BY: **Grupo CDPYE-UGR**

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a la clase de todos los intervalos de $\mathbb{R}$, la σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a la clase de todos los intervalos de $\mathbb{R}$, la σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a la clase de todos los intervalos de $\mathbb{R}$, la σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tiene estructura de σ-álgebra.

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a la clase de todos los intervalos de $\mathbb{R}$, la σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tiene estructura de σ-álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$.

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a la clase de todos los intervalos de $\mathbb{R}$, la σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tiene estructura de σ-álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$.
- Si $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{Y}$, entonces, $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$.

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a la clase de todos los intervalos de $\mathbb{R}$, la σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tiene estructura de σ-álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$.
- Si $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{Y}$, entonces, $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$.

La consideración de la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ conduce a definir los siguientes conceptos:

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a la clase de todos los intervalos de $\mathbb{R}$, la σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tiene estructura de σ-álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$.
- Si $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{Y}$, entonces, $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$.

La consideración de la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ conduce a definir los siguientes conceptos:

- **Espacio de Borel**: es el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a la clase de todos los intervalos de $\mathbb{R}$, la σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tiene estructura de σ-álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$.
- Si $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{Y}$, entonces, $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$.

La consideración de la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ conduce a definir los siguientes conceptos:

- **Espacio de Borel**: es el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.
- **Conjunto de Borel**: cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ que pertenezca a $\mathcal{B}$ se denomina un conjunto de Borel, o boreliano.

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a la clase de todos los intervalos de $\mathbb{R}$, la σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tiene estructura de σ-álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$.
- Si $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{Y}$, entonces, $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$.

La consideración de la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ conduce a definir los siguientes conceptos:

- **Espacio de Borel**: es el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.
- **Conjunto de Borel**: cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ que pertenezca a $\mathcal{B}$ se denomina un conjunto de Borel, o boreliano.

  Nótese que todo intervalo de $\mathbb{R}$ es un conjunto de Borel y, en particular, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{x\} = [x, x] \in \mathcal{B}$.

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a la clase de todos los intervalos de $\mathbb{R}$, la σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tiene estructura de σ-álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$.
- Si $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{Y}$, entonces, $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$.

La consideración de la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ conduce a definir los siguientes conceptos:

- **Espacio de Borel**: es el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.
- **Conjunto de Borel**: cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ que pertenezca a $\mathcal{B}$ se denomina un conjunto de Borel, o boreliano.

  Nótese que todo intervalo de $\mathbb{R}$ es un conjunto de Borel y, en particular, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{x\} = [x, x] \in \mathcal{B}$. Esto implica, teniendo en cuenta que una σ-álgebra es cerrada para uniones numerables, que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ numerable es un conjunto de Borel.

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a la clase de todos los intervalos de $\mathbb{R}$, la σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tiene estructura de σ-álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$.
- Si $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{Y}$, entonces, $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$.

La consideración de la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ conduce a definir los siguientes conceptos:

- **Espacio de Borel**: es el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.
- **Conjunto de Borel**: cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ que pertenezca a $\mathcal{B}$ se denomina un conjunto de Borel, o boreliano.

  Nótese que todo intervalo de $\mathbb{R}$ es un conjunto de Borel y, en particular, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{x\} = [x, x] \in \mathcal{B}$. Esto implica, teniendo en cuenta que una σ-álgebra es cerrada para uniones numerables, que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ numerable es un conjunto de Borel.

A continuación, probamos una caracterización de la σ-álgebra de Borel, que será de gran utilidad en nuestro estudio posterior, ya que permite simplificar la definición de función medible y, consecuentemente, la de variable aleatoria.

Caracterización de la σ-álgebra de Borel

La σ-álgebra generada por la clase de intervalos de la forma $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ es la σ-álgebra de Borel; esto es $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$ siendo $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x];\quad x \in \mathbb{R}\}$.

Caracterización de la σ-álgebra de Borel

La σ-álgebra generada por la clase de intervalos de la forma $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ es la σ-álgebra de Borel; esto es $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$ siendo $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; \quad x \in \mathbb{R}\}$.

Demostración:

Caracterización de la σ-álgebra de Borel

La σ-álgebra generada por la clase de intervalos de la forma $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ es la σ-álgebra de Borel; esto es $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$ siendo $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; \quad x \in \mathbb{R}\}$.

Demostración:

• Por una parte, ya que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los intervalos, $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$ y, por tanto, atendiendo a la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$.

Caracterización de la σ-álgebra de Borel

La σ-álgebra generada por la clase de intervalos de la forma $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ es la σ-álgebra de Borel; esto es $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$ siendo $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; \quad x \in \mathbb{R}\}$.

