

Varianza condicionada

La varianza condicionada es el **momento condicionado** centrado en media de orden dos,

$$\text{Var}[X/Y] = E[(X - E[X/Y])^2/Y].$$

Peso (kg)

Probabilidad

(x)

Valor de la variable

Frecuencia absoluta

Frecuencia relativa

blanco	5	0.20
gris	4	0.16
rojo	3	0.12
verde	5	0.20
violeta	1	0.04
total	4	0.16
	25	1

Frecuencia

Color de coche

0.20

0.24

Varianza condicionada

La varianza condicionada es el **momento condicionado** centrado en media de orden dos,

$$\text{Var}[X/Y] = E[(X - E[X/Y])^2/Y].$$

Por su importancia en el estudio del problema de regresión analizamos algunas propiedades de esta variable aleatoria.

Peso (kg)

Probabilidad

(kg)

Valor de la variable

Frecuencia absoluta

Frecuencia relativa

blanco	5	0.20
gris	4	0.16
rojo	3	0.12
verde	5	0.20
violeta	1	0.04
total	4	0.16
	25	1

Frecuencia

Color de coche

0.20

0.16

0.12

0.20

0.04

0.16

0.20

0.04

0.16

0.20

0.04

0.16

0.20

0.04

0.16

0.20

0.04

0.16

Varianza condicionada

La varianza condicionada es el **momento condicionado** centrado en media de orden dos,

$$Var[X/Y] = E[(X - E[X/Y])^2/Y].$$

Por su importancia en el estudio del problema de regresión analizamos algunas propiedades de esta variable aleatoria.

Propiedades de la varianza condicionada

Si X es una variable aleatoria tal que existe $E[X^2]$ e Y es otra variable sobre el mismo espacio, se tiene:

- i) $\exists Var[X/Y]$ y $Var[X/Y] \geq 0$.
- ii) $Var[X/Y] = E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$.
- iii) $\exists Var[E[X/Y]], \exists E[Var[X/Y]]$ y $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.

Varianza condicionada

La varianza condicionada es el **momento condicionado** centrado en media de orden dos,

$$Var[X/Y] = E[(X - E[X/Y])^2/Y].$$

Por su importancia en el estudio del problema de regresión analizamos algunas propiedades de esta variable aleatoria.

Propiedades de la varianza condicionada

Si X es una variable aleatoria tal que existe $E[X^2]$ e Y es otra variable sobre el mismo espacio, se tiene:

- i) $\exists Var[X/Y]$ y $Var[X/Y] \geq 0$.
- ii) $Var[X/Y] = E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$.
- iii) $\exists Var[E[X/Y]], \exists E[Var[X/Y]]$ y $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.

Demostración:

Varianza condicionada

La varianza condicionada es el **momento condicionado** centrado en media de orden dos,

$$\text{Var}[X/Y] = E[(X - E[X/Y])^2/Y].$$

Por su importancia en el estudio del problema de regresión analizamos algunas propiedades de esta variable aleatoria.

Propiedades de la varianza condicionada

Si X es una variable aleatoria tal que existe $E[X^2]$ e Y es otra variable sobre el mismo espacio, se tiene:

- i) $\exists \text{Var}[X/Y]$ y $\text{Var}[X/Y] \geq 0$.
- ii) $\text{Var}[X/Y] = E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$.
- iii) $\exists \text{Var}[E[X/Y]], \exists E[\text{Var}[X/Y]]$ y $\text{Var}[X] = \text{Var}[E[X/Y]] + E[\text{Var}[X/Y]]$.

Demostración:

- i) La existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $\text{Var}[X/Y]$ (ver definición y propiedades de los momentos condicionados).

Varianza condicionada

La varianza condicionada es el **momento condicionado** centrado en media de orden dos,

$$\text{Var}[X/Y] = E[(X - E[X/Y])^2/Y].$$

Por su importancia en el estudio del problema de regresión analizamos algunas propiedades de esta variable aleatoria.

Propiedades de la varianza condicionada

Si X es una variable aleatoria tal que existe $E[X^2]$ e Y es otra variable sobre el mismo espacio, se tiene:

- i) $\exists \text{Var}[X/Y]$ y $\text{Var}[X/Y] \geq 0$.
- ii) $\text{Var}[X/Y] = E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$.
- iii) $\exists \text{Var}[E[X/Y]], \exists E[\text{Var}[X/Y]]$ y $\text{Var}[X] = \text{Var}[E[X/Y]] + E[\text{Var}[X/Y]]$.

Demostración:

- i) La existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $\text{Var}[X/Y]$ (ver definición y propiedades de los momentos condicionados). Además, ya que $(X - E[X/Y])^2$ es una variable aleatoria no negativa, su esperanza condicionada a Y es no negativa (**propiedad 2 de esperanza condicionada**).

Varianza condicionada

La varianza condicionada es el **momento condicionado** centrado en media de orden dos,

$$\text{Var}[X/Y] = E[(X - E[X/Y])^2/Y].$$

Por su importancia en el estudio del problema de regresión analizamos algunas propiedades de esta variable aleatoria.

Propiedades de la varianza condicionada

Si X es una variable aleatoria tal que existe $E[X^2]$ e Y es otra variable sobre el mismo espacio, se tiene:

- i) $\exists \text{Var}[X/Y]$ y $\text{Var}[X/Y] \geq 0$.
- ii) $\text{Var}[X/Y] = E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$.
- iii) $\exists \text{Var}[E[X/Y]], \exists E[\text{Var}[X/Y]]$ y $\text{Var}[X] = \text{Var}[E[X/Y]] + E[\text{Var}[X/Y]]$.

Demostración:

- i) La existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $\text{Var}[X/Y]$ (ver definición y propiedades de los momentos condicionados). Además, ya que $(X - E[X/Y])^2$ es una variable aleatoria no negativa, su esperanza condicionada a Y es no negativa (**propiedad 2 de esperanza condicionada**).
- ii) Basta probar que, para cada valor de Y , los correspondientes valores de $\text{Var}[X/Y]$ y de $E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$ coinciden.

Varianza condicionada

La varianza condicionada es el **momento condicionado** centrado en media de orden dos,

$$\text{Var}[X/Y] = E[(X - E[X/Y])^2/Y].$$

Por su importancia en el estudio del problema de regresión analizamos algunas propiedades de esta variable aleatoria.

Propiedades de la varianza condicionada

Si X es una variable aleatoria tal que existe $E[X^2]$ e Y es otra variable sobre el mismo espacio, se tiene:

- i) $\exists \text{Var}[X/Y]$ y $\text{Var}[X/Y] \geq 0$.
- ii) $\text{Var}[X/Y] = E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$.
- iii) $\exists \text{Var}[E[X/Y]], \exists E[\text{Var}[X/Y]]$ y $\text{Var}[X] = \text{Var}[E[X/Y]] + E[\text{Var}[X/Y]]$.

Demostración:

i) La existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $\text{Var}[X/Y]$ (ver definición y propiedades de los momentos condicionados). Además, ya que $(X - E[X/Y])^2$ es una variable aleatoria no negativa, su esperanza condicionada a Y es no negativa (**propiedad 2 de esperanza condicionada**).

ii) Basta probar que, para cada valor de Y , los correspondientes valores de $\text{Var}[X/Y]$ y de $E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$ coinciden.

$$\text{Var}[X/Y = y] = E[(X - E[X/Y = y])^2/Y = y]$$

Varianza condicionada

La varianza condicionada es el **momento condicionado** centrado en media de orden dos,

$$\text{Var}[X/Y] = E[(X - E[X/Y])^2/Y].$$

Por su importancia en el estudio del problema de regresión analizamos algunas propiedades de esta variable aleatoria.

Propiedades de la varianza condicionada

Si X es una variable aleatoria tal que existe $E[X^2]$ e Y es otra variable sobre el mismo espacio, se tiene:

- i) $\exists \text{Var}[X/Y]$ y $\text{Var}[X/Y] \geq 0$.
- ii) $\text{Var}[X/Y] = E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$.
- iii) $\exists \text{Var}[E[X/Y]], \exists E[\text{Var}[X/Y]]$ y $\text{Var}[X] = \text{Var}[E[X/Y]] + E[\text{Var}[X/Y]]$.

Demostración:

i) La existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $\text{Var}[X/Y]$ (ver definición y propiedades de los momentos condicionados). Además, ya que $(X - E[X/Y])^2$ es una variable aleatoria no negativa, su esperanza condicionada a Y es no negativa (**propiedad 2 de esperanza condicionada**).

ii) Basta probar que, para cada valor de Y , los correspondientes valores de $\text{Var}[X/Y]$ y de $E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$ coinciden.

$$\text{Var}[X/Y = y] = E[(X - E[X/Y = y])^2/Y = y] = E[X^2 + (E[X/Y = y])^2 - 2XE[X/Y = y]/Y = y].$$

Varianza condicionada

La varianza condicionada es el **momento condicionado** centrado en media de orden dos,

$$\text{Var}[X/Y] = E[(X - E[X/Y])^2/Y].$$

Por su importancia en el estudio del problema de regresión analizamos algunas propiedades de esta variable aleatoria.

Propiedades de la varianza condicionada

Si X es una variable aleatoria tal que existe $E[X^2]$ e Y es otra variable sobre el mismo espacio, se tiene:

- i) $\exists \text{Var}[X/Y]$ y $\text{Var}[X/Y] \geq 0$.
- ii) $\text{Var}[X/Y] = E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$.
- iii) $\exists \text{Var}[E[X/Y]], \exists E[\text{Var}[X/Y]]$ y $\text{Var}[X] = \text{Var}[E[X/Y]] + E[\text{Var}[X/Y]]$.

