Métodos Matemáticos II. Ordinario Enero 2021.

Nombre y Apellidos: **Duración: 3 horas**

En los siguientes ejercicios, sustituye α por la cifra de las unidades de tu carnet de identidad. En caso de que dicha cifra fuese nula, elije las decenas (y así sucesivamente).

1) Dada la ecuación diferencial de Riccati

$$t^2x' - t^2(2\alpha + t)x + \alpha t^3 x^2 = -t^2 - \alpha t - 1$$

a) Ensaya una solución particular del tipo $x_p(t) = t^a$ y escoge la respuesta correcta entre: $a = 1$, $a = 0$ ó $a = -1$.

b) Realiza el cambio de variable $x \to y = (x - x_p)^{-1}$ y comprueba que se obtiene una ecuación diferencial lineal del tipo (ayuda) $y' + t^m y = nt^l$, con m, n y l enteros.

c) Calcula la solución general de dicha ecuación diferencial lineal.

d) Deshaz el cambio $y = (x - x_p)^{-1}$ y escribe la solución general $x(t)$ de la ecuación de Riccati.

Solución: $a = -1$, $y'(t) + ty(t) = \alpha t$, $y(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}} + \alpha$.

2) Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = Ae^{ct}\cos(\omega t)$$

en los siguientes casos

a) $a = -2\alpha$, $b = \alpha^2$, $A = 1, c = -\alpha, \omega = 0$

b) $a = -6$, $b = 13$, $A = \alpha, c = -3, \omega = 2$

Solución: a) $y(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t} + \frac{e^{-\alpha t}}{4\alpha^2}$
b) $y(t) = e^{3t}\left(c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)\right) + \frac{1}{156}\alpha e^{-3t}(3\cos(2t) - 2\sin(2t))$

3) Considérese la ecuación diferencial

$$2x(1-x)y'' + (1-2x)y' + 2\alpha^2 y = 0\,.$$

a) ¿Es $x = 0$ un punto ordinario o singular regular? Justifica tu respuesta.

b) Resuelve dicha ecuación por el método de Frobenius en torno a $x = 0$, obteniendo las raíces indiciales y resolviendo la recurrencia para cada una de ellas, proporcionando dos soluciones linealmente independientes.

c) ¿Existe alguna solución polinómica no trivial? ¿En su caso, de qué grado? Justifica tu respuesta.

Solución: $r_1 = 0, r_2 = 1/2$, $c_n^{(r)} = \frac{(\alpha+r+n-1)(-\alpha+r+n-1)}{(n+r-1/2)(n+r)} c_{n-1}^{(r)}$
$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(-\alpha)_n}{(1/2)_n n!} x^n$, $y_2(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1/2)_n(-\alpha+1/2)_n}{(3/2)_n n!} x^n$. Como α es entero, $(-\alpha)_n$ se trunca para $n = \alpha$, de manera que y_1 es un polinomio de grado α.