Métodos Matemáticos II: Control Tema 3 (Tipo A)

Nombre y Apellidos: **Duración: 1h.**

Dada la ecuación diferencial

$$\left(4 - x^2\right) y'' - 2xy' + 20y = 0,$$

1. **(1pt)** ¿Es $x = 0$ un punto ordinario o singular regular? Justifica tu respuesta.
2. **(7pt)** Calcula por series la solución general $y(x)$ de dicha EDO.
3. **(1pt)** ¿Cuál es el radio de convergencia para dicha solución general? Justifica tu respuesta.
4. **(1pt)** ¿Existe alguna solución de tipo polinómico? En su caso ¿de qué grado?

$\boxed{\text{TIPO A}}$ M. CALIXTO

$$(4-x^2)y'' - 2xy' + 20y = 0 \qquad x=0 \text{ es regular}$$

Ensayo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$(4-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + 20\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4c_n n(n-1)x^{\overset{m}{n-2}} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 20 c_n x^n =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} 4c_{m+2}(m+2)(m+1)x^m + 20c_0 + 20c_1 x - 2c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n c_n \big(\overbrace{20-2n-n(n-1)}^{-n^2-n+20}\big) =$$

$$\underbrace{4c_2(0+2)(0+1) + 4c_3(1+2)(1+1)x + 20c_0 + 18c_1 x}_{} + \sum_{n=2}^{\infty} x^n \Big(\underbrace{4c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n \overbrace{(n^2+n-20)}^{(n-4)(n+5)}}_{0}\Big)$$

Recurrencia

$$\underbrace{20c_0+8c_2}_{0} + x\,(\underbrace{18c_1+24c_3}_{0}) = 0$$

Se recuperan las condiciones

$$c_{n+2} = \frac{(n-4)(n+5)c_n}{4(n+2)(n+1)} \Rightarrow \begin{cases} n=0 \Rightarrow c_2 = \frac{-20}{8}c_0 \\ n=1 \Rightarrow c_3 = \frac{-18}{24}c_1 \end{cases}$$

Recurrencia en pasos de 2

1) $n+2 = 2k$, $n = 2k-2 = 2(k-1)$, $c_{2k} = a_k = \dfrac{(2k-6)(2k+3)a_{k-1}}{4(2k)(2k-1)} = \dfrac{\overbrace{(k-3)}^{k+\alpha-1}\overbrace{(k+\frac{3}{2})}^{k+\alpha-1}a_{k-1}}{4(k)\underbrace{(k-\frac{1}{2})}_{k+\alpha-1}}$

$$a_k = \frac{(k\overset{\alpha=-2}{-2}-1)(k\overset{\alpha=5/2}{+\frac{5}{2}}-1)}{4k(k\underset{\alpha=\frac{1}{2}}{+\frac{1}{2}}-1)}a_{k-1} = \cdots = \frac{(-2)_k(5/2)_k}{4^k k!(\frac{1}{2})_k}a_0$$

2) $n+2=2k+1$, $n=2k-2+1=2(k-1)+1$, $C_{2k+1}=b_k=\dfrac{(2k-5)(2k+4)}{4(2k+1)(2k)}b_{k-1}$

$$b_k=\frac{(k-5/2)(k+2)}{4(k+1/2)(k)}b_k \overset{k+\alpha-1}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{(k-\frac{3}{2}-1)(k+3-1)}{4(k+\frac{3}{2}-1)\ k}b_{k-1}$$

$$b_k=\frac{(-\frac{3}{2})_k(3)_k}{4^k(\frac{3}{2})_k k!}b_0$$

Solución general $\quad y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{C_{2k}}_{a_k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{C_{2k+1}}_{b_k}x^{2k+1}$

$$y(x)=a_0\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)_k(5/2)_k}{4^k k!(\frac{1}{2})_k}x^{2k}}_{y_1(x)}+b_0\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{3}{2})_k(3)_k}{4^k(\frac{3}{2})_k k!}x^{2k+1}}_{y_2(x)}$$

Como $(-2)_k=0$ si $k>2 \Rightarrow y_1(x)$ es un polinomio de grado $2\cdot 2=4$

El radio de convergencia de $y(x)$ se obtiene de la distancia de $x=0$ a la singularidad más próxima, que se da cuando

$(4-x^2)=0 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow$ Radio $=|0\pm 2|=2$

Métodos Matemáticos II: Control Tema 3 (Tipo B)

Nombre y Apellidos: **Duración: 1h.**

Dada la ecuación diferencial

$$\left(9 - x^2\right) y'' - 2xy' + 12y = 0$$

1. **(1pt)** ¿Es $x = 0$ un punto ordinario o singular regular? Justifica tu respuesta.
2. **(7pt)** Calcula por series la solución general $y(x)$ de dicha EDO.
3. **(1pt)** ¿Cuál es el radio de convergencia para dicha solución general? Justifica tu respuesta.
4. **(1pt)** ¿Existe alguna solución de tipo polinómico? En su caso ¿de qué grado?

