La Relatividad General y el problema de la acción a distancia newtoniana

Bert Janssen

Departamento de Física Teórica y del Cosmos &
Centro Andaluz de Física de Partículas Elementales,
Avda Fuentenueva s/n, Facultad de Ciencias
Universidad de Granada, 18071 Granada, España
Email: `bjanssen@ugr.es`

Granada, julio 2017

ABSTRACT

En este artículo pedagógico presentaremos la Relatividad General como la teoría relativista del campo gravitatorio. Repasaremos el problema de la acción a distancia de la gravedad newtoniana y explicamos cómo la Teoría de Maxwell evita un problema similar de la fuerza de Coulomb. Demostraremos que la ecuación de Einstein es la única descripción del campo gravitatorio que evite los problemas de acción a distancia y recupere correctamente el límite newtoniano (en cuatro dimensiones).

1. Introducción

La Relatividad General es la teoría que describe de manera moderna (post-newtoniana) de la interacción gravitatoria. Desarrollada por Albert Einstein entre 1907 y 1915, presenta la gravedad como una manifestación de la curvatura del espaciotiempo. Por un lado, la ecuación de Einstein,

$$R_{\mu\nu} \ - \ \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R \ = \ -8\pi G_N T_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

describe cómo el contenido de energía y materia, codificado en el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, determina localmente la curvatura del espaciotiempo, o por lo menos la parte descrita por el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$. Para un tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ dado, la ecuación de Einstein (1.1) es en general un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, no-lineales, acopladas y de segundo orden para la métrica $g_{\mu\nu}$ del espaciotiempo. Por otro lado, una vez conocida la métrica, las partículas de prueba libres (es decir, partículas que sólo interaccionan gravitacionalmente, pero no contribuyen al tensor de energía-momento) siguen trayectorias geodésicas temporales o nulas en el espaciotiempo,

$$\ddot{x}^\mu \ + \ \Gamma^\mu_{\nu\rho} \, \dot{x}^\nu \, \dot{x}^\rho \ = \ 0. \tag{1.2}$$

Esta nueva visión sobre la gravedad no sólo añade correcciones relativistas a los resultados newtonianos, como el avance del perihelio de Mercurio o el efecto Shapiro, sino también predice una plétora de efectos y fenómenos inexistentes en la gravedad newtoniana. Ejemplos de éstos últimos son la dilatación temporal gravitatoria, la expansión del universo o la existencia de agujeros negros y ondas gravitacionales. Un siglo después de su publicación, la Relatividad General ha pasado con éxito una gran cantidad de tests experimentales y la discusión de la física que surge de la teoría se puede encontrar en la mayoría de los libros de texto. La Relatividad General incluso ha dado lugar a una nueva rama de las matemáticas, llamada la Geometría Lorentziana, que estudia la geometría diferencial en variedades con signatura lorentziana.

Sin embargo, hay un aspecto de la teoría que suele recibir poca atención en el tratamiento tradicional de la Relatividad General (y aún menos en la Geometría Lorentziana): la motivación y la necesidad de introducirla en primer lugar. Si la Relatividad General corrige y amplía la teoría newtoniana, ¿qué problema tenía la gravedad newtoniana que necesitaba corrección y cómo la corrige la Relatividad General? Incluso nos podríamos (deberíamos) preguntar si la Relatividad General es la única solución al problema de Newton, o si hay otras teorías que lo resuelven de una manera más sencilla que a través de la ecuación de Einstein (1.1).

En este artículo repasaremos la motivación histórica de Einstein para corregir la teoría newtoniana y por qué la ecuación de Einstein es la única forma de curar el problema que recupere el límite newtoniano correcto. En la sección 2 identificaremos la acción a distancia como el gran problema de la gravedad newtoniana y discutiremos cómo la Teoría de Maxwell resolvió el mismo problema para la fuerza de Coulomb entre dos cargas eléctricas. En la sección 3 argumentaremos por qué la Relatividad General lleva precisamente a la ecuación de Einstein y en la sección 4 cómo ésa efectivamente evita el problema de acción gravitatoria a distancia. Finalmente, en el Apendice A intentaremos construir una teoría alternativa de la gravedad, inspirada en la Teoría de Maxwell, y explicaremos cómo el fracaso de ese intento nos enseña la diferencia fundamental entre carácter de la gravedad y el de electromagnetismo.

2. De la acción a distancia a la teoría de campos

La gravedad newtoniana está descrita por dos ecuaciones: la Segunda Ley de Newton para una partícula en un campo gravitatorio y la ecuación de Poisson. La Segunda Ley de Newton describe la dinámica de una partícula con masa m, sometida a la fuerza gravitatoria $\vec{F}_{\rm grav}(\vec{x},t)$,

$$m\,\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} \;=\; -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x},t), \tag{2.1}$$

donde hemos aprovechado el hecho de que $\vec{F}_{\rm grav}$ sea una fuerza conservativa, para escribirla como el gradiente del potencial newtoniano, $\vec{F}_{\rm grav}(\vec{x},t) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x},t)$. A su vez, el potencial $\Phi(\vec{x},t)$ está determinado por la densidad de materia $\rho_m(\vec{x},t)$ a través de la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2\Phi(\vec{x},t) \;=\; 4\pi G_N\,\rho_m(\vec{x},t), \tag{2.2}$$

donde G_N es la constante de Newton y ∇^2 el laplaciano en $\mathbb{R}^3$. En otras palabras, la distribución de materia en el universo actúa como fuente del potencial gravitatorio, mientras que a su vez el gradiente del potencial determina los movimientos de las distintas masas.

En 1907 Einstein se dio cuenta de que la gravedad newtoniana es incompatible con la Relatividad Especial por ser una teoría de acción a distancia instantánea, como se puede ver en la ecuación de Poisson: aunque $\rho_m(\vec{x},t)$ y $\Phi(\vec{x},t)$ dependen del tiempo, la dependencia temporal no entra en la estructura matemática de la ecuación, sino aparece más bien como un parámetro externo. Efectivamente, la solución general de la ecuación de Poisson,

$$\Phi(\vec{x},t) \;=\; \frac{1}{4\pi G_N}\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{y}\;\frac{\rho_m(\vec{y},\,t)}{|\vec{x}-\vec{y}|}, \tag{2.3}$$

dice que el valor del potencial $\Phi(\vec{x},t)$ en un punto $\vec{x}$ en un momento t está determinado por la densidad de materia $\rho_m(\vec{y},\,t)$ en todos los puntos $\vec{y}$ del universo en ese mismo momento t. Por lo tanto, cambios en la configuración de materia en algún sitio concreto afectan instantáneamente al valor del potencial gravitatorio en cualquier punto del universo. En otras palabras, en la teoría a newtoniana, la gravedad aparece como una interacción a distancia, que se propaga con una velocidad infinitamente grande.

Con estas propiedades, la gravedad newtoniana no es compatible con la Teoría de la Relatividad Especial, ya que esta última impone la velocidad de la luz como velocidad máxima alcanzable, tanto para partículas materiales como para interacciones. La estructura geométrica del espaciotiempo en la Relatividad Especial es tal que la simultaniedad de dos eventos suficientemente alejados depende del punto de vista del observador, de modo que la supuesta interacción instantánea de la gravedad newtoniana carece de sentido. Fue esta propiedad indeseada de la gravedad newtoniana la que llevó a Einstein a reemplazarla por una que no entrara en conflicto con la Relatividad Especial.

