

# Breve repaso de la Relatividad Especial

Bert Janssen

*Departamento de Física Teórica y del Cosmos  $\mathcal{E}$   
Centro Andaluz de Física de Partículas Elementales,  
Avda Fuentenueva s/n, Facultad de Ciencias  
Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain*  
bjanssen@ugr.es

Granada, 2005

## RESUMEN

Este texto quiere dar un breve repaso a la Relatividad Especial. Revisaremos el carácter relativista de distancia y tiempo, derivaremos las transformaciones de Lorentz y revisaremos la dinámica relativista. Finalmente introduciremos el espacio de Minkowski, como el espaciotiempo cuadrimensional que surge de manera natural de la Relatividad Especial.

*La relatividad nos enseña la conexión entre las diferentes descripciones de la misma realidad.*  
(A. Einstein)

## 1 Introducción

La Teoría de la Relatividad Especial, desarrollada por Albert Einstein (1879 - 1955) en 1905, fue la respuesta a la crisis del éter, que perturbó la física a finales del Siglo XIX. Por un lado, la Teoría de Maxwell de los campos electromagnéticos parecía exigir la existencia de un medio, llamado *éter*, para la propagación de las ondas electromagnéticas (la luz). Por otro lado, resultaba imposible medir el movimiento de la Tierra con respecto a ese éter, como quedó manifiesto en los experimentos fracasados de Michelson y Morley (1881 y 1887). Para colmo, Lorentz había observado que la Teoría de Maxwell no se comporta de la misma manera que la Mecánica Newtoniana, si intentamos relacionar dos observadores inerciales: la Mecánica Newtoniana transforma bajo el grupo de Galilei, mientras que la Teoría de Maxwell bajo un grupo de transformaciones, llamado el grupo de Lorentz.

La propuesta de Einstein fue radical: descartó la existencia del éter y elevó el Principio de la Relatividad de Galilei al estatus de un primer principio, válida para toda la física. En lugar de describir la física desde el punto de vista de un observador privilegiado, en reposo con respecto al éter, afirmó que el movimiento uniforme rectilíneo es indistinguible de estado de reposo y que por lo tanto todos los observadores inerciales son equivalentes, por la simple razón que no podemos distinguir entre unos y otros. Incluso si existiese el éter, sería por definición indetectable.

Llevar esta premisa hasta sus últimas consecuencias implica abandonar los conceptos tradicionales del espacio y del tiempo y admitir que hay correcciones relativistas importantes a la física newtoniana. La Relatividad Especial no sólo ofrece una nueva manera de ver la física, sino incluso implica una visión nueva de la estructura del espacio y el tiempo, combinados en una sola entidad cuadrimensional, llamado el espaciotiempo, o el espacio de Minkowski.

La Relatividad Especial es uno de los grandes logros de la Física del Siglo XX. No sólo está confirmado a diario en los aceleradores de partículas y las centrales nucleares, sino también forma la base para otras teorías modernas exitosas, como la Relatividad General y el Modelo Estándar de Partículas.

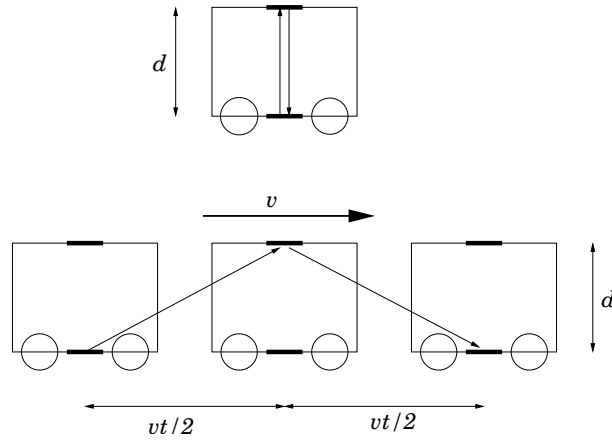


Figura 1: El reloj de luz en un tren en movimiento visto por un observador  $\mathcal{O}'$  dentro del tren (arriba) y un observador  $\mathcal{O}$  en el andén (abajo). El camino recorrido por la luz en el sistema de referencia del observador en el andén es más largo que en el sistema del viajero. Dado que la velocidad de la luz es la misma para ambos observadores, el tiempo que tarda la luz en recorrer un ciclo tiene que ser distinto para un observador que para otro.

## 2 La relatividad del tiempo y el espacio

### 2.1 Los postulados de la Relatividad Especial

Toda la Teoría de la Relatividad Especial está basada en dos postulados:

1. Todas las leyes de la física son válidas para todos los sistemas inerciales.
2. La velocidad de la luz en el vacío es igual para todos los observadores y tiene el valor de  $299.792,458 \text{ km/s}$ , independientemente del estado de movimiento de la fuente.

El primer postulado es el Principio de la Relatividad y fue formulado ya por Galilei para la mecánica alrededor de 1600. Einstein lo amplió para todas las leyes físicas, especialmente para el electromagnetismo, ya que la teoría de Maxwell parecía comportarse de manera diferente a la Mecánica Newtoniana. El Principio de la Relatividad afirma que no existe ningún experimento físico que sea capaz de distinguir si un observador está en reposo o en movimiento uniforme rectilíneo. Dos observadores que se mueven uno con respecto al otro ven la misma física y, por lo tanto, las leyes de la física deben escribirse de modo que no cambien al pasar de un sistema de referencia a otro.

El segundo postulado es más sorprendente, pero hay motivos teóricos y experimentales para creerlo. Los motivos experimentales son los experimentos de Michelson y Morley, que querían medir la velocidad de la Tierra con respecto al éter. El motivo teórico es la teoría de Maxwell que afirma la existencia de ondas electromagnéticas (luz), cuya velocidad  $c$  es una constante predicha por la teoría. Si se asume que todas las leyes de la física son válidas para todos los observadores, hay que aceptar que  $c$  es una constante universal.

Llevar estos dos postulados hasta sus últimas consecuencias implica abandonar las ideas intuitivas del espacio y el tiempo. Investigaremos las implicaciones con una serie de experimentos ficticios.

### 2.2 La dilatación del tiempo

Considérese un tren que se mueve con velocidad  $v$  en movimiento uniforme rectilíneo con respecto al andén de una estación. El pasajero en el tren  $\mathcal{O}'$  dispone de un reloj de luz, que consiste en

dos espejos perfectos, colocados uno encima del otro a una altura  $d$  y un pulso de luz que viaja continuamente entre los dos espejos. Por lo tanto,  $\mathcal{O}'$  medirá que el tiempo  $\Delta t'$  que tarda la luz en subir y bajar entre los dos espejos es

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}. \quad (2.1)$$

Por otro lado, un observador  $\mathcal{O}$  en el andén verá este mismo fenómeno de manera distinta: para él la luz sale del espejo de abajo, pero llega al espejo de arriba después de un tiempo  $\Delta t/2$  cuando el tren se ha desplazado una distancia  $v\Delta t/2$  y otra vez al espejo de abajo después de un tiempo total  $\Delta t$  cuando el tren se ha desplazado una distancia total  $v\Delta t$  (véase Figura 1). Para  $\mathcal{O}$ , la luz recorre una trayectoria más larga y, dado que para él también la luz se mueve a velocidad  $c$ , habrá pasado más tiempo entre que la luz saliese y llegase otra vez al espejo de abajo. Concretamente, la distancia que recorre la luz al subir es, por el teorema de Pythagoras

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + d^2, \quad (2.2)$$

de donde podemos despejar  $\Delta t$  como

$$\Delta t = \frac{2d/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.3)$$

donde en la última igualdad hemos utilizado (2.1) para expresar la altura del tren  $d$  en función del intervalo  $\Delta t'$  medido por el pasajero. Vemos por lo tanto que el tiempo  $\Delta t$  que tarda la luz en recurrir un ciclo observado por el observador en el andén es efectivamente más largo que el tiempo  $\Delta t'$  del viajero. Este efecto se llama la *dilatación del tiempo* y es completamente general: los relojes en movimiento corren menos rápido que los relojes en reposo. El factor de corrección

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.4)$$

es una función creciente de  $v$ , que siempre es mayor que 1. Obsérvese sin embargo que para velocidades  $v \ll c$  mucho más pequeñas que la velocidad de la luz, tenemos que  $\gamma \approx 1$ , de modo que estos efectos relativistas son completamente despreciables en la vida cotidiana. Por otro lado, la función  $\gamma$  diverge cuando  $v \rightarrow c$ , de modo que estos efectos se hacen mayor cuanto más se aproxima la velocidad relativa de los observadores a la velocidad de la luz.