$\boxed{\text{TIPO B}}$ M. CALIXTO

$(9-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$ $x=0$ es regular

Ensayo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$(9-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + 12\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 9c_n n(n-1)x^{\overset{m}{n-2}} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 12 c_n x^n =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} 9c_{m+2}(m+2)(m+1)x^m + 12c_0 + 12c_1 x - 2c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n c_n \big(\overbrace{12-2n-n(n-1)}^{-n^2-n+12}\big) =$$

$$\underbrace{9c_2\cdot(0+2)(0+1) + 9c_3(1+2)(1+1)x + 12c_0 + 10c_1 x}_{} + \sum_{n=2}^{\infty} x^n\Big(\underbrace{9c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n\big(\overbrace{n^2+n-12}^{(n-3)(n+4)}\big)}_{0}\Big)$$

$$\underbrace{12c_0+18c_2}_{0} + x\big(\underbrace{10c_1+54c_3}_{0}\big) = 0$$

Recurrencia

$$c_{n+2} = \frac{(n-3)(n+4)c_n}{9(n+2)(n+1)} \Rightarrow \begin{cases} n=0 \Rightarrow c_2 = \frac{-12}{18}c_0 \\ n=1 \Rightarrow c_3 = \frac{-10}{54}c_1 \end{cases}$$

Se recuperan las condiciones

Recurrencia en pasos de 2

1) $n+2=2k$, $n=2k-2=2(k-1)$, $c_{2k} = a_k = \frac{(2k-5)(2k+2)a_{k-1}}{9(2k)(2k-1)} = \frac{\overbrace{(k-\frac{5}{2})}^{k+\alpha-1}\overbrace{(k+1)}^{k+\alpha-1}a_{k-1}}{9(k)\underbrace{(k-\frac{1}{2})}_{k+\alpha-1}}$

$$a_k = \frac{\overbrace{(k-\tfrac{3}{2}-1)}^{\alpha=-\frac{3}{2}}\overbrace{(k+2-1)}^{\alpha=2}}{9k\underbrace{(k+\tfrac{1}{2}-1)}_{\alpha=\frac{1}{2}}}a_{k-1} = \cdots = \frac{(-\frac{3}{2})_k(2)_k}{9^k k!(\frac{1}{2})_k}a_0$$

2) $n+2=2k+1$, $n=2k-2+1=2(k-1)+1$, $C_{2k+1}=b_k=\dfrac{(2k-4)(2k+3)}{9(2k+1)(2k)}\,b_{k-1}$

$$b_k = \frac{(k-2)(k+\frac{3}{2})}{9(k+1/2)(k)}\, b_k \overset{k+\alpha-1}{\overset{\Downarrow}{=}} \frac{(k-1-1)(k+\frac{5}{2}-1)}{9(k+\frac{3}{2}-1)\;k}\, b_{k-1}$$

$$b_k = \frac{(-1)_k\,(\frac{5}{2})_k}{9^k\,(\frac{3}{2})_k\,k!}\, b_0$$

Solución general $\quad y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{C_{2k}}_{a_k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{C_{2k+1}}_{b_k} x^{2k+1}$

$$y(x) = a_0 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{3}{2})_k\,(2)_k}{9^k\,k!\,(\frac{1}{2})_k}\, x^{2k}}_{y_1(x)} + b_0 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)_k\,(\frac{5}{2})_k}{{}^{k}(\frac{3}{2})_k\,k!}\, x^{2k+1}}_{y_2(x)}$$

Como $(-1)_k = 0$ si $k>1$ $\Rightarrow$ $y_2(x)$ es un polinomio de grado $2\cdot 1+1=3$

El radio de convergencia de $y(x)$ se obtiene de la distancia de $x=0$ a la singularidad más próxima, que se da cuando

$(9-x^2)=0 \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow$ Radio $=|0\pm 3| = 3$