Complementos para la formación en matemáticas

Matemáticas y otras ciencias*

María J. Cáceres

11 de enero de 2026

Índice

*Estas notas solo pretenden ser una ayuda para el estudio de esta parte de la asignatura. Probablemente tengan erratas, por lo que si las encuentras, o se te ocurre cualquier comentario, o idea para mejorar su contenido, puedes escribirme a: caceresg@ugr.es.
Para un estudio detallado de los modelos aquí presentados puedes consultar las siguientes referencias [12, 13, 14, 3, 9, 1, 2, 7, 15, 16, 6, 5, 4, 10].

1. Preguntas iniciales

Antes de comenzar con los contenidos propios de estas notas, nos planteamos una serie de cuestiones que nos ayudarán a situar lo aprendido en este bloque de la asignatura *Complementos para la formación en matemáticas* dentro de la práctica docente:

1. ¿Para qué se enseña matemáticas?
2. ¿Cómo se enseña en general, y en particular matemáticas?
3. ¿Qué impresión se tiene sobre las matemáticas?
4. ¿Cuáles son las principales dificultades de enseñar matemáticas? ¿Y de aprenderlas?
5. A propósito de la LOMLOE, ¿Cuáles son los principales cambios frente al sistema anterior? ¿Cómo se entiende conceptos como *objetivos*, *competencias clave y específicas*, *productos finales* y *situaciones de aprendizajes*?

No pretendemos dar respuesta a estas preguntas en estas notas. Algunas de ellas están recogidas en la normativa vigente y otras implicarían analizar investigaciones sobre el tema. El propósito con ellas es llamarnos la atención sobre cuestiones básicas para plantear una propuesta docente. En estas notas vamos a ver herramientas matemáticas que nos servirán para proponer situaciones de aprendizaje al alumnado de secundaria y/o bachillerato.

Acabamos esta sección recordando las competencias específicas de matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria[1] para tenerlas presentes en las actividades que pudieran derivarse de lo aprendido en esta parte de la asignatura.

1. *Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.*
2. *Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.*

[1]Instrucción conjunta 1/2022, de 23 de junio, de la Dirección General de Ordenación Y Evaluación Educativa y de la Dirección General de Formación Profesional, por la que se establecen aspectos de organización y funcionamiento para los centros que impartan Educación Secundaria Obligatoria para el curso 2022/2023. https://anpeandalucia.es/openFile.php?link=notices/att/1/instruccion1-2022organizacioneso_t1657715309_1_3.pdf

3. *Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.*

4. *Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.*

5. *Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.*

6. *Identificar las matemáticas implicadas en otras materias, en situaciones reales y en el entorno, susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.*

7. *Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.*

8. *Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.*

9. *Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.*

10. *Desarrollar destrezas sociales, reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, para fomentar el bienestar personal y grupal y para crear relaciones saludables.*

Antes de empezar con el contenido propio de estas notas, planteamos dos situaciones, en principio, ajenas las matemáticas, para pensar y discutir, en clase, en qué medida se trabajan las competencias específicas que acabamos de enumerar.

1. Supongamos que en un banco nos dan el $0.1\,\%$ de interés mensual compuesto si durante 12 meses no retiramos el capital depositado.

   a) ¿Cuánto será nuestro capital pasados 12 meses si inicialmente hacemos un depósito de 1000 euros?

   b) ¿Cuánto hemos ganado con el depósito?

   c) ¿Cuántos meses deben pasar para duplicar nuestro capital?

   d) ¿Podrías dar una fórmula matemática para saber cuánto capital tenemos cada mes?

Solución: Que el interés sea compuesto significa que los intereses generados se suman al capital inicial, y sobre esa nueva suma se calculan los nuevos intereses. Entonces, nuestro capital pasados 12 meses si inicialmente hacemos un depósito de 1000 euros es:
Primer mes: $1000 + 0{,}001 * 1000 = 1001$.
Segundo mes: $1001 + 0{,}001 * 1001 = 1002{,}001$.

Y así podríamos seguir, vemos que cada mes se tiene un capital C_n, que depende del capital en el mes anterior C_{n-1}

$$C_n = C_{n-1}\left(1 + \frac{0{,}1}{100}\right).$$

Entonces $C_n = C_0\left(1 + \frac{0{,}1}{100}\right)^n$. Luego $C_{12} = C_0\left(1 + \frac{0{,}1}{100}\right)^{12} = 1012{,}06622$ euros. Es decir, hemos ganado 12,06622 euros.

Para saber cuántos meses deben pasar para duplicar nuestro capital inicial, vemos que debemos encontrar n para que

$$C_n = 2C_0,$$

es decir,

$$C_0\left(1 + \frac{0{,}1}{100}\right)^n = 2C_0,$$

y por tanto

$$n = \frac{\log(2)}{\log\left(1 + \frac{0{,}1}{100}\right)},$$

es decir, deben pasar 693,4936964 meses, 57,79114137 años.

2. Supongamos que estamos analizando una población de bacterias aislada en un laboratorio. Cada día contamos las bacterias que tenemos. A la vista de nuestras observaciones pensamos que con respecto al día anterior nacen a razón de 0,25 y mueren un tercio de las que teníamos el día anterior.

   a) Si inicialmente hay 100 bacterias, ¿cuántas deberíamos observar pasado un día, si nuestras hipótesis son ciertas?
   b) Y en general ¿cómo cambia el número de bacterias con respecto al día anterior?
   c) ¿Qué ocurrirá con el número de bacterias cuando vayan pasando los días?
   d) ¿Podrías dar una fórmula matemática para saber cuántas bacterias habrá, si nuestras hipótesis son ciertas?

Solución: Si inicialmente tenemos 100 bacterias, el día siguiente tendremos

$$100 + \text{nace} - \text{mueren} = 100 + 100 * 0{,}25 - \frac{100}{3} = 91{,}66666667.$$

Vemos que pasado un día se ha reducido el número de bacterias, como las tasas de nacimientos y muertes son constantes es razonable pensar que la población de bacterias a largo plazo se va a ir reduciendo. Lo comprobamos encontrando una expresión para el número de bacterias como función de los días. Si denotamos por p_n el número de bacterias en el día n, vemos que podemos determinarlo en función del número de bacterias en el día anterior, p_{n-1}:

$$p_n = p_{n-1}\left(1 + 0{,}25 - \frac{1}{3}\right).$$

Y por tanto

$$p_n = p_0 \left(1 + 0{,}25 - \frac{1}{3}\right)^n.$$

Como $1 + 0{,}25 - \frac{1}{3} < 1$ vemos que la población decrece, concretamente se reduce aproximadamente un 0.0833 por ciento cada día. Por lo que la población de bacterias tiende a la extinción.

A la vista de estas situaciones nos preguntamos:

1. Pensando en el alumnado de secundaria o bachillerato, ¿se entienden los enunciados? ¿Hay dificultad para encontrar las "fórmulas"?

2. ¿Qué herramientas matemáticas se han empleado?

3. ¿Se pueden unificar ambas situaciones en un mismo "ámbito matemático"?

4. ¿Qué competencias específicas se trabajan?

2. Introducción

Una de las principales dificultades que presenta la enseñanza de las matemáticas en ESO, Bachillerato y FP es la aparente desconexión que percibe el alumnado, entre la realidad y las matemáticas. Éste parece considerar las matemáticas como una serie de algoritmos y abstracciones complejas, que solo valen para aprobar la asignatura de matemáticas. Por otro lado, cuando se plantean situaciones cotidianas, que acerquen la realidad y las matemáticas, aparece la dificultad de pasar el lenguaje verbal, en el que se plantea la situación sujeta a análisis, al lenguaje matemático.

Con este bloque de la asignatura *Complementos para la formación en matemáticas* queremos mostrar una serie de aplicaciones sencillas originadas en otras ciencias, como por ejemplo la biología y la economía. Estos ejemplos nos servirán para resaltar la importancia de las sucesiones, las funciones, las derivadas de funciones y las matrices. Así como, destacar la importancia del modelado como clave imprescindible en el uso de la matemáticas para resolver problemas en otras disciplinas: física, biología, geología, economía,...

Comenzaremos analizando en la sección 3 el uso de las sucesiones de números y de las funciones en el estudio de la dinámica de poblaciones. Concretamente, derivaremos el modelo de Malthus, partiendo de premisas muy elementales, para entender bajo qué condiciones el modelo puede ser válido, y bajo cuáles otras tiene carencias. En este último caso, propondremos un modelo que supla algunas de dichas carencias (modelo logístico).

En la sección 4 veremos las matrices como una herramienta sencilla para estudiar la dinámica de una población estructura en grupos de edad (modelo de Leslie).

La segunda parte de este bloque la dedicaremos a dos aspectos distintos. En la sección 5 veremos cómo debemos tener cuidado con los usos informáticos que empleemos. Para ello analizaremos cómo se emplean las hojas de cálculo para encontrar la mejor función exponencial que ajusta a una nube de puntos bajo el criterio de tener el menor error cuadrático. En la sección 6 veremos algunos ejemplos de optimización y cómo se pueden resolver con hojas de cálculo.

Finalmente, en la sección 7 presentamos las hojas de cálculo como una herramienta sencilla y muy útil para ilustrar todo lo aprendido en las secciones anteriores. Completamos estas notas de clase con dos apéndices en los que se profundiza un poco más sobre ciertos aspectos matemáticos relacionados con las secciones anteriores.

3. Sucesiones y funciones en dinámica de poblaciones

Imaginemos que estamos estudiando el tamaño (número de miembros) de una población determinada, mediante recuentos, por ejemplo podrían ser anuales. Cada recuento tendrá asociado un número (el de miembros de la población en ese recuento). Así, podemos denotar por p_n el número de miembros de la población en el recuento n, entendiendo que $n = 0$ denota el recuento inicial. Observamos de este modo que $\{p_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de números. Una pregunta natural sería ¿podemos conocer el tamaño de la población a largo plazo? Evidentemente la respuesta a esta pregunta está supeditada a tener más información sobre la población. Y constituye más un problema biológico que matemático. En la siguiente subsección veremos cómo partiendo de distintas premisas biológicas llegamos a plantear diferentes modelos matemáticos que pueden dar respuesta a la pregunta anterior.

3.1. Modelo de Malthus

Supongamos que queremos plantear un modelo matemático que describa el tamaño de una población aislada (ni llegan, ni se marchan miembros). Para ello, representamos por p_n el número de miembros en el recuento n. Conocido este número podemos pensar que el tamaño de la población en el recuento siguiente $n + 1$ será

$$p_{n+1} = p_n + \text{nacen} - \text{mueren}.$$

¿Cómo determinar el número de nacimientos y defunciones?

$$\text{nacen} = f\, p_n\,, \quad \text{mueren} = m\, p_n,$$

donde f y m son los índices de natalidad y mortalidad, respectivamente[2]. Por tanto, encontramos que

$$p_{n+1} = (1 + (f - m))p_n. \tag{1}$$

Esta ecuación es la que se conoce como *modelo de Malthus discreto* y lo propuso Malthus, cuando estudió la población de Estados Unidos entre los años 1790 y 1860.

La ecuación (1) nos permite hacer las siguientes observaciones:

1. Conocido p_0, tamaño de la población inicialmente, se conoce el tamaño de la población en todos los recuentos posteriores, puesto que:

$$p_1 = (1 + (f - m))p_0, \quad p_2 = (1 + (f - m))p_1 = (1 + (f - m))^2 p_0, \, \ldots$$

[2]La ecuación $p_{n+1} = (1+(f-m))p_n$ ¿tiene sentido biológico para cualesquiera f y m constantes positivas? (en el sentido de que para cada n, p_n sea una cantidad no negativa).

en general, se llega a:

$$p_n = (1 + (f - m))^n p_0.$$

Por tanto las soluciones de (1) son sucesiones, cuyos términos siguen una progresión geométrica de razón $(1 + (f - m))$.

2. Puesto que $p_n = (1 + (f - m))^n p_0$ observamos que, considerando $p_0 \neq 0$:

   - Si $f > m$, la población crece con el tiempo.
   - Si $f < m$, la población decrece.
   - Si $f = m$ la población se mantiene constante.

   Biológicamente es obvio, ya que si el índice de natalidad es superior al de mortalidad la población debe crecer y en caso contrario decrecer. Si ambos índices son iguales la población tendría siempre el mismo tamaño.

3. ¿Es razonable este modelo para aproximar poblaciones con miembros grandes?

   Este modelo condena a las poblaciones a la extinción o al crecimiento ilimitado. El crecimiento ilimitado en un espacio finito parece poco razonable. Sin embargo, el modelo puede ser válido, por ejemplo, para bacterias, ya que en función de su tamaño el espacio limitado, pero suficientemente grande, supongamos la Tierra, no es un problema. También puede ser válido para predicciones en periodos cortos de tiempo, incluso para poblaciones con miembros grandes.

4. ¿Qué ha fallado en el modelo? El modelo no tiene en cuenta que la Tierra es finita, ni los fenómenos migratorios, ni que las tasa de natalidad y mortalidad no pueden ser constantes.

5. ¿Cómo plantearíamos un modelo más realista?

Antes de pasar a proponer un modelo más realista, hacemos unos comentarios sobre el modelo de Malthus en su versión continua, es decir, considerando que se quiere conocer el tamaño de la población en todo instante de tiempo:

$$P'(t) = (\tilde{f} - \tilde{m})\, P(t). \tag{2}$$

En ese caso, la solución no es una sucesión de números, sino una función real que toma valores positivos[3]. Observamos que en la versión continua también se describe una población que crece ilimitadamente si $\tilde{f} > \tilde{m}$ y decrece tendiendo a la extinción si $\tilde{f} < \tilde{m}$ ¿por qué?