Nótese que para obtener la fórmula (2.3), hemos tenido que asumir que  $v < c$ . La velocidad de la luz surge por lo tanto en la Relatividad Especial como un límite máximo, que ningún observador, ni ninguna señal puede superar.

Finalmente, es imprescindible darse cuenta de que la situación descrita arriba es completamente simétrica entre los dos observadores. El pasajero  $\mathcal{O}'$  en el tren tiene pleno derecho de suponer que él está en reposo, mientras el observador  $\mathcal{O}$  en el andén se está moviendo. Repitiendo el mismo argumento, está claro que  $\mathcal{O}'$  verá el reloj de luz de  $\mathcal{O}$  en el andén avanzar menos rápido que el suyo, dado que para él su propio reloj está en reposo.

Concluimos por lo tanto que cada uno ve el reloj del otro ir más lento que el suyo, puesto que cada uno ve al otro en movimiento. No hay manera de saber cuál de los dos “realmente” va más lento, ya que esto depende del punto de vista del observador. Por muy contraintuitiva que pueda parecer, esta situación no lleva a contradicciones, si se toma en cuenta el hecho de que también las distancias son relativas.

### 2.3 La contracción de Lorentz

Asumimos que el andén tiene una longitud  $L$  medida por  $\mathcal{O}$ . Éste puede escribir  $L = v\Delta t$ , donde  $\Delta t$  es el intervalo que necesita el tren para recorrer el andén. Por otro lado,  $\mathcal{O}'$  mide una longitud  $L' = v\Delta t'$ , donde ahora  $\Delta t'$  es el tiempo entre que el pasajero pasa por el principio y el final

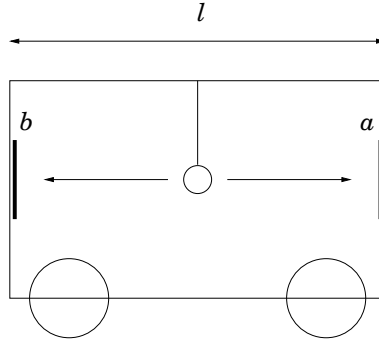


Figura 2: La no-simultaneidad de eventos: una fuente de luz emite señales hacia dos detectores a y b, colocados al principio y al final del tren. Para  $\mathcal{O}'$  las dos señales llegan simultáneamente a los detectores, mientras según  $\mathcal{O}$  la señal llega primero al detector b y después al detector a.

del andén, medido por él. Dado que los dos observadores no coinciden en cuánto ha durado el intervalo de tiempo, tampoco se pondrán de acuerdo sobre la longitud del andén. Para  $\mathcal{O}'$ , el andén mide

$$L' = v\Delta t' = v\Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} = L\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (2.5)$$

es decir una factor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  más corto que para  $\mathcal{O}$ . Este efecto es conocido bajo el nombre de *contracción de Lorentz*: los objetos en movimiento sufren una contracción longitudinal con un factor  $\gamma^{-1}$ . Otra vez la situación es simétrica: Por su parte,  $\mathcal{O}$  verá el tren contraído con respecto a la medición de  $\mathcal{O}'$ .

La contracción de Lorentz y la dilatación del tiempo conspiran para que el conjunto sea consistente. Esto se puede ver en el famoso experimento de los muones. Los muones son partículas elementales con una vida media de  $2,2 \cdot 10^{-6}s$  (en reposo), que se forman a unos  $15 km$  de altura en las colisiones de rayos cósmicos con átomos de la atmósfera. Los muones producidos en estas colisiones son muy energéticos y se mueven típicamente con velocidades  $v \sim 0,99 c$ .

Calculando ingenuamente la distancia que recorrerían los muones antes de desintegrarse con la fórmula  $x = vt$ , nos saldría que viajan de media unos  $650 m$ . En otras palabras, según la Mecánica Newtoniana se desintegrarían mucho antes de llegar a la superficie de la Tierra y no deberíamos observar (casi) ningún muón proveniente de la radiación cósmica. Sin embargo en la práctica medimos una gran cantidad de muones a nivel del mar. La explicación es que por su velocidad relativista, el tiempo para el muón es muy distinto al tiempo para el experimentador en la Tierra: debido a la dilatación temporal, al 99 % de la velocidad de la luz, el factor de corrección vale  $\gamma \approx 9$ , de modo que en realidad viven unas 9 veces más que un muón en reposo. Eso hace que pueden recorrer una distancia 9 veces mayor, de modo que una cantidad considerable de ellos sí llega a la superficie.

También es interesante ver esta misma historia desde el punto de vista de los propios muones. Para ellos su reloj interno corre al ritmo normal (ya que están en reposo con respecto a sí mismos) y sólo tienen una vida media de  $2,2 \cdot 10^{-6}s$ . ¿Cómo podemos compaginar esto con el hecho de que gran parte de ellos lleguen a la superficie? Para ellos, la Tierra (y por lo tanto la atmósfera) se mueve con una velocidad  $v \sim 0,99 c$  hacia ellos. Debido a este movimiento, la atmósfera sufre una contracción de Lorentz y parece 9 veces más delgada, unos  $1700 m$ , suficiente para que una cantidad considerable llegue al suelo, a pesar de vivir sólo  $2,2 \cdot 10^{-6}s$ .

Vemos por lo tanto como la dilatación temporal y la contracción de Lorentz conspiran para dar una imagen consistente: los efectos debidos a la dilatación del tiempo según un observador, son debidos a la contracción de Lorentz según otro. Esto indica una conexión íntima entre el espacio y el tiempo, como veremos en las siguientes secciones. Otro ejemplo de esta conexión es la simultaneidad de eventos en dos puntos distintos del espacio.

## 2.4 La simultaneidad de los sucesos

Una fuente de luz, colocada en el medio del tren, emite dos señales hacia dos detectores  $a$  y  $b$  al principio y al final del tren respectivamente (véase Figura 2). Para el pasajero en el tren  $\mathcal{O}'$  las señales llegarán al mismo momento a los detectores, puesto que cada una de las señales tarda un tiempo  $\Delta t' = l/2c$ , donde  $l$  es la longitud del tren en reposo.

El observador  $\mathcal{O}$  en el andén, sin embargo, ve también moverse las señales con la velocidad  $c$ , pero además ve que el detector  $b$  se aproxima con una velocidad  $v$  a la señal, mientras el detector  $a$  se aleja con velocidad  $v$ . Para él las señales tardan un tiempo

$$\Delta t_a = \frac{l\sqrt{1-v^2/c^2}}{2(c-v)} \quad \text{y} \quad \Delta t_b = \frac{l\sqrt{1-v^2/c^2}}{2(c+v)} \quad (2.6)$$

en llegar a los detectores  $a$  y  $b$  respectivamente. Para  $\mathcal{O}$ , la llegada de la señal al detector  $a$  no es simultánea a la llegada de la señal al detector  $b$ , sino que ocurre después de un intervalo de tiempo

$$\Delta t_a - \Delta t_b = \frac{lv/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (2.7)$$

Sucesos que son simultáneos para un observador, no necesariamente lo son para otro. Incluso es posible encontrar observadores  $\mathcal{O}''$  para los cuales primero llega la señal en  $a$  y después en  $b$ , es decir, para los cuales el orden de los sucesos es invertido con respecto a  $\mathcal{O}$ : basta con encontrar un observador que se mueve en la misma dirección que el tren, pero con velocidad  $V > v$  con respecto al andén. Éste vería el tren moverse hacia atrás y por lo tanto el detector  $a$  acercarse a la señal, mientras  $b$  se aleja.

La dilatación temporal, la contracción de Lorentz y la no-simultaneidad de eventos dan pistas sobre que los conceptos del espacio y el tiempo son en realidad muy distintos a lo que estamos acostumbrados de la Mecánica Newtoniana. La imagen de espacio y tiempo que surge de la Relatividad Especial es una donde los dos están íntimamente entrelazados en una única entidad, llamado *espaciotiempo*, que proporciona una imagen consistente de estos efectos relativistas. Estudiaremos más a fondo la estructura matemática de este espaciotiempo y las consecuencias que tiene para la física.

