

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA



**CONCEPCIONES INICIALES SOBRE LA ASOCIACION
ESTADISTICA Y SU EVOLUCION COMO CONSECUENCIA
DE UNA ENSEÑANZA BASADA EN EL USO DE ORDENADORES**

Tesis Doctoral

Antonio ESTEPA CASTRO

Granada, Noviembre de 1993

INDICE GENERAL

	PAGINA
INTRODUCCION	29
CAPITULO 1: FUNDAMENTOS Y PROBLEMA DE INVESTIGACION.	33
Introducción	35
1.1. El concepto de asociación estadística y su relación con la causalidad: análisis epistemológico.	36
1.1.1. Interés de la idea de asociación en Estadística	36
1.1.2. Algunas notas históricas	38
1.1.3. El concepto de causa	44
1.1.4. Asociación y causalidad.	50
1.2. Fundamentos didácticos.	57
1.2.1. Las nociones de concepto y de concepción del sujeto	57
1.2.2. Resolución de problemas y su papel en la construcción del conocimiento. Significados personales e institucionales de los objetos matemáticos	60
1.2.3. Papel del ordenador en el aprendizaje de conceptos estadísticos.	65

	PAGINA
1.3. Investigaciones psicológicas	71
1.3.1. Introducción	71
1.3.2. El estudio de Inhelder y Piaget.	76
1.3.3. Conclusiones obtenidas en estudios posteriores	78
1.3.3.1. Estrategias empleadas en problemas de asociación	78
1.3.3.2. Influencia de las teorías previas	80
1.3.3.3. Exactitud en los juicios de asociación	81
1.3.3.4. Sobre el contexto y la presentación de la información	83
1.4. Descripción del problema y de la metodología de la investigación	85
1.4.1. Introducción	85
1.4.2. Objetivos de la investigación	86
1.4.3. Población y muestra.	87
1.4.4. Variables	88
1.4.5. Hipótesis y enfoque de la investigación.	90
CAPITULO 2: ESTUDIO DE CONCEPCIONES INICIALES SOBRE LA ASOCIACION ESTADISTICA	93
Introducción	95
2.1. Descripción del instrumento de recogida de datos	96
2.1.1. Proceso de construcción del instrumento.	96
2.1.2. Descripción de la prueba piloto y del cuestionario usado como pretest en el experimento de enseñanza	102
2.1.3. Descripción del cuestionario usado como postest en el experimento de enseñanza	109
2.2. Resultados del estudio de concepciones en la muestra piloto.	113
2.2.1. Descripción de la muestra piloto	113
2.2.2. Interpretación de tablas de contingencia y gráficos	113
2.2.3. Juicios de asociación	117
2.2.4. Explicitación de teorías previas	120
2.2.5. Estrategias en los juicios de asociación	121
2.2.5.1. Estrategias en tablas de contingencia	121
2.2.5.2. Estrategias empleadas por los alumnos en los juicios de asociación en las nubes de puntos	154
2.2.5.3. Estrategias empleadas por los alumnos en los juicios sobre asociación en la com- paración de muestras.	167
2.2.6. Otros aspectos	176
2.2.7. Estimación de la fiabilidad en la muestra pilo- to	179
2.3. Resultados del estudio de concepciones en la muestra de comparación.	183
2.3.1. Descripción de la muestra	183
2.3.2. Interpretación de tablas y gráficos.	184

	PAGINA
2.3.3. Juicios de asociación	187
2.3.4. Explicitación de teorías previas	196
2.3.5. Estrategias en los juicios de asociación	197
2.3.5.1. Tablas de contingencia: Niveles de elaboración de estrategias	197
2.3.5.2. Estrategias empleadas por los alumnos en los juicios de asociación en las nubes de puntos	216
2.3.5.3. Estrategias empleadas por los alumnos en los juicios sobre asociación en la comparación de muestras.	223
2.3.6. Otros aspectos	226
2.4. Conclusiones del estudio de concepciones iniciales.	229
 CAPITULO 3: EVOLUCION DE CONCEPCIONES COMO CONSECUENCIA DE UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA BASADO EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS CON ORDENADOR	 235
Introducción	237
3.1. Descripción de la muestra experimental y estudio de concepciones previas	238
3.1.1. Descripción de la muestra experimental	238
3.1.2. Interpretación de tablas de contingencia y gráficos	239
3.1.3. Juicios de asociación y explicitación de teorías previas	241
3.1.4. Estrategias en los juicios de asociación	243
3.1.5. Otros aspectos estudiados	251
 3.2. Descripción del experimento de enseñanza	 253
3.2.1. Criterios seguidos en la planificación de la instrucción	253
3.2.2. Objetivos, contenidos, metodología y temporalización del programa de enseñanza	256
3.2.3. Descripción del material de enseñanza	267
3.2.4. Análisis teórico de los problemas propuestos en las sesiones prácticas de trabajo con el ordenador	271
 3.3. Concepciones finales de los alumnos participantes en la experiencia de enseñanza y evolución de las mismas	 285
3.3.1. Interpretación de tablas de contingencia y gráficos	285
3.3.2. Juicios de asociación y explicitación de teorías previas	288
3.3.3. Estrategias en los juicios de asociación	291
3.3.4. Otros aspectos estudiados	304