[3] La justificación del modelo continuo es como sigue: representamos por $P(t)$ el número de miembros en el instante t. Como razonábamos antes, conocido este número podemos pensar que el tamaño de la población, pasado un tiempo Δt será

$$P(t + \Delta t) = P(t) + \text{nacen} - \text{mueren}.$$

pero en este caso representamos las tasa de natalidad y mortalidad teniendo en cuenta el tiempo transcurrido, es decir, Δt:

$$\text{nacen} = \tilde{f}\, \Delta t\, P(t)\,, \quad \text{mueren} = \tilde{m}\, \Delta t\, P(t),$$

donde $\tilde{f}$ y $\tilde{m}$ son los índices de natalidad y mortalidad, respectivamente. Por tanto, encontramos que

$$P(t + \Delta t) = P(t) + \tilde{f}\, \Delta t\, P(t) - \tilde{m}\, \Delta t\, P(t)$$

o, escrito de otro modo,

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (\tilde{f} - \tilde{m})\, P(t). \tag{3}$$

A la vista de los dos modelos de Malthus presentados, modelo discreto (1) y modelo continuo (2) podemos señalar los siguientes comentarios:

1. Ambos modelos pretenden describir la evolución del tamaño de una determinada población.

2. Desde un punto de vista biológico la diferencia entre ambos modelos está en la dependencia temporal de su tamaño. En el modelo discreto, el tiempo se mide en ciertos instantes, dependiendo de la periodicidad de los recuentos (días, semanas, meses, años ...), mientras que en el modelo continuo se podría conocer el tamaño de la población en todo instante de tiempo.

3. La concepción diferente del tiempo, discreta o continua, provoca que la solución de la ecuación matemática planteada tenga una naturaleza distinta: sucesión o función, respectivamente.

4. En el caso de la aproximación de Malthus, ambos modelos tienen un comportamiento parecido, sin embargo, hay otros modelos que tienen un comportamiento muy distinto en sus versiones discreta y continua. Por tanto, es importante saber cuál es la naturaleza del problema estudiado, es decir, si el tiempo es una variable continua o discreta. Por ejemplo, si se piensa en aves migratorias en un determinado humedal ¿cómo se debe modelar el tiempo, continuo o discreto?

3.2. Ecuación logística

Buscamos una ecuación en diferencias (ecuación del tipo $p_{n+1} = f(p_n)$ con f una función real, véase el apéndice A para más detalles) que corrija las deficiencias de la ecuación discreta de Malthus $p_{n+1} = r\, p_n$, donde hemos agrupado todas las constantes, tomando $r = 1+(f-m)$. Esas deficiencias vienen de suponer que las tasas de fertilidad y natalidad son constantes, o dicho de otro modo que la tasa de crecimiento

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}$$

es constante. Para evitar el crecimiento ilimitado o la extinción, nos planteamos una tasa de crecimiento que no sea constante, y una primera aproximación es considerar una tasa de crecimiento lineal, que se haga más pequeña cuando aumente el tamaño de la población. Es decir, la tasa de crecimiento no es una constante, sino una recta como función de p_n decreciente[4]:

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = a - b\, p_n\,, \quad a, b > 0. \tag{5}$$

Si el paso del tiempo Δt se hace muy pequeño (es decir, $\Delta t \to 0$) la *velocidad media* se convierte en *velocidad instantánea*, que no es otra cosa que la derivada de P. De este modo, de la ecuación discreta obtenemos la ecuación continua de Malthus (ecuación diferencial)

$$P'(t) = (\tilde{f} - \tilde{m})\, P(t).$$

[4]La motivación biológica de la ecuación (5) es la siguiente: los índices de natalidad y mortalidad no son constantes (como pasaba en el modelo de Malthus), son de la forma $\alpha - \beta\, p$ para la natalidad y $\lambda + \gamma\, p$ para la mortalidad, siendo α, β, λ y γ ciertas constantes positivas. Esto significa que:

- El <u>número de nacimientos</u> en función de p_n es $(\alpha - \beta\, p_n)\, p_n$. De este modo si hay muchos miembros

Pasando p_n al término de la derecha en la ecuación (5) obtenemos la ecuación logística:

$$p_{n+1} = (a - bp_n)p_n. \tag{6}$$

Para garantizar la positividad de p_{n+1} debe verificarse que $a - b\,p_n > 0$, es decir, $p_n < \frac{a}{b}$, por tanto la población no puede crecer ilimitadamente. En la sección 3.2.1 se demuestra que si $0 < a \leq 4$ y $0 < p_0 < \frac{a}{b}$, entonces $0 < p_n < \frac{a}{b}$ y por tanto se garantiza la positividad de p_n en todos los recuentos.

Nuevamente, una solución de la ecuación (6) es una sucesión de números, donde cada término se relaciona con el anterior mediante la fórmula que indica dicha ecuación. Sin embargo, para esta sucesión, en general[5], si partimos de p_0 no podemos encontrar una expresión para su término general, p_n, dependiente de las constantes a, b y p_0[6].

Una pregunta más sencilla sería ¿existe un tamaño N tal que la población siempre tenga ese número de miembros en todos los recuentos? Esta pregunta traducida a nuestro ambiente matemático sería ¿existe un dato inicial $p_0 = N$ tal que para todo n, $p_n = p_0 = N$? O dicho de otro modo, la pregunta es ¿tiene la ecuación logística alguna solución constante?, es decir, ¿existe una sucesión de números, con todo sus términos iguales a N tal que sea solución de la ecuación (6)? Para responder a estas preguntas basta resolver la ecuación

$$N = p_{n+1} = (a - bp_n)p_n = (a - bN)N$$

es decir, $N = (a - bN)N$, que tiene como soluciones $N = 0$ y $N = \frac{a-1}{b}$. Vemos que para que $\frac{a-1}{b}$ tengan sentido biológico, es decir, nos ofrezca un tamaño de la población, debe ser un valor positivo, por lo que a debe ser mayor que 1. Como ya hemos dicho, si tomamos p_0 igual a esos valores tendremos que durante todos los recuentos el número de miembros es el mismo.

Pero ¿qué pasa si tomamos valores próximos a esas cantidades constantes? La respuesta a esta pregunta requiere de los conceptos de *estabilidad* y *estabilidad asintótica* de soluciones constantes. Los detalles se pueden encontrar en el apéndice A, aquí solo mencionaremos la idea intuitiva, que además se puede entender bien con una hoja de cálculo. El concepto de estabilidad da una idea de cómo se comportan las soluciones con datos iniciales próximos a

---

en el instante n el número de nacimientos es menor, puesto que $\alpha - \beta\,p$ es una función decreciente en p.

- El número de defunciones en función de p_n es $(\lambda + \gamma\,p_n)\,P_n$, lo que significa que la probabilidad de muerte aumenta a medida que aumenta el tamaño de la población.
- El número de miembros en el instante $n+1$ es el número de miembros que había en el instante anterior n, más los nacimientos, menos las muertes, es decir:

$$p_{n+1} = \underbrace{p_n}_{\text{la/e/os que había}} + \underbrace{(\alpha - \beta\,p_n)\;P_n}_{\text{la/e/os que nacen}} - \underbrace{(\lambda + \gamma\,p_n)\;P_n}_{\text{la/e/os que mueren}}. \tag{4}$$

Podemos ordenar los términos de la ecuación (4) y obtenemos:

$$p_{n+1} = (1 + \alpha - \lambda)\;p_n - (\beta + \gamma)\;p_n^2 = ((1 + \alpha - \lambda) - (\beta + \gamma)\;p_n)\;p_n,$$

que tiene la forma de la ecuación (6) escogiendo $a = 1 + \alpha - \lambda$ y $b = \beta + \gamma$.

[5]Hay casos particulares en los que sí se puede encontrar el término general, ¿podrías encontrar alguno?

[6]Escribe los 3 primeros términos de la solución de la ecuación logística en función del recuento inicial p_0.

la solución constante. Así, en el caso de la ecuación logística se sabe que cuando $0 < a \leq 1$ la solución constantemente 0 es asintóticamente estable, es decir, si se empieza cerca del valor 0 la solución tiene a 0 a largo plazo. O dicho de otro modo, si inicialmente el tamaño de la población es pequeño, a largo plazo la población se extinguirá. Sin embargo, si $1 < a < 3$, la solución constantemente 0 se vuelve inestable. Es decir, en general, si inicialmente el tamaño de la población es pequeño, a largo plazo aumenta porque se aleja del valor 0. En ese rango de valores de a ($1 < a < 3$) la solución constantemente $\frac{a-1}{b}$ es asintóticamente estable, es decir, si inicialmente el número de miembros ronda el valor $\frac{a-1}{b}$, a largo plazo, el tamaño de la población se aproximará exactamente al valor $\frac{a-1}{b}$.

Pero la "simple" ecuación logística, esconde soluciones con un comportamiento mucho más complejo que el descrito hasta ahora (se pueden consultar los detalles en la sección 3.2.1). Concretamente, para $3 < a \leq 4$ existen soluciones periódicas y aparece el fenómeno de caos, que tiene como consecuencia el efecto mariposa. Todos estos comportamientos se pueden observar con una simple hoja de cálculo. Y con los siguiente programas disponibles en la red.

Programas para simular la ecuación logística en diferencias

Algunos programas disponibles en la red para estudiar la ecuación logística discreta:

- Programa del Prof. Juan Campos (UGR):
  http://www.ugr.es/~arobles/FBAI/logdsc03.exe

- *WolframAlpha* analiza todos los aspectos de la ecuación:
  http://www.wolframalpha.com/input/?i=logistic+map+

- Programa para ver la evolución de la población:
  http://www.geom.uiuc.edu/~math5337/ds/applets/iteration/Iteration.html

- Pograma para ver el diagrama de bifurcación y los valores de los distintos recuentos:
  http://math.bu.edu/DYSYS/applets/bif-dgm/Logistic.html

- Puedes descubrir más entre los enlaces de arriba y por supuesto navegando en la red ... pero no olvides que ¡tú puedes hacer tu propio programa con una simple hoja de cálculo!

Para acabar este breve repaso sobre la ecuación logística (invitamos a la persona interesada en más detalles a leer la sección 3.2.1) señalamos que la versión continua de este modelo, es decir, la ecuación diferencial

$$P'(t) = (A - B\,P(t))\;P(t), \tag{7}$$

describe un comportamiento mucho más sencillo, ya que esta ecuación tiene también dos soluciones constantes, que son estables o inestables en función del signo de los coeficientes A y B, pero no tienen soluciones cíclicas, ni presenta el fenómeno de caos. Hacemos este comentario porque nos lleva a reflexionar sobre el concepto de derivada

$$P'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}. \tag{8}$$

Fijando el incremento de tiempo Δt y aproximando $P'(t)$ por su cociente incremental $\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$, podemos llegar, como se hizo en la sección anterior con el modelo de Malthus, a la ecuación logística diferencial (7). Cuando ese incremento de tiempo es grande pueden aparecer valores del correspodiente a (en la ecuación en diferencias (6)) grandes de forma que la ecuación en diferencias puede tener ciclos o caos. Por tanto, solo se tiene un comportamiento parecido entre ambos modelos, discreto y continuo (en diferencias y diferencial), cuando el paso de tiempo es muy pequeño, es decir, cuando realmente el cociente incremental es una buena aproximación de la derivada.

3.2.1. Algunos detalles sobre la ecuación logística

Incluimos en esta sección algunos detalles un poco más complejos sobre la ecuación logística discreta, ecuación (6), pero que podrían servir como ideas para proponer actividades de profundización para un alumnado más motivado en las matemáticas, tanto en ESO como Bachillerato.

Sacando factor común a en (6) nos queda

$$p_{n+1} = a\left(1 - \frac{b\,p_n}{a}\right)p_n,$$

que puede escribirse de forma más sencilla haciendo el cambio $x_n = \frac{b\,p_n}{a}$. De este modo

$$\mathbf{x_{n+1}} = \frac{b\,p_{n+1}}{a} = \frac{b}{a}a\left(1 - \frac{b\,p_n}{a}\right)p_n = a\left(1 - \frac{b\,p_n}{a}\right)\frac{b\,p_n}{a} = \mathbf{a\,(1 - x_n)\,x_n},$$

llegando así a la ecuación

$$x_{n+1} = a\,(1 - x_n)\,x_n. \tag{9}$$

Observamos que x_n es una cantidad sin unidades[7], que toma valores entre cero y uno. Si toma el valor cero significa que no hay miembros en la población y si toma el valor 1, la población tiene el tamaño máximo permitido: a/b.

Consideraciones previas sobre la ecuación

Antes de pasar a estudiar en detalle la ecuación logística discreta (9), analizamos las condiciones que debe cumplir para que tenga sentido biológico.

- Para que el término derecho de la ecuación sea positivo debe ocurrir que $0 \le x_n \le 1$ y $a > 0$. Pero ... ¿es esto suficiente?