## 3 Las transformaciones de Lorentz

Fíjense que todos los efectos relativistas derivados anteriormente (la dilatación del tiempo, la contracción de Lorentz y la no-simultaneidad de sucesos) son debidos al segundo postulado, la constancia de la velocidad de la luz. El primer postulado, la equivalencia de los observadores inerciales nos dirá como relacionar las mediciones de un observador con los de otro.

La Mecánica Newtoniana (y nuestra intuición) dice que la relación entre los dos sistemas de referencia inerciales viene dada por las *transformaciones de Galilei*,

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (3.1)$$

Sin embargo, es fácil de ver que estas transformaciones no respetan el segundo postulado de la constancia de la velocidad de la luz, como se ve claramente en la regla clásica de la suma de velocidades, que se deriva ellas,

$$V = V' + v. \quad (3.2)$$

Tenemos por lo tanto que volver a derivar unas transformaciones que relacionan dos observadores inerciales y que a la vez respetan los dos postulados y recuperan los resultados de la sección anterior. Para eso vamos a deducir cómo perciben dos observadores inerciales un mismo evento, cada uno desde su sistema de referencia.

Un *evento* o un *suceso* es algo que ocurre en cierto lugar del espacio en cierto momento. Un observador  $\mathcal{O}$  medirá este suceso en su sistema de referencia y puede asignarle 4 coordenadas

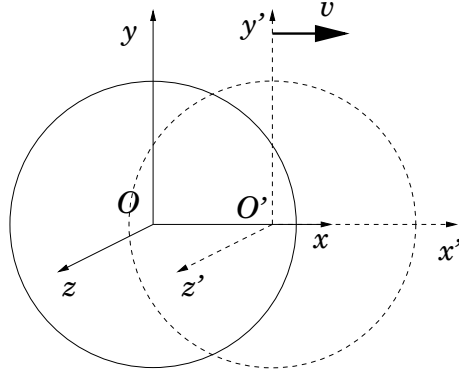


Figura 3: Dos sistemas de referencia  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  se mueven con una velocidad relativa  $v$ . Los sistemas de referencia están orientados tal que los ejes son paralelos y los relojes están sincronizados tal que en  $t = t' = 0$  los orígenes coinciden. Debido a la constancia de la velocidad de la luz, una señal luminosa, emitida en todas las direcciones desde el origen en el momento  $t = t' = 0$ , será esférica en ambos sistemas de referencia.

$(x, y, z, t)$ . Otro observador  $\mathcal{O}'$  verá el mismo suceso y le asignará las coordenadas  $(x', y', z', t')$  en su propio sistema de referencia. La pregunta es: ¿cómo están relacionadas las coordenadas  $(x, y, z, t)$  de  $\mathcal{O}$  y  $(x', y', z', t')$  de  $\mathcal{O}'$ , si uno se mueve de manera uniforme y rectilínea con velocidad  $\vec{v}$  con respecto al otro. Por simplicidad supondremos que los sistemas de referencia de  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  están orientados de modo que los ejes son paralelos y que  $\mathcal{O}'$  se mueve a lo largo del eje  $x$  de  $\mathcal{O}$ . Además, supondremos que en  $t = t' = 0$  los dos orígenes de los sistemas de referencia coinciden (Véase Fig 3).

La transformación lineal más general entre  $(x, t)$  y  $(x', t')$  (suponiendo que  $y' = y$  y  $z' = z$ , dado que la contracción de Lorentz sólo es longitudinal) es

$$x' = Ax + Bt, \quad t' = Cx + Dt, \quad (3.3)$$

donde los coeficientes  $A, B, C$  y  $D$  son constantes que dependen de los parámetros  $v$  y  $c$ . A base de consideraciones generales de simetría, podemos relacionar algunos de los coeficientes. El origen del sistema  $\mathcal{O}$  está en reposo con respecto a este sistema y satisface por lo tanto en cada momento la condición  $x = 0$ . Las transformaciones (3.3) en este caso se reducen a

$$x' = Bt, \quad t' = Dt, \quad (3.4)$$

y, derivando la primera ecuación con respecto a  $t'$ , tenemos

$$-v = B/D, \quad (3.5)$$

donde  $-v = dx'/dt'$  es la velocidad con la que  $\mathcal{O}'$  ve moverse el origen de  $\mathcal{O}$ . De manera similar, el origen de  $\mathcal{O}'$  está en reposo con respecto a sí mismo, de modo que

$$x' = Ax + Bt = 0, \quad (3.6)$$

y por lo tanto, derivando con respecto a  $t$ ,

$$Av + B = 0. \quad (3.7)$$

Comparando (3.5) y (3.7) vemos que  $A = D$  y  $B = -vA$ , de modo que (3.3) se convierte en

$$x' = A(x - vt), \quad t' = A(C/Ax + t). \quad (3.8)$$

Para determinar  $A$  y  $C$ , consideramos el siguiente suceso: en el momento  $t = t' = 0$  (cuando los orígenes de ambos sistemas de referencia satisfacen la condición  $x = x' = 0$ ), se emite desde

los orígenes coincidentes una señal de luz, que se expande en todas las direcciones (véase Figura 3). En el sistema de referencia de  $\mathcal{O}$ , después de un tiempo  $t$  el pulso de luz tendrá la forma de una esfera, descrita por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2. \quad (3.9)$$

Por otro lado, para  $\mathcal{O}'$ , después de un tiempo  $t'$  el pulso también tendrá la forma de una esfera, ya que para él, la luz también expande a la velocidad  $c$  en todas las direcciones. En las coordenadas de  $\mathcal{O}'$  esta esfera satisface la ecuación

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2. \quad (3.10)$$

Dado que  $y = y'$  y  $z = z'$ , vemos que una condición de consistencia para las transformaciones (3.8) es que

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2. \quad (3.11)$$

Sustituyendo (3.8), encontramos que los coeficientes  $A$  y  $C$  tienen que tomar los valores

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad C = \frac{-v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.12)$$

y que por lo tanto las transformaciones (3.3) entre observadores  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  que respetan los dos postulados de la Relatividad son de la forma

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.13)$$

Las transformaciones (3.13) se llaman las transformaciones de Lorentz y se reducen para  $v \ll c$  a las transformaciones de Galilei (3.1), de modo que recuperamos la mecánica newtoniana a velocidades bajas. Dejamos como ejercicio derivar que las transformaciones de Lorentz reproducen los efectos relativistas de la sección 2.

Finalmente, obsérvese que las transformaciones (3.13) fueron construidas de tal manera que dejaran la cantidad

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (3.14)$$

invariante. La cantidad  $s^2$  es por lo tanto el primer *invariante Lorentz* que encontramos. En breve encontraremos otros invariantes, con una estructura parecida.

## 4 Dinámica relativista

Al derivar las transformaciones de Lorentz hemos tenido que asumir que el factor relativista,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (4.1)$$

es un número real finito, es decir, que la velocidad relativa entre dos observadores siempre es menor que la velocidad de la luz,  $v < c$ ; si no las transformaciones (3.13) no están bien definidas. Es más, esta limitación no sólo aplicada a las velocidades relativas entre observadores, sino también a las velocidades de partículas (masivas) en un sistema de referencia, ya que siempre podemos encontrar un observador que está en reposo con respecto a esa partícula. En otras palabras, la velocidad de la luz aparece en Relatividad Especial como un límite superior a cualquier velocidad permitida.<sup>1</sup> Dado que en la Mecánica Newtoniana no existe ningún límite superior a las velocidades

<sup>1</sup>En 2011, los científicos trabajando en el experimento de OPERA en Gran Sasso (Italia) anunciaron una anomalía en sus datos experimentales potencialmente revolucionaria: unos neutrinos viajando con velocidades (ligeramente) mayores que la velocidad de la luz. Midiendo la velocidad de un haz de neutrinos producidos en el CERN en Ginebra (Suiza) y enviados a Gran Sasso, 731 km más lejos, parecían encontrar que los neutrinos llegaban 60 nanosegundos antes que si hubieran viajado con la velocidad de la luz en el vacío. Aunque inicialmente afirmaron que el error experimental sobre esta medida era de 20 nanosegundos (por lo tanto desafiando uno de los principios claves de la Relatividad Especial), un análisis más exhaustivo reveló que, debido a un cable de fibra óptica mal colocado, la barra de error real era más grande, concretamente de 150 nanosegundos, volviendo los resultados experimentales compatibles con la Relatividad Especial.

alcanzables, habrá que modificar esa mecánica de tal manera que respeta la velocidad de la luz y, más general, las transformaciones de Lorentz.

