LA CURVA LOGÍSTICA

X=biomasa
K=Nivel de máxima sustentación por el ecosistema
t=Tiempo

Hipótesis:

$$\begin{cases} 0 < X < K & [1] \\ \dfrac{dX}{dt} = \dot{X} = CX(K-X) \quad \text{con C} > 0 \text{ (constante de ajuste)} & [2] \end{cases}$$

Como,

$$\ddot{X} = C\left[\dot{X}(K-X) + X(-1)\dot{X}\right] = C\dot{X}(K-2X)$$

el punto de inflexión está en *X=K/2.*

La expresión de X en función de t se obtiene integrando [2], es decir.

$$\frac{dX}{X(K-X)} = Cdt$$

Se tiene:

$$\frac{1}{K}\left[\frac{1}{X} + \frac{1}{(K-X)}\right]dX = Cdt$$

$\frac{1}{K}\left[\log(X) - \log(K-X)\right] = Ct + D$ con D constante de integración. Esto es,

$\frac{X}{K-X} = e^{rt+b}$ con *r=KC>0 y b=-KD*

Finalmente, se tiene,

$$\boxed{X = \frac{K}{1+e^{b-rt}} \quad [3]}$$

De [3], puede deducirse que

$$\lim_{t\to+\infty} X = K$$
$$\lim_{t\to-\infty} X = 0$$

En el momento en que se produce el punto de inflexión se tiene *X=K/2*, entonces,

$$2 = 1 + e^{b-rt} \Rightarrow b - rt = 0 \Rightarrow t = b/r$$