3.4. Concepciones y estrategias manifestadas en situaciones de resolución de problemas de asociación usando ordenadores	307
3.4.1. Descripción del instrumento de recogida de datos sobre resolución de problemas con ordenador.	307
3.4.2. La interacción del alumno con el ordenador	312
3.4.3. Estrategias seguidas por los alumnos para la integración de la información a partir del fichero de datos	315
3.4.4. Juicios de asociación	321
3.4.5. Estrategias empleadas	322
3.5. Estudio del proceso de aprendizaje de una pareja de alumnos	329
3.5.1. Concepciones iniciales de los alumnos participantes	331
3.5.2. La adquisición gradual de la idea de asociación: actos de comprensión del concepto.	333
3.5.3. Dificultades inducidas por el empleo de la herramienta informática.	337
3.5.4. Dificultades relacionadas con otros conceptos estadísticos	339
3.5.5. Dificultades de tipo lingüístico	341
3.5.6. Resultados del postest en los alumnos observados.	341
3.5.7. Análisis de las entrevistas sobre el proceso seguido en la resolución de problemas con ordenador	344
3.6. Conclusiones sobre la evolución de las concepciones	350
CONCLUSIONES GENERALES DE LA INVESTIGACION	357
REFERENCIAS	367
ANEXOS	387
ANEXOS AL CAPITULO 2	389
Anexo 2.1. Instrumentos de evaluación de concepciones	391
A.2.1.1. Prueba piloto.	393
A.2.1.2. Cuestionario usado como pretest en el experimento de enseñanza y en el estudio de concepciones iniciales	409
A.2.1.3. Cuestionario usado como postest en el experimento de enseñanza	423
Anexo 2.2. Descripción de procedimientos empleados en los juicios de asociación	439
A.2.2.1. Descripción de los procedimientos empleados por los alumnos en la muestra piloto	441
A.2.2.2. Descripción de los procedimientos empleados por los alumnos en la muestra de comparación y experimental	471

	PAGINA
ANEXOS AL CAPITULO 3	495
Anexo 3.1. Ficheros de datos empleados en la enseñanza	497
Anexo 3.2. Desarrollo teórico del tema de asociación	507
Anexo 3.3. Material entregado a los alumnos en las prácticas realizadas con el ordenador: Objetivos y problemas propuestos.	533
Anexo 3.4. Evolución de los procedimientos empleados por los alumnos en la solución de los juicios de asociación	547
Anexo 3.5. Instrumentos de recogida de datos sobre resolución de problemas con el ordenador	571
A.3.5.1. Guión de observación..	573
A.3.5.2. Cuestionario usado en la prueba de resolución de problemas con el ordenador.	577
A.3.5.3. Ejemplo de registro de la interacción alumno-ordenador.	583
Anexo 3.6. Descripción del proceso de realización de las prácticas con ordenador de una pareja de alumnos.	591
Anexo 3.7. Transcripción de las entrevistas realizadas a dos alumnos sobre la prueba de resolución de problemas con ordenador	649

INTRODUCCION

La Estadística constituye un área de conocimiento de extraordinaria importancia en la sociedad actual, por sus muchas aplicaciones en los distintos campos de la actividad humana.

El desarrollo de los modernos ordenadores, que ha incrementado exponencialmente las posibilidades de almacenamiento y procesamiento de datos, ha sido, en gran parte, el responsable del impulso y la transformación que ha recibido esta rama de la Matemática en la segunda mitad del siglo. Además, los ordenadores han puesto al alcance de las personas con formación estadística la realización de gráficos y cálculos que, hasta hace muy poco tiempo, eran difíciles de ejecutar, incluso en los centros científicos especializados.

Como resultado de este progreso, la sociedad valora en gran medida el conocimiento estadístico y plantea a su sistema de enseñanza la necesidad de transmitir estos saberes a todo ciudadano y de preparar estadísticamente a los futuros profesionales en las especialidades más diversas. Esta formación incluye, como componente básico, la capacidad de uso de los programas de cálculo estadístico, sin los cuales no es posible, en la actualidad, resolver problemas reales de análisis de datos. El interés creciente hacia la enseñanza de la Estadística se manifiesta en la existencia de revistas específicas (Teaching Statistics, Induzione, ...), por las Conferencias Internacionales sobre la Enseñanza de la Estadística (ICOTS I (First International Conference on Teaching Statistics) celebrada en Sheffield en 1982; ICOTS II (Second International Conference on Teaching Statistics) celebrada en Victoria en 1986; e ICOTS III (Third International Conference on Teaching Statistics) celebrada en Otago en 1990); por la serie de mesas redondas promovidas por el ISI (International Statistics Institute) y por la formación, en 1990, de una asociación internacional IASE (International Association for Statistical Education).

Así pues, queda planteado a los educadores matemáticos el problema del desarrollo de planes de formación en Estadística, adaptados a las necesidades de la sociedad y a las capacidades de los estudiantes. A la investigación didáctica se plantea, asimismo, el reto de aportar conocimientos científicos que sirvan de base para el diseño racional y óptimo de la tecnología educativa correspondiente.

