UNIVERSIDAD DE GRANADA.
Examen Extraordinario de Métodos matemáticos II.
Grado en Física y Doble Grado en Física y Matemáticas
8 de Febrero de 2018.

- **Nombre y Apellidos:**
- *Entrega los ejercicios por separado.*
- *Duración: 2.5 horas*

1. [*4 puntos*] Dada la ecuación diferencial de Riccati

$$y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{4}{x^2},$$

   a) Ensaya una solución particular del tipo $y_p(x) = ax^b$ y comprueba que es solución para $a = \pm 2, b = -1$.

   b) Tomando el caso $y_p(x) = 2/x$, realizar el cambio de variable $z = 1/(y - y_p)$ y ver que se obtiene una ecuación lineal.

   c) Resolver dicha ecuación lineal y determinar la solución general $y(x)$ para la ecuación original de Riccati.

2. [*3 puntos*] Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$t^2x'' - tx' + 2x = 1$$

3. [*3 puntos*] Se considera la ecuación diferencial

$$4x^2y'' + 4xy' + (x^2 - 1)y = 0\,.$$

   a) Encuéntrese una solución particular no trivial que sea finita en $x = 0$.

   b) ¿Podría encontrarse alguna solución linealmente independiente que sea analítica en $x = 0$?.

SOLUCIONES

1] $y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{4}{x^2}$. Ensayo $y_p(x) = ax^b \Rightarrow y_p'(x) = abx^{b-1}$

$abx^{b-1} + ax^{b-1} - a^2x^{2b} = -4x^{-2} \Rightarrow a\underbrace{(b+1)}_{=0 \Rightarrow b=-1}x^{b-1} \underbrace{- a^2x^{2b} + 4x^{-2}}_{=0 \Rightarrow a=\pm 2} = 0$

Por lo tanto $y_p^{(1)}(x) = \frac{2}{x}$ y $y_p^{(2)}(x) = \frac{-2}{x}$ son soluciones particulares

Tomando la primera $y_p(x) = \frac{2}{x}$ y realizando el cambio de variable:

$z = \frac{1}{y - y_p} \Rightarrow y = \frac{1}{z} + y_p = \frac{1}{z} + \frac{2}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{z^2}z' - \frac{2}{x^2}$

La ecuación original $y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{4}{x^2}$ queda:

$$-\frac{1}{z^2}z' - \cancel{\frac{2}{x^2}} + \frac{\frac{1}{z} + \cancel{\frac{2}{x}}}{x} - \underbrace{\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{x}\right)^2}_{\frac{1}{z^2} + \frac{4}{zx} + \cancel{\frac{4}{x^2}}} = -\cancel{\frac{4}{x^2}} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{z^2}z' - \frac{3}{zx} - \frac{1}{z^2} = 0 \xrightarrow[\text{Mult. } (-z^2)]{} \boxed{z' + \frac{3}{x}z + 1 = 0} \quad \text{lineal}$$

Multiplico por el factor integrante

$$\underbrace{e^{\int \frac{3}{x}dx}\left(z' + \frac{3}{x}z\right)}_{\frac{d}{dx}\left(e^{\int \frac{3}{x}dx} \cdot z\right)} = -\underbrace{e^{\int \frac{3}{x}dx}}_{} = -x^3$$

$$x^3 z = \left(\int -x^3\,dx + C\right) = -\frac{x^4}{4} + C \Rightarrow z(x) = -\frac{x}{4} + Cx^{-3}$$

Por lo tanto $y(x) = \frac{1}{z(x)} + y_p(x) = \frac{1}{Cx^{-3} - \frac{x}{4}} + \frac{2}{x}$

2] $t^2x'' - tx' + 2x = 1$. Resolvemos primero la ecuación homogénea.

Tipo Cauchy-Euler. Ensayamos $x(t) = t^m$, $x'(t) = mt^{m-1}$, $x''(t) = m(m-1)t^{m-2}$

$(m(m-1) - m + 2)t^m = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 2 = 0 \Rightarrow m_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$

$t^{1\pm i} = t \cdot t^{\pm i} = t \cdot e^{\pm i \ln t} = t\left(\cos(\ln t) \pm i \,\text{sen}(\ln t)\right)$

Solución general de la homog. $x_h(t) = c_1 t \cos(\ln t) + c_2 t \,\text{sen}(\ln t)$

Ensayo $x_p(t) = Q$, $x_p'(t) = 0 \Rightarrow 2Q = 1 \Rightarrow Q = \frac{1}{2}$

La solución general es $x(t) = C_1 t \cos(\ln t) + C_2 t \sin(\ln t) + \frac{1}{2}$

$\boxed{3}$ $4x^2 y'' + 4xy' + (x^2-1)y = 0$, $x=0$ singular regular

Ensayo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}$, $y''(x) = \dots$

$$4\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + 4\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \underbrace{x^{n+r+2}}_{n+2=m} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

El término de menor grado x^r proporciona la ecuación indicial

$$x^r \cdot C_0 \left(4r(r-1) + 4r - 1\right) = 0 \Rightarrow 4r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm\frac{1}{2}$$

El siguiente término es:

$$x^{1+r} C_1 \left(4(1+r)r + 4(1+r) - 1\right) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Para los siguientes tenemos la recurrencia

$$\Big\{\underbrace{4(n+r)(n+r-1) + 4(n+r) - 1}_{4(n+r)(n+r-1+1) - 1 = (2(n+r)+1)(2(n+r)-1) = 4\left(n+r+\frac{1}{2}\right)\left(n+r-\frac{1}{2}\right)}\Big\} C_n + C_{n-2} = 0 \quad \text{en pasos de 2}$$

Tomando $n = 2K$ (solo hace falta calcular los pares porque $C_1 = 0$)

$$C_{2K} = a_K = \frac{-a_{K-1}}{4\cdot\left(2K+r+\frac{1}{2}\right)\left(2K+r-\frac{1}{2}\right)}$$

1) $r = \frac{1}{2} \Rightarrow a_K^{(1)} = \dfrac{-a_{K-1}^{(1)}}{4\cdot 4\left(K+\frac{1}{2}\right)K} = \dots = \dfrac{(-1)^K a_0^{(1)}}{16^K \left(\frac{3}{2}\right)_K K!}$

2) $r = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_K^{(2)} = \dfrac{-a_{K-1}^{(2)}}{4\cdot 4\, K\left(K-\frac{1}{2}\right)} = \dots = \dfrac{(-1)^K a_0^{(2)}}{16^K K! \left(\frac{1}{2}\right)_K}$

Solución general $y(x) = y_1(x) + y_2(x) = \sum_{K=0}^{\infty} a_K^{(1)} x^{2K+\frac{1}{2}} + \sum_{K=0}^{\infty} a_K^{(2)} x^{2K-\frac{1}{2}}$

$y_1(x)$ es finita en $x=0$, mientras que $y_2(x)$ no es analítica en $x=0$.

También se podría haber resuelto el problema dándonos cuenta de que, el cambio de variable $\frac{x}{2} = t$ nos lleva la ecuación a una del tipo:

$$t^2 \ddot{y} + t\dot{y} + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$ que es una ecuación de Bessel

$$t^2 \ddot{y} + t\dot{y} + (t^2 - \nu^2) y = 0$$ con $\nu = \pm \frac{1}{2}$.

Las soluciones son las funciones de Bessel

$$y_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k \, k! \, (1+\nu)_k} t^{2k+\nu}$$

que coinciden con las obtenidas anteriormente cuando deshacemos el cambio $t = x/2$ y sustituimos $\nu = \pm\frac{1}{2}$.