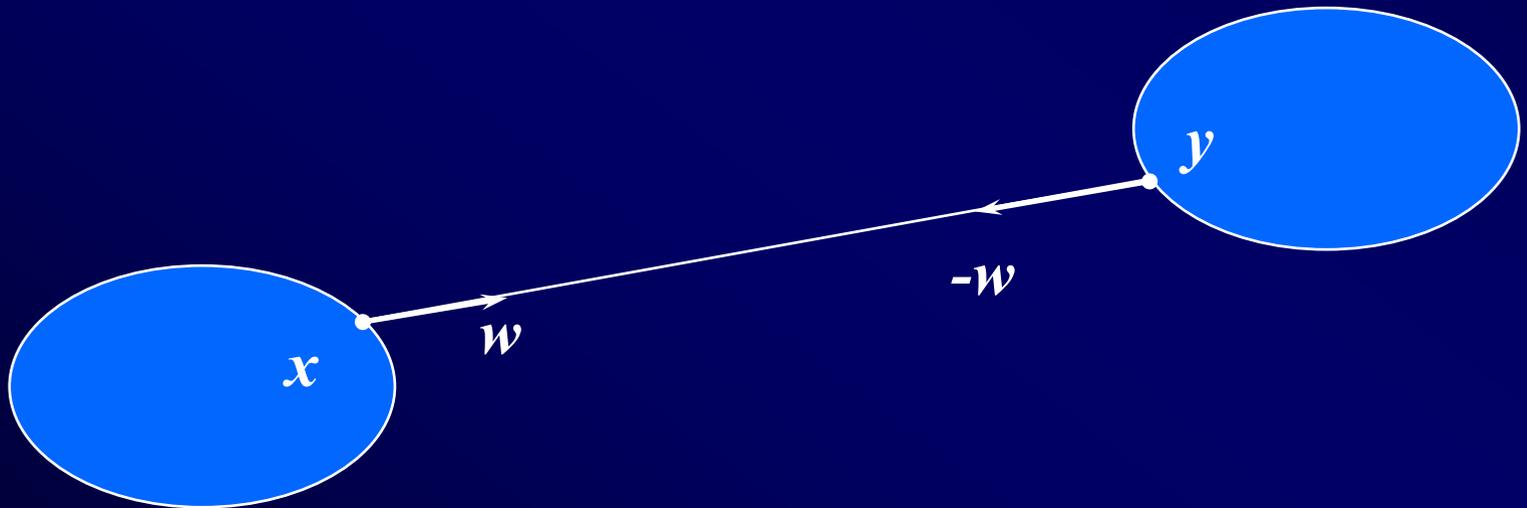
- El operador  $\mathcal{R}$  depende de la BRDF  $f_r$
- Es un operador lineal  $\mathcal{R}(a f + b g) = a \mathcal{R}f + b \mathcal{R}g$
- Representa la acción de la reflexión local de la función de irradiancia  $L_i$  para producir la función de radiancia reflejada  $L_r$ . Se demuestra fácilmente que:

$$L_r = \mathcal{R}L_i$$

# El operador $G$

Una propiedad importante es que la radiancia (en el espacio vacío) se conserva en las líneas rectas

$$L_i(x, w) = L(y, -w) = L(P(x, w), -w)$$



# El operador $G$

La anterior propiedad permite definir un operador,  $G$ , que transforma la radiancia en radiancia incidente.

Dada un función cualquiera  $f$  en  $\mathcal{H}$ , la función  $g = Gf$  se define como:

$$g(x, w) = f( P(x, w) , -w )$$

y por tanto, es fácil demostrar que se cumple que:

$$L_i = G L$$

# La ecuación de la radiancia

Uniando las distintas igualdades que relacionan las funciones de radiancia (radiancia, radiancia incidente, radiancia emitida, radiancia reflejada), podemos escribir la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned}L &= L_e + L_r \\ &= L_e + \mathcal{R}L_i \\ &= L_e + \mathcal{R}(GL) \\ &= L_e + \mathcal{R}GL\end{aligned}$$

# La ecuación de la radiancia

Los operadores se pueden componer. Definimos el operador  $\mathcal{T}$  (llamado operador de transporte), como el operador composición de  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{R}$  ( $\mathcal{T} = \mathcal{G} \circ \mathcal{R}$ )

Por tanto, se puede escribir esta ecuación que define la radiancia:

$$L = L_e + \mathcal{T}L$$

# La ecuación de la radiancia

Los operadores tienen una norma. Un operador cualquiera  $O$  tendrá una *norma*, que se nota como  $\|O\|$ , y que es el valor real supremo del conjunto de valores siguiente:

$$\left\{ \|Of\| / \|f\| \quad t.q. \quad f \in \mathcal{H} \quad y \quad \|f\| > 0 \right\}$$

Se cumple que, para cualquier función  $f$

$$\|Of\| \leq \|O\| \|f\|$$

# La solución de la ecuación de la radiancia

En general, una ecuación de la forma:

$$f = g + Of$$

En la cual  $g$  y  $O$  son conocidos y  $f$  desconocido, tendrá solución única (existirá un único  $f$  que la cumpla) si y solo si

$$\|O\| < 1$$

# La solución de la ecuación de la radiancia

La función  $f$  puede expresarse mediante el operador  $(I - O)^{-1}$ , donde  $I$  es el operador identidad

$$f = (I - O)^{-1} g$$

La solución también puede expresarse usando la llamada *serie de Von Neumann*, que converge a  $f$  e incluye las potencias de  $O$

$$f = O^0 g + O^1 g + O^2 g + O^3 g + \dots$$

# La solución de la ecuación de la radiancia

En el caso de la radiancia, por tanto, podemos expresar la función  $L$  como una suma de una serie infinita:

$$L = \mathcal{T}^0 L_e + \mathcal{T}^1 L_e + \mathcal{T}^2 L_e + \mathcal{T}^3 L_e + \dots$$

El valor  $\mathcal{T}^i L_e(x, \omega)$  es la función que expresa la radiancia en  $(x, \omega)$  reflejada  $i$  veces en las superficies (incluyendo una última reflexión en  $x$ )

# Aproximación en subespacios vectoriales

Excepto en casos triviales, en general, no existirá una expresión analítica de  $L$  en términos de  $L_e$  y  $\mathcal{T}$

Para aproximar  $L$ , lo que hacemos es buscar una función lo más cercana a ella en el *subespacio vectorial* de  $\mathcal{H}$  generado por una base finita  $B$

$$B = \{ b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \}$$

$B$  está formado por  $n$  funciones *linealmente independientes*, conocidas, pertenecientes todas ellas a  $\mathcal{H}$

# Aproximación a la función de radiancia

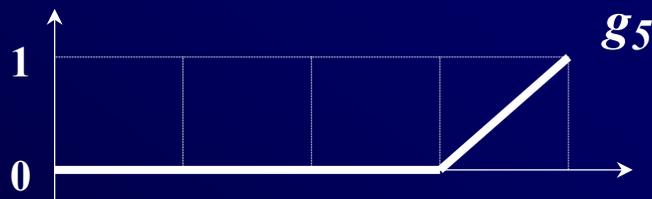
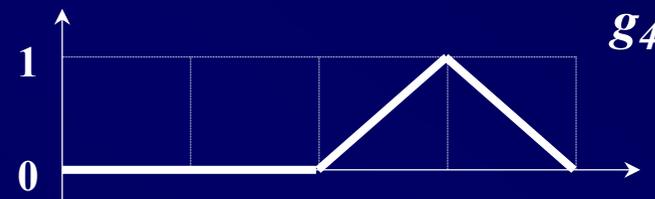
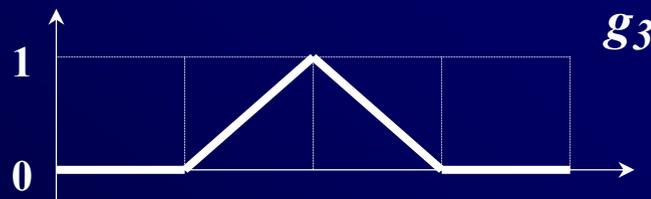
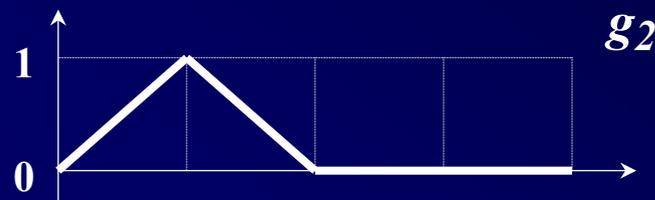
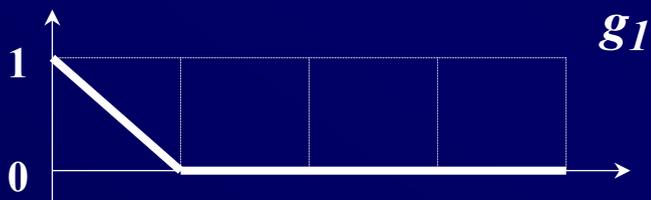
El *subespacio vectorial* de  $\mathcal{H}$  generado por una base finita  $B$  es el conjunto de funciones  $f$  tales que existe un vector de  $n$  valores reales  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  tal que

$$f = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_nb_n$$

A este conjunto se le nota como  $V_B$ . Se dice que  $V_B$  es el espacio vectorial generado por la base  $B$ . La dimensión del espacio es  $n$

# Ejemplo de funciones base

Un ejemplo sería la base  $A = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ , es una base que genera todas las funciones lineales a trozos (de long. 1), entre 0 y 4.



