

$\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$ 

## $\sigma$ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  a la clase de todos los intervalos de  $\mathbb{R}$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mathcal{B}$ , se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$



## $\sigma$ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  a la clase de todos los intervalos de  $\mathbb{R}$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mathcal{B}$ , se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

## $\sigma$ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  a la clase de todos los intervalos de  $\mathbb{R}$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mathcal{B}$ , se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  tiene estructura de  $\sigma$ -álgebra.



## $\sigma$ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  a la clase de todos los intervalos de  $\mathbb{R}$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mathcal{B}$ , se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  tiene estructura de  $\sigma$ -álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$ .

## $\sigma$ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  a la clase de todos los intervalos de  $\mathbb{R}$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mathcal{B}$ , se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  tiene estructura de  $\sigma$ -álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$ .
- Si  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{Y}$ , entonces,  $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$ .



## $\sigma$ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  a la clase de todos los intervalos de  $\mathbb{R}$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mathcal{B}$ , se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  tiene estructura de  $\sigma$ -álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$ .
- Si  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{Y}$ , entonces,  $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$ .

La consideración de la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  conduce a definir los siguientes conceptos:

## $\sigma$ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  a la clase de todos los intervalos de  $\mathbb{R}$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mathcal{B}$ , se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  tiene estructura de  $\sigma$ -álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$ .
- Si  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{Y}$ , entonces,  $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$ .

La consideración de la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  conduce a definir los siguientes conceptos:

- **Espacio de Borel:** es el espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .



## $\sigma$ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  a la clase de todos los intervalos de  $\mathbb{R}$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mathcal{B}$ , se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  tiene estructura de  $\sigma$ -álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$ .
- Si  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{Y}$ , entonces,  $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$ .

La consideración de la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  conduce a definir los siguientes conceptos:

- **Espacio de Borel:** es el espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .
- **Conjunto de Borel:** cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}$  que pertenezca a  $\mathcal{B}$  se denomina un conjunto de Borel, o boreliano.

## $\sigma$ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  a la clase de todos los intervalos de  $\mathbb{R}$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mathcal{B}$ , se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  tiene estructura de  $\sigma$ -álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$ .
- Si  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{Y}$ , entonces,  $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$ .

La consideración de la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  conduce a definir los siguientes conceptos:

- **Espacio de Borel:** es el espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .
- **Conjunto de Borel:** cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}$  que pertenezca a  $\mathcal{B}$  se denomina un conjunto de Borel, o boreliano.

Nótese que todo intervalo de  $\mathbb{R}$  es un conjunto de Borel y, en particular,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\{x\} = [x, x] \in \mathcal{B}$ .



## $\sigma$ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  a la clase de todos los intervalos de  $\mathbb{R}$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mathcal{B}$ , se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  tiene estructura de  $\sigma$ -álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$ .
- Si  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{Y}$ , entonces,  $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$ .

La consideración de la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  conduce a definir los siguientes conceptos:

- **Espacio de Borel:** es el espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .
- **Conjunto de Borel:** cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}$  que pertenezca a  $\mathcal{B}$  se denomina un conjunto de Borel, o boreliano.

Nótese que todo intervalo de  $\mathbb{R}$  es un conjunto de Borel y, en particular,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\{x\} = [x, x] \in \mathcal{B}$ . Esto implica, teniendo en cuenta que una  $\sigma$ -álgebra es cerrada para uniones numerables, que todo subconjunto de  $\mathbb{R}$  numerable es un conjunto de Borel.

## $\sigma$ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Se define la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  como la generada por la clase de todos los intervalos; esto es, si notamos  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  a la clase de todos los intervalos de  $\mathbb{R}$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mathcal{B}$ , se define como

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}).$$

Según esta definición, y recordando la de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tiene:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  tiene estructura de  $\sigma$ -álgebra.
- $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$ .
- Si  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{Y}$ , entonces,  $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$ .

La consideración de la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  conduce a definir los siguientes conceptos:

- **Espacio de Borel:** es el espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .
- **Conjunto de Borel:** cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}$  que pertenezca a  $\mathcal{B}$  se denomina un conjunto de Borel, o boreliano.

Nótese que todo intervalo de  $\mathbb{R}$  es un conjunto de Borel y, en particular,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\{x\} = [x, x] \in \mathcal{B}$ . Esto implica, teniendo en cuenta que una  $\sigma$ -álgebra es cerrada para uniones numerables, que todo subconjunto de  $\mathbb{R}$  numerable es un conjunto de Borel.

A continuación, probamos una caracterización de la  $\sigma$ -álgebra de Borel, que será de gran utilidad en nuestro estudio posterior, ya que permite simplificar la definición de función medible y, consecuentemente, la de variable aleatoria.