- Para que en todo instante x_n esté entre cero y uno, la parábola $f(x) = a\,(1-x)\,x$ debe tomar valores entre cero y uno, si la variable x toma valores entre cero y uno. f es una párabola que corta al eje de abscisas en los puntos 0 y 1 y tiene el vértice en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{a}{4})$ (es decir, $x = \frac{1}{2}$ e $y = f(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4}$). Esto quiere decir que la función es creciente desde 0 hasta $\frac{1}{2}$ y decreciente desde $\frac{1}{2}$ hasta 1. Por tanto, el valor máximo de la función es el alcanzado en el vértice, que sabemos es $\frac{a}{4}$. Puesto que la función $f(x)$ debe tomar valores entre 0 y 1 (si $x \in [0,1]$), el valor del máximo debe ser a lo sumo 1, es decir $\frac{a}{4} \le 1$, lo que significa que $a \le 4$. En la figura 1 podemos ver la gráfica de la parábola para distintos valores de a.

Concluimos, de este modo, que las condiciones que debemos imponer son: $0 \le a \le 4$ y $0 \le x_0 \le 1$.

[7] ¿Por qué?

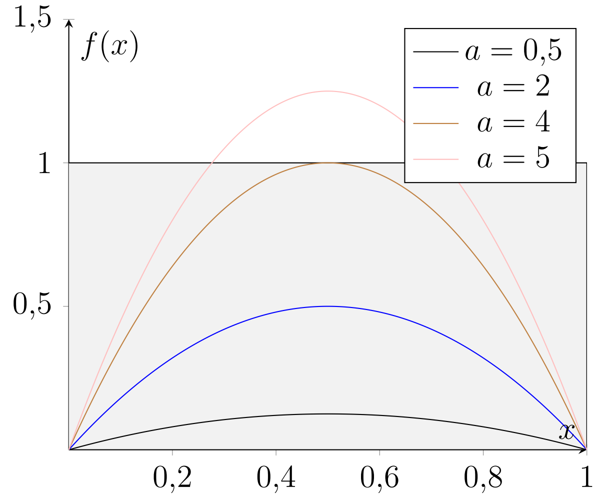

Figura 1: Función $f(x) = ax(1-x)$ para distintos valores de a. Se observa que para $a = 5$ la gráfica de f sobrepasa el valor 1.

Soluciones constantes. Estabilidad

Recordamos que las soluciones constantes de una ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$ se encuentran localizando los puntos fijos de la función f. Así pues, nuestro objetivo es determinar los puntos fijos de la función $f(x) = a\,(1-x)\,x$ o, dicho de otro modo, resolver la ecuación

$$x = a\,(1-x)\,x.$$

Esta ecuación es sencilla y vemos que sus soluciones son 0 y $1 - \frac{1}{a}$. Por tanto, las soluciones constantes de la ecuación logística en diferencias son:

- $x_n = 0$ para cualquier valor de n.
- $x_n = 1 - \frac{1}{a}$ para cualquier valor de n. Esta solución tiene sentido biológico solo si $1 - \frac{1}{a} > 0$, es decir, si $a > 1$.

Resumimos la situación:

$0 < a \leq 1$	Una única solución constante: 0
$1 < a \leq 4$	Dos soluciones constantes: 0 y $1 - \frac{1}{a}$

Una vez conocidas las soluciones constantes del modelo, la siguiente cuestión natural es preguntarse sobre la estabilidad: ¿serán estables o inestables estas soluciones?

Para ello, utilizando el criterio de la primera derivada (se puede consultar en el apéndice A), debemos calcular la derivada de f y evaluarla en los puntos fijos. La derivada de f es

$$f'(x) = a(1 - 2\,x)\,,$$

que evaluada en cero queda

$$f'(0) = a$$

y en $1 - \frac{1}{a}$

$$f'\left(1 - \frac{1}{a}\right) = a - 2\,a\left(1 - \frac{1}{a}\right) = a - 2\,a + 2 = 2 - a.$$

Por tanto:

- 0 es asintóticamente estable si $0 < a < 1$ e inestable si $a > 1$, es decir, 0 es estable solo si es la única solución constante, con sentido biológico.
- $1 - \frac{1}{a}$ es asintóticamente estable si $1 < a < 3$ e inestable si $a > 3$ (no contemplamos aquí la posibilidad de que $a < 1$ ya que en ese caso el punto $1 - \frac{1}{a}$ no es positivo y no tiene sentido biológico[8]).

Resumimos la situación[9]:

$0 < a \leq 1$	0 es asintóticamente estable
$1 < a \leq 3$	0 es inestable y $1 - \frac{1}{a}$ asintóticamente estable
$3 < a \leq 4$	0 y $1 - \frac{1}{a}$ son inestables

Ciclos

Una ecuación de apariencia tan simple no hace sospechar que puede presentar una dinámica tan compleja. Dependiendo del valor de a pueden aparecer n-ciclos. Estudiar esta cuestión con detalle no es nada sencillo y por supuesto se escapa del nivel de estas notas. Aquí indicaremos, simplemente, los rangos de a para los que se sabe qué tipo de n-ciclos aparecen. Con la ayuda de programas disponibles en la red, o con una simple hoja de cálculo, se pueden *descubrir* estos n-ciclos. Pero antes de hacer este esbozo de resultados, observamos un cálculo *sencillo* que nos muestra qué condición debe cumplir a para que aparezcan 2-ciclos. x_n es un 2-ciclo si verifica:

$$x_0,\, x_1 = f(x_0),\, x_2 = f(x_1) = x_0,\, \dots .$$

Por tanto

$$x_0 = f(x_1) = f(f(x_0)) \quad (x_0 \text{ es un punto fijo para la función } f^2)\,,$$

que es una ecuación para x_0 que podemos escribir de la siguiente forma:

$$x_0 = f(x_1) = a\,(1 - x_1)\,x_1 = a\,\left(1 - a\,(1 - x_0)\,x_0\right)\,a\,(1 - x_0)\,x_0$$

o, llevando todo al término de la izquierda,

$$x_0 - a\,\left(1 - a\,(1 - x_0)\,x_0\right)\,a\,(1 - x_0)\,x_0 = 0$$

y sacando factor común de x_0:

$$x_0\left[1 - a^2\,\left(1 - a\,(1 - x_0)\,x_0\right)\,(1 - x_0)\right] = 0$$

Esta ecuación es de cuarto orden que después de hacer algunas cuentas [10] se puede escribir de la siguiente forma:

$$x_0\,\left[a\,x_0 - (a - 1)\right]\,\left[a^2\,x_0^2 - a\,(a + 1)\,x_0 + (a + 1)\right] = 0\,,$$

de donde se deduce que

$$x_0 = 0 \quad \text{o} \quad a\,x_0 - (a - 1) = 0 \quad \text{o}$$

[8] ¿Qué ocurre si $a < 1$?

[9] En la tabla se incluyen los casos $a = 1$ y $a = 3$, que no se pueden demostrar utilizando el criterio de la primera derivada. ¿Cómo podríamos justificarlos?

[10] Sabemos que las soluciones constantes de la ecuación, en particular, son 2-ciclos. Por tanto, la expresión se obtiene dividiendo el polinomio $1 - a^2\,(1 - x)\,(1 - a\,x\,(1 - x))$ por el monomio $x - \left(1 - \frac{1}{a}\right)$.

$$a^2\, x_0^2 - a\,(a+1)\, x_0 + (a+1) = 0.$$

Esto quiere decir que las soluciones, es decir, datos iniciales para los que la solución es un 2-ciclo, son

$$x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a}$$

y

$$x_0^{\pm} = \frac{a\,(a+1) \pm \sqrt{a^2\,(a+1)^2 - 4\,a^2\,(a+1)}}{2\,a^2} = \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)\,(a-3)}}{2\,a}.$$

Las dos primeras soluciones no deben sorprendernos porque corresponden a las soluciones constantes, y es claro que una solución constante en particular cumple que es un 2-ciclo. Por tanto las soluciones *novedosas* son las producidas por la tercera expresión. Aquí vemos que puede haber dos posibilidades. La primera observación que hacemos es que esta expresión tiene sentido (real) si el discriminante es no negativo, es decir, si $a \geq 3$. Por tanto, si $a > 3$ hay 2-ciclos (que no son soluciones constantes), basta tomar como dato inicial el encontrado. Se puede comprobar que si tomamos $x_0 = x_0^+$, $x_1 = f(x_0) = x_0^-$[11].

El estudio de n-ciclos se complica si incrementamos el valor de n. Los resultados que se conocen al respecto son los siguientes (que podremos observar con ayuda de una hoja de cálculo):

- Existe un valor crítico para a, que vamos a llamar a_c tal que si $a > a_c$ aparecen 3-ciclos. Se puede demostrar (Li y Yorke (1975)) que la presencia de 3-ciclos implica que existen n-ciclos para cualquier n. a_c es aproximadamente 3.828.

- Si $3 < a < a_c$ aparecen 2^n-ciclos: en un rango de a aparecen 2-ciclos, en un rango que incluye al anterior aparecen 2-ciclos y 4-ciclos y así sucesivamente. Cuando solo existen 2-ciclos estos son estables, pero cuando aparecen 4-ciclos los 2-ciclos dejan de ser estables mientras que los 4-ciclos sí lo son. Pasa lo mismo para el resto de 2^n-ciclos.

  - Si $3 < a <$3.45 aparecen 2-ciclos y son estables.
  - Si 3.45$\leq a <$3.54 aparecen 4-ciclos estables y los 2-ciclos son inestables.

- En el diagrama de bifurcación se observan estos resultados. Este diagrama fue descrito por primera vez por May y Oster (1976).

Caos

Sabemos que la palabra *caos* (sin ninguna connotación matemática) significa *confusión, desorden*. Cuando observamos el comportamiento de la ecuación logística en diferencias para $a > a_c$ en la que aparecen n-ciclos para cualquier n puede que la palabra que evoque nuestra mente para representar este modelo sea justamente *caos*. El concepto de *caos matemático* es mucho más complejo que simplemente hablar de *confusión* o *desorden*. No vamos a entrar

[11] *Actividades que se pueden hacer con hojas de cálculo*:

- Comenzar con estos datos iniciales y ver que se obtienen los 2-ciclos.
- Observar que si se empieza con la elección de x_0^+ se obtiene también x_0^-.
- Empezar *cerca* de estos datos iniciales para estudiar la estabilidad de los ciclos (dependiendo del rango de a serán estables o inestables).

aquí a exponer la teoría del caos matemático, porque es demasiado complicada para las intenciones de estas notas, y porque incluso la comunidad matemática no se pone de acuerdo en una definición. Pero sí vamos a tratar de explicar, de palabra, una serie de propiedades que cumple el modelo que estamos estudiando (para ese rango crítico de a) y que, a veces, se dan como definición de caos. Estas propiedades son:

- Existen n-ciclos para cualquier número natural n.
- Podemos encontrar una solución que está tan cerca como se quiera de todos los n-ciclos.
- *Efecto mariposa*: Si partimos de dos condiciones iniciales que no son iguales pero que son tan parecidas como queramos, las soluciones que producen estos datos iniales pasado un tiempo (quizá grande) no se parecerán en nada, es más, no se volverán a parecer nunca[12].

3.3. Aplicaciones a las matemáticas de secundaria y bachillerato

En esta sección hemos visto que las sucesiones y las funciones son herramientas empleadas en el estudio de dinámica de poblaciones. Concretamente, se podrían realizar actividades del siguiente tipo, y con la ayuda de hojas de cálculo:

- Analizar las progresiones geométricas en función de su razón, en ejemplos concretos, como soluciones de la ecuación de Malthus discreta (ver ecuación (1)).
- Presentar las soluciones de la ecuación logística discreta (6) como ejemplos de sucesiones, aplicados a la ecología, para los que no se puede dar un término general.
- Entender los diferentes aspectos del modelado entre la ecuación de Malthus discreta (1) y la ecuación logística discreta (6).
- Analizar, mediante una hoja de cálculo, el cociente incremental en la definición de la derivada (ver (8)), en función de Δt para ver que el modelo logístico discreto

$$\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}=(A-BP(t))P(t)$$

  se parece al continuo si Δt tiende a 0.
- Explicar el efecto mariposa, con sus posibles aplicaciones, por ejemplo, en criptografía [8].
- Determinar sucesiones constantes que sean solución de modelos que describen dinámicas de una población.
- Análisis similares se pueden hacer para modelos aplicados a las economía, por ejemplo, para cálculo de intereses o de hipotecas.

[12] Se puede observar tomando $a = 4$ y partiendo de dos datos iniciales tan próximos como $x_0 = 0{,}1$ y $x_0 = 0{,}1001$.

4. Matrices en dinámica de poblaciones

En los modelos estudiados hasta el momento, hemos visto cómo utilizar las sucesiones de números para describir, por ejemplo, la evolución en el tiempo del tamaño de una población. En la segunda parte de estas notas vamos a estudiar otros modelos discretos que se usan para investigar la dinámica de poblaciones, que están estructuradas en grupos. En estos modelos la herramienta principal serán las matrices. Concretamente, nos centraremos en poblaciones estructuradas por edad (modelo de Leslie) y poblaciones estructuradas por estados (procesos de Markov)[13].