Entre las nociones estadísticas fundamentales, cuya enseñanza debe optimizarse, se encuentra la de asociación. La presencia de esta idea en el conjunto de métodos estadísticos es bien patente, por lo que una comprensión correcta de la misma es un prerrequisito básico para la de muchos otros conceptos y procedimientos estadísticos. En los cursos elementales sobre Estadística, ya sea Descriptiva o Inferencial, la asociación tiene una presencia garantizada, dado que supone una herramienta conceptual esencial.

Asimismo, es patente la conexión entre el concepto de asociación y la noción de causa. Las relaciones entre estas dos nociones han sido objeto de debate entre filósofos de la ciencia, matemáticos y estadísticos, ya que sobre ellas se apoyan la explicación y predicción de diversos fenómenos, esto es, el conocimiento científico y la toma de decisiones. El fin pretendido en estas situaciones es buscar explicaciones causales que nos permitan comprender el mundo que nos rodea. Desafortunadamente, aunque la metodología de investigación y de toma de decisiones se apoya en gran medida en el estudio de la asociación entre variables, causalidad y asociación no siempre coinciden, en contra de lo que muchas veces se supone.

Por otro lado, la detección de la asociación no es habilidad espontáneamente adquirida y los sujetos, aún adultos, se guían preferentemente por sus teorías previas sobre las interrelaciones entre variables más que por los datos objetivos sobre las contingencias empíricas. Es decir, aplican lo que se ha llamado correlación ilusoria (Chapman y Chapman, 1969), con el consiguiente perjuicio en áreas en que la toma de decisiones se apoya en la estimación previa de la asociación entre las variables de interés.

A pesar de la importancia de las cuestiones que hemos expuesto, la investigación didáctica ha dedicado pocos esfuerzos a esclarecer los problemas que plantea la enseñanza y aprendizaje de la asociación estadística, posiblemente debida a que las investigaciones didácticas referidas a conceptos estadísticos son comparativamente escasas.

Precisamente el estado precario de la investigación en este campo ha atraído nuestra atención y ha motivado nuestro interés hacia este problema de investigación, con la esperanza de aportar nuevos conocimientos que faciliten los procesos de enseñanza-aprendizaje correspondientes. El problema de investigación que nos planteamos es, en consecuencia, el análisis didáctico de la noción de asociación estadística, entendiendo por tal una indagación sistemática sobre los cuatro tipos de cuestiones siguientes:

a) ¿Qué es la noción de asociación?, ¿Cómo ha surgido?, ¿Qué problemas o situaciones permite explicar?, ¿Con qué otros objetos matemáticos y estadísticos se relaciona?, ¿Cuáles son las conexiones entre asociación y causalidad?

b) ¿Qué tipos de concepciones tienen los estudiantes sobre este objeto matemático antes de que sean instruidos sobre el mismo?, ¿Poseen competencias básicas que les capaciten para resolver algunos problemas elementales referidos a la idea de asociación?, ¿Qué dificultades cognitivas han sido descritas en la investigación referidas a la resolución de este tipo de

problemas?

c) ¿Cómo organizar una enseñanza del concepto de asociación estadística, incluida dentro de un curso inicial de Estadística Descriptiva, basado en la resolución de problemas y el uso del ordenador?

d) ¿Cómo evolucionan las concepciones de los estudiantes como consecuencia de este programa de instrucción?, ¿Qué dificultades se producen durante el proceso de aprendizaje?

Los tres capítulos de esta tesis, cuyo contenido resumimos a continuación, contienen la descripción de la investigación llevada a cabo sobre estas cuestiones y las conclusiones obtenidas.

En el primer capítulo presentamos el estudio epistemológico de la noción de asociación y el análisis de las relaciones entre asociación y causalidad, junto con el resumen de las investigaciones sobre juicios de asociación realizadas en el campo de la Psicología. Este estudio ha sido la base, por un lado, de la elaboración de los instrumentos de evaluación de concepciones utilizado en esta investigación, por otro, de la planificación del experimento de enseñanza llevado a cabo. Finalmente, ha permitido interpretar los datos obtenidos en las distintas fases de la investigación. Este primer capítulo contiene también los fundamentos didácticos en que se apoya el estudio realizado y la descripción del problema y la metodología de investigación.

El segundo capítulo se dedica a la evaluación de las concepciones iniciales referidas a la asociación estadística en una muestra de alumnos del Curso de Orientación Universitaria. El análisis de los datos permite extender los resultados obtenidos en Psicología sobre estrategias de los juicios de asociación en tablas 2×2 a otros tipos de tarea. Además, ha permitido identificar una serie de concepciones sobre la asociación estadística no descritas en la literatura de investigación. Puesto que es en el Curso de Orientación Universitaria o en los primeros años de la universidad cuando suele iniciarse el aprendizaje del tema, las conclusiones obtenidas aportan una información básica para la planificación de la enseñanza.