# Aproximación a la función de radiancia

Dada una base  $B$  y una función cualquiera de  $f$  (no necesariamente perteneciente a  $V_B$ ), existirá una única la función  $f'$  en  $V_B$  más cercana a  $f$  que cualquier otra de  $V_B$ . A esta función se le llama *proyección* de  $f$  en  $V_B$ .

Puesto que  $f'$  esta en  $V_B$ , podemos escribir

$$f' = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_nb_n$$

donde  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  son las coordenadas de  $f$  en  $V_B$ , o coordenadas de  $f$  respecto de  $V_B$

# Aproximación a la función de radiancia

La función  $f'$  puede expresarse como  $P_B f$ , donde  $P_B$  es un operador lineal que llamamos operador de proyección, y que se define como:

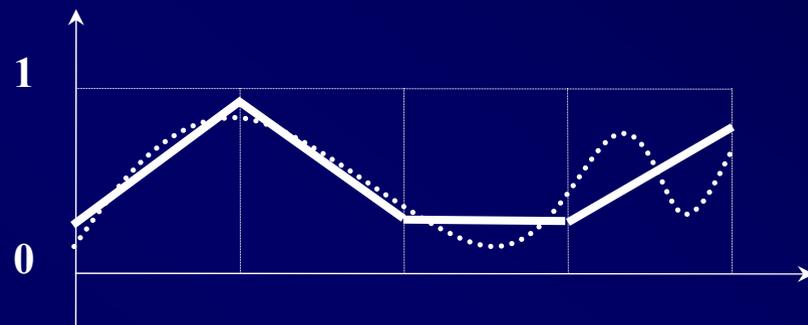
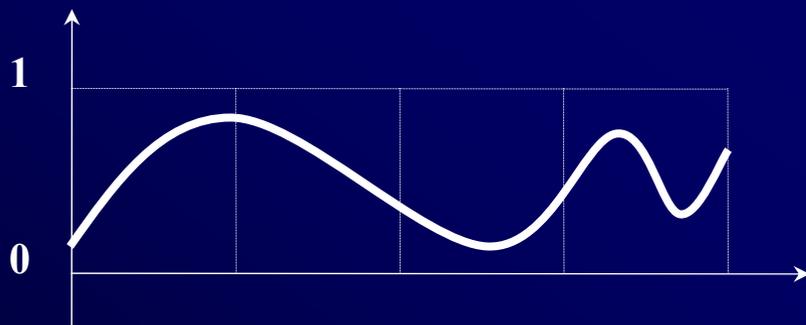
$$P_B f = \langle f | b_1 \rangle b_1 + \langle f | b_2 \rangle b_2 + \dots + \langle f | b_n \rangle b_n$$

Donde  $\{ b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \}$  es la *base dual* de  $B$  (que coincide con  $B$  solo si  $B$  es ortonormal). Esta base cumple

$$\langle b_i | b_j \rangle = 1 \quad \text{si } i = j, \quad 0 \text{ en otro caso}$$

# Ejemplo de proyección

A modo de ejemplo, podemos considerar la base  $A$  de antes, y el operador de proyección  $P_A$  que permite obtener la función lineal a trozos que más se aproxima a una dada.



# El problema del cálculo de la radiancia

El problema que queremos solucionar, por tanto, es, dada una escena fija, el siguiente:

## Conocidos:

- Una base  $B$  de  $\mathcal{H}$  (seleccionada adecuadamente)
- Una función de radiancia emitida  $L_e$  (dada por sus coordenadas respecto de  $B$ )
- Una BRDF  $f_r$  que (junto con la geometría) induce un operador de transporte  $\mathcal{T}$

## Calcular:

- las coordenadas de  $L$  respecto de  $B$

# Algoritmos de cálculo

Veremos estos tipos de algoritmos:

- Algoritmos de elementos finitos básicos
- Algoritmos estocásticos o de Monte-Carlo básicos
  - Métodos basados en *gathering*
  - Métodos basados en *shooting*

# La solución aproximada

- Es imposible encontrar numéricamente la solución exacta  $L$  (entre otras cosas, no se puede representar en la memoria del ordenador)
- Lo que podemos hacer es calcular numéricamente una aproximación a la función  $L' = P_B L$  lo cual implica:
  - $L' \in V_B$  ( luego  $L' = P_B L'$  )
  - $P_B r = 0$  (donde  $r = L' - L$  es la llamada función de residuo)

# La ecuación aproximada

De lo anterior se deduce que en realidad se está buscando una solución  $L'$  que cumpla esta ecuación

$$L' = L_e + (P_B \mathcal{T}) L'$$

Es parecida a la ecuación original ( $L = L_e + \mathcal{T}L$ ), excepto que se usa  $P_B \mathcal{T}$  en lugar de  $\mathcal{T}$

Se debe cumplir  $\| P_B \mathcal{T} \| < 1$

# Métodos de elementos finitos

- La función  $L'$  no es igual a  $L$ , pero si la *dimensión* de la base es suficientemente alta (es decir, la base  $B$  tiene una resolución grande),  $L'$  es *aproximadamente* igual a  $L$
- Normalmente, las coordenadas de  $L_e$  respecto de  $B$  son un dato de entrada, y se cumple que  $L_e \in V_B$  ( y por tanto  $P_B L_e = L_e$  )

# Métodos de elementos finitos

- Se basan en discretizar la ecuación funcional, usando proyecciones en bases finitas, y convertirla en un sistema de ecuaciones
- Se usan técnicas parecidas a las usadas en otros campos, aunque con aspectos específicos.
- De entre las varias opciones posibles, el más usado ha sido el *método de Galerkin*

# Métodos de elementos finitos

La ecuación funcional aproximada se cumple si y solo si se cumple el siguiente sistema de  $n$  ecuaciones y  $n$  incógnitas

$$x_i - a_i - \left( \sum_j f_{ij} x_j \right) = 0 \quad ( i \in \{1,2,\dots, n\} )$$

- $( x_1, \dots, x_n )$  son coordenadas  $L'$  de respecto de  $B$  (son las incógnitas, se cumple:  $x_i = \langle L | b_i \rangle$  )
- $( a_1, \dots, a_n )$  son coordenadas  $L_e$  de respecto de  $B$  (datos de entrada, se cumple:  $a_i = \langle L_e | b_i \rangle$  )
- $f_{ij} = \langle \mathcal{T}b_j | b_i \rangle$  se denominan los factores de forma (son calculables numéricamente)

