UNIVERSIDAD DE GRANADA.
Examen Extraordinario de Métodos Matemáticos II.
Grado en Física y Doble Grado en Física y Matemáticas
11 de Febrero de 2019.

- **Nombre y Apellidos:**
- *Entrega los ejercicios por separado.*
- *Duración: 3 horas*

1. [*2.5 puntos*] Resuelve la ecuación diferencial

$$x' = \frac{x\sqrt{\log\frac{x}{t}} + x}{t}.$$

2. [*2.5 puntos*] Considérese la ecuación diferencial

$$xy'' + (1-x)y' + \frac{1}{2}y = 0.$$

Encontrar una solución (no trivial) y discutir la analiticidad en $x = 0$ de dicha solución.

3. [*2.5 puntos*] Encuentra la solución general de la ecuación diferencial

$$x'' - 4x' + 4x = \cos t + e^t$$

4. [*2.5 puntos*] Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 6y = 0.$$

a) Encuentra la solución alrededor $x = 0$.

b) ¿Puede expresarse de forma polinómica? En caso afirmativo, ¿de qué grado? Sugerencia: separar la solución en términos pares e impares.

SOLUCIONES EXAMEN EXTRAORDINARIO MMII FÍSICA

Título de la nota 07/02/2019

1 $x' = \dfrac{x\sqrt{\ln\frac{x}{t}}+x}{t} = v\sqrt{\ln v}+v$, homogénea $v=\frac{x}{t}$

$$x' = v't+\cancel{v} = v\sqrt{\ln v}+\cancel{v} \Rightarrow \int\frac{1}{v\sqrt{\ln v}}\,dv = \int\frac{1}{t}\,dt$$

$$2(\ln v)^{1/2} = \ln t + K = \ln(ct) \Rightarrow \ln v = \frac{1}{4}\left(\ln(ct)\right)^2$$

$$x(t) = t\cdot v(t) = t\,\exp\left\{\frac{1}{4}\left(\ln(ct)\right)^2\right\}$$

2 $xy''+(1-x)y'+\frac{1}{2}y=0$ $\quad x=0$ singular regular

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} \Rightarrow r_1=r_2=0,\quad c_n=\frac{\left(-\frac{1}{2}+n-1\right)}{(1+n-1)\,n}c_{n-1}=\dots=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n\,n!}$$

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n}{n!^2}x^n = {}_1F_1\left(-\tfrac{1}{2},1;x\right)$$ hipergeométrica confluente.

Es analítica en $x=0$ con radio de convergencia $R=\infty$.

3 $x''-4x'+4x=\cos t+e^t$

Solución general homog: $\lambda^2-4\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=2$ doble $\Rightarrow x(t)=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}$

Solución particular. Ensayo

$$\begin{aligned}
4\quad & x_p(t) = \left(A\cos t+B\sin t+Ce^t\right)\cdot 4\\
-4\quad & x_p'(t) = \left(-A\sin t+B\cos t+Ce^t\right)\cdot(-4)\\
& x_p''(t) = -A\cos t-B\sin t+Ce^t
\end{aligned}$$

$$x_p''-4x_p'+4x_p=(-A-4B+4A)\cos t+(-B+4A+4B)\sin t+\underbrace{C}_{1}e^t=\cos t+e^t$$

$$\left.\begin{aligned}3A-4B&=1\\4A+3B&=0\end{aligned}\right\}\quad A=3/25,\quad B=-4/25$$

Solución general $x=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}+e^t+\frac{3}{25}\cos t-\frac{4}{25}\sin t$

4 $y''-2xy'+6y=0$, $x=0$ ordinario. Ensayo $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$

$$c_{n+2}=\frac{2n-6}{(n+2)(n+1)}c_n \xRightarrow{n=m-2} C_m=\frac{2m-10}{m(m-1)}C_{m-2}$$

a) $m=2K \Rightarrow C_{2K}=a_K=\dfrac{K-1-\frac{3}{2}}{\left(K-\frac{1}{2}\right)K}a_{K-1}=\dots=\dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)_K}{\left(\frac{1}{2}\right)_K K!}a_0$

b) $m = 2K+1 \Rightarrow C_{2K+1} = b_K = \dfrac{K-1-1}{(K+\frac{3}{2}-1)K} b_{K-1} = \cdots = \dfrac{(-1)_K}{(\frac{3}{2})_K\, K!} b_0$

Solución general:

$$y(x) = \sum_{K=0}^{\infty} a_K x^{2K} + \sum_{K=0}^{\infty} b_K x^{2K+1} = a_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-\frac{3}{2})_K}{(\frac{1}{2})_K\, K!} x^{2K} + b_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)_K}{(\frac{3}{2})_K\, K!} x^{2K+1}$$

La solución $y_2(x) = \displaystyle\sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)_K}{(\frac{3}{2})_K\, K!} x^{2K+1} = \frac{(-1)_0}{(\frac{3}{2})_0\, 0!} x^1 + \frac{(-1)_1}{(\frac{3}{2})_1\, 1!} x^3 =$

$$= x - \frac{2}{3} x^3$$

es un polinomio de grado 3