En el tercer capítulo presentamos una propuesta de enseñanza del tema y los resultados de la experimentación de la misma en un grupo de alumnos de la Escuela de Formación del Profesorado (Especialidad de Ciencias). La evaluación del cambio de concepciones de los alumnos participantes se apoya en un diseño cuasi-experimental con pretest y posttest, utilizando dos instrumentos paralelos. El primero de ellos empleado como pretest ha sido el mismo que se utilizó en el estudio de concepciones de los alumnos de COU, lo que nos ha permitido comparar estas concepciones iniciales con las de los alumnos participantes en el experimento de enseñanza. Adicionalmente, al finalizar la enseñanza se ha analizado la capacidad de resolución de problemas de los alumnos participantes, usando el ordenador, comparando las estrategias de resolución con las obtenidas en la prueba usada como posttest. Como complemento, se estudia el proceso de aprendizaje de una pareja de alumnos, utilizando el análisis de su interacción con el ordenador, así con la transcripción de la observación de su trabajo durante las seis sesiones de clases prácticas.

La Memoria finaliza con unas conclusiones generales sobre las cuestiones planteadas y varios anexos en que se incluyen los instrumentos de recogida de datos, la descripción resumida de procedimientos de los alumnos en los juicios de asociación, el material empleado en el experimento de enseñanza, la descripción de la observación efectuada a una pareja de alumnos y la transcripción de la entrevista efectuada a esta pareja de alumnos.

CAPITULO 1: FUNDAMENTOS Y PROBLEMA DE INVESTIGACION

INTRODUCCION

Puesto que la Didáctica de la Matemática se halla estrechamente relacionada con otras ciencias referenciales, como la Matemática, Epistemología y Filosofía de la Matemática, Historia de la Matemática, Psicología, Pedagogía, etc. (Steiner, 1990) es necesario tener en cuenta las aportaciones teóricas de estas diversas disciplinas a la hora de establecer los fundamentos teóricos de una investigación. Esto es especialmente necesario en un tema como la asociación estadística, ya que este tópico ha suscitado interés desde diversos puntos de vista, debido a sus interrelaciones con el estudio de la causalidad.

Este primer capítulo de la Tesis, dedicado a la fundamentación de la parte experimental y a la descripción del problema de investigación, está dividido en cuatro secciones.

En la primera de ellas presentamos el análisis epistemológico del concepto de asociación estadística. Este concepto, que es, en la actualidad, uno de los fundamentales dentro de la Estadística, por constituir la base en que se apoyan un gran número de conceptos y procedimientos de esta materia, tiene sólo algo más de un siglo de existencia. Su emergencia, a partir de las soluciones a problemas concretos en las ciencias experimentales, se describe en la sección 1.1.2. Puesto que este tópico ha suscitado interés en Filosofía y en metodología de investigación, debido a sus interrelaciones con el estudio de la causalidad, en las secciones 1.1.3 y 1.1.4 se presenta, asimismo, una síntesis de estas cuestiones.

Aunque las investigaciones didácticas sobre el concepto de asociación son prácticamente inexistentes, los juicios de asociación han sido objeto de gran interés en Psicología. Ello es debido a que este estudio se halla incluido en la línea de investigación sobre la racionalidad humana y sobre el comportamiento en situaciones de incertidumbre, que tiene grandes implicaciones en la toma de decisiones en gran número de actividades. Con objeto de apoyar nuestro trabajo en estas investigaciones, en la sección 1.3 exponemos una síntesis de sus resultados.

Asimismo, en la sección 1.2, presentamos los conceptos teóricos que sirven de fundamento a nuestro trabajo: las nociones de concepto y concepción, junto con el papel de la resolución de problemas en la construcción del conocimiento y en la evaluación de concepciones. Puesto que la ingeniería didáctica desarrollada en esta investigación, como medio de poner de manifiesto los diversos fenómenos que se van a estudiar, está basada en el empleo del ordenador, hemos considerado conveniente incluir una sección sobre el papel específico del ordenador en el aprendizaje de conceptos estadísticos.

Finalizamos el capítulo presentando en la sección 1.4 el problema de investigación y la metodología con la que ha sido llevada a cabo.

1.1. EL CONCEPTO DE ASOCIACION ESTADISTICA Y SU RELACION CON LA CAUSALIDAD: ANALISIS EPISTEMOLOGICO

1.1.1. INTERES DE LA IDEA DE ASOCIACION EN ESTADISTICA

En general, las técnicas de regresión y correlación se preocupan de la interrelación entre dos o más variables continuas (Afifi y Azen, 1977). De la extensión de la idea de correlación a variables cualesquiera, incluso no numéricas, surge el concepto general de asociación (Hildebrand y cols., 1977). En el análisis de regresión estudiamos la relación entre una variable dependiente y otro conjunto de una o varias variables independientes. Esta relación se representa por un modelo matemático, dado por la ecuación de regresión, a la que se añaden un conjunto de hipótesis básicas (Berry y Feldman, 1985). La ecuación de regresión incluye un conjunto de parámetros desconocidos. En particular, si la ecuación de regresión es lineal respecto a estos parámetros (no necesariamente respecto a las variables independientes) hablamos de regresión lineal. Los modelos lineales para variables no numéricas incluyen el análisis de la varianza (Dunn y Clarck, 1987) y los modelos logarítmico lineales (Knoke y Burke, 1980). Entre los tipo de regresión no lineal podemos citar la regresión logística, la regresión polinómica, exponencial, etc.