Sin embargo, no era la primera vez en la historia de la física que apareciese el problema de la acción a distancia: la interacción coulombiana entre dos cargas en electrostática está descrita por unas ecuaciones que son casi idénticas a las de la gravedad newtoniana. Efectivamente, en ausencia de corrientes eléctricas y campos magnéticos ($\vec{\jmath}(\vec{x},t) = \vec{B}(\vec{x},t) = 0$), el movimiento de una partícula con masa m y carga q viene dado por la Segunda Ley de Newton y el Ley de Gauss,

$$m\,\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} \;=\; q\vec{E}(\vec{x}), \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x}) \;=\; \rho_e(\vec{x}), \tag{2.4}$$

donde $\rho_e(\vec{x})$ es la densidad de cargas. En electrostática, también el campo eléctrico es una fuerza conservativa, de modo que podemos escribir el campo eléctrico, $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$, como el gradiente del potencial eléctrico. Escritas en términos de $\phi(\vec{x})$, las dos ecuaciones anteriores cogen de la forma

$$m\,\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} \;=\; -q\vec{\nabla}\phi(\vec{x}), \qquad\qquad \nabla^2\phi(\vec{x}) \;=\; \rho_e(\vec{x}). \tag{2.5}$$

La similitud con la gravedad newtoniana es evidente: la distribución de cargas $\rho_e(\vec{x})$ determina el potencial eléctrico a través de la Ley de Gauss y a su vez el potencial influye en el movimiento de las partículas cargadas. Para una distribución de cargas dada, la solución general del potencial viene dada por

$$\phi(\vec{x}) \;=\; \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{y}\;\frac{\rho_e(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}. \tag{2.6}$$

Dado el gran parecido entre esta fórmula y la expresión (2.3) para el potencial gravitatorio, se podría llegar a pensar que cualquier cambio en la configuración de las cargas implica un cambio instantáneo en el valor de $\phi(\vec{x})$ y que por lo tanto electromagnetismo también sufre el problema de acción a distancia. Sin embargo, hay una diferencia importante entre las expresiones para el potencial gravitatorio y el eléctrico: donde $\Phi(\vec{x},t)$ tiene una dependencia explícita del tiempo, $\phi(\vec{x})$ es por construcción independiente de t, ya que la expresión (2.6) es sólo válida en el régimen electrostático. Cualquier cambio en la densidad de carga $\partial_t\rho_e(\vec{x},t) \neq 0$ induciría corrientes eléctricas $\vec{\jmath}(\vec{x},t)$, lo que a su vez generarían campos magnéticos $\vec{B}(\vec{x},t)$ no triviales. En otras palabras, ni las ecuaciones (2.5), ni su solución (2.6) seguirían siendo válidas.

Para describir de manera consistente una dependencia temporal de la distribución de las cargas eléctricas $\rho_e(\vec{x},t)$, es preciso considerar la Teoría de Maxwell completa: los campos eléctricos $\vec{E}(\vec{x},t)$ y magnéticos $\vec{B}(\vec{x},t)$, generados por las densidades de carga $\rho_e(\vec{x},t)$ y de corriente $\vec{\jmath}(\vec{x},t)$, vienen dados por las ecuaciones de Maxwell (en unidades $c = 1$)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} \;&=\; \rho_e, \qquad\qquad & \vec{\nabla}\times\vec{E} \;&=\; -\partial_t\vec{B}, \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} \;&=\; \vec{\jmath} + \partial_t\vec{E}, \qquad\qquad & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} \;&=\; 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

mientras que una partícula con masa m y carga q, que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ en un campo electromagnético, está sometida a la fuerza de Lorentz,

$$m\,\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} \;=\; q\,(\vec{E} \;+\; \vec{v}\times\vec{B}). \tag{2.8}$$

Para ver que la Teoría de Maxwell no sufre el problema de la acción a distancia, es conveniente escribir las ecuaciones anteriores en término de los potenciales electromagnéticos: las ecuaciones homogéneas de Maxwell (la segunda columna de (2.7)) nos dicen que, aparte del potencial eléctrico $\phi(\vec{x},t)$, existe un potencial vectorial $\vec{A}(\vec{x},t)$ y que ambos definen el campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ como

$$\vec{E} \;=\; -\vec{\nabla}\phi \,-\, \partial_t\vec{A}, \qquad\qquad \vec{B} \;=\; \vec{\nabla}\times\vec{A}. \tag{2.9}$$

Escritas en términos de estos potenciales, las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (la primera columna de (2.7)) son de la forma

$$-\nabla^2\phi \; - \; \partial_t\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \; = \; \rho_e,$$
$$\partial_t\vec{A} \; - \; \nabla^2\vec{A} \; + \; \vec{\nabla}(\partial_t\phi \; + \; \vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \; = \; \vec{\jmath}. \tag{2.10}$$

Ahora, es bien sabido que los potenciales ϕ y $\vec{A}$ no son univocamente definidos para unos campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ dados: es fácil ver que las expresiones (2.9) son invariantes bajo una transformación gauge

$$\phi \; \rightarrow \; \phi' \; = \; \phi \; + \; \partial_t\Lambda, \qquad\qquad \vec{A} \; \rightarrow \; \vec{A}' \; = \; \vec{A} \; - \; \vec{\nabla}\Lambda, \tag{2.11}$$

con $\Lambda = \Lambda(\vec{x}, t)$ una función arbitraria. Podemos aprovechar esta libertad gauge para escribir las ecuaciones inhomogéneas (2.10) de una forma más conveniente, que deja evidente la velocidad finita de la interacción electromagnética y además facilita resolverlas de manera explítica.

Concretamente, gracias a la libertad gauge (2.11), podemos siempre encontrar unos potenciales ϕ y $\vec{A}$, tales que satisfagan la condición de Lorenz,

$$\partial_t\phi \; + \; \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \; = \; 0. \tag{2.12}$$

Con esta elección de gauge, las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (2.10) se reducen a unas ecuaciones de onda inhomogéneas para los potenciales ϕ y $\vec{A}$,

$$\partial_t^2\phi(\vec{x}, t) \; - \; \nabla^2\phi(\vec{x}, t) \; = \; \rho_e(\vec{x}, t), \qquad\qquad \partial_t^2\vec{A}(\vec{x}, t) \; - \; \nabla^2\vec{A}(\vec{x}, t) \; = \; \vec{\jmath}(\vec{x}, t). \tag{2.13}$$

La ecuación de onda es un tipo de ecuación muy distinto de la ecuación de Laplace (o su equivalente inhomogéneo, la ecuación de Poisson): donde la ecuación de Laplace exhibe una interacción instantánea inherente, la ecuación de onda describe fluctuaciones de un medio o de un campo que se propagan a velocidad finita, siendo la velocidad de propagación el factor que aparece delante del término con el laplaciano. Concretamente, en nuestro caso, el hecho de que no aparezca ningún factor numérico no-trivial implica que las ondas se propagan a la velocidad de la luz (recuérdese que estamos usando unidades donde $c = 1$).

La diferencia entre la ecuación de onda y la de Poisson también se refleja en la forma de la solución. La solución general de las ecuaciones (2.13) son los llamados potenciales retardados,

$$\phi(\vec{x}, t) \; = \; \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{y} \; \frac{\rho_e(\vec{y}, \, t - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \qquad\qquad \vec{A}(\vec{x}, t) \; = \; \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{y} \; \frac{\vec{\jmath}(\vec{y}, \, t - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \tag{2.14}$$

Obsérvese que en estas expresiones el tiempo t no es un parámetro externo, como en (2.3), sino que contribuye de manera no-trivial en la integración a través de la dependencia de la densidad de carga ρ_e. Efectivamente, estas expresiones dicen que, para encontrar el valor de los potenciales $\phi(\vec{x}, t)$ y $\vec{A}(\vec{x}, t)$ en un punto $\vec{x}$ en un instante t, hay que sumar (integrar sobre) las contribuciones de las cargas $\rho_e(\vec{y}, \, t - |\vec{x} - \vec{y}|)$ y corrientes $\vec{\jmath}(\vec{y}, \, t - |\vec{x} - \vec{y}|)$ de los distintos elementos de volumen $d\vec{y}$, no en el mismo momento t, sino en un instante $|\vec{x} - \vec{y}|$ antes, ya que $|\vec{x} - \vec{y}|$ es exactamente el tiempo que tarda la contribución en viajar a la velocidad de la luz desde el punto $\vec{y}$ hasta el punto $\vec{x}$ donde queremos evaluar los potenciales.