## 4.1 Composición de velocidades

Una primera observación es que la regla clásica de la suma de las velocidades (3.2) no puede ser cierta, ya que permite velocidades mayores que  $c$ . De las transformaciones de Lorentz podemos derivar una regla nueva para la composición de las velocidades: supongamos que una partícula tiene una velocidad  $V'$  con respecto al observador  $\mathcal{O}'$ , que a su vez se mueve con velocidad  $v$  con respecto a  $\mathcal{O}$ . Para calcular la velocidad  $V$  de la partícula con respecto a  $\mathcal{O}$ , utilizamos la inversa de las transformaciones de Lorentz,

$$x = \gamma (x' + vt'), \quad t = \gamma (t' + vx'/c^2), \quad (4.2)$$

donde  $\gamma$  es el factor relativista, dado por (4.1). La velocidad  $V = dx/dt$  de la partícula, medida por  $\mathcal{O}$  viene entonces dada por

$$V = \gamma \left( \frac{dx'}{dt} + v \frac{dt'}{dt} \right) = \gamma (V' + v) \frac{dt'}{dt} = \frac{V' + v}{1 + vV'/c^2}, \quad (4.3)$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado que por (4.2)

$$dt = \gamma \left( dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right) = \gamma \left( 1 + \frac{v}{c^2} V' \right) dt'. \quad (4.4)$$

Es fácil ver que con esta *regla relativista de la suma de velocidades* (4.3), las velocidades medidas por  $\mathcal{O}$  nunca exceden la velocidad de la luz. Obsérvese que incluso en el caso donde una partícula (sin masa) se mueve con velocidad  $V' = c$  con respecto al observador  $\mathcal{O}'$ , su velocidad con respecto al observador  $\mathcal{O}$  según la regla (4.3) es  $V = c$ , independientemente de la velocidad  $v$  relativa entre  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$ . Esto nos dice que la nueva regla de composición de velocidades efectivamente respeta la constancia de la velocidad de la luz, exigida por el segundo postulado de la Relatividad Especial. Por otro lado, si todas las velocidades  $V$ ,  $V'$  y  $v$  son no-relativistas, la nueva regla reduce al caso newtoniano (3.2).

## 4.2 Momento, masa y energía

La segunda ley de Newton,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , tampoco puede ser válida, puesto que implicaría que una partícula sometida a una fuerza constante podría alcanzar velocidades arbitrariamente grandes. Habrá que modificar por lo tanto la segunda ley, de modo que no viole los postulados o las transformaciones de Lorentz.

Se puede reescribir la segunda ley de Newton, definiendo la fuerza  $\vec{F}$  como la derivada del momento  $\vec{p}$  con respecto al tiempo

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (4.5)$$

sólo que ahora el momento lineal  $\vec{p}$  no es simplemente  $m_0\vec{v}$ , con  $m_0$  la masa de la partícula (en reposo),<sup>2</sup> sino

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.6)$$

El factor  $\gamma$  en esta definición del momento da correcciones relativistas importantes a la Mecánica Newtoniana: al actuar con una fuerza sobre una partícula sublumínica, aumenta el momento lineal de la partícula, incrementando un poco la velocidad de la partícula, pero sobre todo

<sup>2</sup>A veces se encuentra en los libros divulgativos el concepto de masa relativista  $m_r = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , sugiriendo que la masa de un objeto depende de su velocidad. Esta notación ahora está considerada anticuada y suele llevar a confusiones y errores conceptuales, por lo que, como en la gran mayoría de los libros de texto modernos, sólo usaremos la masa invariante  $m_0$ .



aumentando el factor  $\gamma$ . En otras palabras, hace falta una fuerza cada mayor para acelerar la partícula un poquito más. En particular, dado que  $\vec{p}$  diverge cuando  $v \rightarrow c$ , una fuerza finita nunca podrá acelerar una masa más allá que la velocidad de la luz.

En analogía con la Mecánica Newtoniana, definimos la diferencia de la energía cinética  $E$  como el trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F}$  a lo largo de una curva  $C$

$$E_2 - E_1 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{v} dt. \quad (4.7)$$

Utilizando la versión relativista de la segunda ley de Newton (4.5), podemos escribir la energía cinética como

$$\Delta E = \int_1^2 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_1^2 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dt} dt = m_0 c^2 \int_1^2 \frac{d\gamma}{dt} dt = m_0 c^2 \Delta\gamma \quad (4.8)$$

donde en la tercera igualdad hemos utilizado que

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{d\gamma} = \vec{v} \cdot \frac{d}{d\gamma} (m_0 \gamma \vec{v}) = m_0 v^2 + m_0 \gamma v \frac{dv}{d\gamma} = m_0 v^2 + m_0 \frac{c^2}{\gamma^2} = m_0 c^2. \quad (4.9)$$

La ecuación (4.8) da una relación entre la energía cinética  $E$ , la masa  $m_0$  y la velocidad  $v$  que difiere bastante de la expresión newtoniana:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.10)$$

Sin embargo, a velocidades bajas se puede desarrollar el factor relativista en un desarrollo de Taylor para  $v/c \ll 1$ ,

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (4.11)$$

de modo que en el segundo término reconocemos la expresión newtoniana para la energía cinética, mientras el primer término es la *energía de reposo* que tiene un objeto simplemente por tener masa. Los puntos suspensivos dan correcciones relativistas a la expresión newtoniana de la energía cinética.

El hecho de que la energía de una partícula dependa de la velocidad, sugiere una relación profunda entre la energía y el momento. Un observador  $\mathcal{O}'$  que está en reposo respecto a la partícula verá una energía  $E' = m_0 c^2$  y un momento  $\vec{p}' = 0$ , mientras que el observador  $\mathcal{O}$  verá un momento no-nulo y una energía más grande. Resulta que  $E$  y  $\vec{p}$  están relacionados a través de una transformación de Lorentz (suponiendo que los sistemas de  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  están orientados como en la sección anterior y que la masa se mueve a lo largo del eje  $x$  de  $\mathcal{O}$ ),

$$E' = \frac{E - v p_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p'_x = \frac{p_x - v E/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.12)$$

Finalmente, podemos combinar  $E$  y  $\vec{p}$  en una expresión. De (4.6) y (4.10) tenemos que

$$E^2 - p_x^2 c^2 - p_y^2 c^2 - p_z^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (4.13)$$

Obsérvese que el lado derecho es una constante, de modo que la combinación a la izquierda tiene el mismo valor para todos los observadores, o sea que es otro invariante Lorentz. Efectivamente, no es difícil ver que las transformaciones (4.12) dejan el lado izquierdo de esta expresión invariante. Nótese la similitud con la fórmula (3.14) de la distancia recorrida por la luz en un intervalo de tiempo.

### 4.3 Electromagnetismo

En contraste con la Mecánica Newtoniana, la teoría de Maxwell no necesita correcciones relativistas, puesto que las ecuaciones de Maxwell ya son invariantes bajo las transformaciones de Lorentz. Las leyes de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}, \quad (4.14)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} (\vec{j} + \partial_t \vec{E}), \quad (4.15)$$

junto con la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \quad (4.16)$$

describen las interacciones de campos eléctricos  $\vec{E}$ , magnéticos  $\vec{B}$  y las densidades de cargas  $\rho$  y de corrientes  $\vec{j}$ .