Las razones para efectuar un análisis de regresión son dos: en primer lugar, se desea obtener una descripción de la relación entre las variables, como una indicación de una posible causalidad. Por otro lado, se puede desear obtener un predictor de la variable dependiente, a partir de los valores de las variables independientes, lo cual es muy útil si la variable dependiente es costosa o difícil de medir. Dos variables están asociadas en la extensión

en que una de ellas es un buen predictor de la otra (Brent y cols. 1991).

La medida de la intensidad de la relación entre dos variables, mediante un coeficiente adecuado, constituye el problema de correlación (en el caso numérico) y asociación, en el caso general. Además del coeficiente de correlación lineal, que mide la intensidad de la relación lineal entre dos variables numéricas, existen otros: el coeficiente de correlación múltiple, parcial, así como las diferentes medidas de asociación para variables ordinales y nominales (Reynolds, 1977 ; Everitt, 1980; Liebetrau, 1983).

Los problemas estadísticos implicados en el análisis de regresión son: obtener un buen estimador de los parámetros del modelo; contrastar hipótesis sobre dichos parámetros; determinar la bondad del modelo para los datos particulares y comprobar que se cumplen las hipótesis exigidas. Problemas semejantes se plantean referidos a la determinación de un coeficiente que mida la intensidad de la asociación entre la variable dependiente y el conjunto de variables independientes, o problema de correlación.

En el estudio descriptivo de la asociación y regresión no se plantean problemas de inferencia. Por este motivo, no se trata el problema del contraste de hipótesis. Por otro lado, los otros tres apartados sólo se estudian de una forma intuitiva, ya que no se poseen los instrumentos conceptuales adecuados para un estudio formal de dichos problemas. Además, como señalan Afifi y Azen (1977), la decisión de si un procedimiento estadístico particular es o no el indicado para resolver un problema dado no es una cuestión solamente estadística, ya que en la elección de un modelo adecuado intervienen muchos aspectos no estadísticos específicos de la situación.

Los modelos lineales de regresión univariantes se extienden a los correspondientes modelos multivariantes, MANOVA, MANCOVA y regresión multivariante, en el caso de múltiples variables dependientes (Cuadras, 1991; Bray y Maxwell, 1985). Esta no es, sin embargo, la única forma de extensión posible. En los casos mencionados, las ecuaciones obtenidas expresan la variable dependiente (o un vector formado por las variables dependientes) como combinación lineal de las variables independientes. Otras posibilidades se presentan con ligeras variantes sobre estos modelos, que, sin embargo, tienen consecuencias metodológicas muy importantes en la investigación.

Supongamos que no es necesario distinguir entre variables dependientes e independientes, sino que lo que se trata es de reexpresar cada variable en función del resto. Ello puede interpretarse como obtener un cambio de base en un espacio vectorial en el que los ejes primitivos de coordenadas son las variables observadas y los nuevos ejes combinaciones lineales de las mismas. Si se combina esta idea con la de que el nuevo sistema de ejes esté formado por un conjunto de variables incorrelacionadas y que, además, se obtengan en un orden decreciente en cuanto a la varianza explicada, se obtiene el modelo de componentes principales. Este modelo guarda una gran relación con la distribución normal multivariante, ya que los ejes obtenidos con las hipótesis anteriores son los ejes de los elipsoides de inercia de dicha distribución. En el caso de sólo dos variables se obtiene la recta de regresión lineal, por lo que el análisis de componentes principales puede considerarse una extensión de la regresión.

La idea de componentes principales, obtenidos en orden decreciente de varianza, que pueden usarse como nuevas coordenadas para los datos, lleva a la idea de reducción de la dimensión y representación de los datos multivariantes

en un número pequeño de factores, de donde surge primitivamente el análisis factorial (Harman, 1976) y posteriormente las técnicas derivadas de él, hasta llegar al análisis de correspondencias (Cornejo, 1988), que extiende el análisis factorial al estudio de las tablas de contingencia de variables cualitativas dobles o múltiples.

Otra posibilidad de extensión es la de suponer que no existe una diferenciación estricta entre variables dependientes e independientes, sino que las diversas variables están ligadas entre sí formando redes causales donde unas variables dependen de otras formando un sistema de interrelaciones múltiples. De este modo se llega a los modelos de estructuras covariantes (Bollen, 1989), al análisis de caminos (path analysis), LISREL y otros modelos de desarrollo muy reciente.

1.1.2. ALGUNAS NOTAS HISTORICAS

Según Benzecri (1982), los trabajos más influyentes sobre la correlación y regresión se deben a autores de lengua inglesa que, a diferencia de Laplace o Gauss, no fueron grandes matemáticos. Interesados por las aplicaciones (Biometría, Psicometría, Agronomía) estuvieron alejados de los trabajos de sus contemporáneos en Álgebra y en Análisis.

Fue el astrónomo belga Quetelet (1796-1874) quien introdujo la ley normal en Biometría. Su nombre está asociado a la doctrina del hombre medio, aunque su originalidad no es haber calculado las medias de las magnitudes antropométricas, sino haber considerado su dispersión y descubierto que la ley normal (bien conocida en Astronomía) ofrecía una descripción aceptable de tal variabilidad. Hacia 1846 había utilizado esta distribución como ajuste a sus medidas antropométricas (Seal, 1967).