Demostración:

i) La existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $\text{Var}[X/Y]$ (ver definición y propiedades de los momentos condicionados). Además, ya que $(X - E[X/Y])^2$ es una variable aleatoria no negativa, su esperanza condicionada a Y es no negativa (**propiedad 2 de esperanza condicionada**).

ii) Basta probar que, para cada valor de Y , los correspondientes valores de $\text{Var}[X/Y]$ y de $E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$ coinciden.

$$\text{Var}[X/Y = y] = E[(X - E[X/Y = y])^2/Y = y] = E[X^2 + (E[X/Y = y])^2 - 2XE[X/Y = y]/Y = y].$$

Ahora, teniendo en cuenta que $E[X/Y = y]$ es una constante cuando se considera la distribución condicionada a $Y = y$, el resultado se deduce de la linealidad de la esperanza condicionada (**propiedad 1**).

iii) Notemos en primer lugar que, por i) y ii), $E[X^2/Y] \geq (E[X/Y])^2$ y se tiene la relación de orden

$$0 \leq (E[X/Y])^2 \leq E[X^2/Y].$$

Peso (kg)

Probabilidad

(kg)

Valor de la variable

Frecuencia absoluta

Frecuencia relativa

blanco

5

0.20

gris

4

0.16

rojo

3

0.24

verde

5

0.20

violeta

1

0.04

total

25

1

frecuencia

color de la ropa

0.20

0.16

0.24

0.20

0.04

0.16

0.20

0.04

0.16

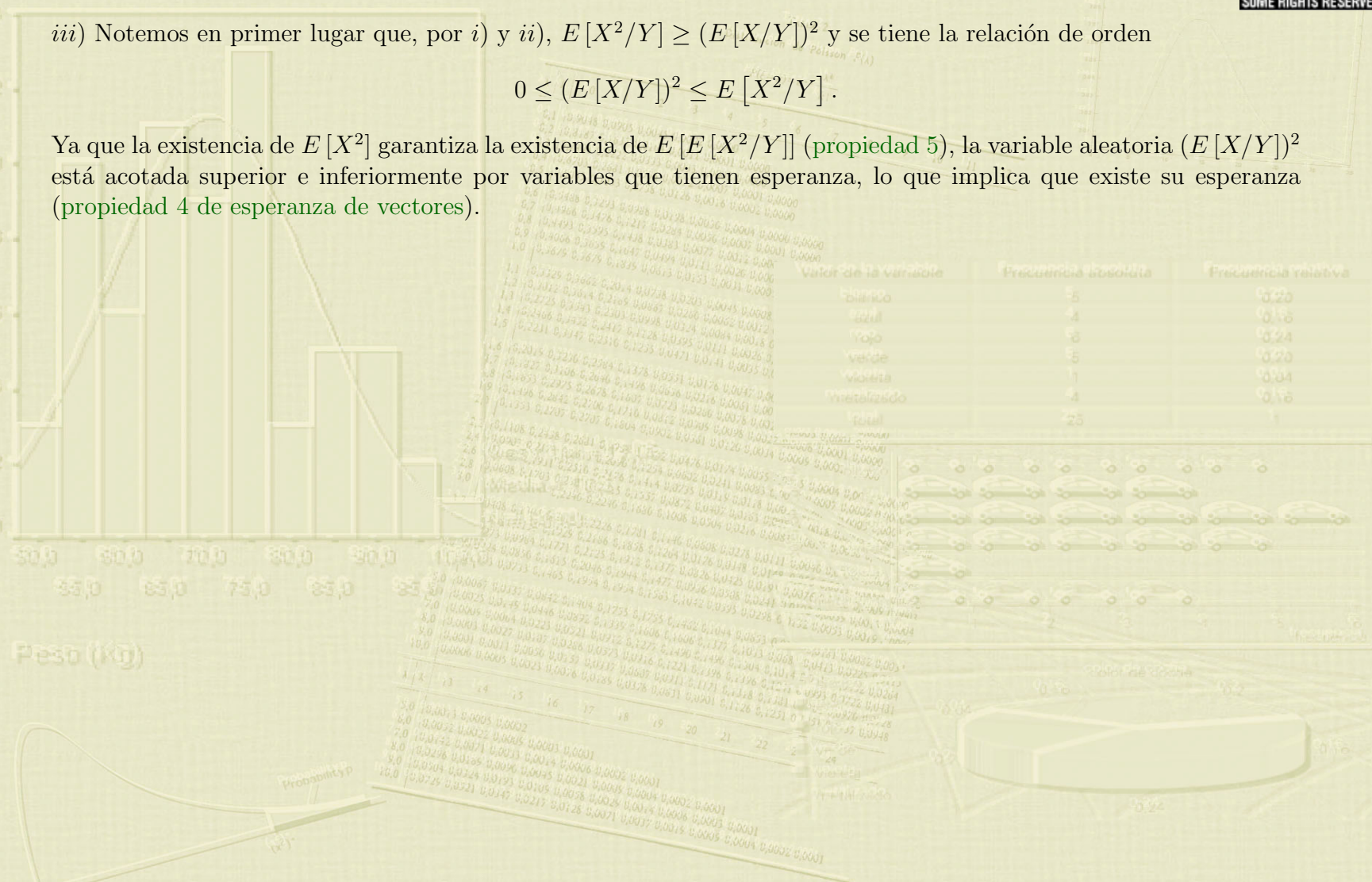
0.20

0.04

iii) Notemos en primer lugar que, por i) y ii), $E[X^2/Y] \geq (E[X/Y])^2$ y se tiene la relación de orden

$$0 \leq (E[X/Y])^2 \leq E[X^2/Y].$$

Ya que la existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $E[E[X^2/Y]]$ (propiedad 5), la variable aleatoria $(E[X/Y])^2$ está acotada superior e inferiormente por variables que tienen esperanza, lo que implica que existe su esperanza (propiedad 4 de esperanza de vectores).

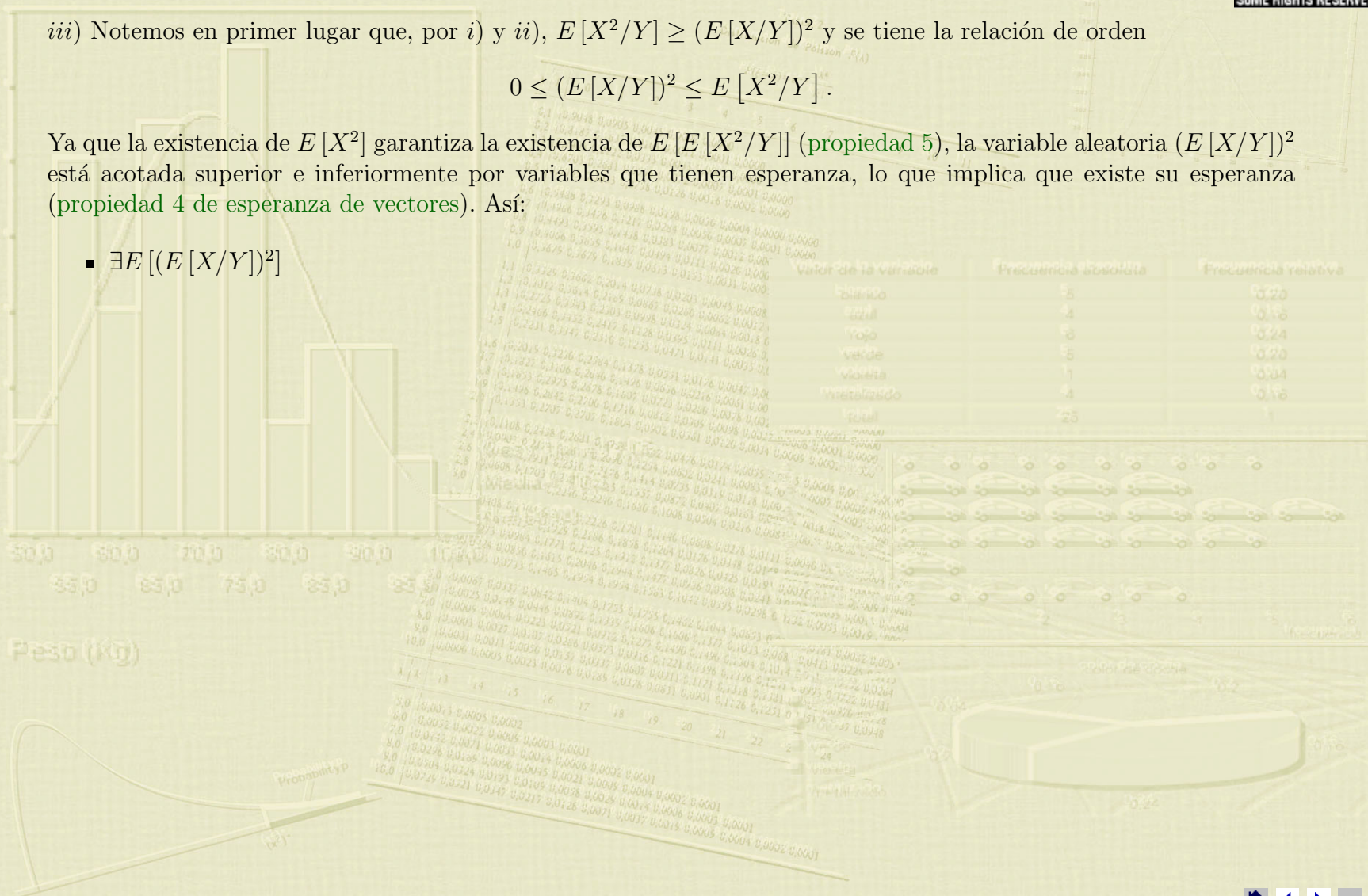


iii) Notemos en primer lugar que, por i) y ii), $E[X^2/Y] \geq (E[X/Y])^2$ y se tiene la relación de orden

$$0 \leq (E[X/Y])^2 \leq E[X^2/Y].$$

Ya que la existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $E[E[X^2/Y]]$ (propiedad 5), la variable aleatoria $(E[X/Y])^2$ está acotada superior e inferiormente por variables que tienen esperanza, lo que implica que existe su esperanza (propiedad 4 de esperanza de vectores). Así:

$$\blacksquare \exists E[(E[X/Y])^2]$$



iii) Notemos en primer lugar que, por i) y ii), $E[X^2/Y] \geq (E[X/Y])^2$ y se tiene la relación de orden

$$0 \leq (E[X/Y])^2 \leq E[X^2/Y].$$

Ya que la existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $E[E[X^2/Y]]$ (propiedad 5), la variable aleatoria $(E[X/Y])^2$ está acotada superior e inferiormente por variables que tienen esperanza, lo que implica que existe su esperanza (propiedad 4 de esperanza de vectores). Así:

$$\exists E[(E[X/Y])^2] \Rightarrow \exists \text{Var}[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[E(X/Y)])^2.$$

iii) Notemos en primer lugar que, por i) y ii), $E[X^2/Y] \geq (E[X/Y])^2$ y se tiene la relación de orden

$$0 \leq (E[X/Y])^2 \leq E[X^2/Y].$$

Ya que la existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $E[E[X^2/Y]]$ (propiedad 5), la variable aleatoria $(E[X/Y])^2$ está acotada superior e inferiormente por variables que tienen esperanza, lo que implica que existe su esperanza (propiedad 4 de esperanza de vectores). Así:

- $\exists E[(E[X/Y])^2] \Rightarrow \exists \text{Var}[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[E(X/Y)])^2.$
- $\exists E[(E[X/Y])^2] \text{ y } \exists E[E[X^2/Y]]$

iii) Notemos en primer lugar que, por i) y ii), $E[X^2/Y] \geq (E[X/Y])^2$ y se tiene la relación de orden

$$0 \leq (E[X/Y])^2 \leq E[X^2/Y].$$

Ya que la existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $E[E[X^2/Y]]$ (propiedad 5), la variable aleatoria $(E[X/Y])^2$ está acotada superior e inferiormente por variables que tienen esperanza, lo que implica que existe su esperanza (propiedad 4 de esperanza de vectores). Así:

- $\exists E[(E[X/Y])^2] \Rightarrow \exists \text{Var}[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[E(X/Y)])^2.$
- $\exists E[(E[X/Y])^2] \text{ y } \exists E[E[X^2/Y]] \Rightarrow \exists E[E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2] \stackrel{ii)}{=} E[\text{Var}[X/Y]].$

iii) Notemos en primer lugar que, por i) y ii), $E[X^2/Y] \geq (E[X/Y])^2$ y se tiene la relación de orden

$$0 \leq (E[X/Y])^2 \leq E[X^2/Y].$$

Ya que la existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $E[E[X^2/Y]]$ (**propiedad 5**), la variable aleatoria $(E[X/Y])^2$ está acotada superior e inferiormente por variables que tienen esperanza, lo que implica que existe su esperanza (**propiedad 4 de esperanza de vectores**). Así:

- $\exists E[(E[X/Y])^2] \Rightarrow \exists \text{Var}[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[E(X/Y)])^2.$
- $\exists E[(E[X/Y])^2] \text{ y } \exists E[E[X^2/Y]] \Rightarrow \exists E[E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2] \stackrel{ii)}{=} E[\text{Var}[X/Y]].$

Además, por la **propiedad 5** de esperanza condicionada, $E[E[X/Y]] = E[X]$ y $E[E[X^2/Y]] = E[X^2]$, y sustituyendo estos valores se tiene

$$\text{Var}[E[X/Y]] + E[\text{Var}[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[X])^2 + E[X^2] - E[(E[X/Y])^2]$$

iii) Notemos en primer lugar que, por i) y ii), $E[X^2/Y] \geq (E[X/Y])^2$ y se tiene la relación de orden

$$0 \leq (E[X/Y])^2 \leq E[X^2/Y].$$

Ya que la existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $E[E[X^2/Y]]$ (**propiedad 5**), la variable aleatoria $(E[X/Y])^2$ está acotada superior e inferiormente por variables que tienen esperanza, lo que implica que existe su esperanza (**propiedad 4 de esperanza de vectores**). Así:

- $\exists E[(E[X/Y])^2] \Rightarrow \exists \text{Var}[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[E(X/Y)])^2.$
- $\exists E[(E[X/Y])^2] \text{ y } \exists E[E[X^2/Y]] \Rightarrow \exists E[E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2] \stackrel{ii)}{=} E[\text{Var}[X/Y]].$

Además, por la **propiedad 5** de esperanza condicionada, $E[E[X/Y]] = E[X]$ y $E[E[X^2/Y]] = E[X^2]$, y sustituyendo estos valores se tiene

$$\text{Var}[E[X/Y]] + E[\text{Var}[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[X])^2 + E[X^2] - E[(E[X/Y])^2] = \text{Var}[X]. \quad \blacksquare$$

iii) Notemos en primer lugar que, por i) y ii), $E[X^2/Y] \geq (E[X/Y])^2$ y se tiene la relación de orden

$$0 \leq (E[X/Y])^2 \leq E[X^2/Y].$$

Ya que la existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $E[E[X^2/Y]]$ ([propiedad 5](#)), la variable aleatoria $(E[X/Y])^2$ está acotada superior e inferiormente por variables que tienen esperanza, lo que implica que existe su esperanza ([propiedad 4 de esperanza de vectores](#)). Así:

- $\exists E[(E[X/Y])^2] \Rightarrow \exists \text{Var}[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[E(X/Y)])^2.$
- $\exists E[(E[X/Y])^2] \text{ y } \exists E[E[X^2/Y]] \Rightarrow \exists E[E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2] \stackrel{ii)}{=} E[\text{Var}[X/Y]].$

Además, por la [propiedad 5](#) de esperanza condicionada, $E[E[X/Y]] = E[X]$ y $E[E[X^2/Y]] = E[X^2]$, y sustituyendo estos valores se tiene

$$\text{Var}[E[X/Y]] + E[\text{Var}[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[X])^2 + E[X^2] - E[(E[X/Y])^2] = \text{Var}[X]. \quad \blacksquare$$

La propiedad iii), que especifica la descomposición de la varianza de una variable teniendo en cuenta el condicionamiento a otra, tiene una importante interpretación en el [problema de regresión mínimo cuadrática](#).

iii) Notemos en primer lugar que, por i) y ii), $E[X^2/Y] \geq (E[X/Y])^2$ y se tiene la relación de orden

$$0 \leq (E[X/Y])^2 \leq E[X^2/Y].$$

Ya que la existencia de $E[X^2]$ garantiza la existencia de $E[E[X^2/Y]]$ (**propiedad 5**), la variable aleatoria $(E[X/Y])^2$ está acotada superior e inferiormente por variables que tienen esperanza, lo que implica que existe su esperanza (**propiedad 4 de esperanza de vectores**). Así:

- $\exists E[(E[X/Y])^2] \Rightarrow \exists \text{Var}[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[E(X/Y)])^2.$
- $\exists E[(E[X/Y])^2] \text{ y } \exists E[E[X^2/Y]] \Rightarrow \exists E[E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2] \stackrel{ii)}{=} E[\text{Var}[X/Y]].$

Además, por la **propiedad 5** de esperanza condicionada, $E[E[X/Y]] = E[X]$ y $E[E[X^2/Y]] = E[X^2]$, y sustituyendo estos valores se tiene

$$\text{Var}[E[X/Y]] + E[\text{Var}[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[X])^2 + E[X^2] - E[(E[X/Y])^2] = \text{Var}[X]. \quad \blacksquare$$

La propiedad iii), que especifica la descomposición de la varianza de una variable teniendo en cuenta el condicionamiento a otra, tiene una importante interpretación en el **problema de regresión mínimo cuadrática**.

Ejemplo 1: Se extraen sucesivamente, sin reemplazamiento, dos bolas de una urna que contiene tres blancas y dos negras. En relación a este experimento, se definen las siguientes variables:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si la primera bola es blanca} \\ 1 & \text{si la primera bola es negra.} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 0 & \text{si la segunda bola es blanca} \\ 1 & \text{si la segunda bola es negra.} \end{cases}$$

Descomponer la varianza de la variable X teniendo en cuenta el condicionamiento a Y .

Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.



Peso (kg)

Probabilidad

(x)

$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.1	0.9048	0.0905	0.0045	0.0002	0.0000								
0.2	0.8187	0.1613	0.0164	0.0011	0.0001	0.0000							
0.3	0.7408	0.2222	0.0333	0.0033	0.0002	0.0000							
0.4	0.6703	0.2681	0.0536	0.0072	0.0005	0.0001	0.0000						
0.5	0.6065	0.3033	0.0728	0.0126	0.0018	0.0001	0.0000						
0.6	0.5488	0.3293	0.0928	0.0178	0.0036	0.0004	0.0000	0.0000					
0.7	0.4966	0.3476	0.1217	0.0209	0.0056	0.0007	0.0001	0.0000					
0.8	0.4493	0.3595	0.1478	0.0233	0.0077	0.0012	0.0001	0.0000					
0.9	0.4066	0.3659	0.1607	0.0249	0.0111	0.0026	0.0001	0.0000					
1.0	0.3679	0.3679	0.1835	0.0263	0.0153	0.0033	0.0001	0.0000					

Valor de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
blanco	5	0.20
gris	4	0.16
rojo	3	0.12
verde	5	0.20
violeta	1	0.04
total	25	1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.1	0.9048	0.0905	0.0045	0.0002	0.0000								
0.2	0.8187	0.1613	0.0164	0.0011	0.0001	0.0000							
0.3	0.7408	0.2222	0.0333	0.0033	0.0002	0.0000							
0.4	0.6703	0.2681	0.0536	0.0072	0.0005	0.0001	0.0000						
0.5	0.6065	0.3033	0.0728	0.0126	0.0018	0.0001	0.0000						
0.6	0.5488	0.3293	0.0928	0.0178	0.0036	0.0004	0.0000						
0.7	0.4966	0.3476	0.1217	0.0209	0.0056	0.0007	0.0001	0.0000					
0.8	0.4493	0.3595	0.1478	0.0233	0.0077	0.0012	0.0001	0.0000					
0.9	0.4066	0.3659	0.1607	0.0249	0.0111	0.0026	0.0001	0.0000					
1.0	0.3679	0.3679	0.1835	0.0263	0.0153	0.0033	0.0001	0.0000					