4.1. Poblaciones estructuradas por edad: modelo de Leslie

Supongamos que estamos estudiando una población que se puede dividir en grupos de edades disjuntos:

---

[13]Estos modelos son casos particulares de sistemas de ecuaciones en diferencias lineales. Representaremos estos sistemas de forma matricial:

$$X_{n+1} = AX_n \tag{10}$$

donde $X_n = \begin{pmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \\ \vdots \\ X_n^m \end{pmatrix}$ es el término n-ésimo de la sucesión de vectores solución del sistema (10) y A es la matriz del sistema (matriz cuadrada con m filas y m columnas). Entendido el marco general en el que se engloban nuestros modelos, podemos hacer las siguientes observaciones:

- Si nos reducimos al caso de una única ecuación en diferencias el sistema (10) es una ecuación en diferencias del mismo tipo que la ecuación de Malthus discreta.
- En este caso los problemas de valores iniciales se escriben de la siguiente forma:

$$(PVI) \left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = AX_n \\ X_0 = a, \quad a \in \mathbb{R}^m. \end{array} \right.$$

  La solución de este problema se conoce fácilmente y es $X_n = A^n X_0$, para todo n, es decir, $X_n = A^n a$. En este caso la solución es una sucesión de vectores, cuyo término general es el vector $X_n \in \mathbb{R}^m$.
- Puesto que las soluciones del sistema (10) son de la forma $X_n = A^n X_0$, todo recae en saber calcular la potencia n-ésima de la matriz A.
- Saber si la matriz A es diagonalizable es muy útil en el cálculo de sus potencias, para lo que es necesario analizar sus valores y vectores propios.
- Si la matriz A tiene valor propio dominante el comportamiento de la solución a largo plazo se estudia fácilmente.
- El método de las potencias es una potente herramienta que ayuda a encontrar de forma aproximada el valor propio dominante de una matriz, si ésta lo tiene.
- Para los dos modelos biológicos que estudiamos a continuación, daremos criterios para saber si la matriz asociada al problema tiene valor propio dominate, sin necesidad de tener que hacer un estudio de la diagonalización o, en general, de la descomposición de Jordan de dicha matriz.

Grupos	*Rango de edades*
Grupo 1	$[0, L)$
Grupo 2	$[L, 2L)$
Grupo 3	$[2L, 3L)$
Grupo 4	$[3L, 4L)$
...	...
Grupo m	$[(m-1)L, mL)$

donde cada grupo (o clase) constituye un rango de L unidades de tiempo (años, meses, semanas, días ...) y se supone que la vida media de esta población es de mL unidades de tiempo (sus miembros tienen esa vida media). Por ejemplo, imaginemos que queremos estudiar una población, cuya vida media son 10 años, podríamos estructurar la población en grupos de 2 años cada uno, es decir, L sería 2 años y por tanto, la tabla anterior quedaría:

Grupos	*Rango de edades*
Grupo 1	$[0, 2)$
Grupo 2	$[2, 4)$
Grupo 3	$[4, 6)$
Grupo 4	$[6, 8)$
Grupo 5	$[8, 10)$

Normalmente cuando se habla de modelos de Leslie para poblaciones estructuradas por edades, realmente se hace referencia al número de hembras en cada uno de las clases o grupos de edades, entendiendo que se conoce la dinámica de la población en función del número de hembras de la misma. En estos modelos se asume que los recuentos del número de hembras se hacen cada L unidades de tiempo. Para determinar el número de hembras en un instante de observación posterior se tienen en cuenta dos tipos de parámetros para cada grupo de edad: las *tasas de fertilidad de las hembras* y las *probabilidades de supervivencia de las hembras*. Denotaremos por:

- $f_i \geq 0$, con $i = 1, \ldots, m$, al número medio de crías hembras que tiene una hembra del grupo i-ésimo en ese periodo de L unidades de tiempo,

- $0 < p_i \leq 1$, con $i = 1, \ldots, m-1$, a la probabilidad de que una hembra del grupo i-ésimo esté viva en el siguiente recuento, es decir, formará parte del grupo $i+1$,

- P_n^i, con $i = 1, \ldots, m$, al número de hembras en el grupo i.

Con esta notación ¿podrías saber el número de hembras en cada grupo de edad, sabiendo su número en el recuento anterior?

La información que conocemos son las tasas de fertilidad y las probabilidades de supervivencia, por tanto, el número de hembras en el recuento $n+1$ en el primer grupo de edad vendrá determinado por el número de nacimientos que tengan las hembras del recuento n:

$$P_{n+1}^1 = f_1 \, P_n^1 + f_2 \, P_n^3 + \ldots + f_m \, P_n^m,$$

el primer sumando corresponde a los nacimientos de las hembras del grupo 1, el segundo a los nacimientos del segundo y así sucesivamente, hasta el último sumando que nos indica los nacimientos de las hembras del último grupo.

Para el resto de sectores de edad, la ecuación es bastante más sencilla:

$$P_{n+1}^{i} = p_{i-1}\, P_{n}^{i-1}, \quad i = 2, \ldots, m\,,$$

tras L unidades de tiempo, en el grupo i estarán las que sobrevivan del grupo $i-1$, y tendrán L unidades de tiempo más.

Tenemos, entonces, un sistema de ecuaciones en diferencias lineales. En este ambiente las matrices son una herramienta muy útil, porque simplifica mucho la escritura y la resolución del problema. Los sistemas de ecuaciones en diferencias lineales se pueden escribir[14] como sigue:

$$P_{n+1} = A\, P_n,$$

donde

$$P_n = \begin{pmatrix} P_n^1 \\ P_n^2 \\ \vdots \\ P_n^m \end{pmatrix} \quad \text{y } A \text{ una matriz cuadrada de orden } m.$$

En nuestro caso la matriz A se llama *matriz de Leslie*, y la población en el recuento $n+1$ se obtiene de la población en el recuento n mediante esa matriz:

$$\underbrace{P_{n+1}}_{\text{Población en el instante } n+1} = \underbrace{A}_{\text{Matriz de Leslie}} \underbrace{P_n}_{\text{Población en el instante } n}.$$

¿Cómo es la matriz de Leslie? La matriz de Leslie, también llamada *matriz de proyección poblacional* tiene esta forma:

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \ldots & f_m \\ p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p_{m-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Por tanto el *modelo de Leslie* viene dado por un sistema de ecuaciones en diferencias lineales, donde la matriz que lo determina es la matriz de Leslie (11)

$$P_{n+1} = A\, P_n, \tag{12}$$

donde

$$P_n = \begin{pmatrix} P_n^1 \\ P_n^2 \\ \vdots \\ P_n^m \end{pmatrix} \quad \text{y } A \text{ la matriz de Leslie (11).}$$

Sabemos que si la población inicial está representada por un vector P_0, entonces la población está perfectamente determinada en cada instante de la observación y su valor es:

$$P_n = A^n P_0.$$

[14] Hemos usado la notación que estamos empleando para la descripción del número de hembras de esta población.

De este modo, toda la información del modelo está concentrada en las potencias n-ésimas de la matriz A[15]. Hay herramientas matemáticas para determinar el comportamiento a largo plazo de los distintos grupos, en los que está estructurada la población, que se basan en el estudio de la matriz de Leslie. De una forma intuitiva estas propiedades se pueden "descubrir" partiendo de distribuciones iniciales particulares. Por ejemplo, supongamos una población dividida en dos grupos de edad, de forma que en el grupo de menor edad la tasa de fertilidad es 1 y en el segundo es 2 y todas las hembras pasan al grupo de edad mayor:

- ¿Qué ocurre con una población que inicialmente tiene 20 hembras en el grupo de edad más pequeña y 10 en el de edad mayor?
- ¿Qué ocurre con una población que inicialmente tiene 10 hembras en el grupo de edad más pequeña y 20 en el de edad mayor?

A la vista de estos resultados podemos concluir que hay condiciones iniciales de nuestro problema que provocan un comportamiento más fácil de estudiar que otros[16].

Para entender mejor qué ocurre con una población que sigue el modelo de Leslie a largo plazo, vamos a definir algunos índices biológicos del modelo.

Índices biológicos

Representamos por $\|P_n\|$ al número total de hembras de la población[17], es decir, es la suma

$$\|P_n\| = P_n^1 + \ldots + P_n^m.$$

Llamamos *pirámide de edad de la población*, de una población no nula, en el recuento n-ésimo al cociente

$$\frac{P_n}{\|P_n\|}.$$

Puesto que, para cada instante de la observación, $\|P_n\|$ es el número total de hembras en la población, $\frac{P_n}{\|P_n\|}$ es un vector en el que cada componente es el número de hembras en la franja de edad correspondiente, dividido por el número total de hembras de la población. Es por tanto, un vector que nos indica la proporción de hembras en cada franja de edad.

En ciertos casos, por ejemplo, si existen dos tasas de fertilidad consecutivas no nulas, se sabe que para n suficientemente grande (pasado un tiempo largo) las pirámides de edades de la población tienden a ser todas iguales, ver el apéndice B para más detalles.

Llamamos *tasa de crecimiento de la población tras n periodos* al cociente:

$$\frac{\|P_n\| - \|P_{n-1}\|}{\|P_{n-1}\|},$$

[15]Por ello, si la matriz es diagonalizable estas potencias serán caculadas fácilmente y si la matriz tiene valor propio dominante podremos conocer la dinámica de la población a largo plazo.

[16]Lo que subyace es el concepto de valor y vector propio asociado a la matriz A. Podrías buscar los valores propios y comprobar que la matriz es diagolalizable, para ver cómo son las potencias n-ésimas de la matriz.

[17]Vemos que $\|P_n\|$ es la norma-1 del vector P_n, ya que cada una de sus componentes son mayores o iguales a 0.

es decir, la variación del número total de hembras (en los periodos n y $n-1$) entre el número total de hembras en el periodo anterior.

Para acabar nos hacemos la siguiente pregunta: *¿Podemos conocer el comportamiento de la población solo conociendo las tasas de fertilidad y las probabilidades de pasar de un grupo a otro?*

La respuesta es *sí* y la ofrece un parámetro que se puede calcular con una simple fórmula, a partir de las tasas de fertilidad y las probabilidades de supervivencia. Ese parámetro es la *tasa neta de reproducción*

$$R = f_1 + f_2\, p_1 + \ldots + f_m\, p_1 \ldots p_{m-1}$$

que representa el número medio de crías que tiene cada hembra a lo largo de toda su vida. Concretamente, se verifica:

- Si $R < 1$ la población se extingue.
- Si $R > 1$ la población crece ilimitadamente.
- Si $R = 1$ la población tiende al equilibrio.

Si $R \geq 1$ se dice que hay *reemplazamiento generacional.*

4.2. Poblaciones estructuradas por estados

La dinámica de poblaciones estructuradas por estados también se puede analizar empleando sistemas de ecuaciones en diferencias lineales. Los ejemplos de esta situación pueden ser muy variados, desde el análisis de la evolución de los genotipos en un problema de genética, hasta un estudio sobre el peso de una población... El denominador común de todos estos problemas es el uso de sistemas de ecuaciones en diferencias lineales, cuya matriz asociada es una matriz de probabilidad (matriz positiva cuyas columnas suman 1)[18].

En este caso, al estar la población estructurada por estados es claro que el tamaño de la población es siempre el mismo, ya que lo que se estudia es cómo se distribuyen sus miembros en los distintos estados. Veamos un ejemplo para entender mejor estos modelos:

En un parque natural, en el que hay cabras montesas en semilibertad, existen tres abrevaderos, A, B y C. El personal del parque han observado que la distribución de las cabras cada mañana en los diferentes abrevaderos viene determinada por la expresión

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix},$$

[18] Estos problemas se engloban dentro del marco general de cadenas de Markov. Para estos modelos los resultados principales que debemos recordar son los siguientes:

- El valor 1 es siempre valor propio de una matriz de probabilidad, aunque no necesariamente dominante.
- Si la matriz de probabilidad es ergódica entonces el valor 1 es el valor propio dominante y además es el único que admite un vector propio asociado con todas sus componentes positivas.

Recordamos que *una matriz cuadrada con todas sus entradas no negativas es ergódica si existe una potencia de ella de forma que tenga todas sus entradas estrictamente positivas.*

El resultado que hemos enunciado para las matrices de probabilidad ergódicas es un caso particular del *Teorema de Perron-Frobenius.*

donde A_n, B_n y C_n denotan, respectivamente, las cabras que han bebido en A, B y C en un determinado día.

1. ¿Qué proporción de cabras que un día beben en B y al siguiente se van a A?
2. ¿Qué proporción de cabras que un día beben en B y al siguiente se van a C?
3. ¿Qué proporción de cabras que un día beben en C y al siguiente vuelven a C?
4. Si dispones de 9 toneladas de comida para ayudar a la alimentación de las cabras en una época de sequía, ¿cómo debes distribuir la comida entre los abrevaderos para que el reparto sea equitativo?

4.3. Sistemas de ecuaciones en diferencias lineales con el ordenador

Simular con un ordenador un sistema de ecuaciones en diferencias lineales, no demasiado grande, es una tarea sencilla que puede ser hecha fácilmente con una simple hoja de cálculo. Destacamos en estas notas el programa *Populus*[19], muy usado en investigaciones en biología, que tiene programado resolutores para una amplia gama de problemas de dinámica de poblaciones, no solo basados en ecuaciones en diferencias lineales. Además, este programa sirve como herramienta pedagógica, ya que es un programa que es de fácil uso, pero con la apariencia de hacer complicados algoritmos, de este modo cuando *las personas que se piensan poco hábiles con las matemáticas* se dan cuenta de que son capaces de hacer con una hoja de cálculo lo mismo que un programa como el *Populus*, adquieren confianza en ellas mismas y motivación para seguir estudiando matemáticas.

