Métodos Matemáticos II. Ordinario Enero 2021. Incidencias

Nombre y Apellidos: **Duración: 3 horas**

En los siguientes ejercicios, sustituye α por la cifra de las unidades de tu carnet de identidad. En caso de que dicha cifra fuese nula, elije las decenas (y así sucesivamente).

1) Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3xy^2 - 2\alpha y}{\alpha x - 2x^2 y}$$

a) ¿Es exacta? Si no lo es, encuentra un factor integrante $\phi(x)$.

b) Resuelve la correspondiente ecuación exacta.

Solución: $\phi(x) = x$, $U(x,y) = \alpha x^2 y - x^3 y^2 = C$

2) Encuentra la solución real de las ecuaciones diferenciales

$$4x^2 y'' + 17y = x^\alpha,$$

y

$$4x^2 y'' + 17y = \alpha \ln(x).$$

Solución: $y_h(x) = c_1\sqrt{x}\cos(2\ln(x)) + c_2\sqrt{x}\sin(2\ln(x))$,
$y_{p_1}(x) = \frac{1}{4\alpha(\alpha-1)+17} x^\alpha$, $y_{p_2}(x) = \frac{\alpha}{17}\ln(x) + \frac{4\alpha}{17^2}$

3) Considérese la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + xy' + (\alpha^2 x^2 - \frac{1}{9})y = 0\,.$$

a) ¿Es $x = 0$ un punto ordinario o singular regular? Justifica tu respuesta.

b) Resuelve dicha ecuación por el método de Frobenius en torno a $x = 0$, obteniendo las raíces indiciales y resolviendo la recurrencia para cada una de ellas.

c) ¿Son las dos soluciones linealmente independientes? ¿Existe alguna solución polinómica no trivial? ¿En su caso, de qué grado? Justifica tu respuesta.

Solución: $r_\pm = \pm\frac{1}{3}$, $c_{n+2}^{(r)} = \frac{-\alpha^2 c_n^{(r)}}{(n+r+\frac{1}{3})(n+r-\frac{1}{3})}$, $y = c_0^+ y_+ + c_0^- y_-$,
$y_+(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{4^n (4/3)_n n!} x^{2n+\frac{1}{3}}$, $y_-(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{4^n (2/3)_n n!} x^{2n-\frac{1}{3}}$.
No hay soluciones polinómicas.