# Métodos de elementos finitos

Es decir, se ha transformado la ecuación continua original en la ecuación matricial lineal:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1} & \cdots & f_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nombrando adecuadamente los elementos:

$$X = A + M X \qquad (I - M) X = A$$

# Métodos de Radiosidad

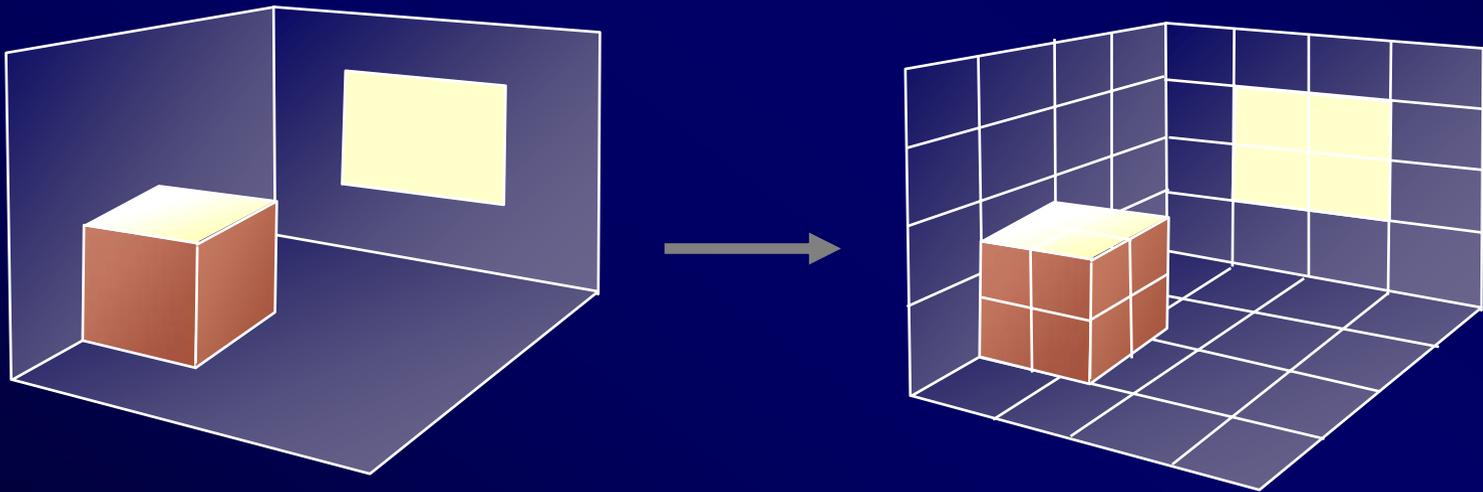
Los sistemas son muy grandes cuando la radiancia depende de la dirección, ya que son necesarios muchas funciones base

En entornos *difusos* (aspecto mate) esto no es así, ya que son entornos en los cuales la radiancia no depende de la dirección (ya que la BRDF es constante) con lo cual el problema es más sencillo

Se suelen usar funciones base constantes definidas sobre elementos de superficie

# Métodos de Radiosidad

Es necesario discretizar el entorno, dividiendo las superficies en parches o trozos. Hay una función base en cada una de ellas (las base es ortonormal).



# Métodos de Radiosidad

Para resolver el sistema de ecuaciones, y dado su tamaño, se deben usar métodos iterativos que convergen a la solución (no se pueden resolver directamente).

Los métodos iterativos consisten que obtienen aproximaciones sucesivas al vector solución, y paran cuando dos soluciones consecutivas son suficientemente cercanas.

# Solución numérica iterativa

## Método Gauss-Seidel

Limitado, pues requiere calcular y almacenar en memoria los  $n^2$  valores de la matriz  $M$ . Además a cada paso, hay que hacer  $n^2$  operaciones.

Bueno para valores de  $n$  pequeños

## Método Southwell

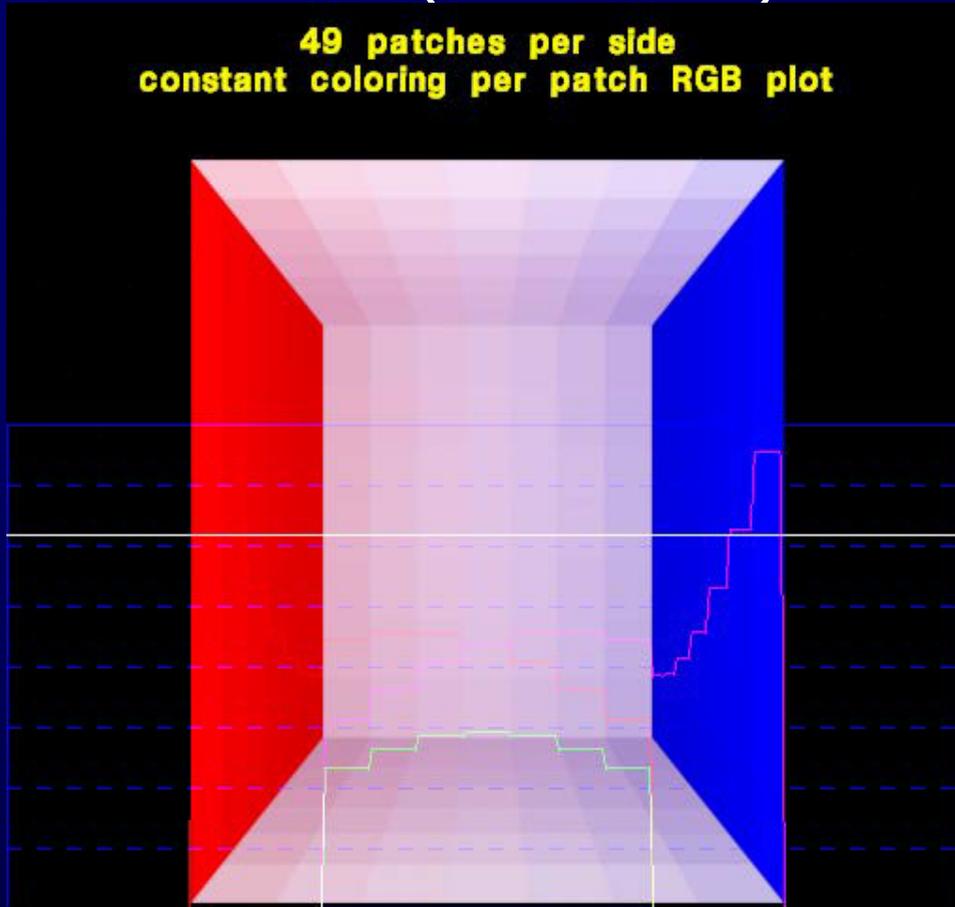
Solo requiere calcular y almacenar, en cada iteración, una fila de la matriz  $M$ , es decir, solo  $n$  valores, y después realizar  $n$  operaciones.

Bueno para valores de  $n$  grandes

# Radiosidad: ejemplos (1)

1984 (Goral et al.)

49 patches per side  
constant coloring per patch RGB plot



<http://www.graphics.cornell.edu/online/box/goral.jpg>

# Radiosidad: ejemplos (2)

1985 (Cohen et al.)



<http://www.graphics.cornell.edu/online/box/cohen.jpg>

# Entornos no difusos

Cuando la radiancia no depende de la dirección, los elementos no son trozos de superficie (subconjuntos de  $S$ ), si no que en cada trozo hay muchos elementos, correspondientes a distintos conjuntos de direcciones en la semiesfera (subconjuntos de  $S \times \Omega$  )

Esto hace los algoritmos mucho más complejos en tiempo de ejecución y uso de memoria.

# Entornos no difusos: ejemplo

1987 –(Wallace et al.)

Superficies difusas  
(mates)



Superficies no difusas  
(brillantes)



# Discontinuidades

El problema es que la función  $L$  no es continua en  $S$ , y la división en elementos no tiene en cuenta la localización de las discontinuidades.

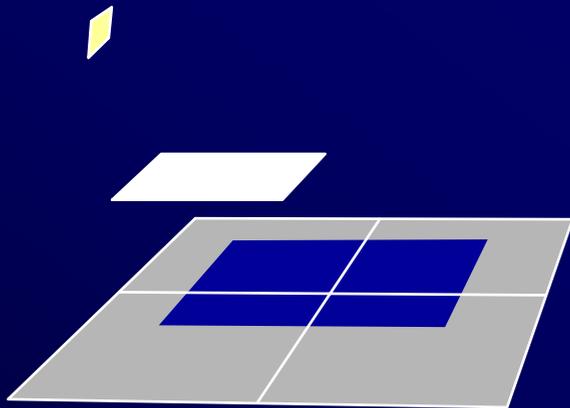
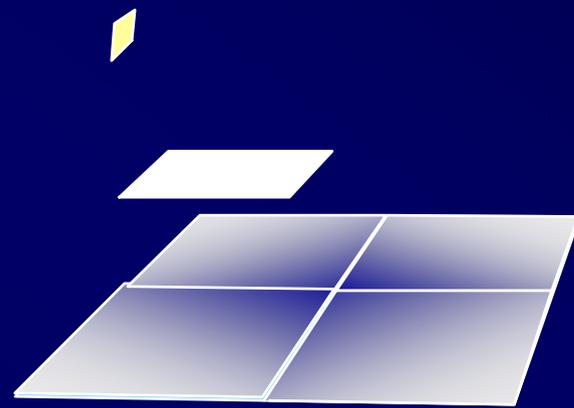