Con la ayuda de una hoja de cálculo se puede:

- Obtener la evolución de los recuentos a lo largo del tiempo.
- Determinar, empleando el método de las potencias, el valor propio dominante, si la matriz lo tiene, y con ello saber el comportamiento a largo plazo de la población.
- Dibujar la evolución de las pirámides de edad o estados a lo largo de los distintos recuentos.

4.4. Aplicaciones a las matemáticas de bachillerato

En esta sección hemos visto que las matrices y los vectores son herramientas empleadas en el estudio de dinámica de poblaciones. Concretamente, se podrían realizar actividades del siguiente tipo, y con la ayuda de hojas de cálculo:

- Importancia de las matrices como herramienta para simplificar mucho la escritura matemática. Para ello se puede mostrar el modelo de Lesie como una “serie de sucesiones de números relacionadas” (sistemas de ecuaciones en diferencias) y mediante su escritura matricial.

[19] Se puede descargar en el siguiente enlace: `http://www.cbs.umn.edu/populus/`.

- Producto de matrices. En particular, una matriz por un vector y la potencia n-ésima de una matriz.
- Descubrir de modo intuitivo la importancia de los vectores propios de una matriz, observando que se determina de forma muy sencilla la dinámica de una población descrita por el modelo de Leslie.
- Descubrir de modo intuitivo la importancia de las matrices diagonales, observando que se determina de forma muy sencilla la dinámica de una población que se rige por el modelo de Leslie.
- Presentar las matrices de probabilidad mediante dinámicas de poblaciones según sus estados.
- Emplear la inversa de una matriz para descubrir la distribución que tenía una población en un recuento anterior, sabiendo la distribución que tiene en el recuento actual.
- Análisis similares se pueden hacer para otros modelos, por ejemplo, los aplicados a la genética.

5. Ajuste por mínimos cuadrados

Uno de los problemas más frecuentes en la investigación científica es tratar de determinar la función (matemática) que mejor se aproxima a los datos derivados de los experimentos. Supongamos por ejemplo, que estamos estudiando una población de una determinada especie y hemos registrado en una tabla los valores recontados en las distintas observaciones.

Tiempos de observación, t_i (en años)	Valores observados, y_i (en miles)
1	4,5
2	4,1
3	5,3
4	6,2
5	6,4

Nos gustaría conocer una función que se ajuste a esos datos lo *mejor posible*, para de ese modo poder predecir los valores en los años en los que no se hicieron observaciones, o poder predecir lo que ocurrirá en el futuro. Decir la *mejor posible* implica demasiada ambigüedad, es por ello que hay una extensa teoría matemática que trata de precisar esa expresión tan general. En nuestro caso, buscaremos la función que mejor se aproxime a nuestros datos, de entre una familia de funciones fija, en el sentido de minimizar el error cuadrático (que definiremos más adelante).

La tabla de datos podemos representarla gráficamente y dibujar lo que se conoce como *nube de puntos*, ver figura 2.

La pregunta que nos planteamos es: *de entre la familia de funciones reales de variable real, $\mathcal{F}$, ¿podemos determinar la función f que mejor se aproxima a esta nube de puntos, en*

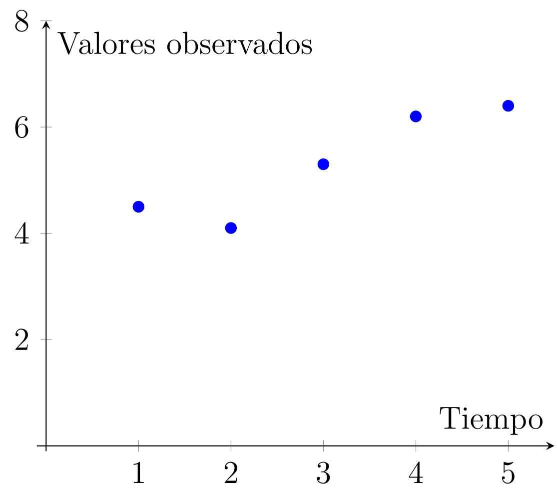

Figura 2: Nube de puntos.

el sentido de mínimos cuadrados (discretos)? O dicho de otro modo, *¿quién es la función f de la familia $\mathcal{F}$ que hace mínimo el error cuadrático,*

$$E_f = \Sigma_{i=1}^{n}(f(t_i) - y_i)^2 \tag{13}$$

(en nuestro caso $n = 5$)?

En dinámica de poblaciones los modelos continuos más básicos son Malthus, logística y Gompertz. Vamos a considerar aquí las familias dadas por las soluciones de esos modelos. Antes de pasar a analizar la solución en cada una de estas familias, señalamos tres observaciones que pueden surgir en relación al problema planteado:

- Podríamos plantearnos buscar funciones que hagan este error exactamente cero, es decir, que tomen exactamente los mismos valores observados. Esto es justo lo que hace la *teoría de interpolación*. Sin embargo la motivación es diferente en el caso que abordamos aquí, ya que la función así encontrada casi con seguridad no pertenece a la familia que buscamos. Y además el hecho de usar como criterio el que tome exactamente el mismo valor observado no necesariamente produce una función que aproxime bien a la nube de puntos. Puesto que siempre la toma de datos implica un error, bien de quien observa, bien del instrumental utilizado para ello.

- Otra cuestión que nos podemos hacer es por qué elegimos la expresión del error (13) y no otra. Podríamos considerar, por ejemplo

  $$E_f = \Sigma_{i=1}^{n}(f(t_i) - y_i).$$

  Pero esta es una mala elección, porque queremos que E_f nos de una idea de si la función elegida es buena, o no, como aproximación, es decir, queremos que si $E_f = 0$ eso indique que la aproximación f es la mejor obtenida, la función toma exactamente los valores observados. Sin embargo, este error no nos ofrece esa información, porque los sumandos podrían ser positivos y negativos, y por tanto, la suma ser cero, y sin embargo, que la función diese una aproximación malísima.

- La segunda observación nos lleva a pensar que si queremos cambiar la expresión del error, el error debe ser medido sin depender del signo, es decir, sin diferenciar si el error se comete por exceso o por defecto. Siguiendo esta idea, podríamos plantear la siguiente expresión para el error:

  $$E_f = \Sigma_{i=1}^n |f(t_i) - y_i|.$$

  Esta podría ser una buena elección, sin embargo, no se suele trabajar con ella porque el problema matemático, asociado a la búsqueda de la mejor aproximación sujeto a que este error sea mínimo, es bastante más complicado que el que surge al usar el error cuadrático. Ya que la función valor absoluto tiene menos regularidad, que la función elevar al cuadrado[20].

5.1. Cómo se encuentra la mejor aproximación por mínimos cuadrados

Supongamos que tenemos una nube de puntos (por ejemplo, como la mostrada anteriormente) y una familia de funciones en la que pensamos que existe una función que se ajusta a nuestros datos. Entonces, la estrategia para encontra la función es la siguiente:

- Determinamos el número de parámetros que describe nuestra familia de funciones reales de variable real. Y denotamos por $f(x, a_1, a_2, ..., a_m)$ una función cualquiera de la familia considerada en la que estamos indicando que depende de m parámetros y de la variable x. Por ejemplo, la familia de rectas viene determinada por dos parámetros, a_1 y a_2, ya que toda recta se puede escribir de la forma $y = a_1 x + a_2$. Entonces una función cualquiera de esta familia sería $f(x, a_1, a_2) = a_1 x + a_2$. (Por simplificar la escritura, cuando la familia considerada dependa de pocos parámetros usaremos diversas letras, por ejemplo, a, b, $c\dots$, para evitar los subíndices).

- Construimos la función error cuadrático que queremos minimizar

  $$E_f[a_1, \dots, a_m] = \Sigma_{i=1}^n (f(t_i) - y_i)^2.$$

  En el caso de considerar la familia de rectas tendríamos:

  $$E_f[a, b] = \Sigma_{i=1}^n (a t_i + b - y_i)^2.$$

- Si el problema planteado tiene solución, los m parámetros que hacen que $E_f[a_1, \dots, a_m]$ tome el valor mínimo son la solución del siguiente sistema

  $$(S)\begin{cases} \Sigma_{i=1}^n (f(t_i) - y_i)\frac{\partial f(t_i)}{\partial a_1} = 0 \\ \vdots \\ \Sigma_{i=1}^n (f(t_i) - y_i)\frac{\partial f(t_i)}{\partial a_m} = 0, \end{cases}$$

  donde $\frac{\partial f(t_i)}{\partial a_j}$ representa la derivada parcial de f con respecto al parámetro a_j evaluada en t_i. Observamos que el sistema tiene tantas ecuaciones como parámetros tenga la familia de funciones considerada.

[20] ¿Verdad?

A este sistema se le suele llamar, en el ambiente estadístico, *ecuaciones normales*. En general, resolver el sistema anterior no será sencillo, puesto que será un sistema no lineal. Sin embargo, hay herramientas numéricas que aproximan los valores de estos parámetros, con la precisión que se quiera.

Llamaremos E_2 al error cuadrático mínimo, es decir, al error cuadrático cometido por la función determinada, al resolver el sistema de ecuaciones normales del modelo. Este número no nos ofrece un indicador preciso del error cometido, ya que no sabremos si es pequeño o grande, si no lo comparamos con algún referente. Es por ello que definimos el siguiente *error medio en %*:

$$\frac{100\sqrt{\frac{E_2}{n}}}{\frac{\Sigma_{i=0}^{n} y_i}{n}},$$

es decir, el error medio (en el numerador), dividido entre el valor medio de valores observados (en el denominador), y todo multiplicado por 100, para obtener el tanto por ciento. Operando un poco en el cociente podemos encontrar la siguiente expresión simplificada:

$$\frac{100\sqrt{n\,E_2}}{\Sigma_{i=0}^{n} y_i}. \tag{14}$$

Este indicativo de error está bien definido, ya que en nuestros modelos los valores y_i serán cantidades positivas.

5.1.1. Familia lineal

Si consideramos la familia de funciones lineales:

$$\mathcal{F} = \{f(t,a,b) = a\,t + b,\ a,b \in \mathbb{R}\},$$

el sistema (S) se escribe, como sigue:

$$\begin{cases} \Sigma_{i=1}^{n}(a\,t_i + b - y_i)t_i = 0 \\ \Sigma_{i=1}^{n}(a\,t_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

5.1.2. Familia exponencial

Consideramos la familia de funciones solución de la ecuación de Malthus $X'(t) = c\,X(t)$:

$$\mathcal{F} = \{f(t,a,c,t_0) = a\,e^{c(t-t_0)} : \quad a, t_0, c \in \mathbb{R}\},$$

donde:

- a representa el valor de f en t_0 $(f(t_0) = a)$,
- t_0 el punto medio de los datos,
- c la tasa de crecimiento del modelo (X'/X) y
- ac la pendiente de X en t_0 $(X'(t_0))$.

El valor t_0 lo fijaremos, y por tanto no lo entendemos como parámetro.

En este caso el sistema (S) se escribe, como sigue:

$$\begin{cases} \Sigma_{i=1}^n (a\, e^{c(t_i-t_0)} - y_i) e^{c(t_i-t_0)} = 0 \\ \Sigma_{i=1}^n (a\, e^{c(t_i-t_0)} - y_i) a\, (t_i - t_0) e^{c(t_i-t_0)} = 0 \end{cases},$$

equivalentemente,

$$\begin{cases} \Sigma_{i=1}^n (a\, e^{c(t_i-t_0)} - y_i) e^{c(t_i-t_0)} = 0 \\ \Sigma_{i=1}^n (a\, e^{c(t_i-t_0)} - y_i) a\, t_i e^{c(t_i-t_0)} = 0 \end{cases}.$$

5.1.3. Familia sigmoidal

Consideramos la familia de funciones solución de la ecuación de logística $X'(t) = c\, X(t)(1 - \frac{X(t)}{a})$:

$$\mathcal{F} = \{ f(t, a, b, t_0) = \frac{a}{1 + e^{c(t-t_0)}} : \quad a, t_0, c \in \mathbb{R} \},$$

donde:

- a es el valor límite cuando $t \to \infty$,
- t_0 es el punto de inflexión (ya que es el instante en el que la solución alcanza la mitad de la capacidad de carga),
- $\frac{c}{2}$ es la tasa de crecimiento en t_0 $(X'(t_0)/X(t_0))$ y
- $\frac{ac}{4}$ es la pendiente en t_0 $(X'(t_0))$.

Estas funciones se llaman funciones *sigmoides*, por lo que cuando se aproxima una nube de puntos en esta familia, se habla de *aproximación sigmoidal*.

5.1.4. Familia de Gompertz

Consideramos la familia de funciones solución de la ecuación de Gompertz $X'(t) = c\, X(t)\, ln \frac{a}{X(t)}$:

$$\mathcal{F} = \{ f(t, a, b, t_0) = a\, e^{-e^{-c(t-t_0)}} : \quad a, t_0, c \in \mathbb{R} \},$$

donde:

- a es el valor límite cuando $t \to \infty$ si $c > 0$,
- t_0 es el punto de inflexión,
- c es la tasa de crecimiento en t_0 $(X'(t_0)/X(t_0))$ y
- $\frac{ac}{e}$ es la pendiente en t_0 $(X'(t_0))$.

Se propone como ejercicio encontrar los correspondientes sistemas (S) para las familias sigmoidal y de Gompertz.

