UNIVERSIDAD DE GRANADA.
Examen Ordinario de Métodos Matemáticos II.
Grado en Física y Doble Grado en Física y Matemáticas
16 de Enero de 2020.

- **Nombre y Apellidos:**
- *Entrega los ejercicios por separado.*
- *Duración: 2 horas y 30 minutos*

1. [*2 puntos*] ¿Es exacta la ecuación diferencial
$$(y^2 - x)dx + xydy = 0 \ ?$$
En caso de que no lo sea, encuentre un factor integrante $\phi(x)$ y la solución general.

2. [*2 puntos*] Encuentra la solución general de la ecuación diferencial
$$x'' - 2x' = \operatorname{sen} t + te^t \ .$$

3. [*3 puntos*] Dada la ecuación diferencial
$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (2 - 2x)\frac{dy}{dx} - 2\alpha y = 0 \ ,$$
   a) Encuentra una solución analítica alrededor de $x = 0$.
   b) Escribe la forma general de otra posible solución linealmente independiente de la anterior.

1) $\underbrace{(y^2-x)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{xy}_{N(x,y)}dy=0$, $\frac{\partial M}{\partial y}=2y\neq\frac{\partial N}{\partial x}=y$

NO ES EXACTA

Probamos un factor integrante $\underbrace{\phi(x)(y^2-x)}_{\tilde{M}}dx+\underbrace{\phi(x)xy}_{\tilde{N}}dy=0$

$$\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=2y\phi(x)=\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=\phi'(x)xy+\phi(x)y\Rightarrow x\phi'(x)=\phi(x)$$

$\frac{d\phi}{\phi}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\phi(x)=Cx$, Tomemos $\phi(x)=x$ $\begin{cases}\tilde{M}(x,y)=x(y^2-x)\\ \tilde{N}(x,y)=x^2y\end{cases}$

Función "potencial"

$$\tilde{M}(x,y)dx+\tilde{N}(x,y)dy=0=dU(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy\Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\tilde{M}=xy^2-x^2\rightarrow U(x,y)=\int(xy^2-x^2)dx+C(y)=\frac{x^2}{2}y^2-\frac{x^3}{3}+C(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\tilde{N}=x^2y\rightarrow x^2y+C'(y)=x^2y\Rightarrow C(y)=K\text{ Constante}$$

Función potencial $U(x,y)=\frac{x^2}{2}y^2-\frac{x^3}{3}+K$. La solución general es una curva equipotencial $U(x,y)=\text{Constante}\Rightarrow$ Solución general $\frac{x^2}{2}y^2-\frac{x^3}{3}=C$ En forma implícita

2) $x''-2x'=\operatorname{sen}t+te^t$

a) Solución general de la ecuación homogénea $x_h''-2x_h'=0$

Ensayo $x(t)=e^{\lambda t}\Rightarrow\lambda^2-2\lambda=0\Rightarrow\lambda=0,2\Rightarrow x_h(t)=c_1+c_2e^{2t}$

b) Solución particular. Ensayo: $x_p(t)=A\operatorname{sen}t+B\cos t+(Mt+N)e^t$

$$x_p'(t)=A\cos t-B\operatorname{sen}t+Me^t+(Mt+N)e^t$$
$$x_p''(t)=-A\operatorname{sen}t-B\cos t+Me^t+Me^t+(Mt+N)e^t$$

Sustituyendo en $x_p''-2x_p'=\operatorname{sen}t+te^{2t}$ tenemos que:

$$\underbrace{(-A+2B)}\operatorname{sen}t+(-B-2A)\cos t-\underbrace{(Mt+N)}e^t=\operatorname{sen}t+te^t$$

$$\left.\begin{aligned}-A+2B&=1\\-B-2A&=0\end{aligned}\right\}\quad A=\frac{-1}{5}\quad B=\frac{2}{5}\qquad\left|\qquad\left.\begin{aligned}-M&=1\\-N&=0\end{aligned}\right\}\quad M=-1\quad N=0\right.$$

Solución general $X(t)=X_h(t)+X_p(t)=C_1+C_2e^{2t}-\frac{1}{5}\operatorname{sen}t+\frac{2}{5}\cos t-te^t$

Nota: También se podría resolver con el cambio $v=x'\Rightarrow v'-2v=\operatorname{sen}t+te^t\ldots$