La Teoría de Maxwell por lo tanto describe la interacción electromagnética en término de unos campos dinámicos, cuyas perturbaciones se propagan a la velocidad finita de la luz. Las teorías con estas características se llaman teorías relativistas, ya que evitan de esta manera cualquier conflicto con la Relatividad Especial.[1]

Hay una importante lección que podemos aprender de la generalización de la fuerza de Coulomb a la teoría completa de electromagnetismo, para resolver el problema de la gravedad newtoniana:

[1] Nótese que la Teoría de Maxwell fue una teoría relativista ya desde sus inicios en 1865. Era precisamente el hecho de que no transformara bajo el grupo de Galilei de la Mecánica Newtoniana, sino bajo las transformaciones de Lorentz, lo que hizo que Einstein desarrolara la Relatividad Especial en 1905.

que la ecuación de Poisson es una buena descripción para gravitostática, cuando la densidad de materia no depende del tiempo, pero que la generalización correcta a configuraciones dependientes del tiempo no es la ecuación de Poisson dependiente del tiempo (2.2), sino un tipo de ecuación de onda, el equivalente gravitacional de (2.13). La tarea con que se afrontó Einstein en 1907 entonces fue convertir la gravedad newtoniana en una teoría de campos relativista. Y esa teoría relativista del campo gravitatorio es la Relatividad General.

3. Del Principio de Equivalencia a la ecuación de Einstein

La base de la Relatividad General es el Principio de Equivalencia, la afirmación de que la fuerza gravitatoria newtoniana (o equivalentemente, la sensación de peso) de un observador puede ser eliminada localmente con una elección apropiada de coordenadas. Concretamente, la física vista por un observador en caída libre en un campo gravitatorio constante es indistinguible de la física vista por un observador inercial en el espacio de Minkowski. De esta manera, Einstein era capaz de tratar como inerciales a los observadores que, según la física newtoniana y la Relatividad Especial, son inherentemente acelerados y como tales no se les debería aplicar el Principio de la Relatividad. El Principio de Equivalencia es por lo tanto el primer paso imprescindible para compatibilizar cualquier teoría de gravedad con la Relatividad Especial.

En general, las inhomogeneidades de los campos gravitatorios rompen la equivalencia entre los observadores en caída libre y los observadores inerciales: un observador en caída libre puede detectar las aceleraciones relativas entre partículas de prueba, causadas por las fuerzas de marea y deducir de esta manera la presencia de un campo gravitatorio inhomogéneo. Sin embargo, esas fuerzas de marea son proporcionales al gradiente del campo gravitatorio, de modo que son inapreciables a escalas donde el campo gravitatorio es prácticamente constante. Por lo tanto, en general el Principio de Equivalencia tiene un carácter local: a escalas suficientemente pequeñas, donde el campo gravitatorio es prácticamente constante, la física (local) vista por un observador en caída libre es indistinguible de la física visto por un observador inercial en el espacio de Minkowski.

Ese carácter local tiene implicaciones profundas para cualquier teoría de gravedad que intenta ser compatible con la Relatividad Especial, ya que esa compatibilidad sólo será una propiedad local. En cualquier momento, en cualquier punto de un campo gravitatorio, podemos construir unos observadores que, con un cambio de coordenadas adecuado, se creen observadores inerciales en el espacio de Minkowksi a escalas (espaciales y temporales) suficientemente pequeñas, pero en general no existe ningún sistema de referencia global que describe todos estos observadores simultáneamente como inerciales. Por lo tanto, la localidad del Principio de Equivalencia impone un carácter intrínsecamente geométrico a la interacción gravitatoria, ya que implica un espaciotiempo que es localmente Minkowski, pero no globalmente. En otras palabras, según el Principio de Equivalencia, el espaciotiempo tiene la estructura matemática de una variedad lorentziana diferenciable cuadrimensional.

En grandes líneas, una variedad diferenciable M es un espacio donde cada punto p tiene asociado un plano tangente T_pM, que es homeomorfo a $\mathbb{R}^N$ (con N la dimensionalidad de la variedad). En una variedad lorentziana cuadrimensional (es decir, que tiene una dirección temporal y las demás espaciales), los planos tangentes T_pM en cada punto p tienen la geometría del espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. Aunque en cada punto de la variedad se puede definir un radio de curvatura $R_0(p)$, esa curvatura es inapreciable a escalas $\ell \ll R_0(p)$. Un observador en caída libre que hace experimentos locales es incapaz de distinguir si sus experimentos toman lugar en una pequeña región $U_p \subset M$ alrededor de p o en el plano tangente T_pM.[2] Desde este punto de vista, las coordenadas en que la fuerza gravitaroria desaparezca en un punto p resultan ser simplemente las coordenadas

[2] Estrictamente hablando, una pequeña región $U_p \subset M$ alrededor de p sólo es homeomorfa, pero no isomorfa a $\mathbb{R}^N$. Desde el punto de vista matemático, mediciones suficientemente precisas son capaces de detectar desviaciones de la geometría plana de T_pM a cualquier distancia ε del punto p. Sin embargo, dado que cualquier medida física tiene un error experimental no-cero, desde el punto de vista físico siempre habrá una región U_p de extensión finita donde la desviación de la geometría plana es menor que el error experimental, lo que hace que U_p y T_pM sean físicamente indistinguibles.

cartesianas en T_pM. La teoría gravitatoria construida de esta manera es automáticamente compatible con la Relatividad Especial, porque se reduce a escalas suficientemente pequeñas a física en el espacio de Minkowski tangente.

La idea de la Relatividad General es por lo tanto que la interacción gravitatoria entre distintas masas es en realidad una manifestación de la curvatura del espaciotiempo: por un lado, la geometría del espaciotiempo, codificada completamente en su métrica $g_{\mu\nu}$, está descrita por la ecuación del tipo

$$G_{\mu\nu} \ = \ -\kappa \, T_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es un tensor geométrico, cuya expresión exacta a estas alturas queda por determinar, y $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento, que describe el contenido de energía y materia en el universo. La ecuación de Einstein es una ecuación diferencial inhomogénea para $g_{\mu\nu}$, donde el tensor de energía-momento actúa como el término de fuente para la curvatura. Por otro lado, una vez determinada la métrica $g_{\mu\nu}$, las partículas de prueba libres siguen curvas geodésicas temporales o nulas en la geometría descrita por $g_{\mu\nu}$,

$$\ddot{x}^\mu \ + \ \Gamma^\mu_{\nu\rho} \, \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho \ = \ 0, \tag{3.2}$$

donde los $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ son los símbolos de Christoffel de la métrica $g_{\mu\nu}$.

Desde este punto de vista, cuando Newton invoca la fuerza gravitatoria newtoniana, $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{\rm grav}$, para explicar la desviación de una masa de su movimiemto uniforme rectilíneo en $\mathbb{R}^3$, en realidad está interpretando como una fuerza externa una parte intrínseca de la geometría: los símbolos de Christoffel, $F^i_{\rm grav} = -m^{-1}\Gamma^i_{\nu\rho} \, \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho$. De la misma manera es fácil darse cuenta de que la fuerzas de mareas causados por campos gravitatorios inhomogéneos son en realdiad una manifestación del efecto de la desviación geodésica, debido a la curvatura del espaciotiempo:

$$\dot{x}^\mu \nabla_\mu (\dot{x}^\nu \nabla_\nu s^\lambda) \ = \ -R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda s^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho. \tag{3.3}$$

Una vez entendido el carácter geométrico de cualquier teoría relativista de la gravitación, queda por determinar la expresión concreta del tensor $G_{\mu\nu}$ en la ecuación del campo gravitatorio (3.1), que describe la relación precisa entre en la geometría del espaciotiempo y su contenido de energía y materia. Concretamente, tenemos que motivar que el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, no sólo satisface todos las propiedades que uno espera de $G_{\mu\nu}$ para que teoría sea consistente, sino también que es el único que lo hace (por lo menos en cuatro dimensiones).

A primera vista puede parecer que haya muchas posibles elecciones para $G_{\mu\nu}$, pero la consistencia matemática de la ecuación impone diversas condiciones que tiene que satisfacer:

1. La covariancia general obliga que $G_{\mu\nu}$ sea un tensor simétrico bajo el intercambio de sus dos índices, ya que $T_{\mu\nu}$ lo es.