5.2. Aproximación por mínimos cuadrados mediante cambios de variables

En las aproximaciones exponenciales y sigmoidales el sistema de ecuaciones normales es no lineal, por lo que no es fácil encontrar su solución. Sin embargo hay herramientes matemáticas que pueden encontrar aproximaciones tan buenas como se desee. Esta dificultad hace que muchos de los programas que *dicen* hacer aproximaciones por mínimos cuadrados en estas familias, realmente no encuentra la función que mejor se aproxima a la nube de puntos, con el criterio del error cuadrático mínimo, sino que determinan otra función bajo un criterio parecido, pero no igual. Veámoslo con un ejemplo concreto. Supongamos que queremos aproximar la siguiente tabla de puntos:

Tiempos de observación, t_i (en años)	Valores observados, y_i (en miles)
1	0,135335
2	0,367879
3	2
4	2,71828
5	7,38906

cuya nube de puntos está representada en la figura 3.

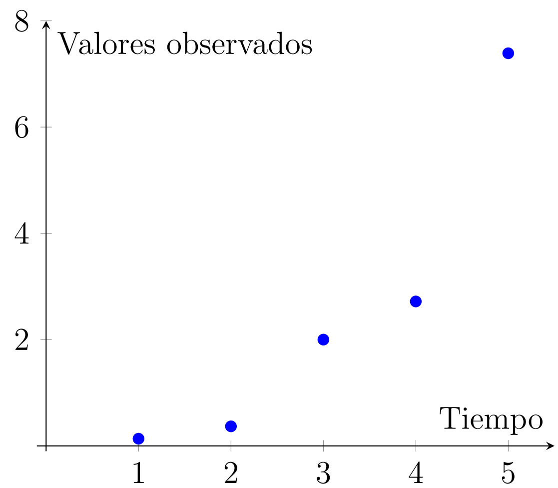

Figura 3: Nube de puntos.

Queremos aproximar esta nube de puntos por una función exponencial del tipo

$$f(t) = e^{at+b}.$$

(Observamos que esta es otra posible escritura de la familia exponencial, considerada anteriormente).

Para evitar resolver el sistema no lineal que aparece al plantear las ecuaciones normales del problema, se hace un cambio en los datos y se considera, en lugar de los valores observados, el logaritmo neperiano de esos valores. De este modo ahora se busca la mejor aproximación en la familia de rectas $h(t) = at + b$. Por tanto nuestro problema original se transforma en un nuevo problema con datos:

Tiempos de observación, t_i (en años)	ln(Valores observados), $\ln(y_i)$
1	ln(0,135335)
2	ln(0,367879)
3	ln(2)
4	ln(2,71828)
5	ln(7,38906)

con la ventaja de que el sistema de ecuaciones normales en este caso es lineal y por tanto fácil de resolver.

Con estos dos planteamientos parecidos pero no iguales encontramos dos funciones exponencial distintas. Una aproximación de la función que mejor aproxima, en el sentido de míninos cuadrados, es decir, resolviendo el sistema no lineal es

$$f_1(t) = 1{,}3422553054287\, e^{0{,}847592335314272*(t-3)}$$

La función que mejor se aproxima mediante el cambio de variables es

$$f_2(t) = 0{,}0571903235342903 56\, e^t.$$

Ambas funciones las vemos representadas en la figura 4, junto con la nube de puntos (f_1 está pintada en verde y f_2 en roja).

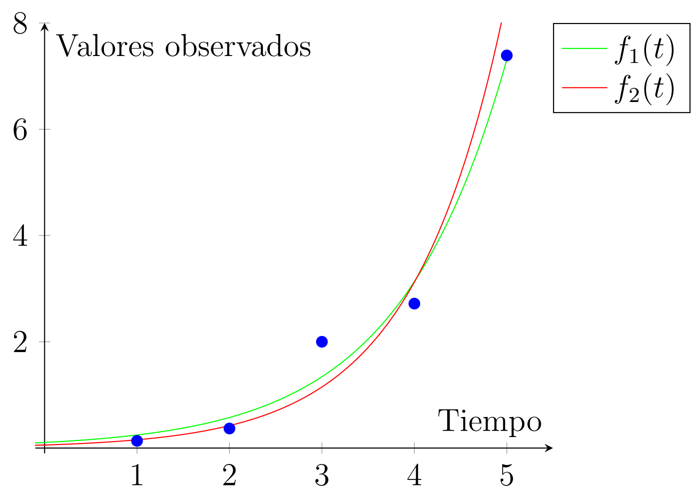

Figura 4: Representación de dos aproximaciones exponenciales a una nube de puntos.

Si calculamos el error cuadrático de cada aproximación encontramos:

	Error cuadrático	Error normalizado
f_1	0,665679	14,4672
f_2	2,09872	25,6879

Vemos de este modo que la función exponencial encontrada aproximando mediante una recta la nube de puntos dada por el logaritmo de los valores observados, f_2, es una peor aproximación que la función f_1, es decir, el error cuadrático de la curva verde (f_1) es más pequeño que el error cuadrático de la exponencial roja (f_2).

5.3. Aplicaciones a las matemáticas de secundaria y bachillerato

En esta sección hemos visto qué significa encontrar la función, de una determinada familia, que mejor aproxima una nube de puntos, en el sentido de ser la función de la familia con menor error cuadrático. Y también hemos mostrado que para algunos problemas no lineales, el cambio a un problema lineal no ofrece la mejor aproximación del problema lineal.

Concretamente, se podrían realizar actividades del siguiente tipo, y con la ayuda de hojas de cálculo:

- Analizar datos de prensa en los que se usen aproximaciones empleando mínimos cuadrados, y decidir si se pueden ajustar mejor mediante otras familias de funciones.

- Analizar si los programas que hacen ajustes exponenciales lo hacen empleando una linealización del problema.

6. Problemas de optimización lineal

Los problemas de optimización pretenden encontrar el máximo o mínimo de una determinada función sujeta a una serie de restricciones. Estas notas solo pretenden recordar un problema que se supone conocido para alguien que haya finalizado el grado en matemáticas. Y mostrar que estos problemas, cuando tienen solución, pueden resolverse con una hoja de cálculo. Para estudiar con más profundida este tema se puede consultar, por ejemplo, [11].

Dadas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, con $i = 1, \ldots, m$, los problemas de optimización se plantean como siguen:

$$\begin{array}{l} \text{máx } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{Sujeto a (s.a.) las restricciones } g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i, \end{array}$$

también podría ser

$$\begin{array}{l} \text{mín } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{Sujeto a (s.a.) las restricciones } g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i. \end{array}$$

Estos problema se dicen que son *lineales*, y hablamos de *programación lineal* si las funciones f y g_i, con $i = 1, \ldots, m$, son funciones lineales. La función f se llama *función objetivo* y el conjunto

$$D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i, i = 1, \ldots, m\}$$

región factible. Son problemas en los que se busca el máximo, o el mínimo, de la función objetivo en la región factible.

Estos problemas no siempre tienen solución. Por ejemplo, el problema

$$\begin{array}{ll} \text{máx } f(x, y) = x^2 + y^2 & \\ \text{s.a. las restricciones} & \\ & 0 \leq x, \\ & 0 \leq y. \end{array}$$

no tiene solución. Ya que la región factible, D, es el primer cuadrante del plano cartesiano, y la función f no tiene un valor máximo en D.

¿Tiene el problema

$$\begin{array}{l} \text{máx } \ f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{s.a. las restricciones} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq x, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq y, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x + y - 1 \leq 0, \end{array}$$

solución[21]?

En la figura 5 representamos la región factible (en gris) y curvas de nivel de la función objetivo f. Para cada $k \in \mathbb{R}$ la curva de nivel k viene dada por

$$c_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = k\}.$$

Vemos que si $k < 0$, entonces la curva de nivel k, c_k, es vacía, y si $k > 0$, la curva c_k es una circunferencia de centro en el origen y radio $\sqrt{k}$. Si $k = 0$ entonces $c_0 = \{(0,0)\}$. Las curvas de nivel son una forma de representar gráficamente funciones de dos variables en el plano, nos sirven para hacernos una idea de cómo es la gráfica de la función (que, para una función de dos variables, es un objeto de $\mathbb{R}^3$). En este ejemplo, vemos que las curvas de nivel son círculos concéntricos que van aumentando de radio, a medida que aumenta el nivel k. Gráficamente, vemos claramente que encontramos el máximo de la función en la región factible[22] en los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$ y vale 1.

Para encontrar el valor máximo podríamos razonar también buscando el punto de la arista determinada por la recta $y = -x + 1$ en el que la función objetivo alcanza el máximo. Es decir, se trata de buscar el máximo de la función real

$$g(x) = f(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2, \quad x \in [0,1]$$

que sabemos que se alcanza en los puntos $x = 0$ y $x = 1$, y vale $g(0) = g(1) = 1$.

En el siguiente ejemplo

$$\begin{array}{l} \text{mín } \ f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ \text{s.a. las restricciones} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq x, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq y, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x + y - 1 \leq 0, \end{array}$$

el mínimo no se alcanza en un vértice de la región factible. En la figura 6 representamos la región factible (en gris) y curvas de nivel de la función objetivo f. Para cada $k \in \mathbb{R}$ la curva de nivel k viene dada por

$$c_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = k\}.$$

[21] La región factible viene determinada por funciones g_i y $b_i \in \mathbb{R}$ tales que $g_i(x,y) \leq b_i$. Podemos tomar: $g_1(x,y) = -x$ y $b_1 = 0$, $g_2(x,y) = -y$ y $b_2 = 0$, y $g_3(x,y) = x + y - 1$ y $b_3 = 0$.

[22] Sabemos que la función tiene un máximo en la región factible, porque es una función continua y la región factible es un compacto de $\mathbb{R}^2$, por lo que sabemos que tiene tanto un valor máximo, como mínimo.

¿Podrías dar un ejemplo de un problema de optimización en el que la región factible no esté acotada y la función objetivo tenga máximo en dicha región?

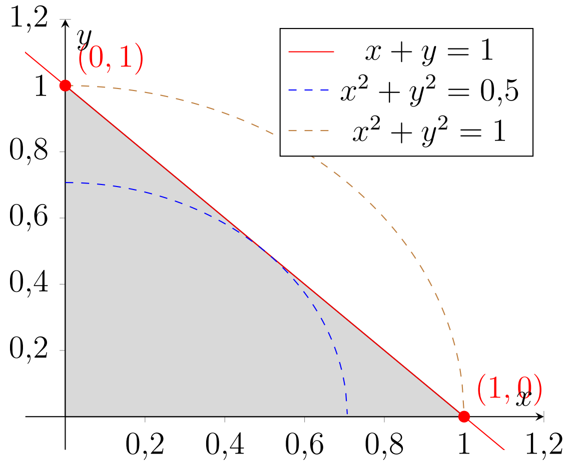

Figura 5: Región factible (en gris) y curvas de nivel de la función objetivo, f, del problema de maximizar $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeta a las restricciones $0 \leq x$, $0 \leq y$, y $x + y - 1 \leq 0$.

Vemos que si $k < 0$, entonces la curva de nivel k, c_k, es vacía, y si $k > 0$, la curva c_k es una circunferencia de centro en el punto $(1,1)$ y radio $\sqrt{k}$. Si $k = 0$ entonces $c_0 = \{(1,1)\}$. Entonces vemos que el mínimo se alcanza en la curva de nivel que toca la arista determinada por la recta $y = -x + 1$. Para conocer el punto en el que se alcanza, basta determinar el mínimo de la función

$$g(x) = f(x, 1-x) = (x-1)^2 + (1-x-1)^2 = (x-1)^2 + x^2, \quad x \in [0,1],$$

que se alcanza en $x = \frac{1}{2}$ y vale 0,5. Es decir, se alcanza en la curva de nivel 0,5.

Los problemas de optimización lineal son un caso particular de este tipo de problemas, en el que la función objetivo y las funciones que determinan la región factible son lineales. Un ejemplo de este tipo de problemas es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} \;\; f(x,y) = 10x + 8y & \\ \text{s.a. las restricciones} & \\ & 0 \leq x, \\ & 0 \leq y, \\ & 3x + 2y \leq 35, \\ & 2x + 3y \leq 35. \end{array}$$

En la figura 7 se representan la región factible (en gris), que viene determinada por rectas, y algunas curvas de nivel de la función objetivo, que son también rectas. Vemos que el valor máximo se alcanza en el vértice $(7,7)$, cuando la curva de nivel más alto (nivel 126) toca la región factible, los niveles superiores a 126 ya no tienen intersección con la región factible.