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.1	0.9048	0.0905	0.0045	0.0002	0.0000								
0.2	0.8187	0.1613	0.0164	0.0011	0.0001	0.0000							
0.3	0.7408	0.2222	0.0333	0.0033	0.0002	0.0000							
0.4	0.6703	0.2681	0.0536	0.0072	0.0005	0.0001	0.0000						
0.5	0.6065	0.3033	0.0728	0.0126	0.0018	0.0001	0.0000						
0.6	0.5488	0.3293	0.0928	0.0178	0.0036	0.0004	0.0000						
0.7	0.4966	0.3476	0.1217	0.0209	0.0056	0.0007	0.0001	0.0000					
0.8	0.4493	0.3595	0.1478	0.0233	0.0077	0.0012	0.0001	0.0000					
0.9	0.4066	0.3659	0.1607	0.0249	0.0111	0.0026	0.0001	0.0000					
1.0	0.3679	0.3679	0.1835	0.0263	0.0153	0.0033	0.0001	0.0000					

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.1	0.9048	0.0905	0.0045	0.0002	0.0000								
0.2	0.8187	0.1613	0.0164	0.0011	0.0001	0.0000							
0.3	0.7408	0.2222	0.0333	0.0033	0.0002	0.0000							
0.4	0.6703	0.2681	0.0536	0.0072	0.0005	0.0001	0.0000						
0.5	0.6065	0.3033	0.0728	0.0126	0.0018	0.0001	0.0000						
0.6	0.5488	0.3293	0.0928	0.0178	0.0036	0.0004	0.0000						
0.7	0.4966	0.3476	0.1217	0.0209	0.0056	0.0007	0.0001	0.0000					
0.8	0.4493	0.3595	0.1478	0.0233	0.0077	0.0012	0.0001	0.0000					
0.9	0.4066	0.3659	0.1607	0.0249	0.0111	0.0026	0.0001	0.0000					
1.0	0.3679	0.3679	0.1835	0.0263	0.0153	0.0033	0.0001	0.0000					

Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.

Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada.



Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.

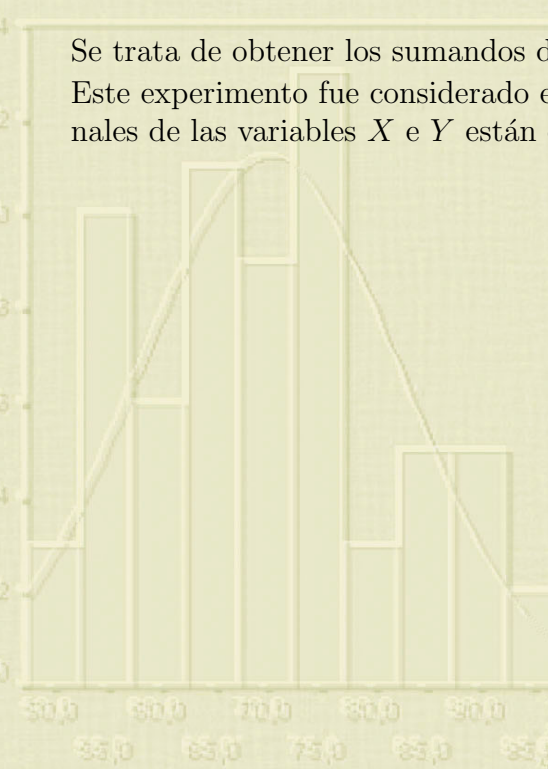
Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada. Las distribuciones conjunta y marginales de las variables X e Y están dadas en la siguiente tabla:



Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.

Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada. Las distribuciones conjunta y marginales de las variables X e Y están dadas en la siguiente tabla:

X	Y		$P(X = x_i)$
	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$P(Y = y_j)$		3/5	2/5



Valor de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
blanco	5	0.20
gris	4	0.16
rojo	3	0.12
verde	5	0.20
violeta	1	0.04
total	4	0.16
	25	1



Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.

Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada. Las distribuciones conjunta y marginales de las variables X e Y están dadas en la siguiente tabla:

X	Y		$P(X = x_i)$
	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$P(Y = y_j)$	3/5	2/5	

de donde se obtiene que $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{5} \left(\frac{2}{5} \right)^2 = \frac{6}{25}$.

Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.

Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada. Las distribuciones conjunta y marginales de las variables X e Y están dadas en la siguiente tabla:

X	Y		$P(X = x_i)$
	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$P(Y = y_j)$	3/5	2/5	

de donde se obtiene que $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$.

A continuación calculamos los dos sumandos de la descomposición:

Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.

Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada. Las distribuciones conjunta y marginales de las variables X e Y están dadas en la siguiente tabla:

X	Y		$P(X = x_i)$
	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$P(Y = y_j)$	3/5	2/5	

de donde se obtiene que $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$.

A continuación calculamos los dos sumandos de la descomposición:

▪ $Var[E[X/Y]]$

Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.

Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada. Las distribuciones conjunta y marginales de las variables X e Y están dadas en la siguiente tabla:

X	Y		$P(X = x_i)$
	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$P(Y = y_j)$	3/5	2/5	

de donde se obtiene que $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$.

A continuación calculamos los dos sumandos de la descomposición:

$$\blacksquare Var[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[E[X/Y]])^2$$

Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.

Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada. Las distribuciones conjunta y marginales de las variables X e Y están dadas en la siguiente tabla:

X	Y		$P(X = x_i)$
	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$P(Y = y_j)$		3/5	2/5

de donde se obtiene que $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$.

A continuación calculamos los dos sumandos de la descomposición:

$$\blacksquare Var[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[E[X/Y]])^2 = E[(E[X/Y])^2] - (E[X])^2$$

Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.

Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada. Las distribuciones conjunta y marginales de las variables X e Y están dadas en la siguiente tabla:

X	Y		$P(X = x_i)$
	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$P(Y = y_j)$	3/5	2/5	

de donde se obtiene que $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$.

A continuación calculamos los dos sumandos de la descomposición:

$$\blacksquare Var[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[E[X/Y]])^2 = E[(E[X/Y])^2] - (E[X])^2 = E[(E[X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2.$$

Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.

Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada. Las distribuciones conjunta y marginales de las variables X e Y están dadas en la siguiente tabla:

X	Y		$P(X = x_i)$
	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$P(Y = y_j)$	3/5	2/5	

de donde se obtiene que $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$.

A continuación calculamos los dos sumandos de la descomposición:

- $Var[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[E[X/Y]])^2 = E[(E[X/Y])^2] - (E[X])^2 = E[(E[X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2$.
- $E[Var[X/Y]]$

Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.

Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada. Las distribuciones conjunta y marginales de las variables X e Y están dadas en la siguiente tabla:

X	Y		$P(X = x_i)$
	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$P(Y = y_j)$	3/5	2/5	

de donde se obtiene que $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$.

A continuación calculamos los dos sumandos de la descomposición:

- $Var[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[E[X/Y]])^2 = E[(E[X/Y])^2] - (E[X])^2 = E[(E[X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2$.
- $E[Var[X/Y]] = E[E[X^2/Y]] - (E[X/Y])^2$

Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var [X] = Var [E [X/Y]] + E [Var [X/Y]]$.

Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada. Las distribuciones conjunta y marginales de las variables X e Y están dadas en la siguiente tabla:

X	Y		$P(X = x_i)$
	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$P(Y = y_j)$	3/5	2/5	

de donde se obtiene que $Var [X] = E [X^2] - (E [X])^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$.

A continuación calculamos los dos sumandos de la descomposición:

- $Var [E [X/Y]] = E [(E [X/Y])^2] - (E [E [X/Y]])^2 = E [(E [X/Y])^2] - (E [X])^2 = E [(E [X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2$.
- $E [Var [X/Y]] = E [E [X^2/Y]] - E [(E [X/Y])^2] = E [X^2] - E [(E [X/Y])^2]$

Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var [X] = Var [E [X/Y]] + E [Var [X/Y]]$.

Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada. Las distribuciones conjunta y marginales de las variables X e Y están dadas en la siguiente tabla:

X	Y		$P(X = x_i)$
	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$P(Y = y_j)$	3/5	2/5	

de donde se obtiene que $Var [X] = E [X^2] - (E [X])^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$.

A continuación calculamos los dos sumandos de la descomposición:

- $Var [E [X/Y]] = E [(E [X/Y])^2] - (E [E [X/Y]])^2 = E [(E [X/Y])^2] - (E [X])^2 = E [(E [X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2$.
- $E [Var [X/Y]] = E [E [X^2/Y]] - E [(E [X/Y])^2] = E [X^2] - E [(E [X/Y])^2] = \frac{2}{5} - E [(E [X/Y])^2]$.

Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var [X] = Var [E [X/Y]] + E [Var [X/Y]]$.

Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada. Las distribuciones conjunta y marginales de las variables X e Y están dadas en la siguiente tabla:

X	Y		$P(X = x_i)$
	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$P(Y = y_j)$	3/5	2/5	

de donde se obtiene que $Var [X] = E [X^2] - (E [X])^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$.

A continuación calculamos los dos sumandos de la descomposición:

- $Var [E [X/Y]] = E [(E [X/Y])^2] - (E [E [X/Y]])^2 = E [(E [X/Y])^2] - (E [X])^2 = E [(E [X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2$.
- $E [Var [X/Y]] = E [E [X^2/Y]] - E [(E [X/Y])^2] = E [X^2] - E [(E [X/Y])^2] = \frac{2}{5} - E [(E [X/Y])^2]$.

A la vista de estas expresiones, sólo es preciso calcular $E [(E [X/Y])^2]$, lo que haremos teniendo en cuenta la expresión de $E [X/Y]$ que se obtuvo en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada,

Se trata de obtener los sumandos de la descomposición $Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$.

Este experimento fue considerado en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada. Las distribuciones conjunta y marginales de las variables X e Y están dadas en la siguiente tabla:

X	Y		$P(X = x_i)$
	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$P(Y = y_j)$	3/5	2/5	

de donde se obtiene que $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$.