2. El Principio de Equivalencia impone que $G_{\mu\nu}$ tiene que ser puramente geométrico, es decir, que depende exclusivamente de la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas: $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(g)$.

3. La ecuación del campo gravitatorio tiene que ser capaz de recuperar en algún límite la gravedad newtoniana y en particular la ecuación de Poisson (2.2). Dado que ésta es una ecuación de segunda orden, $G_{\mu\nu}$ tiene que contener por lo menos segundas derivadas de $g_{\mu\nu}$. La manera más natural de conseguir eso (tomando en cuenta el punto anterior) es construir $G_{\mu\nu}$ a base de tensores de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda$ y sus contracciones.

4. Para que la ecuación del campo gravitatorio sea una ecuación dinámica, que describe la evolución temporal de un sistema físico, tiene que ser una ecuación diferencial de segundo orden y de primer grado en la segunda derivada. Dado que el tensor de Riemann ya es segundo orden en la métrica, $G_{\mu\nu}$ puede ser como mucho una expresión algebraica, lineal en $R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda$. Cualquier expresión que involucraría dos o más tensores de Riemann o derivadas de $R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda$, llevaría a ecuaciones diferenciales de orden superior.

5. La conservación de la energía, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, implica que también $G_{\mu\nu}$ tenga divergencia cero: $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$

6. Es natural pedir que el espacio de Minkowski sea una solución de la ecuación del campo gravitatorio en ausencia de materia, es decir, cuando $T_{\mu\nu} = 0$. Eso implica que $G_{\mu\nu}$ tiene que anularse para la métrica plana: $G_{\mu\nu}(\eta) = 0$.

Veremos ahora que estas condiciones fijan el tensor $G_{\mu\nu}$ por completo (por lo menos en 4 dimensiones): el tensor de rango dos más general que se puede construir que sea simétrico, algebraico y lineal en el tensor de Riemann (módulo una constante global, que se puede absorber la constante de proporcionalidad κ en (3.1) tiene la forma

$$G_{\mu\nu} \;=\; R_{\mu\nu} \;+\; \alpha\, g_{\mu\nu} R \;+\; \Lambda\, g_{\mu\nu}. \tag{3.4}$$

donde $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}{}^{\lambda}$ es el tensor de Ricci y $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ el escalar de Ricci. En otras palabras, las condiciones 1 a 4 fijan la forma de $G_{\mu\nu}$, salvo las dos constantes α y Λ. Sin embargo, no es difícil ver que éstas van a ser determinadas por las condiciones 5 y 6. Efectivamente, exigir que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ fija $\alpha = -\frac{1}{2}$, mientras que la condición 6 sólo se cumple cuando $\Lambda = 0$.

Vemos por lo tanto que la forma de la ecuación para el campo gravitatorio (3.1) está completamente determinada por el Principio de Equivalencia y las 6 condiciones anteriores. La única expresión física y matemáticamente consistente para $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} \;=\; R_{\mu\nu} \;-\; \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R, \tag{3.5}$$

de modo que la ecuación del campo gravitatoria (3.1) necesariamente es la ecuación de Einstein

$$R_{\mu\nu} \;-\; \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R \;=\; -\kappa\, T_{\mu\nu}, \tag{3.6}$$

aunque el valor de la constante de acoplo κ aún queda por determinar. Para futura conveniencia, presentamos también la ecuación de Einstein sin traza,

$$R_{\mu\nu} \;=\; -\kappa \Big[T_{\mu\nu} \;-\; \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, T \Big], \tag{3.7}$$

obtenida tras restar la traza $R = \kappa T$ de (3.6), donde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ es la traza del tensor de energía-momento. Una de las ventajas de la ecuación sin traza es que deja evidente que el contenido de energía y materia no determina por completo la geometría del espaciotiempo, sino sólo la parte descrita por el tensor de Ricci.

Antes de comprobar si la ecuación de Einstein efectivamente resuelve el problema de acción a distancia newtoniana, conviene comentar algunos detalles:

- Aunque las 6 condiciones impuestas pueden parecer muy naturales, es mucho más fácil determinar la forma de la ecuación de Einstein, si aceptamos obtenerla a través de un principio variacional. Dado que la acción $S = \int d^4x \sqrt{|g|}\mathcal{L}_{\rm grav}$ es un escalar, es preciso construir el lagrangiano gravitacional $\mathcal{L}_{\rm grav}$ a base de invariantes de curvatura (contracciones escalares del tensor de Riemann). En ese caso, el tensor $G_{\mu\nu}$, que aparece variando la acción con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$,

$$G_{\mu\nu} \;\propto\; \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{3.8}$$

  satisface automáticamente (trivialmente) las condiciones 1, 2, 3, 5 y 6. En particular, $G_{\mu\nu}$ es simétrico porque $g_{\mu\nu}$ lo es y la covariancia de la acción asegura que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$.
  La única condición que distingue una acción legítima de otra es la elección del invariante de curvatura y aquí es donde entra en juego la condición 4: para que la ecuación del campo gravitatoria sea de segundo orden, sólo puede ser algebraica y lineal en el tensor de Riemann (para espaciotiempos cuadrimensionales). Ahora, la única contracción escalar que se puede construir que sea lineal en el tensor de Riemann y no involucre derivadas de éste, es el escalar de Ricci. Efectivamente, la acción que da lugar a la ecuación de Einstein (3.6) es la acción de Einstein-Hilbert, acoplada a materia,

$$S \;=\; \int d^4x\, \sqrt{|g|}\, \Big[\tfrac{1}{2\kappa} R \;+\; \mathcal{L}_{\rm mat} \Big]. \tag{3.9}$$

Es un cálculo largo, pero directo, ver que la variación del primer término con respecto a la métrica efectivamente da lugar al tensor de Einstein,

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|}\, R)}{\delta g^{\mu\nu}} \ = \ R_{\mu\nu} \ - \ \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{3.10}$$

mientras que el tensor de energía-momento es (casi) por definición el resultado de variar el lagrangiano de materia,

$$T_{\mu\nu} \ = \ \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|}\, \mathcal{L}_{\rm mat})}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{3.11}$$

- De las 6 condiciones anteriores, la menos fuerte es sin duda la última. La razón para exigir que el espacio de Minkowski sea solución de las ecuaciones de Einstein es para recuperar la Relatividad Especial dentro del marco de la Relatividad General. Sin embargo, la Relatividad Especial ya está incorporada automáticamente a nivel local en la descripción geométrica de la gravedad y no está claro por qué habría a exigir a priori que también aparezca como una solución global de las ecuaciones de Einstein. Relajando la condición 6, uno llega a una expresión más general del tensor $G_{\mu\nu}$, ya que ahora la constante Λ no necesariamente se tiene que anular:

$$G_{\mu\nu} \ = \ R_{\mu\nu} \ - \ \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R \ + \ \kappa\Lambda\, g_{\mu\nu}. \tag{3.12}$$

  La influencia de esta constante cosmológica es introducir una fuerza universal repulsiva cuando $\Lambda > 0$ y atractiva cuando $\Lambda < 0$.
  Se puede obtener también esta expresión para $G_{\mu\nu}$ de un principio variacional, si se añade a la acción de Einstein-Hilbert (3.9) un término de constante cosmológica,

$$S \ = \int d^4x \sqrt{|g|}\, \Big[\tfrac{1}{2\kappa} R \ + \ \mathcal{L}_{\rm mat} \ - \ \Lambda \Big]. \tag{3.13}$$

  A veces se interpreta Λ no tanto como un término geométrico, sino se incluye dentro de la contribución total de energía y materia. Efectivamente, no es difícil ver que se puede escribir el tercer término de (3.12) como

$$T_{\mu\nu} \ = \ \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(-\sqrt{|g|}\, \Lambda)}{\delta g^{\mu\nu}} \ = \ \Lambda\, g_{\mu\nu} \tag{3.14}$$

  La constante cosmológica fue introducida por Einstein en 1917, para obtener una solución cosmológica que describía un universo estático, y posteriormente retirada, cuando Einstein aceptó la idea de universos dinámicos. Sin embargo, la constante cosmológica ha vuelto a ganar relevancia con el reciente descubrimiento de la expansión acelerada del universo, cuyas características observacionales son perfectamente compatibles con una Λ pequeña, pero positiva.