Imagen real



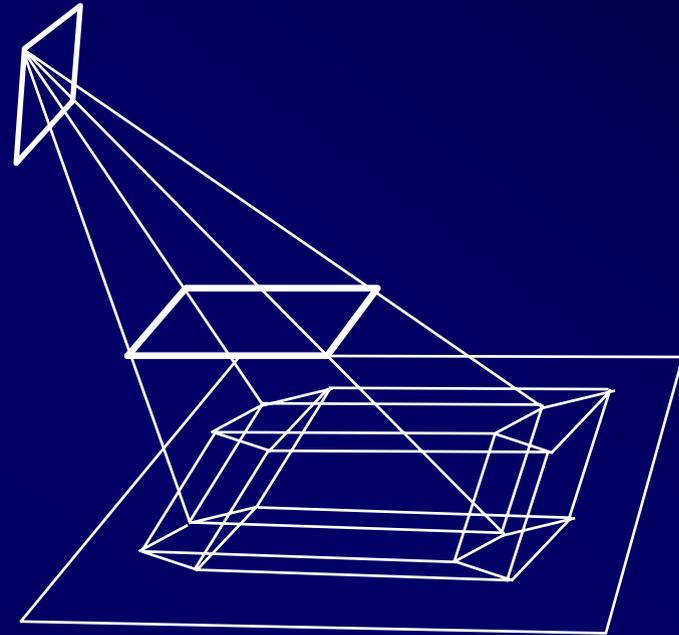
Reconstrucción

# Discontinuidades



# Mallado por discontinuidades

El *mallado por discontinuidades* consiste en dividir en trozos de forma que los bordes entre ellos sigan la localización de las discontinuidades



# Mallado por discontinuidades

1992 (Lischinski et al.)

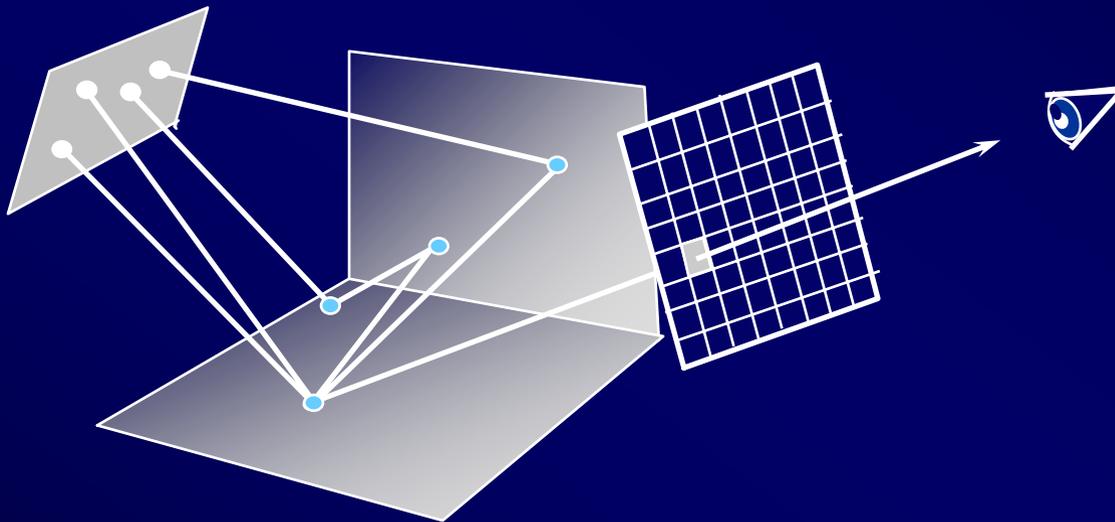


# Métodos de Monte-Carlo

- Los algoritmos basados en FEM son demasiado “sensibles” a la complejidad de la escena, es decir:
- Un aumento del número de objetos en la escena lleva un aumento enorme en el tiempo de cálculo y necesidades de memoria.
- Los *métodos estocásticos* o de *Monte-Carlo* no presentan este inconveniente.

# El modelo de partículas de la luz

Las partículas de luz (fotones) nacen en las superficies emisoras, viajan por el entorno (sufriendo reflexiones), y finalmente algunas alcanzan al observador



La radiancia se puede interpretar como una densidad de fotones

# Características de los Métodos de M.C.

- Los métodos de Monte-Carlo están inspirados en el modelo de partículas.
- Se basan en muestrear un subconjunto finito pero representativo del conjunto de infinitos caminos posibles que pueden seguir los fotones desde las fuentes de luz hasta el observador
- El muestreo estadístico produce resultados aproximados a la solución exacta, nunca llegan a la solución exacta
- A más muestras, más tiempo y/o más memoria son necesarios, y más exactitud se logra.

# Fundamentos de los Métodos de M.C.

- Para calcular cada producto escalar  $\langle L | b_i \rangle$ , se define una variable aleatoria  $X_i$  sobre el conjunto de todos los posibles caminos que pueden seguir los fotones
- Las variables aleatorias  $X_i$  se definen de forma que su media es exactamente  $E(X_i) = \langle L | b_i \rangle$

# Procesos estocásticos

- El cálculo de  $\langle L | b_i \rangle$  se modela usando un tipo de *proceso estocástico*  $c_i$  (una secuencia finita de *variables* o *vectores aleatorios*)
- Una variable (resp. vector) aleatoria es un conjunto de valores reales (resp. vectores de valores reales), cada uno de los cuales puede ocurrir con cierta probabilidad.
- Nosotros usaremos vectores aleatorios que toman valores en  $R^n$  (variables aleatorias continuas), y cabe hablar de la función *densidad de probabilidad* asociada a esas variables aleatorias

# El proceso estocástico en *gathering*

- El proceso estocástico que usaremos es una lista finita (indexada) de pares de *vectores aleatorios* (con valores en  $S \times \Omega$ )

$$c_i = \{ (x_0, w_0), (x_1, w_1), \dots, (x_k, w_k) \}$$

- Cada par de vectores aleatorios es un estado del proceso. Al par  $(x_0, w_0)$  se le denomina estado inicial
- $k$  representa una variable aleatoria entera con valores no negativos (la longitud de la cadena).

# Procesos de Markov

- El proceso estocástico  $c_i$  es, en concreto, un *proceso de Markov*, también llamado una *cadena de Markov*
- En este tipo de procesos de estocásticos, cada estado (excepto el estado inicial) solo depende del estado anterior, y es independiente de los demás.
- La (densidad de) probabilidad condicional de que el estado  $i+1$  sea  $(y,u)$ , supuesto que el estado  $i$ -ésimo es  $(x,w)$ , es una función que se denomina *probabilidad de transición* de la cadena y se nota como  $p_t$

$$p_t(x,w, y,u)$$

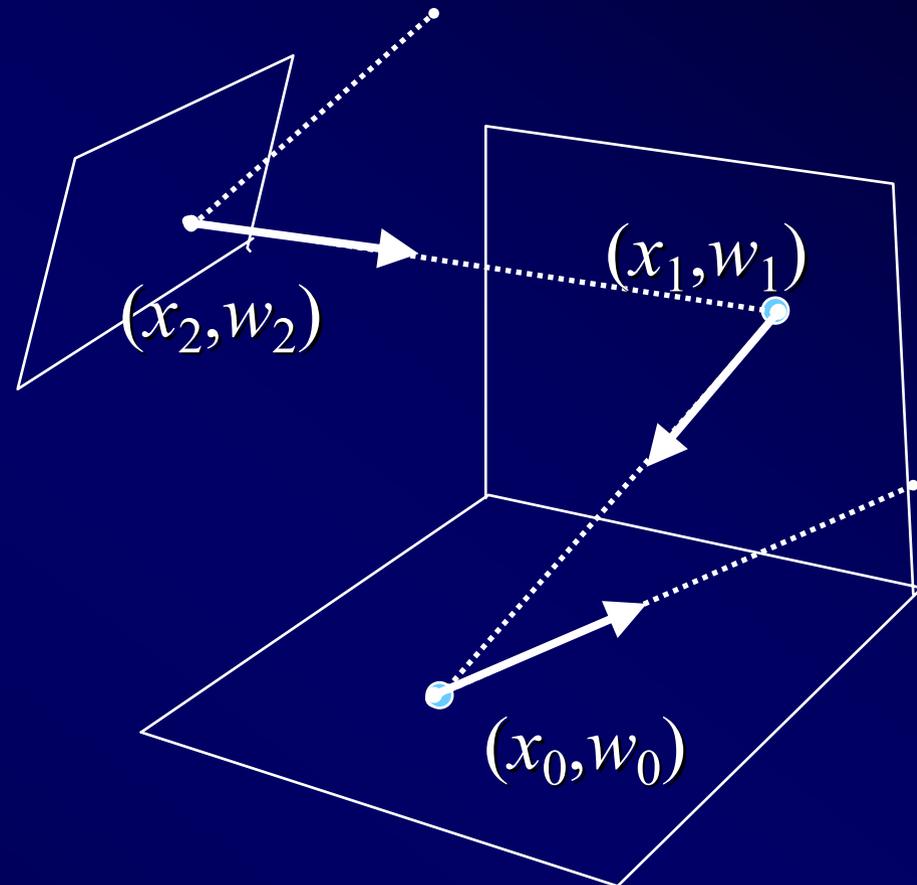
# Propiedades de la probabilidad de transición