## Caracterización de la $\sigma$ -álgebra de Borel

La  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de intervalos de la forma  $(-\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel; esto es  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y})$  siendo  $\mathcal{Y} = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$ .

Peso (kg)

Probabilidad

(x)

Tabla 2  
Distribución de Poisson  $P(X)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.1	0.9048	0.0905	0.0045	0.0002	0.0000								
0.2	0.8187	0.1812	0.0164	0.0011	0.0001	0.0000							
0.3	0.7408	0.2222	0.0333	0.0033	0.0003	0.0000							
0.4	0.6703	0.2681	0.0576	0.0072	0.0007	0.0001	0.0000						
0.5	0.6065	0.3043	0.0728	0.0126	0.0018	0.0002	0.0000						
0.6	0.5488	0.3294	0.0898	0.0178	0.0036	0.0009	0.0001	0.0000					
0.7	0.4966	0.3476	0.1217	0.0269	0.0056	0.0017	0.0003	0.0001	0.0000				
0.8	0.4493	0.3595	0.1478	0.0393	0.0077	0.0026	0.0006	0.0002	0.0000				
0.9	0.4066	0.3659	0.1647	0.0499	0.0111	0.0036	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000			
1.0	0.3675	0.3659	0.1835	0.0613	0.0153	0.0044	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000			

Valor de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
blanco	5	0.20
gris	4	0.16
rojo	3	0.24
verde	5	0.20
violeta	1	0.04
total	25	1

x	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0.1	0.0003	0.0005	0.0002											
0.2	0.0022	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.3	0.0143	0.0071	0.0033	0.0014	0.0006	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.4	0.0296	0.0129	0.0056	0.0023	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.5	0.0504	0.0224	0.0103	0.0039	0.0016	0.0007	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	0.0729	0.0321	0.0147	0.0059	0.0025	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

## Caracterización de la $\sigma$ -álgebra de Borel

La  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de intervalos de la forma  $(-\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel; esto es  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y})$  siendo  $\mathcal{Y} = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$ .

*Demostración:*





## Caracterización de la $\sigma$ -álgebra de Borel

La  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de intervalos de la forma  $(-\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel; esto es  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y})$  siendo  $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$ .

*Demostración:*

- Por una parte, ya que  $\mathcal{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los intervalos,  $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$  y, por tanto, atendiendo a la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que  $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$ .

## Caracterización de la $\sigma$ -álgebra de Borel

La  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de intervalos de la forma  $(-\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel; esto es  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y})$  siendo  $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$ .

*Demostración:*

- Por una parte, ya que  $\mathcal{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los intervalos,  $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$  y, por tanto, atendiendo a la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que  $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$ .
- Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$  ya que, entonces, usando de nuevo la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$ .



## Caracterización de la $\sigma$ -álgebra de Borel

La  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de intervalos de la forma  $(-\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel; esto es  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$  siendo  $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$ .

*Demostración:*

- Por una parte, ya que  $\mathcal{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los intervalos,  $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$  y, por tanto, atendiendo a la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que  $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$ .
- Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$  ya que, entonces, usando de nuevo la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$ .  
Veamos entonces que todo intervalo de  $\mathbb{R}$  pertenece a  $\sigma(\mathcal{Y}')$  (recordando que, por ser  $\sigma$ -álgebra,  $\sigma(\mathcal{Y}')$  es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

## Caracterización de la $\sigma$ -álgebra de Borel

La  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de intervalos de la forma  $(-\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel; esto es  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$  siendo  $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$ .

*Demostración:*

- Por una parte, ya que  $\mathcal{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los intervalos,  $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$  y, por tanto, atendiendo a la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que  $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$ .
- Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$  ya que, entonces, usando de nuevo la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$ .  
Veamos entonces que todo intervalo de  $\mathbb{R}$  pertenece a  $\sigma(\mathcal{Y}')$  (recordando que, por ser  $\sigma$ -álgebra,  $\sigma(\mathcal{Y}')$  es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

$$i) (x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow \text{diferencia de dos elementos de } \mathcal{Y}' \subset \sigma(\mathcal{Y}').$$



## Caracterización de la $\sigma$ -álgebra de Borel

La  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de intervalos de la forma  $(-\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel; esto es  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$  siendo  $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$ .