A continuación calculamos los dos sumandos de la descomposición:

- $Var[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - (E[E[X/Y]])^2 = E[(E[X/Y])^2] - (E[X])^2 = E[(E[X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2$.
- $E[Var[X/Y]] = E[E[X^2/Y]] - E[(E[X/Y])^2] = E[X^2] - E[(E[X/Y])^2] = \frac{2}{5} - E[(E[X/Y])^2]$.

A la vista de estas expresiones, sólo es preciso calcular $E[(E[X/Y])^2]$, lo que haremos teniendo en cuenta la expresión de $E[X/Y]$ que se obtuvo en el [ejemplo 1](#) de esperanza condicionada,

$$E[X/Y] = \begin{cases} \frac{1}{2} & Y = 0 \\ \frac{1}{4} & Y = 1. \end{cases}$$

Ya que la variable $E[X/Y]$ es función de Y , su cuadrado también lo es y, por lo tanto,



Ya que la variable $E[X/Y]$ es función de Y , su cuadrado también lo es y, por lo tanto,

$$E[(E[X/Y])^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P(Y=0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P(Y=1)$$

Ya que la variable $E[X/Y]$ es función de Y , su cuadrado también lo es y, por lo tanto,

$$E[(E[X/Y])^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P(Y=0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P(Y=1) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{16} \times \frac{2}{5}\right)$$

Peso (kg)

Probabilidad

(x)

Valor de la variable

Frecuencia absoluta

Frecuencia relativa

blanco	5	0.20
gris	4	0.16
rojo	3	0.12
verde	5	0.20
violeta	1	0.04
total	25	1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

Ya que la variable $E[X/Y]$ es función de Y , su cuadrado también lo es y, por lo tanto,

$$E[(E[X/Y])^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P(Y=0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P(Y=1) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{16} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{40}.$$

Peso (kg)

Probabilidad

(kg)

Valor de la variable

Frecuencia absoluta

Frecuencia relativa

blanco

5

0.20

rojo

4

0.16

verde

5

0.20

violeta

1

0.04

total

25

1

Ya que la variable $E[X/Y]$ es función de Y , su cuadrado también lo es y, por lo tanto,

$$E[(E[X/Y])^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P(Y=0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P(Y=1) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{16} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{40}.$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas de $Var[E[X/Y]]$ y $E[Var[X/Y]]$ obtenemos:

Ya que la variable $E[X/Y]$ es función de Y , su cuadrado también lo es y, por lo tanto,

$$E[(E[X/Y])^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P(Y=0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P(Y=1) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{16} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{40}.$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas de $Var[E[X/Y]]$ y $E[Var[X/Y]]$ obtenemos:

$$\blacksquare Var[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{3}{200},$$

Ya que la variable $E[X/Y]$ es función de Y , su cuadrado también lo es y, por lo tanto,

$$E[(E[X/Y])^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P(Y=0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P(Y=1) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{16} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{40}.$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas de $Var[E[X/Y]]$ y $E[Var[X/Y]]$ obtenemos:

- $Var[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{3}{200},$
- $E[Var[X/Y]] = \frac{2}{5} - E[(E[X/Y])^2] = \frac{9}{40},$

Ya que la variable $E[X/Y]$ es función de Y , su cuadrado también lo es y, por lo tanto,

$$E[(E[X/Y])^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P(Y=0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P(Y=1) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{16} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{40}.$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas de $Var[E[X/Y]]$ y $E[Var[X/Y]]$ obtenemos:

- $Var[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{3}{200},$
- $E[Var[X/Y]] = \frac{2}{5} - E[(E[X/Y])^2] = \frac{9}{40},$

cantidades que, como es inmediato comprobar, suman el valor de $Var[X]$ obtenido al comienzo. ■

Ya que la variable $E[X/Y]$ es función de Y , su cuadrado también lo es y, por lo tanto,

$$E[(E[X/Y])^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P(Y=0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P(Y=1) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{16} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{40}.$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas de $Var[E[X/Y]]$ y $E[Var[X/Y]]$ obtenemos:

- $Var[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{3}{200},$
- $E[Var[X/Y]] = \frac{2}{5} - E[(E[X/Y])^2] = \frac{9}{40},$

cantidades que, como es inmediato comprobar, suman el valor de $Var[X]$ obtenido al comienzo. ■

Ejemplo 2: Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x, y) = 2$, $0 < x < y < 1$. Descomponer la varianza de la variable Y teniendo en cuenta el condicionamiento a X .

Ya que la variable $E[X/Y]$ es función de Y , su cuadrado también lo es y, por lo tanto,

$$E[(E[X/Y])^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P(Y=0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P(Y=1) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{16} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{40}.$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas de $Var[E[X/Y]]$ y $E[Var[X/Y]]$ obtenemos:

- $Var[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{3}{200},$
- $E[Var[X/Y]] = \frac{2}{5} - E[(E[X/Y])^2] = \frac{9}{40},$

cantidades que, como es inmediato comprobar, suman el valor de $Var[X]$ obtenido al comienzo. ■

Ejemplo 2: Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x, y) = 2$, $0 < x < y < 1$. Descomponer la varianza de la variable Y teniendo en cuenta el condicionamiento a X .

Se trata ahora de obtener los sumandos de la descomposición $Var[Y] = Var[E[Y/X]] + E[Var[Y/X]]$, donde, razonando de forma similar a como se ha hecho en el ejemplo 1,

Ya que la variable $E[X/Y]$ es función de Y , su cuadrado también lo es y, por lo tanto,

$$E[(E[X/Y])^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P(Y=0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P(Y=1) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{16} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{40}.$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas de $Var[E[X/Y]]$ y $E[Var[X/Y]]$ obtenemos:

- $Var[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{3}{200},$
- $E[Var[X/Y]] = \frac{2}{5} - E[(E[X/Y])^2] = \frac{9}{40},$

cantidades que, como es inmediato comprobar, suman el valor de $Var[X]$ obtenido al comienzo. ■

Ejemplo 2: Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x, y) = 2$, $0 < x < y < 1$. Descomponer la varianza de la variable Y teniendo en cuenta el condicionamiento a X .

Se trata ahora de obtener los sumandos de la descomposición $Var[Y] = Var[E[Y/X]] + E[Var[Y/X]]$, donde, razonando de forma similar a como se ha hecho en el ejemplo 1,

- $Var[E[Y/X]] = E[(E[Y/X])^2] - (E[E[Y/X]])^2 = E[(E[Y/X])^2] - (E[Y])^2.$

Ya que la variable $E[X/Y]$ es función de Y , su cuadrado también lo es y, por lo tanto,

$$E[(E[X/Y])^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P(Y=0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P(Y=1) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{16} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{40}.$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas de $Var[E[X/Y]]$ y $E[Var[X/Y]]$ obtenemos:

- $Var[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{3}{200},$
- $E[Var[X/Y]] = \frac{2}{5} - E[(E[X/Y])^2] = \frac{9}{40},$

cantidades que, como es inmediato comprobar, suman el valor de $Var[X]$ obtenido al comienzo. ■

Ejemplo 2: Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x, y) = 2$, $0 < x < y < 1$. Descomponer la varianza de la variable Y teniendo en cuenta el condicionamiento a X .

Se trata ahora de obtener los sumandos de la descomposición $Var[Y] = Var[E[Y/X]] + E[Var[Y/X]]$, donde, razonando de forma similar a como se ha hecho en el ejemplo 1,

- $Var[E[Y/X]] = E[(E[Y/X])^2] - (E[E[Y/X]])^2 = E[(E[Y/X])^2] - (E[Y])^2.$
- $E[Var[Y/X]] = E[E[Y^2/X]] - (E[Y/X])^2 = E[Y^2] - E[(E[Y/X])^2].$

Ya que la variable $E[X/Y]$ es función de Y , su cuadrado también lo es y, por lo tanto,

$$E[(E[X/Y])^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P(Y=0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P(Y=1) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{16} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{40}.$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas de $Var[E[X/Y]]$ y $E[Var[X/Y]]$ obtenemos:

- $Var[E[X/Y]] = E[(E[X/Y])^2] - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{3}{200},$
- $E[Var[X/Y]] = \frac{2}{5} - E[(E[X/Y])^2] = \frac{9}{40},$

cantidades que, como es inmediato comprobar, suman el valor de $Var[X]$ obtenido al comienzo. ■

Ejemplo 2: Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x, y) = 2$, $0 < x < y < 1$. Descomponer la varianza de la variable Y teniendo en cuenta el condicionamiento a X .

Se trata ahora de obtener los sumandos de la descomposición $Var[Y] = Var[E[Y/X]] + E[Var[Y/X]]$, donde, razonando de forma similar a como se ha hecho en el ejemplo 1,

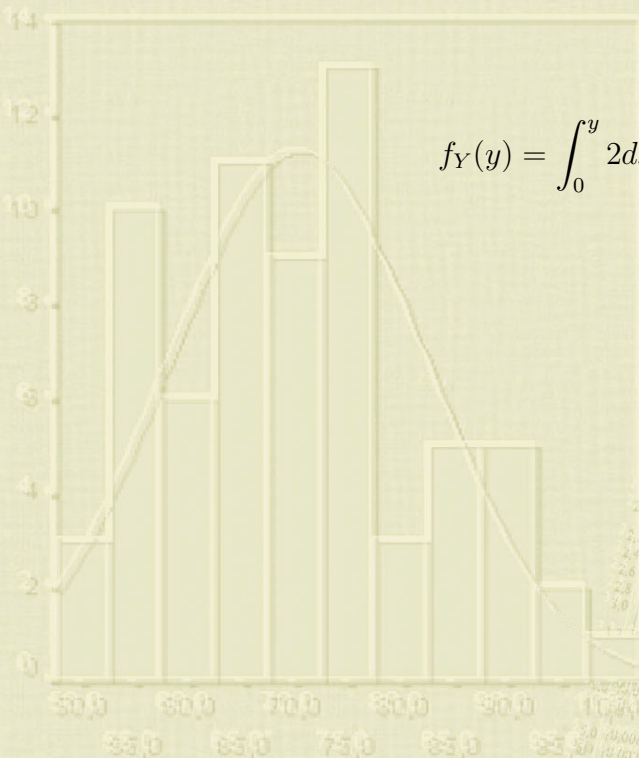
- $Var[E[Y/X]] = E[(E[Y/X])^2] - (E[E[Y/X]])^2 = E[(E[Y/X])^2] - (E[Y])^2.$
- $E[Var[Y/X]] = E[E[Y^2/X]] - (E[Y/X])^2 = E[Y^2] - E[(E[Y/X])^2].$