Demostración:

• Por una parte, ya que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los intervalos, $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$ y, por tanto, atendiendo a la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$.

• Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$ ya que, entonces, usando de nuevo la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$.

Caracterización de la σ-álgebra de Borel

La σ-álgebra generada por la clase de intervalos de la forma $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ es la σ-álgebra de Borel; esto es $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$ siendo $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; \quad x \in \mathbb{R}\}$.

Demostración:

• Por una parte, ya que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los intervalos, $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$ y, por tanto, atendiendo a la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$.

• Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$ ya que, entonces, usando de nuevo la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$.
Veamos entonces que todo intervalo de $\mathbb{R}$ pertenece a $\sigma(\mathcal{Y}')$ (recordando que, por ser σ-álgebra, $\sigma(\mathcal{Y}')$ es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

Caracterización de la σ-álgebra de Borel

La σ-álgebra generada por la clase de intervalos de la forma $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ es la σ-álgebra de Borel; esto es $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$ siendo $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; \quad x \in \mathbb{R}\}$.

Demostración:

• Por una parte, ya que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los intervalos, $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$ y, por tanto, atendiendo a la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$.

• Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$ ya que, entonces, usando de nuevo la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$.
Veamos entonces que todo intervalo de $\mathbb{R}$ pertenece a $\sigma(\mathcal{Y}')$ (recordando que, por ser σ-álgebra, $\sigma(\mathcal{Y}')$ es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

i) $(x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow$ diferencia de dos elementos de $\mathcal{Y}' \subset \sigma(\mathcal{Y}')$.

Caracterización de la σ-álgebra de Borel

La σ-álgebra generada por la clase de intervalos de la forma $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ es la σ-álgebra de Borel; esto es $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$ siendo $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; \quad x \in \mathbb{R}\}$.

Demostración:

• Por una parte, ya que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los intervalos, $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$ y, por tanto, atendiendo a la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$.

• Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$ ya que, entonces, usando de nuevo la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$.
Veamos entonces que todo intervalo de $\mathbb{R}$ pertenece a $\sigma(\mathcal{Y}')$ (recordando que, por ser σ-álgebra, $\sigma(\mathcal{Y}')$ es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

i) $(x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow$ diferencia de dos elementos de $\mathcal{Y}' \subset \sigma(\mathcal{Y}')$.

ii) $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x\right] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{i)}$ intersección numerable de elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

Caracterización de la σ-álgebra de Borel

La σ-álgebra generada por la clase de intervalos de la forma $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ es la σ-álgebra de Borel; esto es $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$ siendo $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; \ \ x \in \mathbb{R}\}$.

Demostración:

• Por una parte, ya que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los intervalos, $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$ y, por tanto, atendiendo a la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$.

• Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$ ya que, entonces, usando de nuevo la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$.
Veamos entonces que todo intervalo de $\mathbb{R}$ pertenece a $\sigma(\mathcal{Y}')$ (recordando que, por ser σ-álgebra, $\sigma(\mathcal{Y}')$ es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

i) $(x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \longrightarrow$ diferencia de dos elementos de $\mathcal{Y}' \subset \sigma(\mathcal{Y}')$.

ii) $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x\right] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \xrightarrow{i)}$ intersección numerable de elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

iii) $(x, y) = (x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \xrightarrow{i), ii)}$ diferencia de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

Caracterización de la σ-álgebra de Borel

La σ-álgebra generada por la clase de intervalos de la forma $(-\infty, x],\ x \in \mathbb{R}$ es la σ-álgebra de Borel; esto es $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$ siendo $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x];\ \ x \in \mathbb{R}\}$.

Demostración:

• Por una parte, ya que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los intervalos, $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$ y, por tanto, atendiendo a la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$.

• Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$ ya que, entonces, usando de nuevo la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$.
Veamos entonces que todo intervalo de $\mathbb{R}$ pertenece a $\sigma(\mathcal{Y}')$ (recordando que, por ser σ-álgebra, $\sigma(\mathcal{Y}')$ es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

i) $(x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \longrightarrow$ diferencia de dos elementos de $\mathcal{Y}' \subset \sigma(\mathcal{Y}')$.

ii) $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x\right] \in \sigma(\mathcal{Y}'),\ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \xrightarrow{i)}$ intersección numerable de elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

iii) $(x, y) = (x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \xrightarrow{i),ii)}$ diferencia de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

iv) $[x, y] = (x, y] \cup \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}'),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \xrightarrow{i),ii)}$ unión de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

Caracterización de la σ-álgebra de Borel

La σ-álgebra generada por la clase de intervalos de la forma $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ es la σ-álgebra de Borel; esto es $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$ siendo $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x];\ \ x \in \mathbb{R}\}$.