$\boxed{3}$ $xy''+(2-2x)y'-2\alpha y=0$, $x=0$ singular regular

Ensayo: $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}\to y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}\to y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$

Con lo cual:

$$xy''+(2-2x)y'-2\alpha y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(2x^{n+r-1}-2x^{n+r})-2\alpha\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}=$$

$$=\sum_{\substack{n=0\\ \downarrow\\ m=n-1}}^{\infty}x^{n+r-1}C_n\Big[\underbrace{(n+r)(n+r-1)+2(n+r)}_{(n+r)(n+r-1+2)}\Big]+\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+r}C_n\left(-2(n+r)-2\alpha\right)=$$

$$\overset{n=0}{x^r}\Big\{x^{-1}C_0\underbrace{\left(r(r-1)+2r\right)}_{0}+\sum_{m=0}^{\infty}x^{m+r}\Big[\underbrace{C_{m+1}(m+1+r)(m+2+r)-2C_m(m+r+\alpha)}_{0}\Big]=0$$

$r_1=0\ ,\ r_2=-1$

$$C_{m+1}=\frac{2(m+r+\alpha)}{(m+1+r)(m+2+r)}C_m$$ Relación de recurrencia

$\boxed{r=r_1=0}\Rightarrow C_{m+1}=\dfrac{2(m+\alpha)}{(m+1)(m+2)}C_m\xrightarrow[m+1\to m]{}C_m=\dfrac{2\overbrace{(m-1+\alpha)}^{(\gamma+m-1)\Rightarrow\gamma=\alpha}}{m\underbrace{(m+1)}_{(\beta+m-1)\Rightarrow\beta=2}}C_{m-1}$

$$C_n=\frac{2^n(\alpha)_n}{n!\underbrace{(2)_n}_{(n+1)!}}C_0\Rightarrow y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(\alpha)_n}{(2)_n\,n!}x^n$$ Solución analítica en $x=0$

Nótese que se puede escribir como $y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(2)_n n!}(2x)^n={}_1F_1(\alpha,2;2x)$ hipergeométrica confluente

$\boxed{r=r_2=-1}\Rightarrow C_{m+1}=\dfrac{2(m-1+\alpha)}{m(m+1)}C_m\xrightarrow[m+1\to m]{}C_m=\dfrac{2(m-2+\alpha)}{(m-1)\cdot m}C_{m-1}$

Al tener $(m-1)$ en el denominador, tendré que terminar la recurrencia en $(m-1)=1$, es decir, en C_1 en vez de en C_0, ya que terminar en C_0 me llevaría a una indeterminación del tipo "$\frac{k}{0}$".

$$C_m=\underbrace{\frac{2(m-2+\alpha)}{(m-1)m}\cdot\frac{2(m-3+\alpha)}{(m-2)(m-1)}\cdots\frac{2(0+\alpha)}{1\cdot2}}_{m-1\text{ factores}}C_1=\frac{2^{m-1}(\alpha)_{m-1}}{(m-1)!\,m!}C_1$$

Tomando $c_0=0$ (para que la solución $y_2(x)$ dependa de una sola cte. arbitraria)

$$y_2(x) = x^{r_2}\sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m = c_1 x^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^{m-1}(\alpha)_{m-1}}{(m-1)!\,m!}x^m \overset{m-1=n}{=} c_1 x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(\alpha)_n}{n!\,(n+1)!}x^{n+1}$$

Empiezo en c_1

Con lo cual $y_2(x)=c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(\alpha)_n}{n!\,(2)_n}x^n$, que resulta ser proporcional a la solución $y_1(x)$ obtenida anteriormente para $r_1=0$.

Esto concuerda con lo que dice el Teorema de Frobenius. En efecto, este teorema me dice que, como $r_1-r_2=1$ es entero positivo, la solución $y_2(x)$ correspondiente a $r=r_2=-1$ será linealmente dependiente con $y_1(x)$ de manera que para encontrar otra solución linealmente indep. deberemos ensayar:

$$y_2(x) = C\,y_1(x)\ln(x) + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

con "C" y "b_n" constantes arbitrarias. Esta última solución es claramente no analítica en $x=0$ cuando $C\neq 0$ ó $b_0\neq 0$.