La covariación de las medidas de sucesivas generaciones: regresión

La etapa siguiente del desarrollo de estos conceptos consistió en el estudio conjunto de la variación de dos medidas (como la estatura del padre en relación con la de sus hijos y se debe a Galton. Darwin, primo de Galton, para confirmar su teoría de la evolución, propuso al estadístico el problema de la comparación de los hijos con sus padres "*porque sin una semejanza estrecha de éstos y aquellos, los caracteres distintivos de los mejor adaptados de una generación no habrían pasado a la siguiente -; y también el de la diversidad de formas en el seno de una generación - porque sin tal diversidad, no habría individuos superiormente adaptados, cuyo tipo debió imponerse a través del azar de la existencia*" (Benzecri, 1982, pg. 31).

A parte de la aportación a la Biología, la historia del desarrollo de los conceptos de regresión y correlación arroja, sin duda, una lección didáctica: motivados por la solución de un problema de aplicación, estos investigadores lograron resolver cuestiones que otros matemáticos mejor preparados en análisis, como Laplace o Gauss no lograron solucionar.

Según Benzecri (1982), Galton comienza su investigación con el estudio de guisantes; adquiere semillas seleccionadas, las mide, las siembra y mide las semillas de su recolección. Los resultados de las medidas se consignan en una tabla rectangular, que es una primitiva tabla de contingencia. Sea J la sucesión de valores enteros j que puede tomar el diámetro (en centésimas de

pulgada) y sea I el diámetro i de un guisante de la recolección: se forma una tabla $I \times J$ y se escribe en la intersección de la fila i y de la columna j el número $k(i,j)$ de guisantes de la recolección cuyo diámetro es i . Para cada valor j del diámetro de una semilla, Galton calcula la media y la varianza de i (es decir, del diámetro de los guisantes recolectados). Encuentra que la media $\bar{i}(j)$ es aproximadamente una función lineal de j y halla también un coeficiente r o pendiente de dicha recta, que daría origen a la idea de recta de regresión: $\bar{i}(j) - \bar{i} = r(j - \bar{j})$. Asimismo observa que la varianza de cada generación i no dependía de j .

Galton descubre también que las desviaciones $(\bar{i}(j) - \bar{i})$ de los descendientes respecto a la media, no es más que la tercera parte de la desviación $j - \bar{j}$ de los padres hacia su media: ha habido de una generación a la siguiente un retorno hacia la media, hacia el individuo tipo. En 1877, ante la Royal Institution of Great Britain, Galton habla de **reversión**; usará pronto el término **regresión** para toda fórmula aproximada que expresa una variable aleatoria en función de otras, llamadas explicativas. Además, Galton ha comprendido que la varianza condicional debe ser el producto de la varianza general σ^2 por $(1 - r^2)$: porque la varianza marginal σ^2 es estable de generación en generación; es decir, la varianza de los hijos es la suma de la varianza condicional más la heredada de los padres, reducida en la proporción r^2 .

Posteriormente, Galton colecciona datos antropométricos, descubriendo empíricamente las elipses de concentración de la normal bivariante y la ecuación de la línea de regresión. Todos estos resultados fueron posteriormente demostrados con precisión por J. D. Hamilton Dickson, a petición de Galton.

Teoría de errores y distribución normal multivariante

Augusto Bravais (1811-1863) que desempeñó actividades de físico, astrónomo, geólogo, geodésico, probabilista, ... es otra figura importante en el desarrollo de estos conceptos. En el estudio de los errores en las medidas de las coordenadas de un punto, parte de las fórmulas obtenidas por Laplace según el criterio de los mínimos cuadrados (Pearson, 1920, pg. 189).

Si notamos por m, n, p, \dots , las medidas primarias; los errores (x, y, z) sobre las coordenadas de un punto en el espacio se puede suponer que son de la forma:

$$\begin{aligned} x &= A'm + B'n + C'p + \dots; \\ y &= A'm + B'n + C'p + \dots; \\ z &= A''m + B''n + C''p + \dots; \end{aligned}$$

y la distribución de x en este caso es

$$(h_x/\pi)^{1/2} \exp(-h_x x^2) dx,$$

donde h_x está dado por

$$1/h_x = (A^2/h_m) + (B^2/h_n) + (C^2/h_p) + \dots = \sum (A^2/h_m)$$

h_m, h_n, h_p, \dots , son los parámetros de la distribución de m, n, p ; (que en la

forma actual escribimos como $(1/2) \sigma_m^2 \dots$. Expresiones similares se obtienen para $1/h_y$ y $1/h_z$.

Como observa Bravais, "la coexistencia de las mismas variables m , n , p , ... en las ecuaciones simultáneas de x y de y , ocasiona una correlación tal, que los módulos h_x , h_y , dejan de representar la posibilidad de valores simultáneos de (x, y) " (Seal, 1967, pg. 218). Por primera vez se emplea la palabra correlación, en una Memoria presentada en 1846 en la Academia de Ciencias en el Instituto de Francia, que llegará a ser tan empleada en Estadística.