Demostración:

• Por una parte, ya que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los intervalos, $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$ y, por tanto, atendiendo a la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$.

• Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$ ya que, entonces, usando de nuevo la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$.
Veamos entonces que todo intervalo de $\mathbb{R}$ pertenece a $\sigma(\mathcal{Y}')$ (recordando que, por ser σ-álgebra, $\sigma(\mathcal{Y}')$ es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

i) $(x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \longrightarrow$ diferencia de dos elementos de $\mathcal{Y}' \subset \sigma(\mathcal{Y}')$.

ii) $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x\right] \in \sigma(\mathcal{Y}'),\ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \xrightarrow{i)}$ intersección numerable de elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

iii) $(x, y) = (x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \xrightarrow{i),ii)}$ diferencia de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

iv) $[x, y] = (x, y] \cup \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}'),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \xrightarrow{i),ii)}$ unión de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

v) $[x, y) = [x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \xrightarrow{iv),ii)}$ diferencia de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

Caracterización de la σ-álgebra de Borel

La σ-álgebra generada por la clase de intervalos de la forma $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ es la σ-álgebra de Borel; esto es $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$ siendo $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; \;\; x \in \mathbb{R}\}$.

Demostración:

• Por una parte, ya que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los intervalos, $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$ y, por tanto, atendiendo a la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$.

• Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$ ya que, entonces, usando de nuevo la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$.
Veamos entonces que todo intervalo de $\mathbb{R}$ pertenece a $\sigma(\mathcal{Y}')$ (recordando que, por ser σ-álgebra, $\sigma(\mathcal{Y}')$ es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

i) $(x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \;\; \forall x, y \in \mathbb{R} \;\longrightarrow\;$ diferencia de dos elementos de $\mathcal{Y}' \subset \sigma(\mathcal{Y}')$.

ii) $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x\right] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\xrightarrow{i)}\;$ intersección numerable de elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

iii) $(x, y) = (x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \;\; \forall x, y \in \mathbb{R} \;\xrightarrow{i),ii)}\;$ diferencia de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

iv) $[x, y] = (x, y] \cup \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \;\; \forall x, y \in \mathbb{R} \;\xrightarrow{i),ii)}\;$ unión de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

v) $[x, y) = [x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \;\; \forall x, y \in \mathbb{R} \;\xrightarrow{iv),ii)}\;$ diferencia de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

vi) $(-\infty, x) = (-\infty, x] - \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\xrightarrow{ii)}\;$ diferencia de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

Caracterización de la σ-álgebra de Borel

La σ-álgebra generada por la clase de intervalos de la forma $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ es la σ-álgebra de Borel; esto es $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$ siendo $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; \quad x \in \mathbb{R}\}$.

Demostración:

• Por una parte, ya que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los intervalos, $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$ y, por tanto, atendiendo a la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$.

• Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$ ya que, entonces, usando de nuevo la definición de σ-álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$.
Veamos entonces que todo intervalo de $\mathbb{R}$ pertenece a $\sigma(\mathcal{Y}')$ (recordando que, por ser σ-álgebra, $\sigma(\mathcal{Y}')$ es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

i) $(x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow$ diferencia de dos elementos de $\mathcal{Y}' \subset \sigma(\mathcal{Y}')$.

ii) $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x\right] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \ \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{i)}$ intersección numerable de elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

iii) $(x, y) = (x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{i),ii)}$ diferencia de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

iv) $[x, y] = (x, y] \cup \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{i),ii)}$ unión de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

v) $[x, y) = [x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{iv),ii)}$ diferencia de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

vi) $(-\infty, x) = (-\infty, x] - \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \ \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{ii)}$ diferencia de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

vii) $(x, +\infty) = (-\infty, x]^c \in \sigma(\mathcal{Y}'), \ \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ complementario de un elemento de $\sigma(\mathcal{Y}')$.

viii) $[x, +\infty) = (x, +\infty) \cup \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x \in \mathbb{R} \stackrel{vii),ii)}{\longrightarrow}$ unión de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$. ■

viii) $[x, +\infty) = (x, +\infty) \cup \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x \in \mathbb{R} \stackrel{vii),ii)}{\longrightarrow}$ unión de dos elementos de $\sigma(\mathcal{Y}')$. ■

Nota: De forma similar puede probarse que $\mathcal{B}$ coincide con la σ-álgebra generada por la clase de intervalos de cualquier otro tipo.