Está claro que el Principio de la Relatividad relaciona ciertas magnitudes que aparecen en las ecuaciones de Maxwell. Por ejemplo, una configuración de cargas  $\rho(\vec{x})$  que está en reposo en el sistema de referencia de un observador  $\mathcal{O}$ , se manifiesta como una corriente  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  en el sistema de referencia de un observador  $\mathcal{O}'$  que viaja a una velocidad constante  $\vec{v}$  con respecto a  $\mathcal{O}$ . Por lo tanto, las cargas y las corrientes tienen que estar relacionadas a través de una transformación de Lorentz. Efectivamente, bajo un cambio de coordenadas (3.13),  $\rho$  y  $j_x$  transforman como

$$\rho' = \frac{\rho - v j_x / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad j'_x = \frac{j_x - v \rho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.17)$$

Es bien sabido que una consecuencia directa de las ecuaciones de Maxwell es la ley de la conservación de la carga eléctrica,

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (4.18)$$

Si  $\rho$  y  $\vec{j}$  se mezclan en una transformación de Lorentz, es importante comprobar qué pasa con la conservación de la carga al pasar de un sistema de referencia a otro. El truco es darse cuenta de que no sólo la carga y la corriente transforman, sino también las derivadas parciales: de la transformación inversa (4.2) y la regla de la cadena, se deduce fácilmente que las derivadas parciales transforman bajo (3.13) como

$$\partial'_x = \gamma (\partial_x + \frac{v}{c^2} \partial_t), \quad \partial'_t = \gamma (\partial_t + v \partial_x), \quad (4.19)$$

de modo que la ley de la conservación de la carga (4.18) es un invariante Lorentz. En otras palabras, la conservación de la carga es una propiedad que no sólo es válida para un observador particular, sino en todos los sistemas inerciales.

También los campos electromagnéticos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  tienen que estar relacionados a través de una transformación de Lorentz. Si  $\mathcal{O}$  ve en su sistema de referencia una distribución estática de cargas  $\rho$ , esta distribución de carga puede generar solamente un campo electrostático  $\vec{E}$ . Por otro lado, el observador  $\mathcal{O}'$ , relacionado con  $\mathcal{O}$  a través de (3.13), ve por (4.17), aparte de una densidad de carga  $\rho'$ , una densidad de corriente no-trivial  $j'_x$ , que da lugar a un campo magnético  $\vec{B}$ , que no está presente en el sistema de  $\mathcal{O}$ . Esto es posible porque los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  se transforman bajo una transformación de Lorentz como

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \frac{E_y - v B_z / c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & E'_z &= \frac{E_z + v B_y / c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \frac{B_y + v E_z / c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & B'_z &= \frac{B_z - v E_y / c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Es un ejercicio largo, pero instructivo comprobar que las ecuaciones de Maxwell efectivamente transforman de manera covariante bajo las transformaciones (4.17), (4.19) y (4.20).

De la Teoría de Maxwell sabemos que las ecuaciones homogéneas de Maxwell (4.14b) y (4.15a) implican que existen unos potenciales electromagnéticos  $\phi$  y  $\vec{A}$ , tales que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4.21)$$

El hecho de que las componentes de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  se mezclan como (4.20) bajo una transformación de Lorentz, implica que también  $\phi$  y  $\vec{A}$  están relacionados. Efectivamente, no es difícil ver que la transformación de Lorentz de los potenciales,

$$\phi' = \frac{\phi - vA_x/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad A'_x = \frac{A_x - v\phi/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (4.22)$$

junto con las transformación de las derivadas (4.19), mezcla las componentes de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  definidas en (4.21) exactamente como en (4.20).

Por otro lado, hemos visto que las ecuaciones homogéneas de Maxwell (4.14a) y (4.15b) se pueden escribir en término de los potenciales como

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi - \nabla^2\phi = \rho, \quad \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \frac{1}{c}\vec{j}, \quad (4.23)$$

previsto que se impone la condición de Lorenz,

$$\frac{1}{c}\partial_t\phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (4.24)$$

Es un ejercicio instructivo comprobar que las ecuaciones de Maxwell en esta forma transforman de manera covariante bajo las transformaciones de Lorentz, gracias al hecho de que la condición de Lorenz es invariante.<sup>3</sup>

## 5 La importancia de la covariancia: una parábola

Después de haber estudiado las reglas de transformación de diversas cantidades físicas, tanto cinemáticas como electrodinámicas, nos debería llamar la atención que las mismas combinaciones matemáticas aparezcan en varias ocasiones. En realidad esto nos indica la existencia de una estructura matemática subyacente, que nos permitirá no sólo simplificar las ecuaciones, sino también nos enseñará una importante lección sobre la estructura del espaciotiempo.

Sin embargo, esta simplificación de notación va unida a una mayor abstracción, por lo que es fácil perderse lo que realmente estamos haciendo. Montaremos por lo tanto una pequeña analogía con un caso mucho más intuitivo: la covariancia bajo rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ .

Imaginemos una sociedad de extraterrestres, los *sonamuh*, que llevan viviendo desde tiempos inmemorables en una nave espacial cilíndrica en el espacio interestelar (véase Figura 4). La nave se encuentra lejos de cualquier concentración de materia, de modo que no notan ningún campo gravitatorio. Los sonamuh saben que las dos direcciones  $y$  y  $z$  ortogonales al eje de su nave son equivalentes, en el sentido de que una rotación bajo un ángulo  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} y' &= \cos\theta y + \sin\theta z, \\ z' &= -\sin\theta y + \cos\theta z \end{aligned} \quad (5.1)$$

deja su mundo invariante. Eso quiere decir que  $y$  y  $z$  no son en realidad dos direcciones fundamentales, sino que cualesquiera dos direcciones mutuamente ortogonales y ortogonales al eje de la

<sup>3</sup>El gauge de Lorenz recibe su nombre por Ludwig Lorenz (1829 - 1891), el físico danés que lo introdujo en 1867 y no por H.A. Lorentz, el físico holandés, conocido por la fuerza de Lorentz y el grupo de Lorentz. La jugada graciosa de la Historia es que la importancia del gauge de Lorenz está en el hecho de que es un invariante Lorentz.

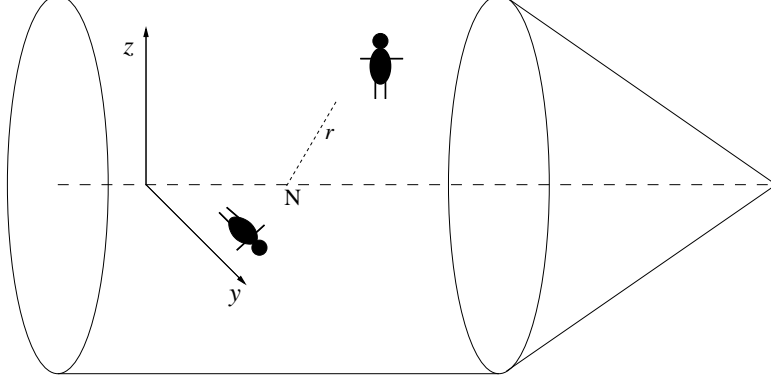


Figura 4: *Dos extraterrestres sonamuh en su nave cilíndrica: los sonamuh saben que las direcciones perpendiculares a el eje de la nave no son fundamentales, ya que se pueden mezclar en una rotación  $SO(2)$ . Sin embargo consideran la cantidad  $N$ , la posición de un punto a lo largo del eje, como fundamentalmente diferente.*

nave pueden servir como  $y$  y  $z$ . Sin embargo, por razones metafísicas e históricas, los sonamuh consideran los desplazamientos a lo largo del eje de su nave de una naturaleza completamente distinta: la distancia de un punto a la proa es una cantidad absoluta, que es la misma para todos los habitantes de la nave. Hasta lo expresan en otras unidades: donde la distancia  $r$  de un punto al eje de la nave se mide en metros, suelen expresar la posición  $N$  de ese punto a lo largo del eje en *notwen*.<sup>4</sup>

Estudiando la dinámica de objetos en su nave, los físicos sonamuh han descubierto que aplicando fuerzas a una masa  $m$  generan aceleraciones en las direcciones  $y$  y  $z$ ,

$$F^a = m\ddot{y}^a, \quad \text{con} \quad y^a = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F^a = \begin{pmatrix} F^y \\ F^z \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

pero también que existe una cantidad física  $K$  que induce cambios de segundo orden en  $N$ ,

$$K = m\ddot{N}. \quad (5.3)$$

Los sonamuh dicen que (5.3) es una ecuación escalar, ya que es invariante bajo rotaciones (5.1), mientras que la ecuación (5.2) es vectorial, puesto que transforma de manera covariante bajo (5.1). Sin embargo, recientemente el famoso físico Ztnerol ha descubierto una sorprendente simetría inesperada: si se aplica a las cantidades  $F^y$ ,  $K$ ,  $\ddot{y}$  y  $\ddot{N}$  las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} K' &= AK + \beta^{-1}\sqrt{1-A^2}F^y & \ddot{N}' &= A\ddot{N} + \beta^{-1}\sqrt{1-A^2}\ddot{y}, \\ F^{y'} &= -\beta\sqrt{1-A^2}K + AF^y & \ddot{y}' &= -\beta\sqrt{1-A^2}\ddot{N} + A\ddot{y}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde  $A$  es un número real en el intervalo  $[-1, 1]$  y  $\beta$  una constante que se introduce por razones dimensionales, entonces las cantidades  $F^{y'}$ ,  $K'$ ,  $\ddot{y}'$  y  $\ddot{N}'$  satisfacen unas ecuaciones formalmente iguales a (5.2) y (5.3):

$$F^{y'} = m\ddot{y}', \quad K' = m\ddot{N}'. \quad (5.5)$$

(Gracias a la simetría rotacional, obviamente hay otra transformación similar entre las cantidades  $F^z$ ,  $K$ ,  $\ddot{z}$  y  $\ddot{N}$ .)

