UNIVERSIDAD DE GRANADA.
Control de Métodos Matemáticos II.
(Doble) Grado en Física (y Matemáticas)
20 de diciembre de 2017.

- *Duración: 2 horas*

1. Considere una varilla de longitud $L = 3$, conductividad térmica $\kappa = 1$, densidad lineal de masa $\lambda = 1$ y capacidad calorífica $c = 1$. Tomando $N = 3$ trozos (es decir, 2 puntos interiores), la ecuación de difusión del calor se puede discretizar, dando como resultado un sistema de 2 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden como:

$$\dot{T}_k(t) = \frac{\kappa N^2}{c\lambda L^2}(T_{k-1}(t) - 2T_k(t) + T_{k+1}(t)),\ k = 1, 2. \tag{1}$$

Tome las condiciones de contorno $T_0 = 0$ (extremo izquierdo) y $T_3(t) = \sin(t)e^{-t}$ (extremo derecho), junto con la condición inicial $T_1(0) = T_2(0) = 1$, y calcule la temperatura en los puntos $k = 1$ y $k = 2$ en cualquier instante de tiempo. ¿Cuál es la temperatura a largo plazo $t \to \infty$ (estado estacionario)?

2. Resolver la ecuación diferencial

$$(\frac{1}{4} - x^2)y'' - 2xy' + 20y = 0$$

para $y(x)$ en torno al punto $x_0 = 0$.

   a) ¿Es $x_0 = 0$ un punto ordinario o singular?

   b) ¿Cuál es el radio de convergencia?

   c) ¿Existen soluciones polinómicas, es decir, se trunca la serie par alguna de las soluciones?

$\boxed{1}$ a) $\dot{T}_1 = -2T_1 + T_2$

b) $\dot{T}_2 = T_1 - 2T_2 + f(t)$

$f(t) = T_3(t) = e^{-t}\,\text{sen}(t)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{a)}\\ \text{b)}\end{array}\right\} \to \boxed{\ddot{T}_1 = -2\dot{T}_1 + \dot{T}_2 \overset{b)}{=} -2\dot{T}_1 + (T_1 - 2T_2 + f) \overset{a)\ T_2 = \dot{T}_1 + 2T_1}{=} -4\dot{T}_1 - 3T_1 + f}$$

$\underline{1.1|}$ Solución general homogenea $\ddot{T}_1 + 4\dot{T}_1 + 3T_1 = 0$

Ecuación Característica $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1, -3$

$$T_{1,h}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$$

$\underline{1.2|}$ Solución particular de $\ddot{T}_1 + 4\dot{T}_1 + 3T_1 = e^{-t}\,\text{sen}(t)$

Ensayo $T_{1,p}(t) = e^{-t}(A\cos t + B\,\text{sen}\,t) \Rightarrow A = -\frac{2}{5}, B = -\frac{1}{5}$

Solución general $T_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} + e^{-t}\left(-\frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\text{sen}\,t\right)$

a) $\Rightarrow T_2 = \dot{T}_1 + 2T_2 = C_1 e^{-t} - C_2 e^{-3t} + e^{-t}\left(-\frac{3}{5}\cos t + \frac{1}{5}\text{sen}\,t\right)$

Condiciones inicials
$$\left.\begin{array}{l} 1 = T_1(0) = C_1 + C_2 - \frac{2}{5} \\ 1 = T_2(0) = C_1 - C_2 - \frac{3}{5}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = \frac{3}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{10}\end{array}$$

Solución:
$$\left\{\begin{array}{l} T_1(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{10}e^{-3t} + e^{-t}\left(-\frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\text{sen}\,t\right) \xrightarrow{t\to\infty} 0 \\ T_2(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{10}e^{-3t} + e^{-t}\left(-\frac{3}{5}\cos t + \frac{1}{5}\text{sen}\,t\right) \xrightarrow{t\to\infty} 0 \end{array}\right.$$

$\boxed{2}$ $\left(\frac{1}{4}-x^2\right)y''-2xy'+20y=0$, en torno a $x_0=0$ (ordinario)