A la vista de estas expresiones, comenzamos calculando los momentos de orden uno y dos de Y a partir de su función de densidad:

Table 2
Distribution de Poisson $P(\lambda)$

$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$\lambda \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,9048	0,0952	0,0047	0,0002	0,0000							
0,2	0,8187	0,1813	0,0164	0,0011	0,0001	0,0000						
0,4	0,6703	0,2722	0,0533	0,0033	0,0002	0,0000						
0,5	0,6065	0,3033	0,0758	0,0076	0,0011	0,0001	0,0000					



$$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad y \in (0, 1) \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} E[Y] &= \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}, \end{aligned} \right.$$

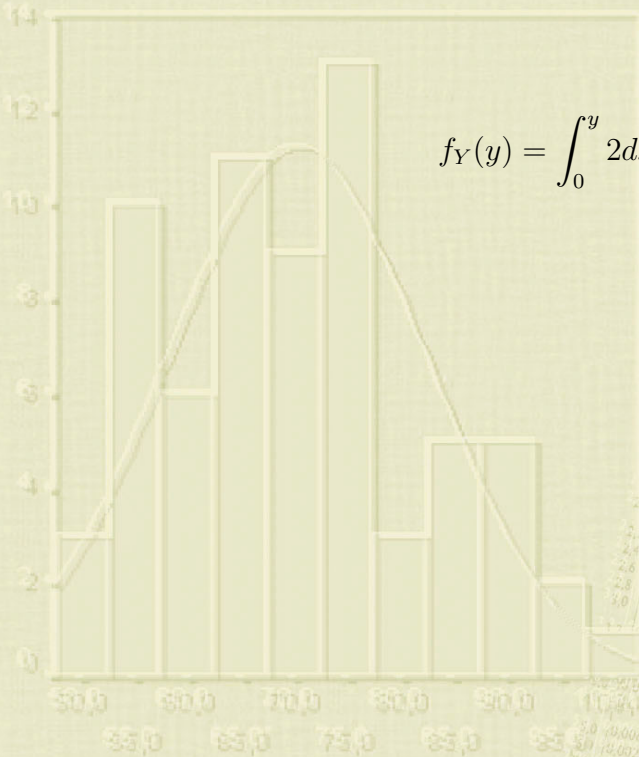
Tabla 2
Distribución de Poisson

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,1	0,9048	0,0952	0,0047	0,0002	0,0000								
0,2	0,8187	0,1813	0,0164	0,0011	0,0001								
0,3	0,7408	0,2592	0,0373	0,0033	0,0003								
0,4	0,6703	0,3297	0,0548	0,0047	0,0004								
0,5	0,6065	0,3935	0,0723	0,0057	0,0005								
0,6	0,5488	0,4512	0,0908	0,0068	0,0006								
0,7	0,4966	0,5034	0,1093	0,0079	0,0007								
0,8	0,4493	0,5507	0,1277	0,0091	0,0008								
0,9	0,4066	0,5934	0,1458	0,0104	0,0010								
1,0	0,3679	0,6321	0,1633	0,0119	0,0012								
1,1	0,3336	0,6664	0,1803	0,0135	0,0014								
1,2	0,3033	0,6967	0,2068	0,0153	0,0016								
1,3	0,2770	0,7330	0,2420	0,0173	0,0019								
1,4	0,2548	0,7752	0,2865	0,0200	0,0022								
1,5	0,2361	0,8239	0,3393	0,0233	0,0026								
1,6	0,2203	0,8787	0,3991	0,0272	0,0030								
1,7	0,2070	0,9409	0,4648	0,0317	0,0035								
1,8	0,1958	0,9692	0,5357	0,0368	0,0040								
1,9	0,1865	0,9813	0,6113	0,0425	0,0046								
2,0	0,1792	0,9881	0,6913	0,0489	0,0052								
2,1	0,1736	0,9924	0,7749	0,0559	0,0059								
2,2	0,1694	0,9955	0,8613	0,0638	0,0066								
2,3	0,1664	0,9976	0,9504	0,0720	0,0074								
2,4	0,1644	0,9988	0,1046	0,0804	0,0082								
2,5	0,1633	0,9994	0,1133	0,0890	0,0090								
2,6	0,1629	0,9997	0,1220	0,0978	0,0098								
2,7	0,1631	0,9999	0,1316	0,1068	0,0106								
2,8	0,1638	0,9999	0,1414	0,1160	0,0114								
2,9	0,1649	0,9999	0,1513	0,1263	0,0123								
3,0	0,1664	0,9999	0,1613	0,1371	0,0133								
3,1	0,1683	0,9999	0,1716	0,1486	0,0144								
3,2	0,1705	0,9999	0,1825	0,1608	0,0156								
3,3	0,1730	0,9999	0,1939	0,1736	0,0169								
3,4	0,1758	0,9999	0,2057	0,1871	0,0183								
3,5	0,1789	0,9999	0,2180	0,2011	0,0198								
3,6	0,1822	0,9999	0,2307	0,2156	0,0214								
3,7	0,1858	0,9999	0,2438	0,2306	0,0230								
3,8	0,1896	0,9999	0,2573	0,2461	0,0247								
3,9	0,1936	0,9999	0,2711	0,2620	0,0265								
4,0	0,1978	0,9999	0,2852	0,2783	0,0284								
4,1	0,2021	0,9999	0,3000	0,2948	0,0304								
4,2	0,2066	0,9999	0,3159	0,3116	0,0324								
4,3	0,2112	0,9999	0,3320	0,3288	0,0345								
4,4	0,2160	0,9999	0,3485	0,3464	0,0366								
4,5	0,2209	0,9999	0,3653	0,3646	0,0388								
4,6	0,2260	0,9999	0,3825	0,3831	0,0410								
4,7	0,2312	0,9999	0,4000	0,4020	0,0433								
4,8	0,2366	0,9999	0,4179	0,4195	0,0456								
4,9	0,2421	0,9999	0,4361	0,4373	0,0480								
5,0	0,2478	0,9999	0,4546	0,4554	0,0504								
5,1	0,2536	0,9999	0,4734	0,4738	0,0529								
5,2	0,2595	0,9999	0,4925	0,4935	0,0554								
5,3	0,2655	0,9999	0,5119	0,5125	0,0580								
5,4	0,2716	0,9999	0,5316	0,5318	0,0606								
5,5	0,2778	0,9999	0,5516	0,5516	0,0633								
5,6	0,2841	0,9999	0,5719	0,5716	0,0660								
5,7	0,2905	0,9999	0,5925	0,5919	0,0688								
5,8	0,2970	0,9999	0,6134	0,6125	0,0716								
5,9	0,3036	0,9999	0,6346	0,6333	0,0745								
6,0	0,3103	0,9999	0,6561	0,6544	0,0774								
6,1	0,3171	0,9999	0,6779	0,6758	0,0804								
6,2	0,3240	0,9999	0,6999	0,6975	0,0834								
6,3	0,3310	0,9999	0,7221	0,7194	0,0865								
6,4	0,3381	0,9999	0,7445	0,7415	0,0896								
6,5	0,3453	0,9999	0,7671	0,7638	0,0928								
6,6	0,3526	0,9999	0,7900	0,7864	0,0960								
6,7	0,3600	0,9999	0,8131	0,8092	0,0993								
6,8	0,3675	0,9999	0,8364	0,8322	0,1026								
6,9	0,3751	0,9999	0,8600	0,8555	0,1060								
7,0	0,3828	0,9999	0,8838	0,8790	0,1094								
7,1	0,3906	0,9999	0,9079	0,9028	0,1129								
7,2	0,3985	0,9999	0,9322	0,9268	0,1164								
7,3	0,4065	0,9999	0,9567	0,9510	0,1200								
7,4	0,4146	0,9999	0,9814	0,9754	0,1236								
7,5	0,4228	0,9999	1,0063	1,0000	0,1273								
7,6	0,4311	0,9999	1,0314	1,0248	0,1310								
7,7	0,4395	0,9999	1,0567	1,0499	0,1348								
7,8	0,4480	0,9999	1,0822	1,0752	0,1386								
7,9	0,4566	0,9999	1,1079	1,1009	0,1425								
8,0	0,4653	0,9999	1,1338	1,1266	0,1464								
8,1	0,4741	0,9999	1,1599	1,1525	0,1504								
8,2	0,4830	0,9999	1,1862	1,1787	0,1544								
8,3	0,4920	0,9999	1,2127	1,2050	0,1584								
8,4	0,5011	0,9999	1,2394	1,2315	0,1625								
8,5	0,5103	0,9999	1,2663	1,2582	0,1666								
8,6	0,5196	0,9999	1,2934	1,2850	0,1707								
8,7	0,5290	0,9999	1,3207	1,3116	0,1749								
8,8	0,5385	0,9999	1,3482	1,3387	0,1790								
8,9	0,5481	0,9999	1,3759	1,3659	0,1832								
9,0	0,5578	0,9999	1,4038	1,3935	0,1874								
9,1	0,5676	0,9999	1,4319	1,4210	0,1916								
9,2	0,5775	0,9999	1,4601	1,4488	0,1958								
9,3	0,5875	0,9999	1,4885	1,4768	0,2000								
9,4	0,5976	0,9999	1,5170	1,5049	0,2042								
9,5	0,6078	0,9999	1,5457	1,5331	0,2084								
9,6	0,6181	0,9999	1,5745	1,5614	0,2126								
9,7	0,6285	0,9999	1,6034	1,5898	0,2168								
9,8	0,6390	0,9999	1,6325	1,6183	0,2210								
9,9	0,6496	0,9999	1,6617	1,6470	0,2252								
10,0	0,6603	0,9999	1,6911	1,6760	0,2294								