- Estrictamente hablando no es cierto que el escalar de Ricci es el único invariante de curvatura que da lugar a ecuaciones diferenciales de orden dos. En 1938, Laczos encontró que el término de Gauss Bonnet,

$$\mathcal{L}_{\rm GB} \ \propto \ \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, R_{\mu\nu\alpha\beta}\, R_{\rho\lambda\gamma\delta} \ = \ 8\, (\, R^2 \ - \ 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \ + \ R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}), \tag{3.15}$$

  al variar con respecto a la métrica tampoco da lugar a términos con derivadas superiores que dos.[3] Sin embargo, el término de Gauss-Bonnet no influye en la física cuadrimensional, porque precisamente en cuatro dimensiones es un término topológico (el invariante de Euler cuadrimensional) y por lo tanto no contribuye a las ecuaciones de movimiento. Sin embargo en cinco dimensiones o más, el término de Gauss-Bonnet sí es dinámico y a priori no hay

[3] Cada uno de los tres sumandos da lugar a términos de cuarto orden en $g_{\mu\nu}$, pero los coeficientes relativos entre los distintos sumandos en (3.15) son elegidos tales que precisamente estos términos de orden superior se cancelan.

razón para no incluirlo en una acción gravitacional.
En 1971, Lovelock generalizó el resultado de Lanczos a dimensiones arbitrarias: en dimensiones pares $D = 2k$, el término de Lovelock de orden máximo $k = D/2$,

$$\mathcal{L}_{D/2} \ \propto \ \varepsilon^{\mu_1\nu_1\ldots\mu_k\nu_k} \ \varepsilon^{\rho_1\lambda_1\ldots\rho_k\lambda_k} \ R_{\mu_1\nu_1\rho_1\lambda_1}\ldots R_{\mu_k\nu_k\rho_k\lambda_k}, \tag{3.16}$$

es el invariante de Euler D-dimensional y por lo tanto un invariante topológico que no contribuye a las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, en D dimensiones (pares o impares), el término de Lovelock de orden $k < D/2$,

$$\mathcal{L}_k \ \propto \ \varepsilon^{\mu_1\nu_1\ldots\mu_k\nu_k\sigma_1\ldots\sigma_{D-k}} \ \varepsilon^{\rho_1\lambda_1\ldots\rho_k\lambda_k}{}_{\sigma_1\ldots\sigma_{D-k}} \ R_{\mu_1\nu_1\rho_1\lambda_1}\ldots R_{\mu_k\nu_k\rho_k\lambda_k}, \tag{3.17}$$

sí es dinámico y proporciona ecuaciones diferenciales de segundo orden. Obsérvese que el término de Lovelock de orden cero es una constante (la constante cosmológica) y el de orden uno es la acción de Einstein-Hilbert. Por lo tanto, la acción gravitatoria D-dimensional más general, que da lugar a ecuaciones diferenciales de orden dos, es la suma de los distintos términos de Lovelock de orden cero hasta orden $D/2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \ &= \ \sqrt{|g|}\ \sum_{k=0}^{D/2}\lambda_k\,\mathcal{L}_k \qquad (3.18)\\ &= \ \sqrt{|g|}\ \Big[\Lambda \ + \ \tfrac{1}{2\kappa}R \ + \ \lambda_2\Big(R^2 \ - \ 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \ + \ R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}\Big) \ + \ldots + \lambda_{D/2}\,\mathcal{L}_{D/2}\Big].\end{aligned}$$

Obsérvese que las ecuaciones de movimiento, al ser obtenidas por un principio variacional, automáticamente satisfacen las primeras 5 condiciones que hemos exigido al tensor de Einstein, y la sexta cuando ponemos $\Lambda = 0$.

4. El límite newtoniano y la propagación de la gravedad

En la sección anterior hemos argumentado que el Principio de Equivalencia impone un carácter geométrico a cualquier teoría relativista de la gravitación y hemos derivado la ecuación de Einstein (3.6) como la única ecuación del campo gravitatoria que se puede obtener de un principio variacional y que proporciona ecuaciones diferenciales de seguno orden (en cuatro dimensiones). En esta sección tenemos que demostrar que la Relatividad General es capaz de resolver el problema de la gravedad newtoniana: argumentaremos que la ecuación de Einstein, por un lado, da el límite newtoniana correcto, pero que por otro lado elimina la acción a distancia y la velocidad infinita de propagación indeseada de la teoría newtoniana.

La ecuación de Einstein es una ecuación no-lineal, por lo que su dinámica en general es muy complicada. Sin embargo, para averiguar la velocidad de propagación de la interacción gravitatoria, basta con estudiar la dinámica de las pequeñas pertubaciones alrededor del espacio plano. Consideramos pues una métrica $g_{\mu\nu}(x)$, que sólo difiere del espacio de Minkowksi por una perturbación infinitesimal $h_{\mu\nu}(x)$,

$$g_{\mu\nu}(x) \ = \ \eta_{\mu\nu} \ + \ \varepsilon\, h_{\mu\nu}(x), \tag{4.1}$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio de Minkowski en coordenadas cartesianas y $\varepsilon \ll 1$ el parámetro de expansión adimensional. En este caso, no es difícil ver con las técnicas estándar de teoría de perturbaciones, que la métrica inversa, los símbolos de Christoffel, el tensor y el escalar de Ricci vienen dados, hasta primer orden en ε, por

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \ &\approx \ \eta^{\mu\nu} \ - \ \varepsilon h^{\mu\nu},\\ \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \ &\approx \ \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\eta^{\rho\lambda}\Big[\partial_\mu h_{\lambda\nu} \ + \ \partial_\nu h_{\mu\lambda} \ - \ \partial_\lambda h_{\mu\nu}\Big],\\ R_{\mu\nu} \ &\approx \ \tfrac{1}{2}\varepsilon\Big[\partial_\rho\partial^\rho h_{\mu\nu} \ + \ \partial_\mu\partial_\nu h \ - \ \partial_\rho\partial_\mu h_\nu{}^\rho \ - \ \partial_\rho\partial_\nu h_\mu{}^\rho\Big],\\ R \ &\approx \ \varepsilon\Big[\partial_\mu\partial^\mu h \ - \ \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}\Big], \qquad (4.2)\end{aligned}$$

donde hemos subido los índices con la métrica plana a orden cero y $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h_\mu{}^\mu$ es la traza de la perturbación.

En realidad no todas las perturbaciones $h_{\mu\nu}$ son independientes. Si consideramos dos expresiones de la misma métrica, $g_{\mu\nu}(x)$ y $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x})$, relacionadas a través de un cambio de coordenadas $x^\mu = x^\mu(\tilde{x})$,

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) \;=\; \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} \; g_{\rho\lambda}(x), \tag{4.3}$$

la covariancia de la teoría garantiza que esas dos expresiones describen la misma física. En particular, si esta métrica describe una perturbación del espacio plano, entonces las perturbaciones en las distintas coordenadas $h_{\mu\nu}(x)$ y $\tilde{h}_{\mu\nu}(\tilde{x})$ no son independientes. Concretamente, bajo un cambio infinitesimal de coordenadas,

$$x^\mu \;\approx\; \tilde{x}^\mu \;+\; \varepsilon\, \xi^\mu(\tilde{x}), \qquad\qquad \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \;\approx\; \delta^\rho_\mu \;+\; \varepsilon\, \partial_\mu \xi^\rho, \tag{4.4}$$

la regla de la transformación de la métrica (4.3) relaciona las perturbaciones como

$$\tilde{h}_{\mu\nu} \;=\; h_{\mu\nu} \;+\; \partial_\mu \xi_\nu \;+\; \partial_\nu \xi_\mu. \tag{4.5}$$

En otras palabras, dos perturbaciones $h_{\mu\nu}(x)$ y $\tilde{h}_{\mu\nu}(x)$, relacionadas a través de (4.5), describen en realidad la misma perturbación en distintas coordenadas.