La probabilidad de transición depende en cierto modo de la geometría, ya que:

$$p_t(x, w, y, u) > 0$$

implica

$$y = P(x, w)$$



# Propiedades de la probabilidad de transición

Además, la probabilidad de transición depende también de la BRDF, ya que:

$$f_r(x, w, u) > 0 \quad \text{implica} \quad p_t(x, w, y, -u) > 0$$

(donde  $y = P(x, u)$  )

Es deseable (aunque no necesario) que (para cada punto  $x$ ),  $p_t(x, w, y, -u)$  sea lo más proporcional posible a  $f_r(x, w, u)$

# El estado inicial de la cadena

Para que la cadena esté bien definida, es necesario especificar la propiedades del estado inicial

- La densidad de probabilidad del estado inicial es una función con dominio en  $S \times \Omega$  y valores reales, que notamos como  $p_0$
- Se debe cumplir  $b_i(x, w) > 0$  implica  $p_0(x, w) > 0$
- La función  $p_0$  debe ser lo más proporcional posible a  $b_i$

# La variable aleatoria $X_i$

Una vez que la cadena de Markov está bien definida, podemos definir sobre ella la variable aleatoria  $X_i$

$$X_i((x_0, w_0), (x_1, w_1), \dots, (x_n, w_n)) = \frac{b_i(x_0, w_0)}{p_0(x_0, w_0)} Y[x_0, w_0]((x_1, w_1), \dots, (x_n, w_n))$$

Aquí  $Y$  es una *función aleatoria*, es decir, para cada par  $(x, w)$ ,  $Y[x, w]$  es una variable aleatoria definida sobre el resto de la cadena original (cuya longitud ahora si puede ser cero)

# La función aleatoria $Y$

Cada variable aleatoria  $Y[x,w]$  tiene esta definición:

$$\begin{aligned} Y[x, w]((x_1, w_1), \dots, (x_n, w_n)) &= \\ &= L_e(x, w) + \frac{f_r(x, w, -w_1)}{p_t(x, w, x_1, w_1)} Y[x_1, w_1]((x_2, w_2), \dots, (x_n, w_n)) \end{aligned}$$

La definición es recursiva, aunque válida, dada la longitud finita de las cadenas (el segundo sumando es cero cuando se evalúa sobre una cadena de longitud cero)

# Cálculo de radiancia

Se cumplen las siguientes propiedades relativas a los valores medios de las variables aleatorias:

$$E(Y[x, w]) = L(x, w)$$

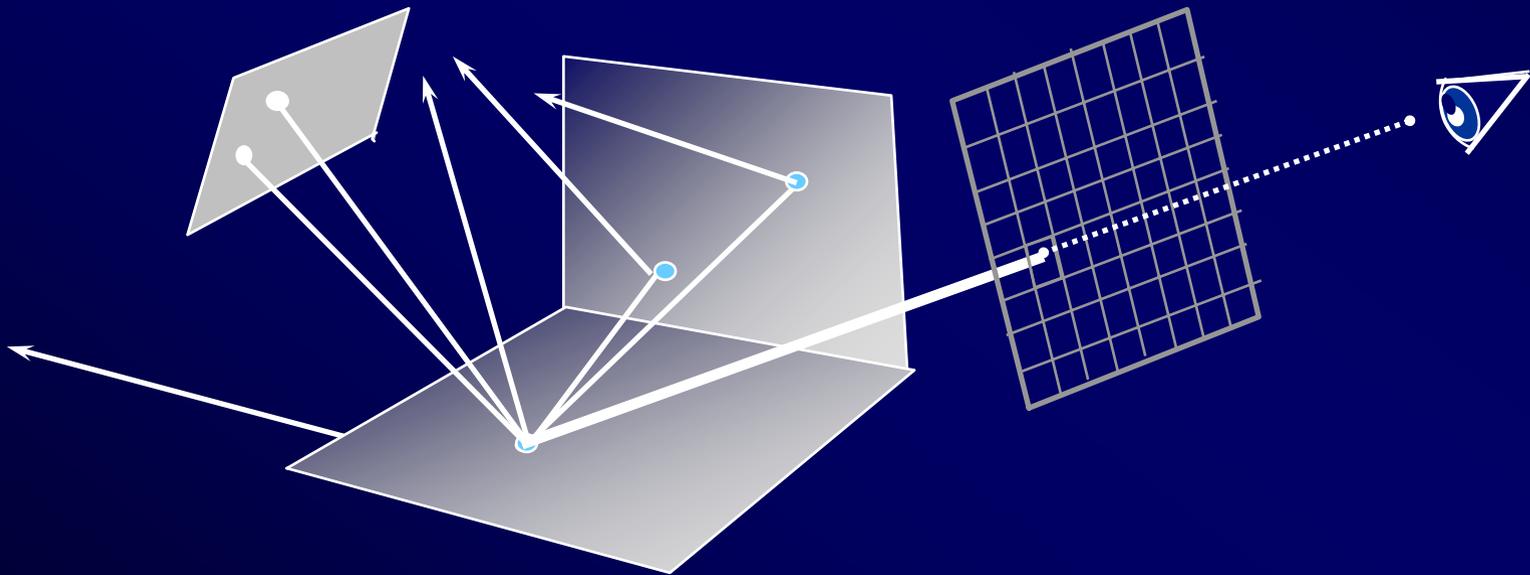
$$E(X_i) = \langle L | b_i \rangle$$

Esto significa que podemos calcular valores aproximados de la función de radiancia usando muestreo de estas variables aleatorias.

# El método *Path-Tracing*

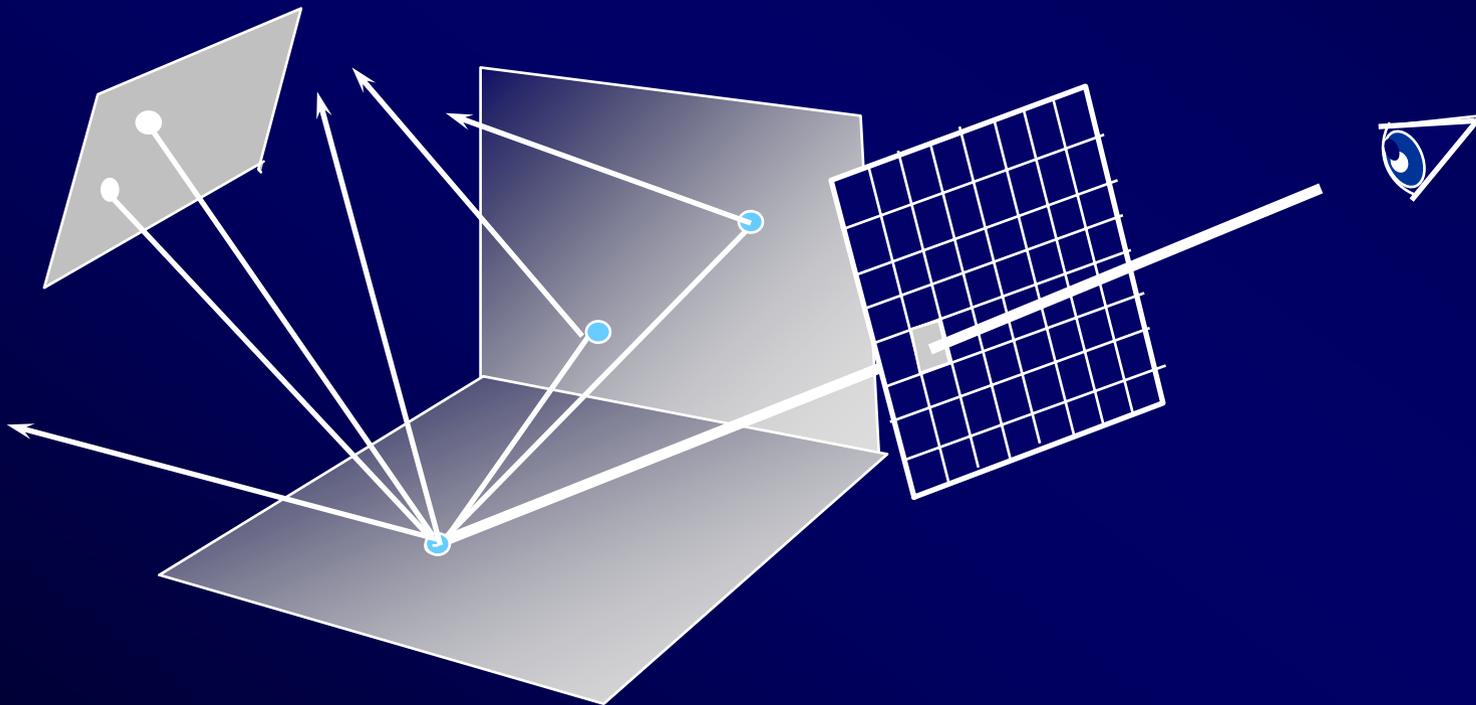
## 1986 (Kajiya)