Se ha discutido mucho sobre el significado y las consecuencias de la inesperada simetría (5.4). Por ejemplo, el físico Nietsnie propone la teoría revolucionaria de que (5.5) son las ecuaciones

<sup>4</sup>En honor al carismático líder espiritual Caasi Notwen, que les enseñó la importancia de  $N$  como el “sentido del progreso”.

de movimiento que verían unos sonamuh en una nave cuyo plano  $y'z'$  forma un ángulo no-trivial con el plano  $yz$  de esta nave. Inspirado por esta teoría, el matemático Ikswoknim observa que si escribimos  $A = \cos \varphi$ , entonces efectivamente la transformación (5.4) es casi idéntica a (5.1) (por lo menos en unidades  $\beta = 1$ ). ¡Como si la transformación fuera una rotación entre la dirección  $y$  y el eje de la nave!

¡Los resultados de Nietsnie y Ikswoknim sugieren un cambio de paradigma revolucionario para los sonamuh! Donde antes solían pensar en su mundo como bidimensional, complementado por un número  $N$ , ahora parece que se puede describir la física embebiéndola en una estructura más grande: el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . Este espacio tridimensional no sólo contiene el plano  $yz$  como subespacio, sino también contiene la dirección  $N$  como una coordenada más, perpendicular  $yz$ . Es muy elegante ver cómo las distintas cantidades vectoriales y escalares efectivamente combinan para formar trivectores,

$$x^i = \begin{pmatrix} N \\ y^a \end{pmatrix}, \quad F^i = \begin{pmatrix} K \\ F^a \end{pmatrix}, \quad a^i = \begin{pmatrix} \ddot{N} \\ \ddot{y}^a \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

y ver que las ecuaciones (5.2) y (5.3) combinan en una sola, que se puede escribir de manera covariante como

$$F^i = m a^i. \quad (5.7)$$

Aunque en la práctica les resultará difícil visualizarlo, los sonamuh han aprendido una lección importante: que la orientación de su nave en el espacio tridimensional no es fundamental y que pueden haber otras naves, orientadas en otras direcciones y que los observadores sonamuh en éstas ven todos la misma física (5.7). Probablemente los sonamuh en las distintas naves preferirían describir esa física en términos de sus  $N$  y  $y^a$  particulares, aunque saben que es más elegante y más natural usar la notación covariante (5.7), ya que esa resume la física de todos los observadores sonamuh a la vez.

Pero la ventaja de la notación covariante no sólo es la práctica, la economía o la elegancia: la notación covariante y las reglas de transformación enseñan una importante lección sobre la estructura del espacio tridimensional, que los sonamuh no habían entendido hasta ahora. Las rotaciones (5.1) y las transformaciones de Ztnerol (5.4) combinan en un grupo más grande, llamado  $SO(3)$ , que resulta ser el grupo de simetría del espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . La invariancia explícita de  $\mathbb{R}^3$  bajo transformaciones  $SO(3)$  pone de manifiesto las isometrías del espacio tridimensional y el hecho de que cualquier elección (5.6) de sistema de coordenadas es válida, pero nada más que una elección particular.

La moraleja de esta parábola es que las transformaciones de Lorentz nos enseñan una lección parecida a los humanos: que el tiempo no es una cantidad fundamental, sino una dirección más en un espaciotiempo cuatridimensional.

## 6 El espacio de Minkowski

El espaciotiempo cuatridimensional que surge de la Relatividad Especial se llama el *espacio de Minkowski*, el espacio de todos los eventos. Cada evento está caracterizado por su posición  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y el momento  $t$  en que ocurre, que sirven como coordenadas en este espacio. En el espacio de Minkowski, la ecuación

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (6.1)$$

es la trayectoria de una señal de luz esférica emitida desde el origen  $x = y = z = 0$  en el instante  $t = 0$ : en cada momento la señal consiste en una esfera de radio  $ct$ . Si dibujamos las coordenadas  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  como función del tiempo, vemos que la trayectoria corresponde a un cono invertido con el vértice en el origen  $ct = x = y = z = 0$  (véase Figura 5). De igual modo la trayectoria de toda la luz que llega en el momento  $t = 0$  al punto  $x = y = z = 0$  es otro cono con el vértice en el origen. A estos dos conos se les llama el *cono de luz futuro* (zona I en Figura 5) y el *cono de luz pasado* (zona II en Figura 5) del origen respectivamente.

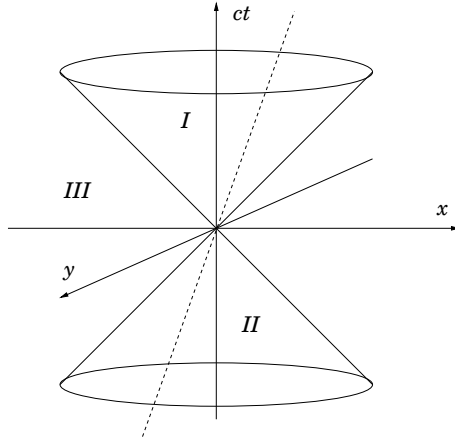


Figura 5: Los conos de luz en el espacio de Minkowski: los conos representan la trayectoria de los rayos de luz que pasan por el punto  $x = y = z = 0$  en el momento  $t = 0$ . El interior de los conos de luz (las zonas I y II) representan posibles trayectorias de observadores inerciales que se mueven con velocidad constante pasando por el origen (línea discontinua). El exterior de los conos (la zona III) no está en conexión causal con el origen.

La trayectoria de un observador  $\mathcal{O}$  en el origen de su sistema de referencia, que utiliza las coordenadas  $(ct, x, y, z)$  es  $x = y = z = 0$ , es decir el eje  $ct$ , dado que está en reposo con respecto a sí mismo. La trayectoria de un observador  $\mathcal{O}'$  que se mueve con velocidad constante con respecto a  $\mathcal{O}$  y que coincide con  $\mathcal{O}$  en el momento  $t = 0$ , es una recta que pasa por el origen (véase Figura 5). Debido a que la velocidad de  $\mathcal{O}'$  siempre es menor que  $c$ , su trayectoria cae dentro del cono de luz. En general, debido a que  $c$  es la velocidad máxima permitida, cualquier partícula que pase por el origen siempre se quedará dentro del cono de luz.

Hemos visto en la sección 3 que una condición clave en la derivación de las transformaciones de Lorentz era el hecho de que éstas dejan la cantidad

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (6.2)$$

invariante (véase por ejemplo (3.11)). En otras palabras,  $s^2$  tiene el mismo valor para todos los observadores relacionados a través de una transformación de Lorentz. Por la forma del invariante  $s^2$ , podemos distinguir 3 casos: dependiendo de los valores de las coordenadas,  $s^2$  puede ser mayor, menor o igual a cero.

