UNIVERSIDAD DE GRANADA.
Examen Ordinario de Métodos matemáticos II.
Grado en Física Y Doble grado en Física y Matemáticas
16 de Enero de 2018.

- *Entrega los ejercicios por separado.*
- *Duración: 2.5 horas*

1. [*2'5 puntos*] Se considera la ecuación diferencial de tipo Bernoulli

$$y' + \frac{2}{x}y = -2xy^2.$$

   a) Realizar el cambio de variable $u = 1/y$ y ver que la ecuación de Bernoulli para y se reduce a una ecuación lineal para u.

   b) Resolver la ecuación lineal y el problema de valores iniciales asociado a la condición $y(1) = 2$.

2. [*2'5 puntos*] Resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$x''(t) + 4x(t) = 5\sin(3t) + \cos(t)$$

3. [*2 puntos*] Se considera la ecuación diferencial

$$tx'' + (1 - 3t)\,x' + 12x = 0\,.$$

   a) Encuéntrese una solución particular no trivial que sea analítica en $t = 0$.

   b) ¿Podría encontrarse otra solución linealmente independiente que sea analítica en $t = 0$?.

$\boxed{1}$ $y' + \frac{2}{x} y = -2x y^2$, $y = \frac{1}{u}$, $y' = \frac{-1}{u^2} u'$

$$-\frac{1}{u^2} u' + \frac{2}{x}\frac{1}{u} = -2x \frac{1}{u^2} \rightarrow \boxed{u' - \frac{2}{x} u = 2x}$$

$$u(x) = e^{+\int \frac{2}{x}dx}\left(\int 2x\, e^{-\int \frac{2}{x}dx} dx + C\right) =$$

$$= x^2\left(\int 2x \cdot \frac{1}{x^2} dx + C\right) = x^2\left(\ln x^2 + C\right)$$

$\boxed{y(x) = 1/\left(Cx^2 + x^2 \ln x^2\right)}$ Solución general

$$y(1) = 1/(C + 1 \cdot 0) = 2 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Solución: $\boxed{y(x) = 1/\left(\frac{1}{2}x^2 + x^2 \ln x^2\right)}$

$\boxed{2}$ $x'' + 4x = 5\,\text{sen}(3t) + \cos(t)$

Homogénea: $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i \Rightarrow x_h(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \text{sen}(2t)$

Particular: $x_p(t) = A\,\text{sen}(3t) + B\cos(3t) + C\,\text{sen}\,t + D\cos t$

$$x_p'(t) = 3A\cos 3t - 3B\,\text{sen}\,3t + C\cos t - D\,\text{sen}\,t$$

$$x_p''(t) = -9A\,\text{sen}\,3t - 9B\cos 3t - C\,\text{sen}\,t - D\cos t$$

$$x_p'' + 4x_p = -5A\,\text{sen}(3t) - 5B\cos(3t) + 3C\,\text{sen}\,t + 3D\cos t$$

$$= 5\,\text{sen}(3t) + \cos t \Rightarrow A = 1,\ B = 0,\ C = 0,\ D = \frac{1}{3}$$

Solución general $\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t) - \operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{3}\cos(t)}$

$\boxed{3}$ $t x'' + (1-3t)x' + 12x = 0$ en torno a $t=0$ singular regular

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}$$

$$t^r \left\{ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n t^{n-1}}_{n-1=m} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n \underbrace{t^{n-1}}_{n-1=m} - 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n \underbrace{t^n}_{n=m} + 12 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right\} =$$

$$= t^r \left\{ t^{-1} c_0 \left(\underbrace{r(r-1)+r}_{=0 \Rightarrow \boxed{r=0}}\right) + \sum_{m=0}^{\infty} t^m \left[\underbrace{c_{m+1}(m+1+r)^2 - c_m\left(3(m+r)-12\right)}\right]\right\} = 0$$

$$c_{m+1} = \frac{3(m+r)-12}{(m+1+r)^2} c_m \xrightarrow[m+1 \to m]{r=0}$$

$$c_m = \frac{3(m-5)}{m \cdot m} c_{m-1} = \cdots = \frac{3^m \cdot (-4)_m}{m! \, m!} c_0$$

Solución analítica $$x_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m (-4)_m}{m! \, m!} t^m = \sum_{m=0}^{4} \frac{(-4)_m}{(m!)^2} (3t)^m$$

Polinomio de grado 4

no analítica en $t=0$

Una segunda solución sería: $x_2(t) = x_1(t) \ln(t) + \sum_{n=0} b_n t^n$.

OTRA FORMA:

Se puede ver que el cambio de variable $3t = \tau$ lleva a

$$\tau \ddot{\bar{x}} + (1-\tau)\dot{\bar{x}} + 4\bar{x} = 0 \rightarrow \text{hipergeométrica confluente}$$

con $\gamma = 1$, $\alpha = -4$

$$\bar{x}_1(\tau) = {}_1F_1(-4, 1, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)_n}{(1)_n \, n!} \tau^n = x_1(t)$$