*Demostración:*

- Por una parte, ya que  $\mathcal{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los intervalos,  $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$  y, por tanto, atendiendo a la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que  $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$ .
- Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$  ya que, entonces, usando de nuevo la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$ .  
Veamos entonces que todo intervalo de  $\mathbb{R}$  pertenece a  $\sigma(\mathcal{Y}')$  (recordando que, por ser  $\sigma$ -álgebra,  $\sigma(\mathcal{Y}')$  es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

i)  $(x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{Y}')$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow$  diferencia de dos elementos de  $\mathcal{Y}' \subset \sigma(\mathcal{Y}')$ .

ii)  $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (x - \frac{1}{n}, x] \in \sigma(\mathcal{Y}')$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{i)}$  intersección numerable de elementos de  $\sigma(\mathcal{Y}')$ .

## Caracterización de la $\sigma$ -álgebra de Borel

La  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de intervalos de la forma  $(-\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel; esto es  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$  siendo  $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$ .

*Demostración:*

- Por una parte, ya que  $\mathcal{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los intervalos,  $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$  y, por tanto, atendiendo a la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que  $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$ .
- Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$  ya que, entonces, usando de nuevo la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$ .  
Veamos entonces que todo intervalo de  $\mathbb{R}$  pertenece a  $\sigma(\mathcal{Y}')$  (recordando que, por ser  $\sigma$ -álgebra,  $\sigma(\mathcal{Y}')$  es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

i)  $(x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{Y}')$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow$  diferencia de dos elementos de  $\mathcal{Y}' \subset \sigma(\mathcal{Y}')$ .

ii)  $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (x - \frac{1}{n}, x] \in \sigma(\mathcal{Y}')$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{i)}$  intersección numerable de elementos de  $\sigma(\mathcal{Y}')$ .

iii)  $(x, y) = (x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}')$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{i, ii)}$  diferencia de dos elementos de  $\sigma(\mathcal{Y}')$ .



## Caracterización de la $\sigma$ -álgebra de Borel

La  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de intervalos de la forma  $(-\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel; esto es  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$  siendo  $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$ .

*Demostración:*

- Por una parte, ya que  $\mathcal{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los intervalos,  $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$  y, por tanto, atendiendo a la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que  $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$ .
- Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$  ya que, entonces, usando de nuevo la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$ .  
Veamos entonces que todo intervalo de  $\mathbb{R}$  pertenece a  $\sigma(\mathcal{Y}')$  (recordando que, por ser  $\sigma$ -álgebra,  $\sigma(\mathcal{Y}')$  es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

$$i) (x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow \text{diferencia de dos elementos de } \mathcal{Y}' \subset \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$ii) \{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (x - \frac{1}{n}, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{i)} \text{intersección numerable de elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$iii) (x, y) = (x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{i, ii)} \text{diferencia de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$iv) [x, y] = (x, y] \cup \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{i, ii)} \text{unión de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

## Caracterización de la $\sigma$ -álgebra de Borel

La  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de intervalos de la forma  $(-\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel; esto es  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$  siendo  $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$ .

*Demostración:*

- Por una parte, ya que  $\mathcal{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los intervalos,  $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$  y, por tanto, atendiendo a la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que  $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$ .
- Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$  ya que, entonces, usando de nuevo la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$ .  
Veamos entonces que todo intervalo de  $\mathbb{R}$  pertenece a  $\sigma(\mathcal{Y}')$  (recordando que, por ser  $\sigma$ -álgebra,  $\sigma(\mathcal{Y}')$  es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

$$i) (x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow \text{diferencia de dos elementos de } \mathcal{Y}' \subset \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$ii) \{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (x - \frac{1}{n}, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{i)} \text{intersección numerable de elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$iii) (x, y) = (x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{i), ii)} \text{diferencia de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$iv) [x, y] = (x, y] \cup \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{i), ii)} \text{unión de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$v) [x, y) = [x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{iv), ii)} \text{diferencia de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$



## Caracterización de la $\sigma$ -álgebra de Borel

La  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de intervalos de la forma  $(-\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel; esto es  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$  siendo  $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$ .

*Demostración:*

- Por una parte, ya que  $\mathcal{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los intervalos,  $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$  y, por tanto, atendiendo a la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que  $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$ .
- Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$  ya que, entonces, usando de nuevo la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$ .  
Veamos entonces que todo intervalo de  $\mathbb{R}$  pertenece a  $\sigma(\mathcal{Y}')$  (recordando que, por ser  $\sigma$ -álgebra,  $\sigma(\mathcal{Y}')$  es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

$$i) (x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow \text{diferencia de dos elementos de } \mathcal{Y}' \subset \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$ii) \{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (x - \frac{1}{n}, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{i)} \text{intersección numerable de elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$iii) (x, y) = (x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{i), ii)} \text{diferencia de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$iv) [x, y] = (x, y] \cup \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{i), ii)} \text{unión de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$v) [x, y) = [x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{i), ii)} \text{diferencia de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$vi) (-\infty, x) = (-\infty, x] - \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{ii)} \text{diferencia de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

## Caracterización de la $\sigma$ -álgebra de Borel

La  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de intervalos de la forma  $(-\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel; esto es  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y}')$  siendo  $\mathcal{Y}' = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$ .