Los puntos dentro del cono de luz satisfacen la condición  $s^2 > 0$ , mientras que los puntos fuera del cono de luz (la zona III en Figura 5) satisfacen la condición  $s^2 < 0$ . Cualquier punto dentro del cono de luz está en contacto causal con el punto  $ct = x = y = z = 0$ , puesto que es posible mandar una señal desde un punto dentro del cono pasado al origen, o desde el origen a un punto dentro del cono futuro. Sin embargo los puntos fuera del cono de luz no están en contacto causal con el origen: ninguna señal de luz llegaría desde el origen a un punto en la zona III o vice versa. Esta estructura causal es igual para todos los observadores, dado que las transformaciones de Lorentz dejan la cantidad  $s^2$  invariante.

Matemáticamente el espacio de Minkowski tiene la estructura de un espacio vectorial, de modo que podemos pensar en las coordenadas  $(ct, x, y, z)$  de un suceso como un vector cuadrimensional,  $x^\mu$ , en este espacio vectorial y en la cantidad  $s^2$  como el cuadrado de la norma de ese vector,  $s^2 = \|x^\mu\|^2$ . Esta norma efectivamente es invariante, como uno esperaría de una norma. Sin embargo, fíjese que esta norma no es definida positiva, como la norma familiar en  $\mathbb{R}^N$ : en el espacio de Minkowski existen vectores con norma cero que no sean el vector  $\vec{0}$ , e incluso vectores cuya norma al cuadrado es negativa. Esta norma va asociada a un producto escalar,  $s^2 = \langle x|x \rangle$ ,

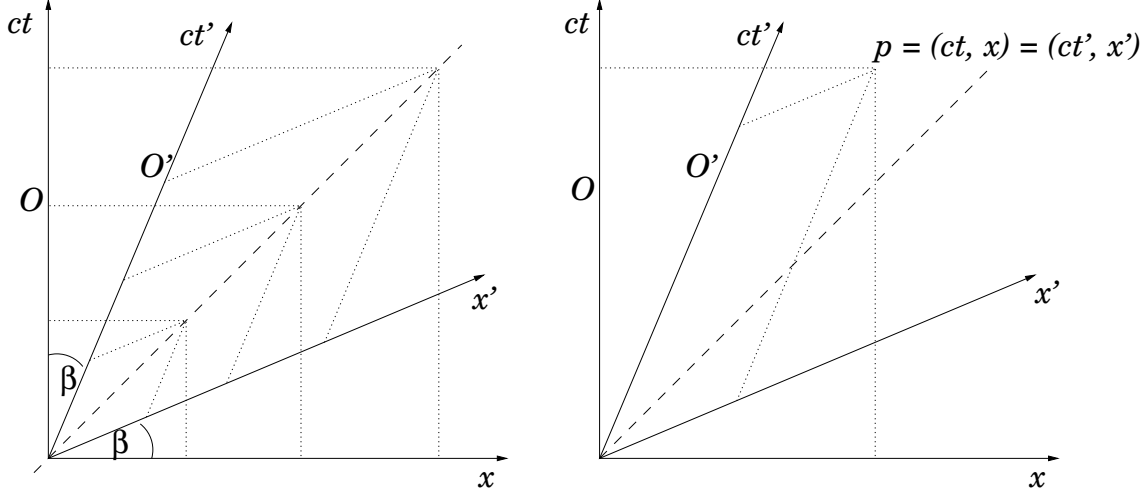


Figura 6: Una transformación de Lorentz en el espacio de Minkowski: el eje temporal de cada sistema de coordenadas es la trayectoria del origen, mientras que el cono de luz es la bisectriz entre el eje temporal y espacial, para que todos los observadores miden la misma velocidad de la luz (izquierda). Un suceso  $p$  tiene coordenadas  $(ct, x)$  en el sistema del observador  $\mathcal{O}$  y coordenadas  $(ct', x')$  en el sistema del observador  $\mathcal{O}'$ .

definido como

$$\langle V|W \rangle = V_t W_t - V_x W_x - V_y W_y - V_z W_z. \quad (6.3)$$

El espacio de Minkowski por lo tanto no tiene una geometría euclídea como  $\mathbb{R}^N$ , sino una geometría *pseudo-euclídea* o *lorentziana*.

Por lo tanto, podemos pensar en  $s^2$  como el cuadrado de la distancia entre un suceso  $(ct, x, y, z)$  y el origen y, en general, la cantidad

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad (6.4)$$

es el cuadrado de la distancia entre dos sucesos  $(ct_1, x_1, y_1, z_1)$  y  $(ct_2, x_2, y_2, z_2)$  en el espacio de Minkowski. Si esta cantidad es positiva,  $\Delta s^2 > 0$ , los sucesos están separados por un *intervalo temporal*, si  $\Delta s^2 = 0$  por un *intervalo nulo* y si  $\Delta s^2 < 0$  por un *intervalo espacial*.

Una transformación de Lorentz (3.13) relaciona las componentes  $(ct, x, y, z)$  de un vector de posición visto por un observador  $\mathcal{O}$  con las componentes  $(ct', x', y', z')$  del mismo vector visto por otro observador  $\mathcal{O}'$ . Una transformación de Lorentz entonces no es más que un cambio de base dentro del espacio de Minkowski. Ya hemos visto que la trayectoria de  $\mathcal{O}'$  es una recta por el origen dentro del cono de luz, donde el ángulo  $\beta$  entre la trayectoria y el eje  $ct$  es una medida de la velocidad de  $\mathcal{O}'$ :  $\text{tg}\beta = v/c$  (véase Figura 6, izquierda). El observador  $\mathcal{O}'$  tomará esta recta como su eje temporal  $ct'$ , puesto que desde su punta de vista él está en reposo en el origen de su sistema de coordenadas. Por otro lado, la posición de eje  $x'$  es tal que el rayo de luz es la bisectriz entre los ejes  $t'$  y  $x'$ . En otras palabras, el ángulo entre el eje  $x$  y  $x'$  también es  $\beta$  (véase Figura 6, izquierda). De esta manera un rayo de luz tiene la misma velocidad para los dos observadores, ya que recorre en ambos sistemas un segundo-luz por segundo (medido en cada observador en sus unidades).

Tanto el sistema de referencia de  $\mathcal{O}$  como el sistema de  $\mathcal{O}'$  forman una base completa del espacio de Minkowski y cualquier evento  $p$  se le puede asignar tanto las coordenadas  $(ct, x, y, z)$  de  $\mathcal{O}$  como  $(ct', x', y', z')$  de  $\mathcal{O}'$  (véase Figura 6, derecha). La única diferencia entre esas coordenadas es un cambio de base a través de la transformación (3.13). Obsérvese que, a pesar de lo que parece sugerir la Figura 6, tanto el sistema de referencia de  $\mathcal{O}$  como el sistema de  $\mathcal{O}'$  forman bases ortogonales según la definición (6.3). La razón por qué la Figura 6 sugiere lo contrario es porque

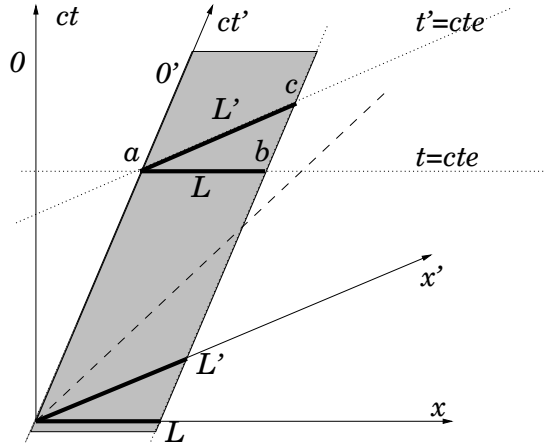


Figura 7: La contracción de Lorentz y la no-simultaneidad de eventos en el espacio de Minkowski: una varilla está en reposo con respecto a un observador  $\mathcal{O}'$  y se mueve con una velocidad  $v$  con respecto a otro observador  $\mathcal{O}$ . El observador  $\mathcal{O}$  ve los eventos  $a$  y  $b$  como simultáneos, mientras que para  $\mathcal{O}'$  son simultáneos los eventos  $a$  y  $c$ . Por lo tanto, en un momento dado,  $\mathcal{O}$  ve la varilla extendida a lo largo del intervalo  $[a, b]$  con una longitud  $L$ , mientras que  $\mathcal{O}'$  la ve con una longitud  $L'$  a lo largo del intervalo  $[a, c]$ .

no podemos dibujar bien el espacio de Minkowski con su geometría lorentziana en una hoja de papel, con geometría de  $\mathbb{R}^2$ .

