Control tema 1 : EDOs de primer orden

MANUEL CALIXTO

Título de la nota 28/10/2019

Resuelve la ecuación de Riccatti

$$x^3y' + x^2y - y^2 = 2x^4$$

realizando el cambio de variable :

TIPO A : $z = \dfrac{1}{y-x^2}$ TIPO B : $z = \dfrac{1}{y-2x^2}$

$\underline{\text{TIPO A}}$ $z = \dfrac{1}{y-x^2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{z} + x^2$, $y' = \dfrac{-z'}{z^2} + 2x$

$$x^3y' + x^2y - y^2 = x^3\left(-\frac{z'}{z^2} + 2x\right) + x^2\left(\frac{1}{z} + x^2\right) - \left(\frac{1}{z} + x^2\right)^2 =$$

$$-x^3\frac{z'}{z^2} + \cancel{2x^4}^{(1)} + \underbrace{\frac{x^2}{z} + \cancel{x^4}^{(2)} - \frac{1}{z^2} - \frac{2x^2}{z}}_{-\frac{x^2}{z}} - \cancel{x^4}^{(2)} = \cancel{2x^4}^{(1)}$$

Multiplicando por z^2 (suponemos $z \neq 0$)

$-x^3z' - x^2z - 1 = 0$ ecuación lineal no homogenea

1) Homogenea $-x^3z_h' - x^2z_h = 0 \Rightarrow \dfrac{dz_h}{z_h} = -\dfrac{dx}{x} \Rightarrow z_h(x) = \dfrac{C}{x}$

2) Variación de la cte : $z(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, $z' = \dfrac{C'}{x} - \dfrac{C}{x^2}$

$$0 = -x^3z' - x^2z - 1 = -x^3\left(\frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2}\right) - x^2\frac{C}{x} - 1 = -x^2C' + \cancel{x}C - \cancel{x}C - 1$$

$C' = -\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow C(x) = \dfrac{1}{x} + K$, $K =$ cte

Solución general ec. lineal $z(x) = \dfrac{\frac{1}{x} + K}{x} = \dfrac{Kx+1}{x^2}$.

$$\boxed{y} = \frac{1}{z} + x^2 = \frac{x^2}{Kx+1} + x^2 = \frac{x^2 + Kx^3 + x^2}{Kx+1} = \boxed{\frac{Kx^3 + 2x^2}{Kx+1}}$$

Solución general

$\underline{\text{TIPO B}}$ $z = \dfrac{1}{y-2x^2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{z} + 2x^2$, $y' = \dfrac{-z'}{z^2} + 4x$

$$x^3y' + x^2y - y^2 = x^3\left(-\frac{z'}{z^2} + 4x\right) + x^2\left(\frac{1}{z} + 2x^2\right) - \left(\frac{1}{z} + 2x^2\right)^2 =$$

$$-x^3\frac{z'}{z^2} + \cancel{4x^4}^{(1)} + \frac{x^2}{z} + \cancel{2x^4}^{(2)} - \frac{1}{z^2} - \frac{4x^2}{z} - \cancel{4x^4}^{(1)} = \cancel{2x^4}^{(2)}$$

Multiplico por z^2

$-x^3 z' - 3x^2 z - 1 = 0$ Ecuación lineal no homogenea

1) Homogenea : $-x^3 z_h' - 3x^2 z_h = 0 \Rightarrow \dfrac{dz_h}{z_h} = -\dfrac{3dx}{x} \Rightarrow z_h = \dfrac{C}{x^3}$

2) Variación de la cte : $z(x) = \dfrac{C(x)}{x^3}$, $z' = \dfrac{C'}{x^3} - 3\dfrac{C}{x^4}$

$$0 = x^3 z' + 3x^2 z + 1 = x^3\left(\frac{C'}{x^3} - 3\frac{C}{x^4}\right) + 3x^2\frac{C}{x^3} + 1 = C' - \cancel{3\frac{C}{x}} + \cancel{3\frac{C}{x}} + 1 = 0$$

$$C(x) = -x + Q \Rightarrow z(x) = \frac{C(x)}{x^3} = \frac{Q-x}{x^3} \Rightarrow y = \frac{1}{z} + 2x^2 = \frac{x^3}{Q-x} + 2x^2$$

$$\boxed{y(x)} = \frac{x^3 + 2Qx^2 - 2x^3}{Q-x} = \boxed{\frac{-x^3 + 2Qx^2}{Q-x}}$$ Solución general

Tomando $Q = \dfrac{-1}{K} \Rightarrow y(x) = \dfrac{-x^3 - \frac{2x^2}{K}}{\frac{-1}{K} - x} = \dfrac{Kx^3 + 2x^2}{Kx + 1}$

que coincide con la solución obtenida en el apartado A.