Bravais buscando la distribución conjunta de (x, y) demuestra que efectuando una sustitución lineal sobre las m , n , p , se obtiene de nuevo la exponencial de una forma cuadrática; que esta forma subsiste cuando por integración parcial se elimina una o varias variables, a fin de tener la ley conjunta de las variables restantes. En sus cálculos tiene una idea interesante; hace una rotación de los ejes en el plano de las (x, y) ; así por una parte descubre los ejes principales de las elipses de concentración, por lo que efectúa el primer análisis factorial; por otra parte, utiliza en sus fórmulas la suma $\Sigma(AA'/h_m)$ que daría origen al concepto de covarianza. Bravais descubre que la condición de independencia entre las dos coordenadas es que esta suma se anule.

Covariación de medidas biológicas en el mismo individuo: la correlación

Posteriormente K. Pearson rechaza que Bravais haya descubierto la correlación; en el sentido que para él, como para los otros especialistas de la teoría de errores, x e y no sean más que los valores estimados de las variables aleatorias normales dos a dos independientes: "las cantidades que observaban eran, para estos distinguidos hombres, absolutamente independientes; no llegaron a la idea de correlación entre cantidades observadas", (Pearson, 1920, pg. 192).

Esta idea fundamental para el análisis de datos, era seguramente difícil de concebir, porque el mismo Galton no acaba de adquirirla hasta 1888. El estudio de la herencia llevó a Galton a la noción de correlación; en 1869 publica su libro *Hereditary Genius*, en el que se pregunta cómo influye un factor del padre en el hijo, aunque también había que contar con los de la madre, abuelos y otros antepasados. El método para expresar estas múltiples relaciones de causalidad se le ocurre a Galton una mañana, repasando unas notas de su libreta mientras esperaba el tren. Lo cuenta de la siguiente manera: Parecía evidente por observación, y había sido completamente confirmado por esta teoría, que existía un "índice de correlación"; o sea, una fracción, que ahora llamamos simplemente r que relaciona con la mayor aproximación cada valor de desviación (de la media) por parte del sujeto con el promedio de todas las desviaciones asociadas, del pariente, tal como ha sido descrito. Por lo tanto, la aproximación de cualquier parentesco específico puede ser hallada y expresada con un término único. Si un individuo particular se desviaba mucho, el promedio de las desviaciones de todos sus hermanos será una fracción definida de esa cantidad; del mismo modo que los hijos, los padres, primos hermanos, etc. Cuando no hay relación alguna, r se

vuelve igual a 0; cuando es tan cercana que sujeto y pariente poseen idéntico valor, entonces $r = 1$. Por lo tanto, el valor de r reside siempre entre los límites extremos de 0 y 1. Mucho más podría añadirse, pero no sin usar lenguaje técnico, lo cual sería aquí inadecuado" (citado por Newman, 1956, pg. 239).

Galton reconoció que el aparato estadístico que había desarrollado para tratar el problema de la herencia tenía una significación más amplia. Sin embargo, como Pearson (1920) señala, "Galton no había aún alcanzado la idea de correlación negativa", (pg. 199). Se basa para ello en la definición que propone de correlación en su discurso ante la Royal Society el 5 de diciembre de 1888, "dos órganos variables se llaman correlacionados cuando la variación en uno se acompaña en promedio en una variación del otro en el mismo sentido", (Pearson, 1920, pg. 199). Fue Weldon en 1892 quien primero publicó un artículo en el que señala el significado de un coeficiente de correlación negativo, (Pearson, 1920). Hasta entonces Galton no había considerado más que la distribución conjunta de una medida x tomada sobre el padre y la misma medida tomada sobre los hijos: en este momento descubre la posibilidad de estudiar variaciones conjuntas de medidas biológicas diferentes sobre los mismos individuos, lo que los biólogos llaman correlación de estructuras. En Natural Inheritance publicado en 1889, Galton propone un formidable programa de investigación biométrica: estudiar estadísticamente la variabilidad y la plasticidad de las formas vivientes, a fin de confirmar matemáticamente el mecanismo de la evolución descrito por Darwin (Benzecri, 1982).

Weldon, desde 1892, calcula para cinco razas de camarones los coeficientes de correlación entre las dimensiones de 22 pares de órganos, "Weldon calculó el primer coeficiente de correlación orgánica, es decir, la medida numérica del grado de interrelación entre dos órganos de caracteres en el mismo individuo" (Pearson, 1906, pg. 283). Concluye que estos coeficientes r no varían de raza a raza: conclusión que después de Pearson la estadística contemporánea mirará como ilusoria. Pero son los datos de Weldon los que sirven para crear la teoría de errores de muestreo sobre r . Tras los camarones, estudia los cangrejos de mar: compara razas de una misma especie: estudia la variabilidad sincrónica, la diacrónica, la evolución, la selección, etc.

Calculando diversos coeficientes de correlación, Galton y Pearson encontraron muy frecuentemente valores de r alrededor de 0.5: por ello llegaron a la convicción de que una parte constante de la varianza de la generación se hereda de las generaciones anteriores, publicando estos resultados en su Law of Ancestral Heredity. Al mismo tiempo, la Genética había conocido un acontecimiento extraordinario: en 1900 las leyes de Mendel -publicadas desde 1865- son redescubiertas por De Vries, Tschermark y Correns.