La relación (4.5) entre perturbaciones físicamente equivalentes es muy parecida a la invariancia gauge (2.11) en electromagnetismo.[4] Efectivamente, a primer orden en ε, el tensor de Riemann es invariante bajo una transformación gauge (4.5) e, igual que el la Teoría de Maxwell, se puede aprovechar esta libertad para elegir una gauge conveniente, que simplifica las ecuaciones. En particular, si imponemos el gauge armónico,

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} \;-\; \tfrac{1}{2}\, \partial_\nu h \;=\; 0, \tag{4.6}$$

el tensor y el escalar de Ricci simplifican a las siguientes expresiones:

$$R_{\mu\nu} \;\approx\; \tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, \partial_\rho \partial^\rho h_{\mu\nu} \qquad\qquad R \;\approx\; \tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, \partial_\mu \partial^\mu h \tag{4.7}$$

de modo que se puede escribir la ecuación de Einstein sin traza (3.7) en el gauge armónico a primer orden en ε como onda ecuación de onda inhomogénea,

$$\tfrac{1}{2}\, \partial_\rho \partial^\rho h_{\mu\nu} \;\approx\; -\kappa \Big[T_{\mu\nu} \;-\; \tfrac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T \Big]. \tag{4.8}$$

Vemos por lo tanto que la Relatividad General efectivamente no sufre del problema de la acción a distancia de la teoría newtoniana: las perturbaciones gravitatorias se comportan como ondas gravitacionales, que se propagan a la velocidad de la luz. No es sorprendente que por lo tanto se puede escribir la solución general en términos de unos potenciales retardados, muy parecidos al caso análogo en electromagnetismo,

$$h_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \;\approx\; \frac{\kappa}{2\pi} \int d^3\vec{y} \;\; \frac{T_{\mu\nu}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|) \;-\; \eta_{\mu\nu}\, T(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \tag{4.9}$$

En este sentido, la Relativdad General es efectivamente una teoría relativista de campos para la interacción gravitatoria, aunque era preciso ir al régimen perturbativo para ver la velocidad de la propagación.

Pero aún no hemos argumentado que la Relatividad General sea capaz de recuperar la gravedad newtoniana, descrita por (2.1) y (2.2). Para eso, es preciso calcular el límite newtoniano, cuando el campo gravitatorio es débil y cuasi-estático y todas las velocidades consideradas son muy bajas en comparación con la velocidad de la luz.

[4] En notación covariante, una transformación gauge en electromagnetismo coge la forma $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$.

Ya hemos argumentado antes que un campo gravitatorio débil está descrito por una perturbación alrededor del espacio de Minkowksi (4.1), de modo que vamos a poder usar los resultados anteriores de esta sección. Además, el hecho de que el campo sea estacionario implica que podremos despreciar las derivadas temporales de la perturbación, $\partial_t h_{\mu\nu} = 0$. Finalmente, dado que todas las (tri-)velocidades consideradas tienen que ser no-relativistas, podemos parametrizarlas con el mismo parámetro ε de la expansión (4.1): $\dot{x}^i \sim \varepsilon \ll 1$. Nótese que esta última afirmación implica una elección de un sistema de referencia específico y una pérdida explícita de invariancia Lorentz. En esta aproximación la diferencia entre la coordenada temporal t y el tiempo propio τ de las partículas es despreciable, $d\tau \approx dt$, lo que explica la aparición de un tiempo absoluto en la mecánica newtoniana.

La Segunda Ley de Newton (2.1) para una partícula sometida a la fuerza gravitatoria se obtiene de la ecuación de la geodésica (recuerda que en Relatividad General, una partícula libre es una partícula que siente sólo la interacción gravitatoria). Las componentes espaciales de (1.2) se reducen en nuestra aproximación a

$$0 \;\approx\; \ddot{x}^i \;+\; \Gamma_{tt}^i, \tag{4.10}$$

dado que los términos $\Gamma_{tj}^i\, \dot{x}^j$ y $\Gamma_{jk}^i\, \dot{x}^j \dot{x}^k$ son de orden ε^2 y ε^3 respectivamente. A su vez tenemos que

$$\Gamma_{tt}^i \;\approx\; \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\, \eta^{ij}\Big[2\,\partial_t h_{jt} \;-\; \partial_j h_{tt}\Big] \;\approx\; -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\, \eta^{ij}\partial_j h_{tt}, \tag{4.11}$$

de modo que la ecuación de la geodésica (4.10) se reduce a

$$\ddot{x}^i \;=\; \tfrac{1}{2}\partial^i h_{tt}. \tag{4.12}$$

No es difícil interpretar esta ecuación como la Segunda Ley de Newton (2.1), bajo la identificación[5]

$$h_{tt} \;\approx\; 2\,\Phi(x). \tag{4.13}$$

En otras palabras, el potencial gravitatorio newtoniano aparece en Relatividad como la desviación del caso plano en la componente g_{tt} de la métrica. Efectivamente, la solución de un objeto esféricamente simétrico y estático con masa m, la solución de Schwarzschild,

$$ds^2 \;=\; \Big(1 \,-\, \frac{2G_N m}{r}\Big)dt^2 \;-\; \Big(1 \,-\, \frac{2G_N m}{r}\Big)^{-1} dr^2 \;-\; r^2\Big(d\theta^2 \,+\, \sin^2\theta d\varphi^2\Big), \tag{4.14}$$

da lugar al potencial newtoniano de una masa esféricamente simétrica,

$$\Phi \;=\; -\frac{G_N m}{r}. \tag{4.15}$$

Por otro lado, la ecuación de Poisson sale de (4.8) con la elección adecuada del tensor de energía-momento. En la aproximación no-relativista del límite newtoniano, el tensor de energía-momento de un fluido perfecto de materia fría con densidad de materia $\rho_m(x)$,

$$T^{\mu\nu} \;=\; \rho_m(x)\, u^\mu\, u^\nu, \tag{4.16}$$

sólo tiene uno componente no-trivial en el sistema de coordenadas elegido,

$$T_{tt} \;\approx\; T \;\approx\; \rho_m(x), \qquad\qquad T_{ti} \;\approx\; T_{ij} \;\approx\; 0, \tag{4.17}$$

de modo que la única componente no-trivial de (4.8) se convierte en

$$-\,\tfrac{1}{2}\nabla^2 h_{tt}(\vec{x}) \;\approx\; \tfrac{1}{2}\kappa\rho_m(\vec{x}), \tag{4.18}$$

donde hemos despreciado las derivadas temporales en el d'alambertiano, $\partial_t^2 h_{tt} \approx 0$, al restringirnos al caso (cuasi-)estático. Otra vez, con la identificación del potencial newtoniano (4.13), no es difícil

[5]El signo extra viene de la traducción de la componente espacial del gradiente cuadrimensional y el gradiente tridimensional: $\partial^i = -(\vec{\nabla})^i$.

interpretarlo como la ecuación de Poisson (2.2), si fijamos la constante de acoplo κ que aparece en la ecuación de Einstein (3.6) como

$$\kappa \;=\; 8\pi\, G_N. \tag{4.19}$$

Vemos por lo tanto que la ecuación de Poisson de la gravedad newtoniana no es ninguna ecuación fundamental, sino meramente un caso especial, gravitostático, de la ecuación de onda (4.8), de la misma manera que la ecuación de Laplace (2.5) para el potencial eléctrico es un caso especial del caso dinámico (2.13). La generalización de (4.18) a configuraciones gravitatorias dependientes del tiempo por lo tanto no es la ecuación newtoniana (2.2), sino la ecuaciones dinámicas de las perturbaciones de la (4.8) o, en el caso general, la ecuación de Einstein completa (1.1).

5. Conclusiones

En las secciones anteriores hemos demostrado que la Relatividad General es la teoría moderna, (post-newtoniana) de la gravedad, que describe la interacción gravitatoria como una teoría de campos, con fuertes analogías con la interacción electromagnética en la Teoría de Maxwell.