- Se muestrea un subconjunto de todos los caminos posibles.
- Cada camino se selecciona aleatoriamente
- La selección esta guiada por una función de probabilidad



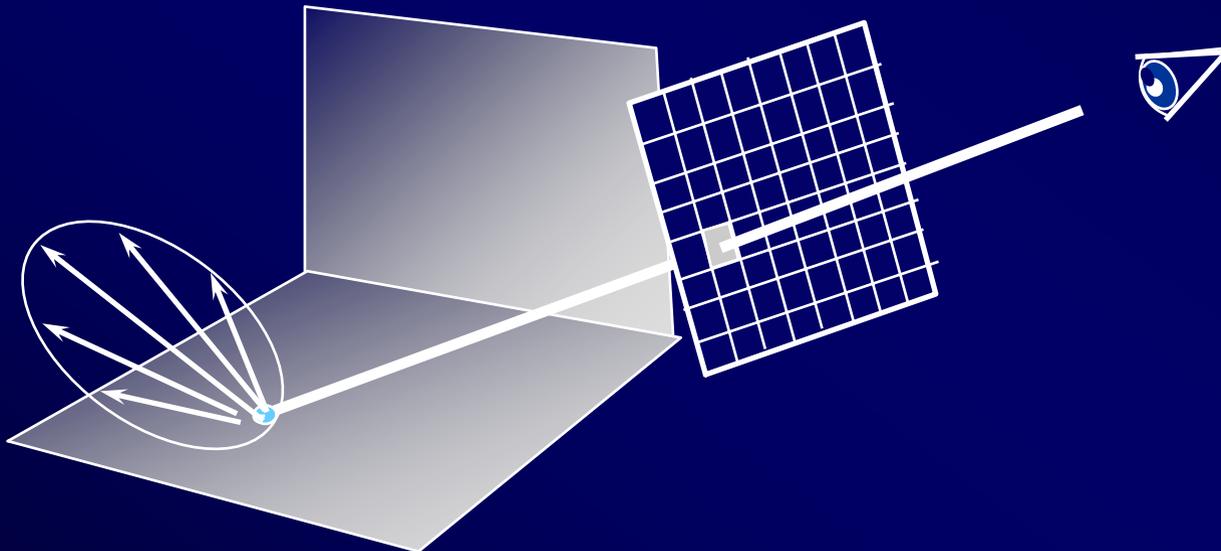
# *Path-tracing: cálculo del color del pixel*

La intensidad del pixel es proporcional a la fracción de caminos que alcanza la fuente de luz, con respecto al número total de caminos muestreados (*dos de seis, en la figura de abajo*)



# *Path Tracing: selección de la dirección*

- Cada camino posible se selecciona calculando sucesivas reflexiones.
- Después de una reflexión, la nueva dirección se selecciona usando la BRDF en el punto de reflexión



# *Path-tracing* : valoración

## **Ventajas**

- Permite superficies especulares, transparentes, semi-especulares,..
- Permite superficies con texturas (reflectividad variable a alta frec.)
- Permite geometrías de cualquier tipo (incluso curvadas)
- Permite fuentes de luz de cualquier tipo.

## **Limitaciones.**

- Se necesita muestrear un número muy grande de caminos para reducir el ruido asociado al muestreo aleatorio

# Métodos estocásticos

Usando 30 procesadores (Peter Shirley)



<http://www.graphics.cornell.edu/~shirley/classroom.jpg>

# Métodos estocásticos

## Path Tracing – Ejemplos – detalle de la imagen anterior



Se observa claramente el “ruido” inducido por la naturaleza de los algoritmos estocásticos

(muestras con una distribución aleatoria cuya media es el valor a calcular)

<http://www.graphics.cornell.edu/~shirley/classroom.jpg>

# El proceso estocástico en *shooting*

- El proceso estocástico que usaremos ahora está basado en una cadena de Markov muy parecida a la anterior, pero con algunas diferencias
- Desde el punto de vista teórico, este proceso resuelve la *ecuación integral dual* de la ecuación original.
- Sin entrar en definir la ecuación dual, veremos esta otra cadena de Markov, y las propiedades que cumple.

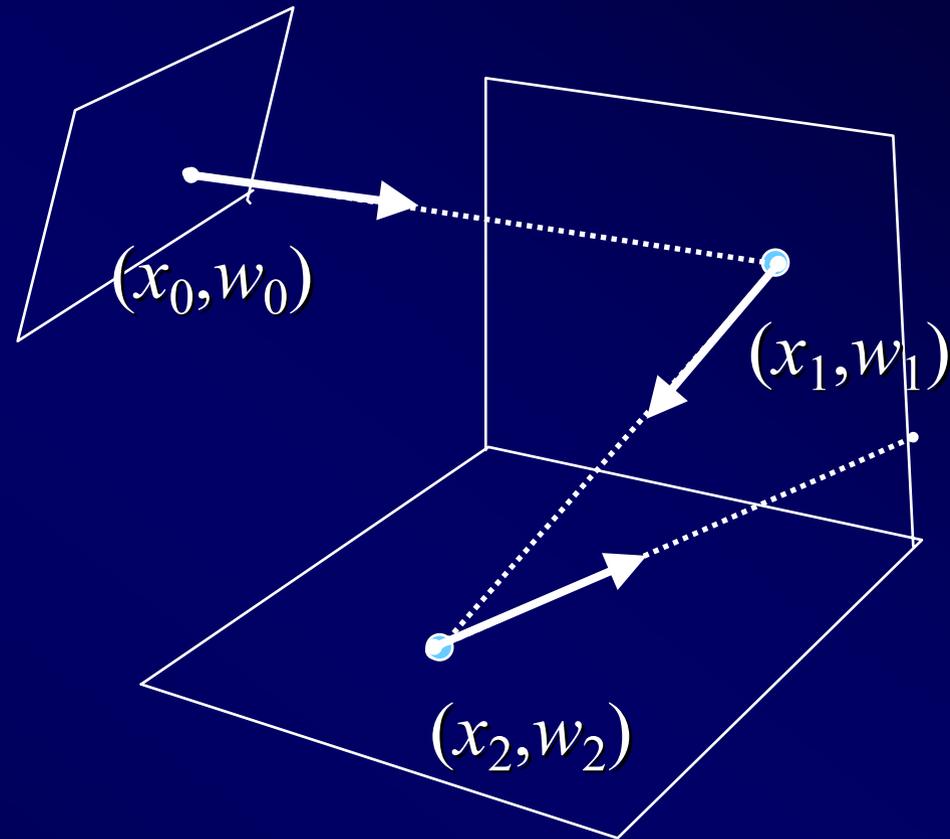
# Probabilidad de transición en *shooting*

La probabilidad de transición depende en cierto modo de la geometría, en este caso:

$$p_t(x, w, y, u) > 0$$

implica

$$y = P(x, w)$$



# Propiedades de la probabilidad de transición

La probabilidad de transición depende también de la BRDF,

$$f_r(y, u, -w) > 0 \quad \text{implica} \quad p_t(x, w, y, u) > 0$$

(donde  $y = P(x, u)$  )

Es deseable (aunque no necesario) que (para cada punto  $x$ ),  $p_t(x, w, y, u)$  sea lo más proporcional posible a  $f_r(y, u, -w)$

# El estado inicial de la cadena en *shooting*

Para que la cadena esté bien definida, es necesario especificar la propiedades del estado inicial

- La densidad de probabilidad del estado inicial es una función con dominio en  $S \times \Omega$  y valores reales, que notamos como  $p_0$
- Se debe cumplir  $L_e(x, w) > 0$  implica  $p_0(x, w) > 0$
- La función  $p_0$  debe ser lo más proporcional posible a  $L_e$