Con los diagramas de espaciotiempo descritos arriba podemos fácilmente derivar efectos relativistas, como la contracción de Lorentz y la no-simultaneidad de eventos. Una varilla de longitud  $L'$  (medida en coordenadas  $x'$ ) que se mueve junto con el observador  $\mathcal{O}'$ , barrerá una trayectoria como la dibujada en la Figura 7. Del dibujo está claro que  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  no ven la vara de la misma manera.

Para cada observador dos eventos simultáneos son dos eventos que tienen el mismo valor de la coordenada temporal. Pero como  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  usan cada uno su propia coordenada temporal, no estarán de acuerdo sobre si ciertos eventos coinciden o no. Para  $\mathcal{O}$ , los sucesos simultáneos son los que tienen el mismo valor para  $ct$  (líneas horizontales en la Figura 7), como los puntos  $a$  y  $b$  a los extremos de la varilla visto por  $\mathcal{O}$ . Para  $\mathcal{O}'$ , los sucesos simultáneos tienen el mismo valor de  $ct'$  (líneas inclinadas en la Figura 7), como los puntos  $a$  y  $c$  a los extremos de la varilla visto por  $\mathcal{O}'$ . En otras palabras, para  $\mathcal{O}$  en un momento dado la vara se extiende de  $a$  a  $b$ , mientras para  $\mathcal{O}'$  se extiende de  $a$  a  $c$ . La vara vista por  $\mathcal{O}'$  en un tiempo dado es un “corte de la vara visto por  $\mathcal{O}$  en distintos momentos”, y vice versa. Por lo tanto no es de extrañar que los observadores tampoco se pongan de acuerdo sobre la longitud de la vara:  $\mathcal{O}$  mide una longitud  $L$  (el intervalo  $[a, b]$ ), mientras que  $\mathcal{O}'$  sólo mide  $L'$  (el intervalo  $[a, c]$ ). La contracción de Lorentz y la no-simultaneidad de eventos van de la mano.

En general, en el diagrama de la Figura 7 podemos ver para cualesquiera dos eventos separados por un intervalo espacial ( $s^2 < 0$ ), siempre podemos encontrar un observador con una velocidad particular para el cual esos eventos  $p$  y  $q$  ocurren simultáneamente. Los observadores que se mueven más rápido o más lento verán que el evento  $p$  evento ocurre antes que  $q$ , o vice versa. Por otro lado, todos los observadores estarán de acuerdo sobre el orden cronológico de dos eventos  $p'$  y  $q'$ , separados por un intervalo temporal o nulo ( $s^2 \geq 0$ ). Recordando que sólo existe una relación causal entre dos eventos cuando éstos están separados por un intervalo temporal o nulo, vemos que en la Relatividad Especial el orden cronológico de eventos causalmente relacionados está claro e indiscutible, mientras que el orden cronológico de eventos que están fuera de contacto causal depende del observador. Precisamente porque no hay manera de mandar influencias de un eventos a otro, esa arbitrariedad en el orden cronológico no viola la causalidad.



Hemos visto que la posición  $(ct, x, y, z)$  de un evento es un vector en el espacio de Minkowski y la transformación de Lorentz (3.13), un cambio de base. Pero  $t$  y  $x$  no son las únicas cantidades físicas que están relacionadas a través de una transformación de Lorentz. En la sección 4 hemos encontrado diversas cantidades físicas que transforman de manera similar bajo una transformación de Lorentz: la energía cinética  $E$  y el momento relativista  $\vec{p}$  como (4.12), la densidad de carga  $\rho$  y de corriente  $\vec{j}$  en (4.17), la derivadas parciales  $\partial_t$  y  $\vec{\nabla}$  en (4.19), los potenciales electromagnéticos  $\phi$  y  $\vec{A}$  en (4.22). Fíjese que en cada caso la transformación de Lorentz mezcla una cantidad escalar con las componentes de un vector tridimensional.

La estructura del espacio de Minkowski como espacio vectorial cuatridimensional sugiere que estos escalares y vectores tridimensionales combinan a formar vectores cuatridimensionales,

$$\begin{aligned} p_\mu &= (E/c, p_x, p_y, p_z), & \partial_\mu &= (\frac{1}{c}\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z) \\ j_\mu &= (c\rho, j_x, j_y, j_z), & A_\mu &= (\phi, A_x, A_y, A_z), \end{aligned} \quad (6.5)$$

cuyas componentes se mezclan bajo una transformación de Lorentz, al ser ésta un cambio de base. Sólo si nos limitamos a transformaciones con velocidades no-relativistas (rotaciones y transformaciones de Lorentz con  $v \ll c$ ), la mezcla entre la primera componente y las otras tres es mínima. Eso explica por qué en la física newtoniana, la primera componente aparecía como un escalar y las otras tres como un vector tri-dimensional.

Desde este punto de vista está claro que  $E^2 - p^2c^2$  es un invariante Lorentz, ya no es más que la norma al cuadrado del cuatrivector  $\|cp^\mu\|^2 = \langle cp|cp \rangle = m_0^2c^4$ . De la misma manera la conservación de carga (4.18) y el gauge de Lorenz (4.24) son invariantes, porque son el producto escalar entre el vector gradiente y los cuatrivectores  $j_\mu$  y  $A_\mu$ :

$$\langle \partial|j \rangle = \partial_t\rho + \vec{\nabla}\vec{j}, \quad \langle \partial|A \rangle = \frac{1}{c}\partial_t\phi + \vec{\nabla}\vec{A}. \quad (6.6)$$

El caso de los campos electromagnéticos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  es un poco más sutil. Hemos visto que las transformaciones (4.20) son más complicadas que las transformaciones de Lorentz los otros casos. Resulta que  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  no son las componentes espaciales de dos vectores cuatridimensionales, sino que combinan en un objeto con seis componentes independientes, llamado un tensor antisimétrico,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Igual que los sonamuh de la sección 5, podemos aprender algo importante de las transformaciones de Lorentz. La gran lección de la Relatividad Especial es que nuestra percepción del espacio tridimensional y del tiempo (como un parámetro externo al espacio) es meramente una elección particular de un sistema de coordenadas dentro de un espaciotiempo cuatridimensional. En este espacio de Minkowski, la distinción entre lo que en la Mecánica Newtoniana denominamos “energía cinética” y “momento lineal”, o lo que llamamos “campo eléctrico” y “campo magnético” es igual de arbitrario que la distinción entre “delante” o “a la izquierda” en  $\mathbb{R}^3$ .

De la misma manera que la Mecánica Newtoniana usa escalares y trivectores para describir la física independientemente de la orientación de la base en  $\mathbb{R}^3$ , la Relatividad Especial nos está pidiendo a gritos que formulemos la mecánica relativista en términos de cuatrivectores en el espacio de Minkowski, para que la física sea independiente de la elección de observador inercial. De esta manera nuestra formulación cumple explícitamente con el Principio de la Relatividad, es decir que las leyes de la física tengan la misma forma para todos los observadores en movimiento uniforme y rectilíneo relativo.

## Bibliografía

- B. Janssen, *Teoría de la Relatividad General*, Universidad de Granada, versión de febrero 2018, <http://www.ugr.es/local/bjanssen/text/relatividad.pdf>
- Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, 1992.
- Sean M. Carroll, *Spacetime and Geometry*, Addison-Wesley, 2004.
- Derek F. Lawden, *An Introduction to Tensor Calculus and Relativity*, Wiley, 1962.

## Derechos de Autor



Por favor, cítese este artículo como:

- B. Janssen,  
*Breve repaso de la Relatividad Especial*,  
Universidad de Granada (2005).

Este artículo está escrito bajo la licencia Creative Commons, concretamente con la licencia

### **Reconocimiento-NoComercial CC-BY-NC.**

Esto implica que

-  El beneficiario de la licencia tiene el derecho de copiar, distribuir, exhibir y representar la obra y hacer obras derivadas siempre y cuando reconozca y cite la obra de la forma especificada por el autor o el licenciante.
-  El beneficiario de la licencia tiene el derecho de copiar, distribuir, exhibir y representar la obra y hacer obras derivadas para fines no comerciales.

Más información en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>  
Para cualquier duda, contacte con el autor en [bjanssen@ugr.es](mailto:bjanssen@ugr.es).