En electromagnetismo, el problema de la acción a distancia, que (aparentemente) exhibe la fuerza de Coulomb, se resuelve en la Teoría de Maxwell entera, introduciendo, además del potencial electrostático ϕ, tres potenciales adicionales, en forma del vector $\vec{A}$. En electrodinámica, estos cuatro potenciales (que en la formulación covariante se juntan en un solo cuadripotencial A^μ) son realmente los grados de libertad dinámicos de la teoría. La interacción electromagnética está por lo tanto descrita por las ecuaciones de movimiento de estos potenciales, que, con la apropiada elección de gauge (2.12), coge la forma de una simple ecuación de onda inhomogénea (2.13). La velocidad de la propagación finita fija la velocidad de la interacción electromagnética a la velocidad de la luz.

Esto es la esencia de cualquier teoría (clásica) de campos: la interacción es intermediada por un campo dinámico, cuyas perturbaciones se propagan a través de una ecuación de onda, típicamente a la velocidad de la luz (si el campo no tiene masa). De esta manera la teoría de campos considerada es automáticamente relativista y carece de acción a distancia.

Como sospechábamos, la solución del problema de la acción a distancia de la gravedad newtoniana era convertirla entonces en una teoría de campos. Efectivamente, en la Relatividad General los grados de libertad dinámicos están descritos por 10 potenciales $g_{\mu\nu}$, organizados en forma de un tensor simétrico de rango dos, de los cuales el potencial gravitatorio newtoniano $\Phi \approx \frac{1}{2}(g_{tt} - 1)$ es el primer orden de una expansión perturbativa de uno de las componentes. A primer orden en esa expansión, las pequeñas perturbaciones de $g_{\mu\nu}$ obedecen una ecuación de onda inhomogénea (con la apropiada elección de gauge), fijando la velocidad de la interacción gravitatoria a la de la luz, por lo menos en esta aproximación. La teoría completa tiene un carácter altamente no-lineal, lo que complica considerablemente la dinámica de las perturbaciones grandes y de los efectos no-perturbativos.

La gran diferencia entre la Relatividad General y las demás teorías (clásicas) de campos es el carácter de los potenciales dinámicos. Donde las demás teorías viven en un espaciotiempo plano y los potenciales simplemente se añaden al contenido de la teoría sin tocar el espaciotiempo en sí, en la Relatividad General los potenciales gravitatorios se identifican con el tensor métrico, el objeto matemático que describe las propiedades geométricas del espaciotiempo. Eso no sólo convierte la Relatividad General en una teoría intrínsecamente geométrica, sino también da un carácter físico a la geometría del espaciotiempo, con una dinámica propia e inherente. La forma y el tamaño del espaciotiempo no están fijados a priori, sino determinados por el contenido de energía-momento y por su propia dinámica. Para poder describir un sistema físico, es preciso tomar en cuenta la repercución de ese sistema sobre la geometría del espaciotiempo y vice versa.[6]

[6] Un ejemplo ilustrativo es el colapso gravitacional de un nube de materia: cuanto más se contraiga la materia, más aumenta la curvatura del espaciotiempo, posiblemente hasta el punto de formar un horizonte y una singularidad que se traga toda la materia, dejando un espaciotiempo curvo vacío.

El hecho de que la ecuación de Einstein sea capaz de resolver el problema de la acción a distancia y a la vez dar con el límite newtoniano correcto es un fuerte punto a favor de esta teoría. Pero el hecho de que encima la acción de Einstein-Hilbert sea la única acción cuadrimensional que da lugar a unas ecuaciones para el campo gravitatorio de segundo orden (y no más), proporciona un estatus especial a la ecuación de Einstein, difícilmente alcanzable por otras teorías potenciales. Quizá sea por eso que, aunque se sepa que la Relatividad deja de ser válida a la escala de Planck, que sea tan complicado encontrar una pista sobre posibles alternativas.

A. Apendice: ¿Gravedad maxwelliana?

Uno se podría plantear la pregunta si relamente es necesario recurrir a una teoría tan compleja de la gravedad como la Relatividad General para resolver el problema de la acción a distancia de la gravedad newtoniana. En particular, se podría argumentar que, dado que la Teoría de Maxwell resolvió de manera tan exitosa mismo problema en la electrostática, quizá sea posible desarrollar una teoría de la interacción gravitatoria inspirada en la Teoría de Maxwell. El hecho de que la Teoría de Maxwell sea invariante Lorentz, garantizaría automáticamente la compatibilidad con la Relatividad Especial.

Hemos argumentado en este artículo que la ecuación de Einstein es la única posibilidad (en cuatro dimensiones), así que debería ser obvio que una teoría maxwelliana de la gravitación no es posible. Pero es instructivo ver qué es exactamente lo que falla, puesto que el intento fallido nos enseña una diferencias fundamentales entre la interacción gravitatoria y la electromagnética.

Imaginémonos por un momento, siguiendo la filosofía de la sección 2, que introduzcamos, aparte del potencial newtoniana Φ, otro potencial gravitomagnético $\vec{V}$, con la esperanza de que pudiera describir la interacción gravitatoria de configuraciones no estáticas. En este caso, los potenciales Φ y $\vec{V}$ darían lugar a un campo gravitoeléctrico $\vec{G}$ y otro gravitomagnético $\vec{H}$ como

$$\vec{G} \;=\; -\vec{\nabla}\Phi \;-\; \partial_t\vec{V}, \qquad\qquad \vec{H} \;=\; \vec{\nabla}\times\vec{V}, \tag{A.1}$$

cuyas ecuaciones de movimiento

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{G} \;=\; \rho_m, \qquad\qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} \;=\; \vec{\jmath}_m \;+\; \partial_t\vec{G}, \tag{A.2}$$

se podrían escribir en función de los potenciales como una ecuación de onda inhomogénea

$$\partial_t^2\Phi \;-\; \nabla^2\Phi \;=\; \rho_m, \qquad\qquad \partial_t^2\vec{V} \;-\; \nabla^2\vec{V} \;=\; \vec{\jmath}_m, \tag{A.3}$$

gracias a que la invariancia gauge de las expresiones (A.1),

$$\Phi \;\to\; \Phi' \;=\; \Phi \;+\; \partial_t\Sigma, \qquad\qquad \vec{V} \;\to\; \vec{V}' \;=\; \vec{V} \;-\; \vec{\nabla}\Sigma, \tag{A.4}$$

permitiera imponer a los potenciales la condición de Lorenz,

$$\partial_t\Phi \;+\; \vec{\nabla}\cdot\vec{V} \;=\; 0. \tag{A.5}$$

Estará claro que las ecuaciones (A.3) tienen las mismas soluciones (2.14) que sus análogos electromagnéticos y que por lo tanto efectivamente no sufren del problema de la acción a distancia de la teoría newtoniana.

Todo esto se podría escribir de manera manifestamente covariante en el espacio de Minkowski, para dejar explítico la compatibilidad con al Relatividad Especial: los potenciales Φ y $\vec{V}$ combinan de manera natural en un cuadrivector V^μ, cuyo derivada antisimetrizada define el tensor de campo $\mathcal{F}_{\mu\nu}(V)$,

$$V^\mu \;=\; \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{V} \end{pmatrix}, \qquad\qquad \mathcal{F}_{\mu\nu}(V) \;=\; \partial_\mu V_\nu \;-\; \partial_\nu V_\mu, \tag{A.6}$$

donde hemos usado la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas, $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, para subir y bajar índices.[7] Eligiendo el gauge de Lorenz, $\partial_\mu V^\mu = 0$, la ecuación de movimiento $\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = j^\mu$ se reduce a una ecuación de onda para los potenciales

$$\partial_\mu \partial^\mu V^\nu \ = \ j^\mu. \tag{A.7}$$

Sin embargo, hay (por lo menos) dos razones fundamentales por qué una teoría maxwelliana de la gravedad no describe bien la realidad. La primera es obvia para cualquier estudiante de física de bachillerato: la densidad cargas eléctricas ρ_e puede tomar valores positivos o negativos, mientras que la densidad de masa ρ_m siempre es positiva. Esto es un problema serio en una teoría maxwelliana, porque habiendo sólo un tipo de carga, ¡la ley de Gauss (A.2) predice una fuerza gravitatoria repulsiva! Nota que un añadir un signo extra en (A.2) meramente cambiaría masas positivas en negativas (signifique lo que signifique eso), pero no una fuerza repulsiva en atractiva.