*Demostración:*

- Por una parte, ya que  $\mathcal{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los intervalos,  $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}'$  y, por tanto, atendiendo a la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se deduce que  $\mathcal{B} \supseteq \sigma(\mathcal{Y}')$ .
- Para probar la inclusión en el otro sentido, basta probar que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supset \mathcal{Y}$  ya que, entonces, usando de nuevo la definición de  $\sigma$ -álgebra generada por una clase de conjuntos, se tendrá que  $\sigma(\mathcal{Y}') \supseteq \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}$ .  
Veamos entonces que todo intervalo de  $\mathbb{R}$  pertenece a  $\sigma(\mathcal{Y}')$  (recordando que, por ser  $\sigma$ -álgebra,  $\sigma(\mathcal{Y}')$  es cerrada para uniones e intersecciones numerables, diferencias y para la formación de complementarios):

$$i) (x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow \text{diferencia de dos elementos de } \mathcal{Y}' \subset \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$ii) \{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (x - \frac{1}{n}, x] \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{i)} \text{intersección numerable de elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$iii) (x, y) = (x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{i), ii)} \text{diferencia de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$iv) [x, y] = (x, y] \cup \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{i), ii)} \text{unión de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$v) [x, y) = [x, y] - \{y\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{i), ii)} \text{diferencia de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$vi) (-\infty, x) = (-\infty, x] - \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{ii)} \text{diferencia de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}').$$

$$vii) (x, +\infty) = (-\infty, x]^c \in \sigma(\mathcal{Y}'), \quad \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow \text{complementario de un elemento de } \sigma(\mathcal{Y}').$$



viii)  $[x, +\infty) = (x, +\infty) \cup \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}')$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{vii),ii)}} \text{unión de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}')$ .



Peso (kg)

Probabilidad

(x)

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.1	0.0048	0.0093	0.0143	0.0002	0.0000								
0.2	0.0147	0.0187	0.0104	0.0011	0.0000								
0.3	0.0408	0.2222	0.3333	0.0003	0.0002	0.0000							
0.4	0.0670	0.2681	0.0576	0.0072	0.0005	0.0001	0.0000						
0.5	0.0085	0.0103	0.0728	0.0126	0.0018	0.0001	0.0000						
0.6	0.0188	0.2294	0.0768	0.0128	0.0036	0.0004	0.0000	0.0000					
0.7	0.0466	0.1476	0.1217	0.0269	0.0056	0.0007	0.0001	0.0000					
0.8	0.0493	0.2595	0.0748	0.0393	0.0077	0.0012	0.000						
0.9	0.0406	0.1635	0.1407	0.0494	0.0111	0.0026	0.000						
1.0	0.0675	0.1675	0.1835	0.0613	0.0153	0.0031	0.000						

Valor de la variable

Frecuencia absoluta

Frecuencia relativa

blanco

5

0.20

gris

4

0.16

rojo

3

0.24

verde

5

0.20

violeta

1

0.04

metálico

4

0.16

total

25

1

blanco

5

0.20

gris

4

0.16

rojo

3

0.24

verde

5

0.20

violeta

1

0.04

metálico

4

0.16

total

25

1

blanco

5

0.20

gris

4

0.16

rojo

3

0.24

verde

5

0.20

violeta

1

0.04

metálico

4

0.16

total

25

1

blanco

5

0.20

gris

4

0.16

rojo

3

0.24

verde

5

0.20

violeta

1

0.04

metálico

4

0.16

total

25

1

blanco

5

0.20

gris

4

0.16

rojo

3

0.24

verde

5

0.20

violeta

1

0.04

metálico

4

0.16

total

25

1



viii)  $[x, +\infty) = (x, +\infty) \cup \{x\} \in \sigma(\mathcal{Y}')$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{vii),ii)}} \text{unión de dos elementos de } \sigma(\mathcal{Y}')$ . ■

**Nota:** De forma similar puede probarse que  $\mathcal{B}$  coincide con la  $\sigma$ -álgebra generada por la clase de intervalos de cualquier otro tipo.

Peso (kg)

Probabilidad

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Valor de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
blanco	5	0.20
gris	4	0.16
rojo	3	0.12
verde	5	0.20
violeta	1	0.04
total	25	1

0.04 0.16 0.12 0.20 0.24 0.04 0.16 1