Peso (kg)

Probabilidad

(x)



$$\begin{cases} E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}, \\ E[Y^2] = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Tabla 2
Distribución de Poisson

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.5	0.6065	0.3033	0.0758	0.0175	0.0031	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.0	0.3679	0.3679	0.1839	0.0723	0.0248	0.0082	0.0025	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
1.5	0.2231	0.3347	0.2480	0.1323	0.0623	0.0271	0.0105	0.0038	0.0013	0.0004	0.0001
2.0	0.1353	0.2706	0.2538	0.1755	0.1054	0.0540	0.0271	0.0133	0.0064	0.0032	0.0015
2.5	0.0821	0.1641	0.1755	0.1465	0.1054	0.0623	0.0339	0.0183	0.0097	0.0051	0.0026
3.0	0.0500	0.1000	0.1493	0.1647	0.1493	0.1000	0.0500	0.0250	0.0125	0.0062	0.0031
3.5	0.0303	0.0606	0.0912	0.1122	0.1122	0.0912	0.0606	0.0303	0.0151	0.0076	0.0038
4.0	0.0183	0.0367	0.0551	0.0723	0.0821	0.0821	0.0723	0.0551	0.0367	0.0223	0.0125
4.5	0.0100	0.0200	0.0303	0.0406	0.0500	0.0540	0.0540	0.0500	0.0406	0.0303	0.0200
5.0	0.0054	0.0108	0.0164	0.0223	0.0271	0.0303	0.0303	0.0303	0.0271	0.0223	0.0164
5.5	0.0026	0.0051	0.0076	0.0108	0.0133	0.0151	0.0151	0.0151	0.0133	0.0108	0.0076
6.0	0.0013	0.0026	0.0038	0.0051	0.0062	0.0076	0.0076	0.0076	0.0062	0.0051	0.0038
6.5	0.0005	0.0010	0.0015	0.0020	0.0025	0.0031	0.0031	0.0031	0.0025	0.0020	0.0015
7.0	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.0010	0.0013	0.0013	0.0013	0.0010	0.0008	0.0006
7.5	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0003	0.0002
8.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Valor de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
blanco	5	0.20
rojo	4	0.16
verde	5	0.20
violeta	1	0.04
metálico	4	0.16
total	25	1

Peso (kg)

Probabilidad

$$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad y \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}, \\ E[Y^2] = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora calculamos $E[(E[Y/X])^2]$, lo que haremos teniendo en cuenta la expresión $E[Y/X] = \frac{1+X}{2}$, que se obtuvo en el **ejemplo 2** de esperanza condicionada:

$$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad y \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}, \\ E[Y^2] = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora calculamos $E[(E[Y/X])^2]$, lo que haremos teniendo en cuenta la expresión $E[Y/X] = \frac{1+X}{2}$, que se obtuvo en el **ejemplo 2** de esperanza condicionada:

$$E[(E[Y/X])^2] = E\left[\left(\frac{1+X}{2}\right)^2\right]$$

$$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad y \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}, \\ E[Y^2] = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora calculamos $E[(E[Y/X])^2]$, lo que haremos teniendo en cuenta la expresión $E[Y/X] = \frac{1+X}{2}$, que se obtuvo en el **ejemplo 2** de esperanza condicionada:

$$E[(E[Y/X])^2] = E\left[\left(\frac{1+X}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}E[1 + X^2 + 2X].$$

$$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad y \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}, \\ E[Y^2] = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora calculamos $E[(E[Y/X])^2]$, lo que haremos teniendo en cuenta la expresión $E[Y/X] = \frac{1+X}{2}$, que se obtuvo en el **ejemplo 2** de esperanza condicionada:

$$E[(E[Y/X])^2] = E\left[\left(\frac{1+X}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}E[1 + X^2 + 2X].$$

Los momentos de X se obtienen a partir de su función de densidad:

$$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad y \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}, \\ E[Y^2] = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora calculamos $E[(E[Y/X])^2]$, lo que haremos teniendo en cuenta la expresión $E[Y/X] = \frac{1+X}{2}$, que se obtuvo en el **ejemplo 2** de esperanza condicionada:

$$E[(E[Y/X])^2] = E\left[\left(\frac{1+X}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}E[1 + X^2 + 2X].$$

Los momentos de X se obtienen a partir de su función de densidad:

$$f_X(x) = \int_x^1 2dx = 2(1-x), \quad x \in (0, 1)$$

$$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad y \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}, \\ E[Y^2] = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora calculamos $E[(E[Y/X])^2]$, lo que haremos teniendo en cuenta la expresión $E[Y/X] = \frac{1+X}{2}$, que se obtuvo en el **ejemplo 2** de esperanza condicionada:

$$E[(E[Y/X])^2] = E\left[\left(\frac{1+X}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}E[1 + X^2 + 2X].$$

Los momentos de X se obtienen a partir de su función de densidad:

$$f_X(x) = \int_x^1 2dx = 2(1-x), \quad x \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[X] = \int_0^1 2x(1-x)dx = \frac{1}{3}, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad y \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}, \\ E[Y^2] = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora calculamos $E[(E[Y/X])^2]$, lo que haremos teniendo en cuenta la expresión $E[Y/X] = \frac{1+X}{2}$, que se obtuvo en el **ejemplo 2** de esperanza condicionada:

$$E[(E[Y/X])^2] = E\left[\left(\frac{1+X}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}E[1 + X^2 + 2X].$$

Los momentos de X se obtienen a partir de su función de densidad:

$$f_X(x) = \int_x^1 2dx = 2(1-x), \quad x \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[X] = \int_0^1 2x(1-x)dx = \frac{1}{3}, \\ E[X^2] = \int_0^1 2x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad y \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}, \\ E[Y^2] = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora calculamos $E[(E[Y/X])^2]$, lo que haremos teniendo en cuenta la expresión $E[Y/X] = \frac{1+X}{2}$, que se obtuvo en el **ejemplo 2** de esperanza condicionada:

$$E[(E[Y/X])^2] = E\left[\left(\frac{1+X}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}E[1 + X^2 + 2X].$$

Los momentos de X se obtienen a partir de su función de densidad:

$$f_X(x) = \int_x^1 2dx = 2(1-x), \quad x \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[X] = \int_0^1 2x(1-x)dx = \frac{1}{3}, \\ E[X^2] = \int_0^1 2x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}, \end{cases}$$

y resulta que $E[(E[Y/X])^2] = \frac{11}{24}$, de donde:

$$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad y \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}, \\ E[Y^2] = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora calculamos $E[(E[Y/X])^2]$, lo que haremos teniendo en cuenta la expresión $E[Y/X] = \frac{1+X}{2}$, que se obtuvo en el **ejemplo 2** de esperanza condicionada:

$$E[(E[Y/X])^2] = E\left[\left(\frac{1+X}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}E[1 + X^2 + 2X].$$

Los momentos de X se obtienen a partir de su función de densidad:

$$f_X(x) = \int_x^1 2dx = 2(1-x), \quad x \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[X] = \int_0^1 2x(1-x)dx = \frac{1}{3}, \\ E[X^2] = \int_0^1 2x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}, \end{cases}$$

y resulta que $E[(E[Y/X])^2] = \frac{11}{24}$, de donde:

$$\blacksquare \text{ } Var[E[Y/X]] = E[(E[Y/X])^2] - (E[Y])^2 = \frac{11}{24} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{72}.$$

$$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad y \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}, \\ E[Y^2] = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora calculamos $E[(E[Y/X])^2]$, lo que haremos teniendo en cuenta la expresión $E[Y/X] = \frac{1+X}{2}$, que se obtuvo en el **ejemplo 2** de esperanza condicionada:

$$E[(E[Y/X])^2] = E\left[\left(\frac{1+X}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}E[1 + X^2 + 2X].$$

Los momentos de X se obtienen a partir de su función de densidad:

$$f_X(x) = \int_x^1 2dx = 2(1-x), \quad x \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[X] = \int_0^1 2x(1-x)dx = \frac{1}{3}, \\ E[X^2] = \int_0^1 2x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}, \end{cases}$$

y resulta que $E[(E[Y/X])^2] = \frac{11}{24}$, de donde:

- $Var[E[Y/X]] = E[(E[Y/X])^2] - (E[Y])^2 = \frac{11}{24} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{72}.$
- $E[Var[Y/X]] = E[Y^2] - E[(E[Y/X])^2] = \frac{1}{2} - \frac{11}{24} = \frac{1}{24}.$

$$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad y \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}, \\ E[Y^2] = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora calculamos $E[(E[Y/X])^2]$, lo que haremos teniendo en cuenta la expresión $E[Y/X] = \frac{1+X}{2}$, que se obtuvo en el **ejemplo 2** de esperanza condicionada:

$$E[(E[Y/X])^2] = E\left[\left(\frac{1+X}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}E[1 + X^2 + 2X].$$

Los momentos de X se obtienen a partir de su función de densidad:

$$f_X(x) = \int_x^1 2dx = 2(1-x), \quad x \in (0, 1) \rightarrow \begin{cases} E[X] = \int_0^1 2x(1-x)dx = \frac{1}{3}, \\ E[X^2] = \int_0^1 2x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}, \end{cases}$$

y resulta que $E[(E[Y/X])^2] = \frac{11}{24}$, de donde:

- $Var[E[Y/X]] = E[(E[Y/X])^2] - (E[Y])^2 = \frac{11}{24} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{72}.$
- $E[Var[Y/X]] = E[Y^2] - E[(E[Y/X])^2] = \frac{1}{2} - \frac{11}{24} = \frac{1}{24}.$