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow \left(\frac{1}{4}-x^2\right)\sum_{n=2} c_n n(n-1)x^{n-2}-2x\sum_{n=0} c_n n x^{n-1}+20\sum_{n=0} c_n x^n=0$$

$\boxed{n-2=m}$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4}(m+2)(m+1)c_{m+2}x^m-\sum_{m=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^n-2\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^n+20\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=0$$

$\boxed{n=m}$ $\boxed{n=m}$ $\boxed{n=m}$

$$\boxed{c_{m+2}=\frac{m(m+1)-20}{\frac{1}{4}(m+2)(m+1)}c_m=\frac{4(m+5)(m-4)}{(m+2)(m+1)}c_m}$$ pasos de 2

$\boxed{2.1}$ $m+2=2k \Rightarrow \overset{c_{2k}}{a_k}=\frac{4\left(k+\frac{3}{2}\right)(k-3)}{\left(k-\frac{1}{2}\right)(k)}a_{k-1}=\dots=\frac{2^{2k}(-2)_k\left(\frac{5}{2}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}a_0$

$\boxed{2.2}$ $m+2=2k+1 \Rightarrow \overset{c_{2k+1}}{b_k}=\frac{4\left(k-\frac{5}{2}\right)(k+2)}{\left(k+\frac{1}{2}\right)(k)}b_{k-1}=\dots=\frac{2^{2k}\left(-\frac{3}{2}\right)_k(3)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k k!}b_0$

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boxed{(-2)_k}\left(\frac{5}{2}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}\underbrace{2^{2k}x^{2k}}_{(2x)^{2k}}=\sum_{k=0}^{2}\frac{(-2)_k\left(\frac{5}{2}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}(2x)^{2k}$$ par $\Rightarrow$ polinomio de grado 4

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)_k(3)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k k!}\underbrace{2^{2k}x^{2k+1}}_{\frac{1}{4}(2x)^{2k+1}}$$ $\Rightarrow$ impar

Solución general $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$

El radio de convergencia R es la distancia a la singularidad más cercana $\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{R=\frac{1}{2}}$

Se puede comprobar que el cambio de variable $2x=t$ lleva a la ecuación de LEGENDRE

$$(1-t^2)\ddot{y}-2t\dot{y}+(\alpha+1)\alpha y=0,\quad \alpha=4$$

Otra forma de calcular el radio de convergencia:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}\,x^{n+1}}{c_n\,x^n}\right| < 1 \Rightarrow |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1$$

Con lo cual $|x| < \lim\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = R$

La solución $y_1(x)$ converge en todo $\mathbb{R}$ porque es un polinomio.

Veamos la solución $y_2(x) = \sum_{K=0}^{\infty} b_K\, x^{2K+1}$.

$$y_2(x) < \infty \Rightarrow \lim_{K\to\infty}\left|\frac{b_{K+1}\,x^{2(K+1)+1}}{b_K\,x^{2K+1}}\right| = \boxed{|x|^2\cdot\lim\left|\frac{b_{K+1}}{b_K}\right| < 1}\ *$$

$$\lim_{K\to\infty}\frac{|b_K|}{|b_{K+1}|} = \lim_{K\to\infty}\frac{\dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)_K (3)_K}{\left(\frac{3}{2}\right)_K\,K!}\cdot 4^K}{\dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)_{K+1}(3)_{K+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)_{K+1}\cdot(K+1)!}\,4^{K+1}} = \lim_{K\to\infty}\frac{\dfrac{\left(K+1-\frac{3}{2}\right)(K+1-3)}{\left(K-1+\frac{3}{2}\right)K}\,4^K}{\dfrac{\left(K-\frac{3}{2}\right)(K-3)}{\left(K+\frac{3}{2}\right)(K+1)}\cdot 4^{K+1}} =$$

$$= \lim_{K\to\infty}\frac{4^K}{4^{K+1}} = \frac{1}{4}$$

De manera que $*$ implica $|x|^2 < \frac{1}{4}$ con lo cual $\boxed{|x| < \frac{1}{2} = R}$