# La variable aleatoria $Z_i$

Una vez que la cadena de Markov está bien definida, podemos definir sobre ella la variable aleatoria  $Z_i$

$$Z_i((x_0, w_0), (x_1, w_1), \dots, (x_n, w_n)) = \frac{L_e(x_0, w_0)}{p_0(x_0, w_0)} K[x_0, w_0]((x_1, w_1), \dots, (x_n, w_n))$$

Aquí  $K$  es una *función aleatoria*, es decir, para cada par  $(x, w)$ ,  $K[x, w]$  es una variable aleatoria definida sobre el resto de la cadena original (cuya longitud ahora si puede ser cero)

# La función aleatoria $K$

Cada variable aleatoria  $K[x, w]$  tiene esta definición:

$$\begin{aligned} K[x, w]((x_1, w_1), \dots, (x_n, w_n)) &= \\ &= b_i(x, w) + \frac{f_r(x_1, w_1, -w)}{p_t(x, w, x_1, w_1)} Y[x_1, w_1]((x_2, w_2), \dots, (x_n, w_n)) \end{aligned}$$

La definición es recursiva, aunque válida, dada la longitud finita de las cadenas (el segundo sumando es cero cuando se evalúa sobre una cadena de longitud cero)

# Cálculo de radiancia

Se cumple la siguiente propiedad relativas a los valores medios de las variables aleatorias:

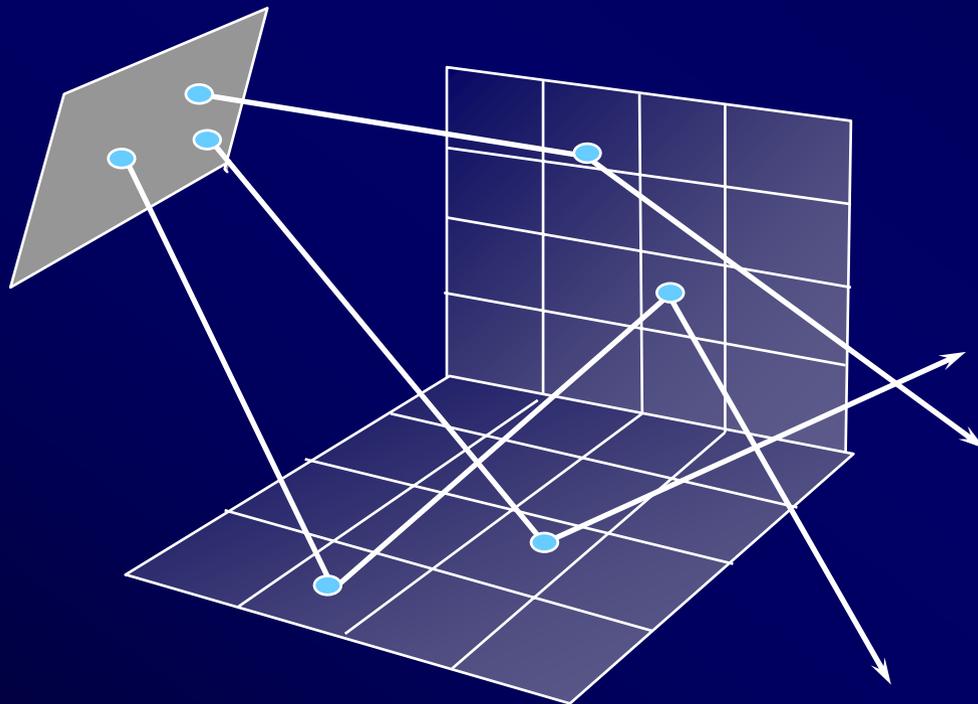
$$E(Z_i) = \langle L|b_i \rangle$$

En este caso, podemos muestrear una misma cadena para obtener estimaciones de todos los valores que queremos calcular

# Fotosimulación

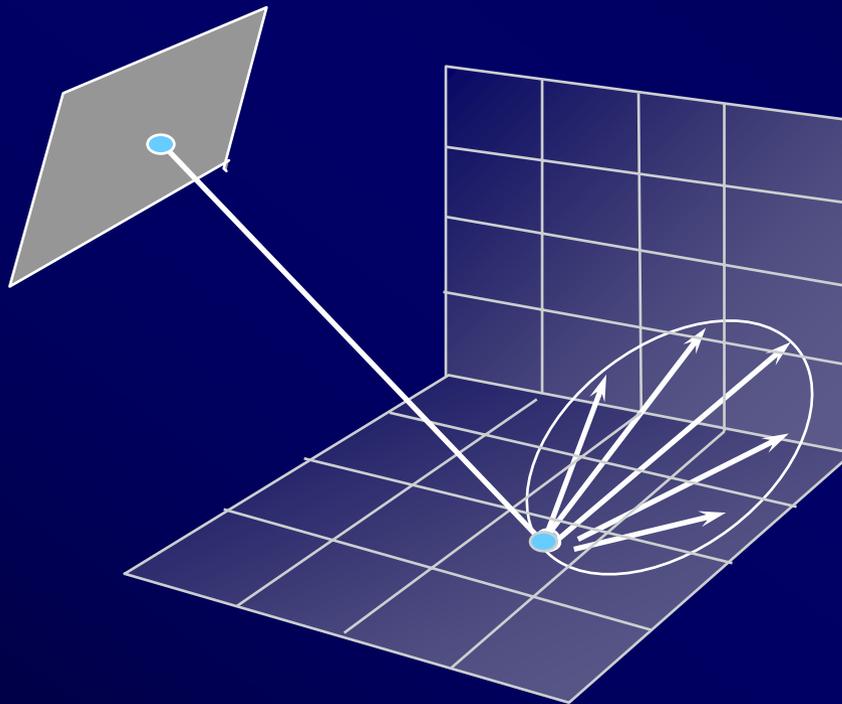
*(Arvo, 1986) (Pattanaik, 1990)*

El algoritmo constituye, en esencia, una simulación de las trayectorias seguidas por un conjunto de fotones.



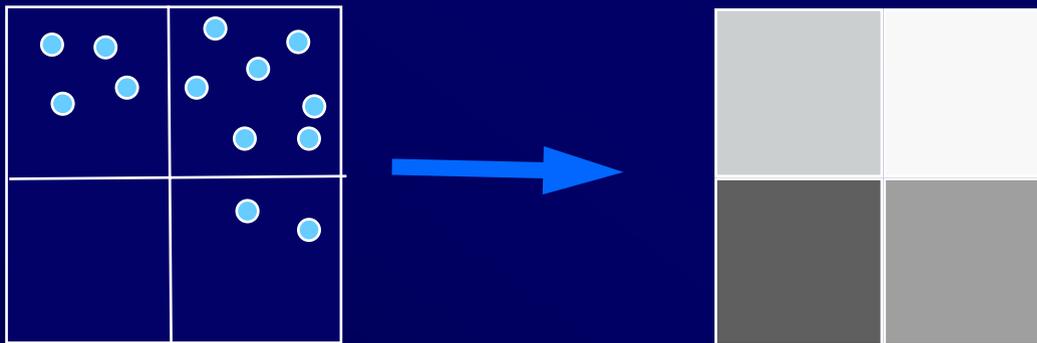
# La cadena de Markov en fotosimulación

- Los fotones nacen en posiciones aleatorias de las fuentes de luz
- Las reflexiones están gobernadas por la BRDF



# Mallado y estimación de radiancia

- La escena esta previamente mallada en un conjunto de trozos
- La radiancia de cada trozo es proporcional al número de impactos recibidos