Los problemas de optimización lineal son muy útiles en economía. Situaciones típicas vienen dadas, por ejemplo, por una empresa que quiere maximizar su beneficio (función objetivo), cumpliendo unas reglas laborales y limitando los costes de producción. Por ejemplo, supongamos una empresa artesanal de juguetes de madera, que construye y vende dos tipos de juguetes de madera: trenes y juego de piezas de construcción. Cada tren se vende a 18 euros y el juego de piezas de construcción a 15 euros. Los gastos de producción de cada

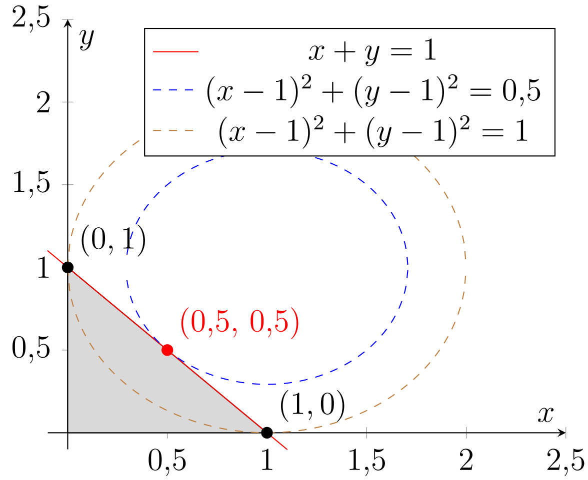

Figura 6: Región factible (en gris) y curvas de nivel de la función objetivo, f, del problema de minimizar $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ sujeta a las restricciones $0 \le x$, $0 \le y$, y $x + y - 1 \le 0$.

tren es de 3 euros y los de las piezas de construcción 2 euros. Para la producción de ambos juguetes se necesita el trabajo de una persona encargada del proceso de carpintería y de otra para el acabado. Cada persona no puede trabajar más de 35 horas a la semana. Para la construcción de cada tren se necesitan 8 horas de carpinterería y 2 de acabado, para las piezas de construcción se necesitan 5 horas de carpintería y 3 de acabado. ¿Cuántos trenes y juego de piezas de construcción se deben construir para tener el máximo beneficio cada semana?

Si llamamos x al número de trenes construidos cada semana e y al número de juegos de construcción, tenemos que el problema que se plantea es

$$\begin{aligned} &\text{máx } \; f(x, y) = 18x + 15y - 3x - 2y = 15x + 13y \\ &\text{Sujeta a (s.a) las restricciones} \\ &\qquad\qquad 0 \le x, \\ &\qquad\qquad 0 \le y, \\ &\qquad\qquad 8x + 5y \le 35, \\ &\qquad\qquad 2x + 3y \le 35. \end{aligned}$$

¿Podrías resolver el problema?

Las hojas de cálculo permiten resolver estos problemas, cuando tienen solución, con la orden *Solver*[23].

6.1. Aplicaciones a las matemáticas de secundaria y bachillerato

Los problemas de optimización tienen muchas aplicaciones, como hemos visto. Son ideales para trabajar cuestiones como:

- Las curvas de nivel como herramienta para representar funciones de dos variables. Se pueden entender los niveles, por ejemplo, explicando los mapas de relieve.

[23] En algunas hojas esta extensión viene por defecto y en otras se debe instalar.

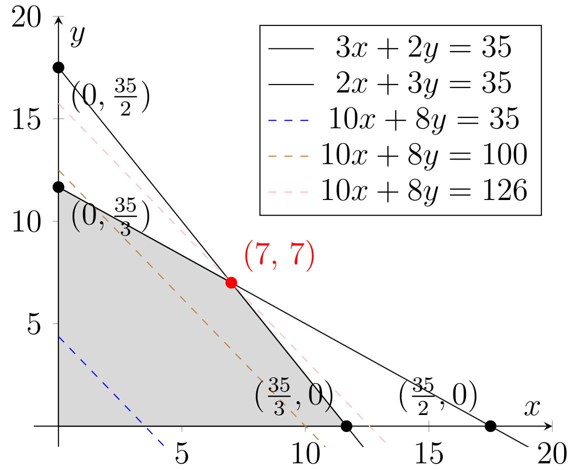

Figura 7: Región factible (en gris) y curvas de nivel de la función objetivo, f, del problema de maximizar $f(x, y) = 10x + 8y$ sujeta a las restricciones $0 \leq x$, $0 \leq y$, $3x + 2y \leq 35$ y $2x + 3y \leq 35$.

- Partiendo de problemas de optimización en una variable proponer hacerlos más realistas incluyendo más variables. Por ejemplo, considerando la función beneficio de una empresa como algo que depende de una sola variable o de más de una, para tener en cuenta más factores que influyen en el beneficio de la empresa.

- Aplicaciones de las funciones reales de variable real y sus representaciones en el plano, como herramienta para la representación gráfica de regiones factibles.

7. Las hojas de cálculo como herramienta para analizar distintos modelos matemáticos

Emplearemos las hojas de cálculo como herramienta sencilla para estudiar numéricamente los problemas analizados en las secciones anteriores. Las hojas de cálculo son programas de fácil manejo que nos permiten visualizar de forma intuitiva el comportamiento de las soluciones de los modelos descritos en estas notas. Daremos aquí unas nociones básicas para comenzar a trabajar con una hoja de cálculo en blanco. Los detalles de cada modelo se dejarán para los ficheros que se elaborarán durante las clases.

Señalamos entonces los ingredientes principales necesarios para nuestros propósitos[24]:

- **Formato de la hoja en la que se está trabajando**. En una hoja de cálculo es frecuente realizar las operaciones empleando bastante espacio hacia la derecha, por tanto puede ser recomendable definir la página de forma apaisada. Para ello se va a *Formato→Estilo de página→Página→Orientación→Horizontal.*

- **Formato de los números**. Suele ser conveniente trabajar con más decimales de los que considera por defecto el programa. Para ello se puede seleccionar toda la hoja y

[24]Los pasos que aquí seguimos son para una hoja de *LibreOffice* se pueden seguir los pasos análogos para otros programas de hojas de cálculo

cambiar el formato de celdas en: *Editar* → *Seleccionar todo* → *Formato de celdas* → *Números*.

- **Operaciones *llamando a celdas***. Se incluyen operaciones en las celdas empezando la sentencia con un "=". Así, por ejemplo, si en la celda que ocupa la posición C1 escribimos *=A1+B1* y pulsamos la tecla *Intro* nos devolverá la suma de las cantidades incluidas en las celdas que ocupan las posiciones *A1* y *B1*[25].

- **Arrastrar operaciones de celdas**. Quizá sea nuestro ingrediente más importante. Se emplea cuando una operación se repite en las distintas celdas. Por ejemplo, supongamos que queremos construir dos columnas, una con los 10 primeros números naturales y otra con el cuadrado de estos números, como en la figura 8. Para ello en la celda de posición B2 se incluye la fórmula $= A2\hat{\ }2$ que se arrastra en la siguientes (B3, B4 , ..., B11). El proceso de arrastrar se hace con la ayuda del ratón, pinchando sobre la celda en la que hemos incluido la fórmula, es decir, la que ocupa la posición B2 y colocando, posteriormente, el cursor en la esquina inferior derecha de la celda hasta que la flecha se transforme en una cruz. Cuando veamos la cruz arrastramos hacia abajo manteniendo pulsado el botón derecho del ratón. Observamos que la fórmula $= A2\hat{\ }2$ va cambiando a $= A3\hat{\ }2$, $= A4\hat{\ }2, \ldots$

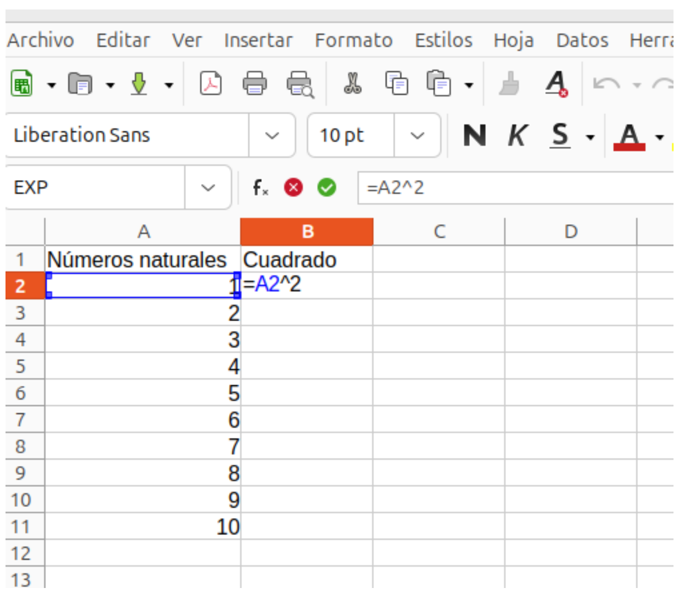

Figura 8: Celdas en una hoja de cálculo para calcular el cuadrado de los 10 primeros números naturales.

- **Fijar celdas**. Completa el proceso anterior. En muchas ocasiones guardaremos en algunas celdas los parámetros de las ecuaciones y emplearemos dichas celdas en nuestras fórmulas. Sin embargo, al arrastrar, como se ha explicado en el apartado anterior, no querremos que esos valores cambien, es por ello que debemos fijarlos previamente. Para fijar una celda, tras pinchar en ella con el ratón, se pulsan a la vez la tecla flecha de mayúsculas y la tecla F4.

[25]Si en esas celdas no se incluye nada, el programa los considera cero. Si incluyen letras da un mensaje error.

- **Gráficos**. Para visualizar mejor los resultados se emplearán gráficos (*Insertar* $\rightarrow$ *Gráficos*). De entre los muchos tipos de gráficos que se pueden hacer usaremos con más frecuencia los tipos *Columna* y XY *(dispersión)*.

- **Operaciones con matrices**. Sumaremos y multiplicaremos matrices y calcularemos determinantes y matrices inversas. Conocidas estas operaciones básicas, usando hojas de cálculo, podremos resolver sistemas de ecuaciones lineales. Veamos pues, cómo operar con matrices con hojas de cálculo. Para ello, abrimos una hoja de cálculo e introducimos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 32 & 55 & 8 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 11 & 21 & 42 \\ 3 & 5 & 1 \\ 24 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

  Una forma ordenada de hacerlo podría ser:

A				B		
	1	2	4		11	21	42
	32	55	8		3	5	1
	-1	4	-4		24	4	-2

  - **Suma de matrices.** Para sumar estas dos matrices podemos seguir los siguientes pasos:
    1. Seleccionamos la región en la que queremos que aparezca la suma, con exactamente el número de filas y columnas que determina la matriz.
    2. Pulsamos "=" para introducir una fórmula.
    3. Marcamos las celdillas que definen la matriz A.
    4. Pulsamos el signo " + ".
    5. Marcamos las celdillas que definen la matriz B.
    6. Pulsamos "*Ctrl*+ $\Uparrow$ + $\hookleftarrow$ ".
  - **Producto de matrices.** Para el producto de matrices se procede de forma similar llamando, en esta ocasión, a la función MMULT después de pulsar "=".[26]

[26]

- Averigua cómo hacer el **determinante** de A, empleando la función MDETERM.
- Averigua cómo hacer la **inversa** de B, empleando la función MINVERSA.
- **Resolución de un sistema lineal.** Sabemos que los sistemas de ecuaciones lineales se pueden escribir de la forma matricial $AX = b$, donde A es la matriz de coeficientes del sistema, X el vector formado por sus incógnitas y b el vector formado por sus términos independientes. De este modo, si la matriz A tiene inversa la solución del sistema se obtiene fácilmente, despejando mediante la inversa de A: $X = A^{-1}b$. Si se puede, aplica esta idea al siguiente ejercicio: Resuelve los siguientes sistemas:

$$(a) \left\{ \begin{array}{c} 2x + 3y - 8z = 8 \\ x + 2y - 3z = 1 \\ -x + 2y - z = 2 \end{array} \right. ,$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{c} 2x + 3y - 8z = 86 \\ x + 2y - 3z = 12 \\ 5x + 8y - 19z = 23 \end{array} \right. .$$

- **Método de Gauss.** ¿Sabrías emplear una hoja de cálculo para encontrar la forma semirreducida de una matriz?

A. Ecuaciones en diferencias

En estas notas nos hemos centrado en estudiar dos modelos de ecuaciones en diferencias: el modelo de Malthus y el modelo logístico. Ambos modelos son ejemplos de ecuaciones en diferencias de la forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \text{donde } f : I \subset \mathbb{R} \to I. \tag{15}$$

Recordamos algunos aspectos de las ecuaciones en diferencias de la forma (15), que permiten entender mejor dichos modelos.

Definición: Solución de la ecuación (15).
Decimos que una sucesión de números $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es una solución de la ecuación (15) si cumple dicha ecuación, es decir, si cada término x_{n+1} se obtiene del anterior, x_n, haciendo $f(x_n)$.

Para la mayoría de las ecuaciones de la forma (15) no se podrá encontrar de forma explícita su solución. En esas ocasiones es útil tener una idea de cómo son sus soluciones empleando el *método gráfico* que se ilustra en la figura 9.

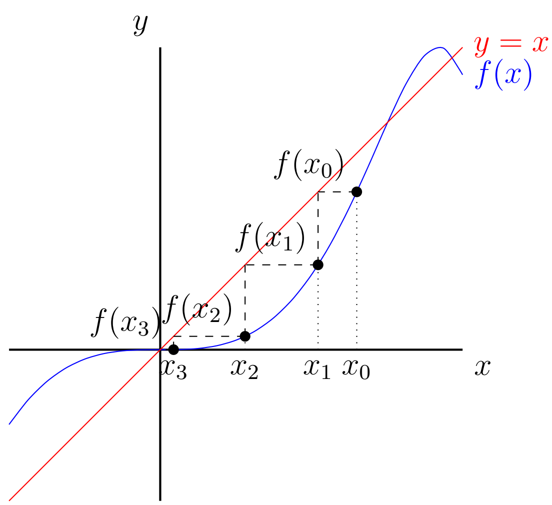

Figura 9: Esquema de la representación gráfica de las soluciones de una ecuación en diferencias de la forma (15), mediante el uso de las gráficas de f y de la recta $y = x$.