Además hay otro matiz de este argumento: dado que los campos gravitoeléctrico y magnético $\vec{G}$ y $\vec{H}$ sólo acoplan a densidades y corrientes de materia ρ_m y $\vec{\jmath}_m$, en este modelo las partículas sin masa no sienten la interacción gravitatoria. Sabemos que esto no es cierto, como queda demostrado en los efectos de lentes gravitatorias y la física de agujeros negros.

El segundo argumento es más sutil, pero también más profundo: una teoría maxwelliana de la gravedad no satisface el Principio de Equivalencia. Recuérdase que el Principio de Equivalencia afirma que es posible eliminar la fuerza gravitatoria newtoniana a través de un cambio de coordenadas, por lo menos localmente. Sin embargo, en una teoría maxwelliana, donde los potenciales gravitatorios forman un cuadrivector no-geométrico, la norma del cuadrivector $V_\mu V^\mu$ es un invariante bajo cambios de coordenadas. Por lo tanto, no existe un sistema de coordenadas donde todos los potenciales sean idénticamente cero, ni siquiera localmente, si no lo fueran ya en el sistema de coordenadas inical.

Se podría argumentar que no hace falta que V^μ entera sea cero, sino que basta con que se anule el potencial newtoniano Φ. Pero incluso eso es imposible en algunas configuraciones familiares. Considera el cuadripotencial de una masa puntual, en el sistema de coordenadas en reposo con respecto a masa. En el gauge de Coulomb, el potencial newtoniano es el único componente no-trivial,

$$\Phi \ = \ -\frac{G_N\, m}{r}, \qquad\qquad \vec{V} \ = \ 0, \tag{A.8}$$

de modo que en esta caso, el cuadripotencial V^μ es claramente un vector temporal,

$$V_\mu V^\mu \ = \ \Phi^2 \ - \ \vec{V}\cdot\vec{V} \ = \ \left(\frac{G_N\, m}{r}\right)^2 \ > \ 0. \tag{A.9}$$

Dado que la norma $V_\mu V^\mu$ es un invariante, está claro que no puede existir un cambio de coordenadas que haga que $\Phi = 0$, ni siquiera localmente.

Ahora, V^μ no es un cuadrivector cualquiera, sino un potencial gauge. Uno podría argumentar, desesperadamente, que quizá el Principio de Equivalencia permite no sólo cambios de coordenadas, sino también transformaciones gauge y que se podría haber escrito el potencial gravitatorio en el gauge temporal,

$$\Phi \ = \ 0, \qquad\qquad \vec{V} \ = \ -\frac{G_N\, m\, t}{r^2}, \tag{A.10}$$

dado que ambas configuraciones (A.8) y (A.10) dan lugar al mismo campo gravitostático

$$\vec{G} \ = \ \frac{G_N\, m}{r^2}, \qquad\qquad \vec{V} \ = \ 0. \tag{A.11}$$

Pero incluso eso no es suficiente para forzar el Principio de Equivalencia, puesto que en una teoría maxwelliana las partículas de prueba no se acoplan a los potenciales, sino al campo gravitoeléctrico y magnético a través de la fuerza de Lorentz,

$$\ddot{x}^i \ = \ (\vec{G} \ + \ \vec{v}\times\vec{H}), \tag{A.12}$$

[7] Si modelamos la interacción gravitatoria por un campo maxwelliano, no hay ninguna razón para trabajar en un espacio curvo. De hecho, la compatibilidad con la Relatividad Especial exigiría que la teoría viva en $\mathbb{R}^{1,3}$.

o en lenguaje covariante,

$$\ddot{x}^\mu \ = \ \dot{x}_\nu \, \mathcal{F}^{\mu\nu}(V) \tag{A.13}$$

Está claro que esta expresión es invariante gauge, de modo que es imposible eliminar la fuerza gravitatoria no-trivial en esta teoría a base de cambios de coordenadas y/o transformaciones gauge.

La imposibilidad de construir una teoría maxwelliana de la gravedad nos enseña una importante lección sobre la diferencia entre la interacción gravitatoria y las demás interacciones fundamentales. Como mencionamos antes, las demás fuerzas se describen añadiendo potenciales (gauge) dinámicos al contenido de la teoría, mientras que la gravedad es una interacción intrínsecamente geométrica, interpretable como una manifestación de la curvatura del espaciotiempo. Y esa diferencia entre los dos tipos de teorías da lugar a una diferencia en las estructuras matemáticas y por lo tanto en el papel de estas estructuras en la física.

Las teorías gauge, como la Teoría de Maxwell, tiene dos tipos de campos: por un lado están los potenciales gauge A_μ, que son las variables dinámicas de la teoría, pero que resultan ser completamente inobservables, debido a su carácter gauge. Por otro lado está el tensor de intensidad de campo, $F_{\mu\nu}(A)$, construido a base de los potenciales de modo que sea invariante bajo las transformaciones gauge de los potenciales. Por esta razón, todos los efectos físicos, como las fuerzas, la energía y las ecuaciones de movimiento, están descritos en términos de $F_{\mu\nu}(A)$.

En la Relatividad General, la métrica $g_{\mu\nu}$ juega el papel equivalente de los potenciales gauge A_μ, siendo los cambios de coordenadas el análogo de las transformaciones gauge. Por otro lado, el objeto invariante gauge, equivalente a $F_{\mu\nu}(A)$, es el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho\lambda}$ (y sus contracciones $R_{\mu\nu}$ y R). Sin embargo, en el lenguaje de la geometría diferencial, hay una estructura adicional, con un papel entremedias de un campo gauge y un tensor de intensidad: los símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$.

Por un lado, los símbolos de Christoffel tienen un carácter claramente gauge, puesto que no son objetos tensoriales y por lo tanto se pueden encender y apagar (por lo menos localmente) con simples cambios de coordenadas. Por otro lado, aparecen en las ecuaciones de movimiento, como en la Segunda Ley de Newton y sus efectos son por lo tanto detectables, interpretables como la fuerza gravitatoria newtoniana. Localmente, esa fuerza newtoniana es por lo tanto una pseudo-fuerza, en el sentido de que su intensidad depende del sistema de coordenadas particular de cada observador, debido al carácter no-tensorial de los símbolos de Christoffel. Por otro lado, su dependencia no-trivial de las coordenadas hace que los $\Gamma^\rho_{\mu\nu}(x)$ contienen toda la información geométrica del espaciotiempo.

En resumen: se podría formular la diferencia matemática entre una teoría gauge y una teoría geométrica como que con una transformación gauge se puede eliminar en todos los puntos del espacio cualquier componente del potencial gauge, pero no todas a la vez, mientras que con un cambio de coordenadas se puede igualar a cero todos los simbolos de Christoffel en cualquier punto, pero no en todo el espacio simultáneamente.

Agradecimientos

El autor quiere expresar su agradecimiento a Alejandro Jiménez Cano y a Manuel Luis González Hernández por la discusiones que han llevado este artículo. Este trabajo ha sido posible con la ayuda del Ministerio de Economía, Industria y Competitividad bajo el proyecto FIS2016-78198-P y de la Junta de Andalucía (FQM101).

Bibliografía

- S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry*, Addison-Wesley, 2004.
- B. Janssen, *Teoría de la Relatividad General*, Apuntes personales, Universidad de Granada, versión de julio 2017, `http://www.ugr.es/local/bjanssen/text/relatividad.pdf`
- C. Misner, K. Thorne, A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973.

Derechos de Autor

Por favor, cítese este artículo como:

- B. Janssen,
  La Relatividad General y el problema de la acción a distancia newtoniana,
  Universidad de Granada (2017).

Para cualquier duda, contacte con el autor en `bjanssen@ugr.es`.