# Fotosimulación: valoración

## Ventajas

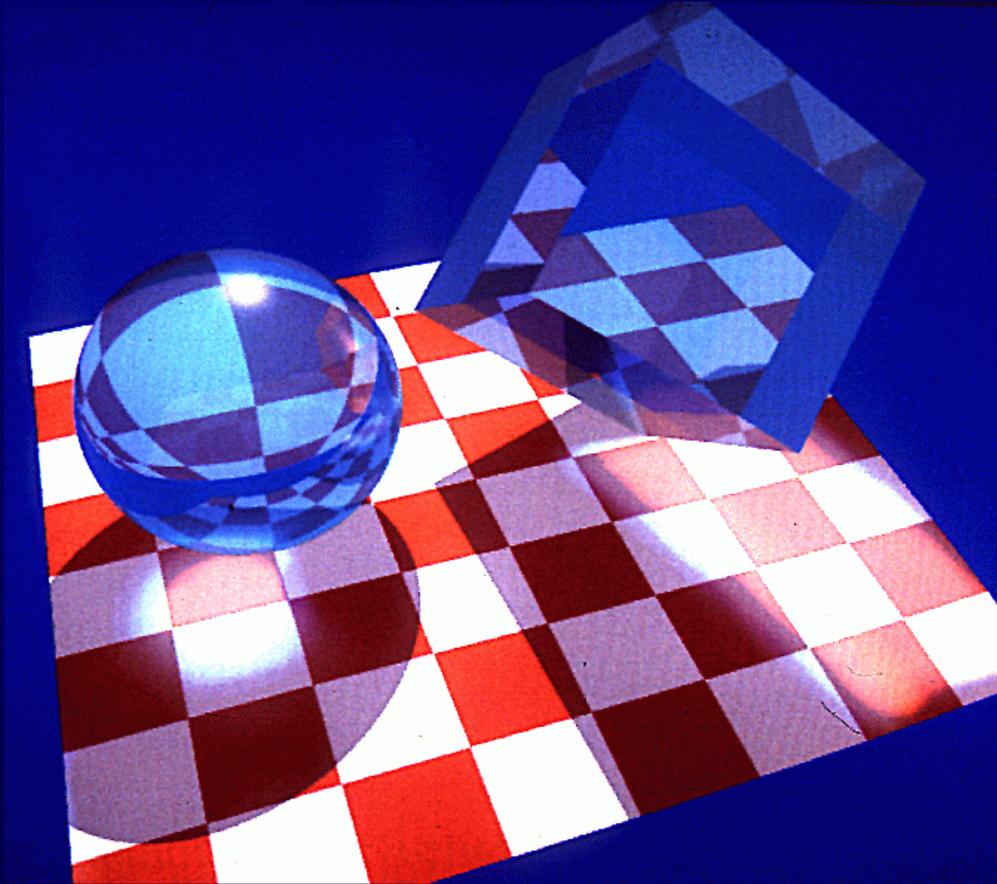
- Produce menos ruido que el *Path-tracing*
- La implementación es muy sencilla

## Limitaciones

- El mallado puede introducir defectos, al igual que en los métodos de elementos finitos
- Los trozos de las superficies pequeñas no reciben suficientes impactos.
- La extensión a superficies no difusas es compleja.

# Fotosimulación: ejemplos

1986 – fotosimulación seguida de ray-tracing (James Arvo)



<http://www.cs.caltech.edu/~arvo/images/FocusedLight.gif>

# Fotosimulación: ejemplos

(R. Tobler, A. Wilkie)

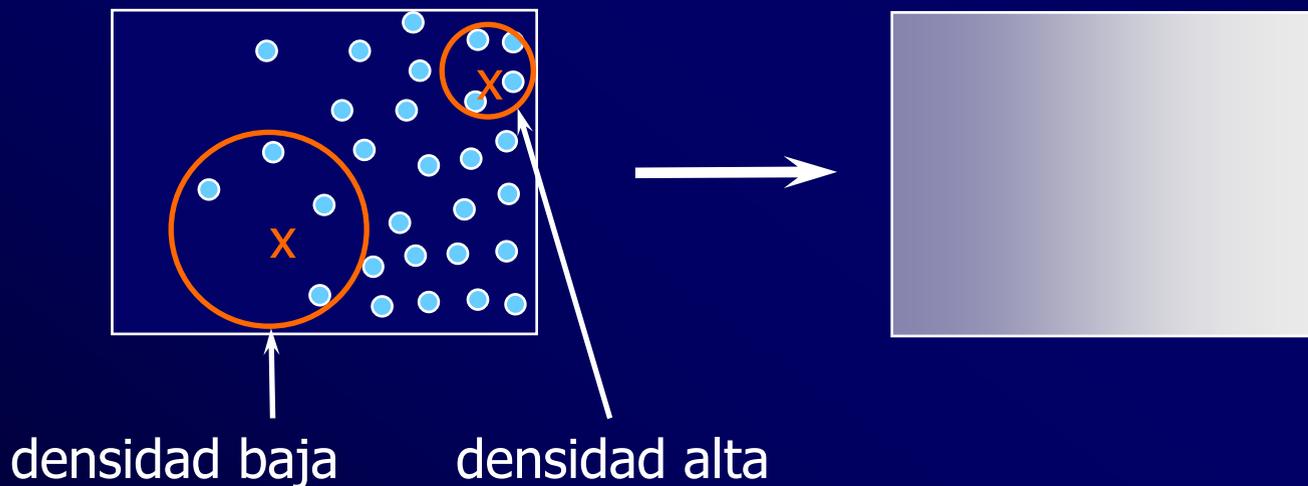


<http://www.artoolkit.org/Gallery/Radiosity/Base/QuadricsTransparent.jpg>

# Estimación de densidades

[*Shirley, 1995, Jensen, 1996*]

- Se realiza una simulación de trayectorias, como en fotosimulación.
- Las superficies de los objetos no están malladas
- Se usan técnicas de estimación de densidades para reconstruir la radiosidad o radiancia



*(radio mas grande a la derecha, para el mismo número de impactos)*

# Estimación de densidades: valoración

## Ventajas

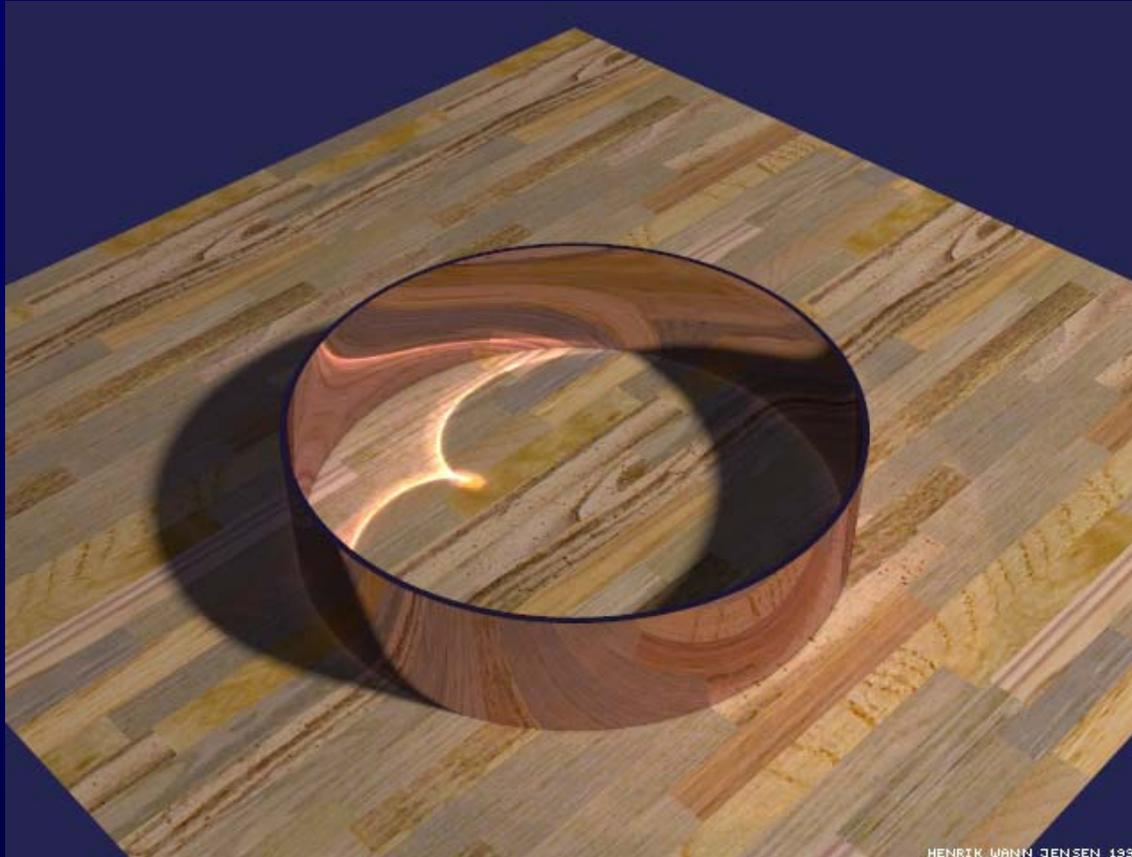
- No hay necesidad de mallar la escena
- Permite cualquier geometría
- Produce menos ruido que el path-tracing
- Permite reconstruir la radiosidad o la radiancia

## Limitaciones

- Es necesario almacenar el conjunto de todos los impactos
- Los objetos pequeños pueden no recibir suficientes impactos.

# Estimación de densidades: ejemplo

## Photon Mapping [Jensen,96]



<http://graphics.ucsd.edu/~henrik/images/metalring.jpg>