Por lo tanto, $Var[Y] = 1/72 + 1/24 = 1/18$, lo que concuerda con el valor obtenido directamente de la distribución

marginal de Y,

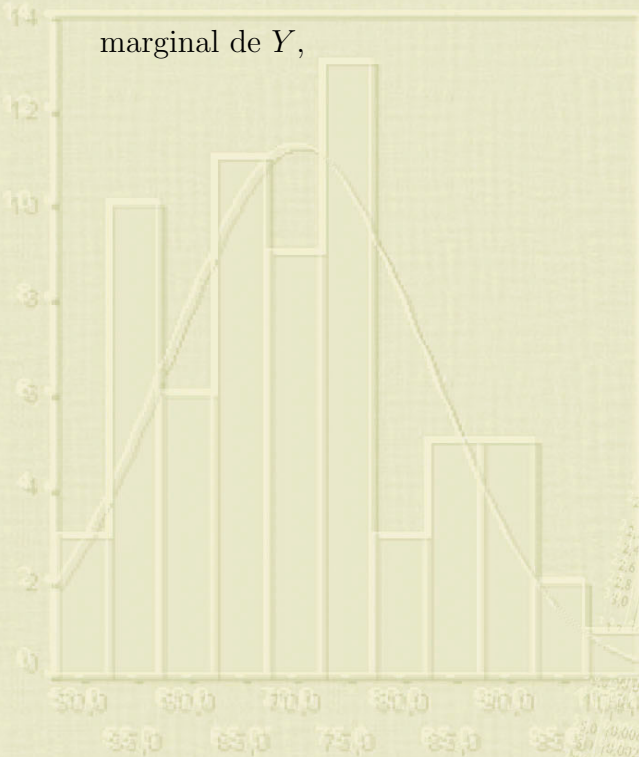


Tabla 2
Distribución de Poisson $P(X)$

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.1	0.9048	0.0905	0.0045	0.0002	0.0000								
0.2	0.8187	0.1637	0.0164	0.0011	0.0000								
0.3	0.7408	0.2222	0.0333	0.0033	0.0002	0.0000							
0.4	0.6703	0.2681	0.0536	0.0072	0.0007	0.0000							
0.5	0.6065	0.3073	0.0728	0.0126	0.0018	0.0001	0.0000						
0.6	0.5488	0.3293	0.0928	0.0178	0.0036	0.0004	0.0000	0.0000					
0.7	0.4966	0.3476	0.1217	0.0269	0.0056	0.0007	0.0001	0.0000					
0.8	0.4493	0.3595	0.1478	0.0393	0.0077	0.0012	0.0001	0.0000					
0.9	0.4066	0.3659	0.1647	0.0494	0.0111	0.0026	0.0003	0.0000					
1.0	0.3679	0.3679	0.1835	0.0613	0.0153	0.0033	0.0006	0.0001	0.0000				
1.1	0.3329	0.3662	0.2014	0.0778	0.0203	0.0043	0.0008	0.0001	0.0000				
1.2	0.3012	0.3614	0.2165	0.0867	0.0260	0.0052	0.0012	0.0001	0.0000				
1.3	0.2725	0.3493	0.2303	0.0998	0.0324	0.0064	0.0018	0.0003	0.0000				
1.4	0.2466	0.3422	0.2412	0.1128	0.0395	0.0111	0.0026	0.0005	0.0000				
1.5	0.2231	0.3347	0.2516	0.1235	0.0471	0.0141	0.0035	0.0007	0.0001	0.0000			
1.6	0.2015	0.3266	0.2604	0.1378	0.0551	0.0176	0.0047	0.0010	0.0002	0.0000			
1.7	0.1827	0.3166	0.2684	0.1498	0.0636	0.0218	0.0061	0.0014	0.0003	0.0000			
1.8	0.1663	0.3055	0.2646	0.1598	0.0723	0.0266	0.0078	0.0019	0.0004	0.0000			
1.9	0.1516	0.2932	0.2706	0.1678	0.0812	0.0306	0.0098	0.0022	0.0006	0.0001	0.0000		
2.0	0.1393	0.2797	0.2767	0.1804	0.0902	0.0361	0.0120	0.0034	0.0009	0.0002	0.0000		
2.1	0.1108	0.2638	0.2811	0.1928	0.0976	0.0414	0.0155	0.0055	0.0015	0.0004	0.0001	0.0000	
2.2	0.0909	0.2454	0.2831	0.2046	0.1029	0.0476	0.0174	0.0055	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	
2.3	0.0753	0.2246	0.2824	0.2158	0.1062	0.0524	0.0193	0.0057	0.0019	0.0006	0.0001	0.0000	
2.4	0.0628	0.2016	0.2796	0.2256	0.1078	0.0559	0.0211	0.0060	0.0020	0.0007	0.0001	0.0000	
2.5	0.0530	0.1763	0.2746	0.2337	0.1087	0.0587	0.0226	0.0063	0.0021	0.0008	0.0001	0.0000	
2.6	0.0454	0.1496	0.2684	0.2396	0.1090	0.0609	0.0238	0.0065	0.0022	0.0009	0.0001	0.0000	
2.7	0.0396	0.1216	0.2611	0.2436	0.1088	0.0628	0.0248	0.0067	0.0023	0.0010	0.0001	0.0000	
2.8	0.0353	0.0926	0.2528	0.2456	0.1074	0.0644	0.0256	0.0068	0.0024	0.0011	0.0001	0.0000	
2.9	0.0322	0.0626	0.2436	0.2456	0.1048	0.0659	0.0261	0.0069	0.0025	0.0012	0.0001	0.0000	
3.0	0.0299	0.0316	0.2336	0.2436	0.1016	0.0674	0.0266	0.0070	0.0026	0.0013	0.0001	0.0000	
3.1	0.0282	0.0000	0.2226	0.2396	0.0978	0.0689	0.0270	0.0071	0.0027	0.0014	0.0001	0.0000	
3.2	0.0270	0.0000	0.2106	0.2346	0.0934	0.0694	0.0274	0.0072	0.0028	0.0015	0.0001	0.0000	
3.3	0.0261	0.0000	0.1976	0.2286	0.0886	0.0699	0.0277	0.0073	0.0029	0.0016	0.0001	0.0000	
3.4	0.0254	0.0000	0.1836	0.2216	0.0834	0.0694	0.0280	0.0074	0.0030	0.0017	0.0001	0.0000	
3.5	0.0249	0.0000	0.1686	0.2136	0.0778	0.0689	0.0282	0.0075	0.0031	0.0018	0.0001	0.0000	
3.6	0.0245	0.0000	0.1526	0.2046	0.0718	0.0674	0.0284	0.0076	0.0032	0.0019	0.0001	0.0000	
3.7	0.0242	0.0000	0.1356	0.1946	0.0654	0.0659	0.0285	0.0077	0.0033	0.0020	0.0001	0.0000	
3.8	0.0240	0.0000	0.1176	0.1836	0.0586	0.0644	0.0286	0.0078	0.0034	0.0021	0.0001	0.0000	
3.9	0.0238	0.0000	0.1086	0.1716	0.0514	0.0629	0.0287	0.0079	0.0035	0.0022	0.0001	0.0000	
4.0	0.0236	0.0000	0.0986	0.1586	0.0436	0.0614	0.0288	0.0080	0.0036	0.0023	0.0001	0.0000	
4.1	0.0235	0.0000	0.0876	0.1446	0.0354	0.0599	0.0289	0.0081	0.0037	0.0024	0.0001	0.0000	
4.2	0.0234	0.0000	0.0756	0.1296	0.0266	0.0584	0.0290	0.0082	0.0038	0.0025	0.0001	0.0000	
4.3	0.0233	0.0000	0.0626	0.1136	0.0174	0.0569	0.0291	0.0083	0.0039	0.0026	0.0001	0.0000	
4.4	0.0232	0.0000	0.0486	0.0966	0.0076	0.0554	0.0292	0.0084	0.0040	0.0027	0.0001	0.0000	
4.5	0.0231	0.0000	0.0336	0.0786	0.0000	0.0539	0.0293	0.0085	0.0041	0.0028	0.0001	0.0000	
4.6	0.0230	0.0000	0.0176	0.0596	0.0000	0.0524	0.0294	0.0086	0.0042	0.0029	0.0001	0.0000	
4.7	0.0229	0.0000	0.0000	0.0396	0.0000	0.0509	0.0295	0.0087	0.0043	0.0030	0.0001	0.0000	
4.8	0.0228	0.0000	0.0000	0.0186	0.0000	0.0494	0.0296	0.0088	0.0044	0.0031	0.0001	0.0000	
4.9	0.0227	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0479	0.0297	0.0089	0.0045	0.0032	0.0001	0.0000	
5.0	0.0226	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0464	0.0298	0.0090	0.0046	0.0033	0.0001	0.0000	

Valor de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
blanco	5	0.20
gris	4	0.16
rojo	3	0.12
verde	5	0.20
violeta	1	0.04
total	25	1.00

13	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
14	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
15	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
16	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
17	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
18	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
19	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
20	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
21	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
22	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
23	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
24	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
25	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
26	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
27	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
28	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
29	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
30	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
31	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
32	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
33	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
34	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
35	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
36	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
37	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
38	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
39	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
40	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
41	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
42	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
43	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
44	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
45	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
46	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
47	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
48	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
49	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
50	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
51	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
52	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
53	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
54	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
55	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
56	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
57	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
58	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
59	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
60	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
61	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
62	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
63	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
64	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
65	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
66	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
67	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
68	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
69	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
70	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
71	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
72	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
73	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
74	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
75	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
76	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
77	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
78	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
79	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
80	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
81	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
82	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
83	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
84	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
85	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
86	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
87	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
88	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
89	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
90	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
91	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
92	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
93	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001</								

marginal de Y,

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Peso (kg)

Probabilidad

(x)

Tabela 2
Distribuição de Poisson P(A)

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,1	0,9048	0,0703	0,0045	0,0002	0,0000							
0,2	0,8187	0,1473	0,0144	0,0011	0,0001							
0,3	0,7408	0,2225	0,0373	0,0043	0,0002	0,0000						
0,4	0,6703	0,2641	0,0546	0,0072	0,0002	0,0000						
0,5	0,6065	0,3043	0,0728	0,0126	0,0018	0,0001	0,0000					

Valor de la variable

Frecuencia absoluta

Frecuencia relativa

blanco

5

0,20

rojo

4

0,16

verde

3

0,24

violeta

1

0,04

metaloidea

4

0,16

total

25

1