Un caso concreto de soluciones son las constantes. Una solución constante es una sucesión de números $x_c := \{x_n\}_{n\geq 0}$, cuyo término general es siempre el mismo, es constante, $x_n = c$, siendo esa constante un punto fijo de la función f, es decir, $f(c) = c$. Por tanto, para determinar las soluciones constantes de la ecuación (15) basta con conocer los puntos fijos de la función f.

Otras soluciones particulares son los ciclos, que se determinan encontrando los puntos fijos de las funciones composición de f con ella misma. Es decir, x_0 genera un 2-ciclo si es un punto fijo de f^2, y los términos de la sucesión toman los valores x_0 y $x_1 = f(x_0)$: $x_{2n} = f^{2n}(x_0) = x_0$ y $x_{2n+1} = f^{2n+1}(x_0) = x_1$. En general, x_0 genera un m-ciclo si es un punto fijo de f^m.

Las soluciones constantes son soluciones destacadas del sistema que nos pueden permir *sospechar* el comportamiento del resto de soluciones. Para ello, recordamos la definición de dos tipos de soluciones constantes:

Definición: Solución estable.
Dada x_c una solución constante de la ecuación (15), decimos que x_c es **estable** *si para cada intervalo abierto I que contengan a c ($c \in I$) podemos encontrar otro intervalo abierto más pequeño J, que contenga a c y contenido en I ($c \in J \subseteq I$), de forma que si consideramos un dato inicial en el intervalo pequeño J ($x_0 \in J$) entonces toda la solución permanece en el intervalo grande I ($x_n \in I, \quad n = 1, 2, \ldots$).*

Definición: Solución asintóticamente estable.
Dada x_c una solución constante de la ecuación (15), decimos que x_c es **asintóticamente estable** *si es estable y además toda solución que empiece lo suficientemente cerca de c, tiende a largo plaza al valor constante c. Es decir, x_c es asintóticamente estable si además de ser estable podemos encontrar un intervalo abierto K que contiene a c y de modo que si tomamos un dato inicial x_0 en K ($x_0 \in K$) la solución $\{x_n\}_{n\geq 0}$ que empieza con ese dato inicial, a largo plazo, tiende al valor c ($\lim_{n\to\infty} x_n = c$).*

Aclarados estos conceptos, mencionamos también el siguiente criterio para determinar si una solución constante es o no estable.

Criterio de la derivada primera:
Dada x_c una solución constante de la ecuación (15) y f es $C^1(J)$, siendo J un intervalo que contiene a c:

- *Si $|f'(c)| < 1$ entonces la solución x_c es asintóticamente estable.*
- *Si $|f'(c)| > 1$ entonces la solución x_c es inestable.*
- *Si $|f'(c)| = 1$ no se puede saber si la solución x_c es o no estable. Es decir, hay situaciones en las que lo será y otras en las que no* [27].

Para finalizar este recopilación de definiciones y resultados, recordamos también que una solución de un *problema de valores iniciales (PVI)*, en este ambiente, es una solución de la ecuación (15) que cumple la condición inicial marcada por el citado problema. Es decir, la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es solución del problema de valores iniciales:

$$\textit{(PVI)} \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 = a, \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

si es solución de la ecuación (15) y su primer término, x_0, es a.

[27] Encuentra y analiza la estabilidad de las soluciones constantes de las siguientes ecuaciones en diferencias:

- $x_{n+1} = r\, x_n$ con $r \in \mathbb{R}$.
- $x_{n+1} = x_n e^{r(1-x_n)}$ con $r \in \mathbb{R}$.

B. Para profundizar sobre el modelo de Leslie

Resumimos aquí resultados útiles sobre la matriz de Leslie, referentes a su polinomio característico y a sus valores propios. Estos resultados nos servirán para determinar el comportamiento asintótico de una población estructurada por edades. Para más detalles se puede consultar [13].

Polinomio característico

Las raíces del polinomio característico de una matriz cuadrada A son los valores propios de dicha matriz[28], y el polinomio característico es el determinante de la matriz $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad del mismo orden. Se puede demostrar que el polinomio característico de la matriz de Leslie A (ver (11))es

$$p(\lambda) = (-1)^m \left[\lambda^m - f_1\lambda^{m-1} - f_2\, p_1\lambda^{m-2} - f_3\, p_2\, p_1\lambda^{m-3} - \ldots f_m\, p_{m-1} \ldots p_2\, p_1\right] \tag{16}$$

Se puede comprobar que este polinomio tiene una única raíz positiva con multiplicidad 1 (esto quiere decir que esta solución no es también solución de la derivada del poliniomio p)[29].

Valores propios

Analizando las soluciones del polinomio característico (16) se obtienen los siguientes resultados sobre valores propios de la matriz de Leslie:

- Un matriz de Leslie tiene un único valor propio positivo, λ_1. Este valor propio tiene multiplicidad 1 y vector propio asociado V_1 con todas sus componentes positivas.
- Para cualquier otro valor propio λ_k (real o complejo) de la matriz de Leslie (con $k > 1$), se verifica

  $$|\lambda_k| \le \lambda_1 \quad (|\lambda_k| \text{ representa el módulo del número } \lambda_k).$$

  Esto lo que nos está indicando es que, caso de que la matriz tenga un valor propio dominate, será λ_1, pero no dice que la matriz lo tenga[30].
- Si hay dos tasas de fertilidad consecutivas no cero, entonces λ_1 es valor propio dominate[31].

[28] λ es un valor propio de A si existe un vector no nulo, tal que $Av = \lambda v$.

[29] Demuestra, como ejercicio, que el polinomio característico de la matriz de Leslie A (ver (11)) es

$$p(\lambda) = (-1)^m \left[\lambda^m - f_1\lambda^{m-1} - f_2\, p_1\lambda^{m-2} - f_3\, p_2\, p_1\lambda^{m-3} - \ldots f_m\, p_{m-1} \ldots p_2\, p_1\right]$$

y que tiene una única raíz positiva con multiplicidad 1.
Aplica este resultado a las siguientes matrices de Leslie:

1. Un modelo estructurado en dos grupos con: $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, y $p_1 = 1$.
2. Un modelo estructurado en dos grupos con: $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, y $p_1 =0.5$.
3. Un modelo estructurado en dos grupos con: $f_1 = 0$, $f_2 = 3$, y $p_1 =0.5$.
4. Un modelo estructurado en tres grupos con: $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 6$, $p_1 = 1/2$ y $p_2 = 1/3$.

[30] Las matrices de Leslie de la nota anterior, ¿tienen valor propio dominante?

[31] ¿Es una hipótesis muy restrictiva, para un modelo de este tipo, suponer que hay dos tasas de fertilidad consecutivas no cero?

Comportamiento asintótico del sistema

Bajo las condiciones que garantizan la presencia de un valor propio dominante, la dinámica de la población la determina justo ese valor propio dominante. Por tanto, en esta sección, supondremos que la población estructurada por edades que estamos considerando tiene, al menos, dos grupos consecutivos con tasa de fertilidad no cero. Bajo estas circunstancias se verifica que[32]

Existe un número $\alpha > 0$, tal que la población se comporta como $\alpha\, \lambda_1^n\ V_1$, cuando n tiende a infinito, siendo λ_1 el valor propio dominante y V_1 un vector propio asociado. Es decir, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{\lambda_1^n} = \alpha\, V_1.$$

Por tanto:

- Si $\lambda_1 < 1$ la población se extingue.
- Si $\lambda_1 > 1$ la población crece exponencialmente, con razón geométrica λ_1.
- Si $\lambda_1 = 1$ la población tiende al equilibrio $\alpha\, V_1$.

Por otro lado, si denotamos por $\|P_n\| = P_n^1 + P_n^2 + \ldots + P_n^m$ observamos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{\|P_n\|} = \frac{\lambda_1^n\,(\alpha\, V_1)}{\lambda_1^n \|\alpha\, V_1\|} = \frac{V_1}{\|V_1\|}.$$

B.1. Método de las potencias

A la vista de las dos familias de problemas analizados anteriormente: modelo de Leslie y modelos de estados, vemos la importancia que tiene saber, primero si la matriz asociada al problema tiene valor propio dominante y segundo, si lo tiene, saber su valor[33]. Si una matriz A tiene valor propio dominante, una herramienta muy útil para determinarlo de

[32]No vamos a entrar en la demostración de este resultado, puede consultarse por ejemplo en [13], pero sí damos una idea intuitiva, en un caso muy particular: una matriz diagonalizable de orden tres, con todos sus valores propios reales y positivos, y con valor propio dominante. Supongamos que los valores propios son λ_1, λ_2 y λ_3 y que λ_1 es el dominante, es decir, $\lambda_i < \lambda_1,\ i = 2, 3$. Supongamos que V_i, con $i = 1, 2, 3$, son los vectores propios asociados. Entonces, cualquier vector $P_0 \in \mathbb{R}^3$ se escribe de la forma

$$P_0 = aV_1 + bV_2 + cV_3.$$

Por tanto,

$$P_n = A^n P_0 = A^n(aV_1 + bV_2 + cV_3) = a\lambda_1^n V_1 + b\lambda_2^n V_2 + c\lambda_3^n V_3.$$

y entonces,

$$\frac{P_n}{\lambda_1^n} = \frac{a\lambda_1^n V_1 + b\lambda_2^n V_2 + c\lambda_3^n V_3}{\lambda_1^n} = aV_1 + b\frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n} V_2 + c\frac{\lambda_3^n}{\lambda_1^n} V_3.$$

Y como λ_1 es valor propio dominante, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ y $\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$ son menores que 1, y por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{\lambda_1^n} = aV_1.$$

[33]Obviamente en el caso de modelos de estado es sabido que si tiene valor propio dominante éste ha de ser 1.

forma aproximada es el método de las potencias. Presentaremos en estas notas una *versión sencilla* del método de las potencias, que se aplica a los modelos que hemos considerado, para que pueda ser fácilmente programable con una hoja de cálculo:

1. Partimos de un vector inicial ω_0 con todas sus componentes estrictamente positivas, que no sea un vector propio de la matriz.

2. Calculamos $\omega_1 = A\,\omega_0$, $\omega_2 = A\,\omega_1, \ \ldots, \omega_n = A\,\omega_{n-1}$, para n grande según la precisión que deseemos obtener.

3. Hacemos una tabla con los cocientes entre las primeras componentes de dos vectores consecutivos, no nulas. El primer valor lo calculamos haciendo el cociente de la primera componente del vector ω_1 entre la primera componente del vector ω_0, el siguiente lo construimos empleando dividiendo la primera componente del vector ω_2 y entre la primera componente del vector ω_1 y así sucesivamente.

4. Si la matriz tiene valor propio dominante, en la tabla anterior observaremos que tras ciertos pasos los últimos números registrados se irán pareciendo cada vez más, de manera que si se incrementa el número de pasos se obtiene más precisión en la aproximación del valor propio dominante. El último vector considerado ω_n es una aproximación de un vector propio asociado al valor propio dominante.

5. Dado que en los problemas con los que estamos trabajando las matrices y vectores son positivos, se puede considerar en cada paso $\|\omega_i\|$ (la suma de las componentes del vector ω_i), dando de este modo como aproximación del valor propio dominante los cocientes $\frac{\|\omega_{i+1}\|}{\|\omega_i\|}$.

Referencias

[1] H. Anton and C. Rorres, *Elementary linear algebra: applications version*, John Wiley & Sons, 2013.

[2] H. Caswell, *Matrix population models: construction, analysis, and interpretation. 2nd edn sinauer associates*, Inc., Sunderland, MA, (2001).

[3] M. T. Gonzalez Manteiga and M. González, *Modelos matemáticos discretos en las ciencias. de la naturaleza*, Teoría y problemas Ediciones Diaz de Santos SA Madrid, (2003).

[4] T.-Y. Li and J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, The American Mathematical Monthly.

[5] R. M. May, *Biological populations obeying difference equations: stable points, stable cycles, and chaos*, Journal of Theoretical Biology, 51 (1975), pp. 511–524.

[6] R. M. May and G. F. Oster, *Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models*, The American Naturalist, 110 (1976), pp. 573–599.

[7] C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, vol. 188, Siam, 2023.

[8] N. Moya Díaz Santos et al., *La ecuación logística discreta y sus aplicaciones a criptografía*, B.S. thesis, Universidad de Granada, 2023.

[9] J. D. Murray, *Mathematical biology: I. An introduction*, vol. 17, Springer Science & Business Media, 2007.

[10] R. Ortega, *¿Hay caos en la calculadora?*, Materials matemàtics, (2013), pp. 0001–22.

[11] P. Pedregal, *Introduction to optimization*, vol. 46, Springer, 2004.

[12] C. F. Pérez, F. J. V. Hernández, and J. M. V. Montaner, *Ecuaciones diferenciales y en diferencias: sistemas dinámicos*, Editorial Paraninfo, 2003.

[13] R. O. Ríos, *Modelos matemáticos*, Editorial Universidad de Granada, 2013.

[14] E. Salinelli and F. Tomarelli, *Discrete dynamical models*, vol. 76, Springer, 2014.

[15] H. Thieme, *Princeton series in theoretical and computational biology*, in Mathematics in Population Biology, Princeton University Press, 2003.

[16] E. K. Yeargers, J. V. Herod, and R. W. Shonkweiler, *An introduction to the mathematics of biology: with computer algebra models*, Springer Science & Business Media, 2013.