El control de las variables independientes en el estudio causa-efecto: el diseño de experimentos.

El modelo genético de Mendel, en su forma más simple supone que todo individuo posee para cada carácter heredado (locus cromosómico) dos modalidades (llamados alelos o genes alomórficos) contenidos en dos cromosomas homólogos, cada uno recibido de un progenitor. Contrariamente a lo que se pensaba hasta entonces, los caracteres heredados por el hijo no son una especie de media entre los caracteres correspondientes de sus padres, sino que ha recibido de cada uno de ellos la mitad de sus componentes genéticos. El caso más simple es aquél en donde por un locus no hay más que dos alelos

posibles; uno dominante D, otro recesivo r: un sujeto que posee dos veces D (DD) o una vez D (Dr) tiene la apariencia ligada a D; mientras que la apariencia ligada a r no aparece más que en los sujetos (rr). Según Benzecri (1982) Mendel no habría podido descubrir estas leyes sin operar en condiciones experimentales muy controladas (usando razas puras de guisantes y generaciones de fecundaciones controladas), esto es, creando una población cuya estructura es muy artificial.

Para Benzecri (1982), la unanimidad entre los biólogos respecto a este modelo no fue general, ya que las experiencias de Mendel son muy difíciles de controlar; el modelo Dr no es el único modelo (existen locus a los cuales corresponden más de dos genes alomorfos); y muchos caracteres varían continuamente y no pueden explicarse por un solo locus. Pearson y Weldon intentan por tanto confrontar, con un modelo mendeliano generalizado (afectando varios locus a un carácter continuo), su ley de la herencia ancestral, concluyendo que no hay oposición esencial entre las leyes de correlación de la biometría y los mecanismos mendelianos; pero que la concepción que se hace de ellos debe ser suavizada, (Pearson, 1965b, pg. 346-347).

Aparentemente el tipo de experimentación mendeliana se opone al principio fundamental en análisis de datos, según el cual la composición de la población (o de la muestra que la representa) es también un fenómeno natural digno de ser estudiado. En general, las muestras no naturales no descubren todo el fenómeno; pero, sin embargo, este control experimental ha permitido descubrir las leyes de la Física y Biología. Fisher, posteriormente pondría a punto una metodología basada en esta importante distinción entre observación (de poblaciones naturales) y experimentación (sobre muestras artificiales), creando el diseño de experimentos. También toma de la Genética un término que actualmente valioso: el de **factor**. En Psicometría se denominan "factores" a magnitudes nuevas (funciones de medidas primarias), que proporcionan expresiones numéricas supuestas de tendencias profundas del individuo. El término de factor ha sido también utilizado en Estadística, para una variable explícitamente puesta a prueba en un diseño de experimentos.

En 1896, Karl Pearson estimulado por el gran número de variables biométricas que siguen la ley normal multidimensional, generaliza la fórmula de regresión encontrada por Galton a varias dimensiones. A partir de ello se pasó a la correlación parcial entre dos componentes x_1 y x_2 , (Seal, 1967).

Otro dato de interés señalado por Benzecri (1982) es que el primer volumen de Biometrika (1901-2) publica, bajo la firma de W. R. MacDonnel, un artículo de antropometría criminal que contiene la primera matriz completa de correlación impresa.

Extensión de la idea de asociación a datos cualitativos: La prueba de χ^2

La observación atenta de las leyes empíricas conduce a K. Pearson al descubrimiento de la famosa prueba de χ^2 , (Pearson, 1965a) que permite apreciar si una distribución empírica difiere significativamente de otra teórica; esto es realizar un contraste de adherencia de ajuste. La prueba puede extenderse al análisis de las tablas de contingencia.

Sean I y J dos conjuntos finitos; C el conjunto producto $I \times J$; se compara la distribución de probabilidad compuesta p_{IJ} al producto $p_I p_J$ de las

distribuciones marginales calculando:

$$d^2 = ||p_{IJ} - p_I p_J||^2 = \sum ((p_{ij} - (p_I p_J))^2 / p_I p_J) | i \in I, j \in J$$

Esta expresión es nula bajo la hipótesis de independencia; por ello $p_{ij} - p_I p_J$ es una medida de la relación entre dos variables discontinuas que tienen a I y J como conjuntos de modalidades.

Debido a las fluctuaciones del muestreo, el estadístico d^2 teóricamente nulo bajo la hipótesis de independencia, se distribuye como una χ^2 con dimensión (grados de libertad) $Card(I-1) \cdot Card(J-1)$. K. Pearson y sus contemporáneos no conocen el valor exacto de este parámetro: se reservó a Fisher hallarlo, gracias a las concepciones geométricas que aplicó en el estudio de la teoría de la estimación y el análisis de la varianza.

Fisher hizo dos contribuciones esenciales a la teoría del muestreo de las ecuaciones de regresión:

- la introducción de la idea y técnica de contrastes sobre los coeficientes de regresión y
- el empleo de variables cualitativas independientes, que llevaría a la idea de análisis de varianza y diseño de experimentos (Seal, 1967).

Así, la idea de correlación, primero expresada por Galton para las magnitudes numéricas se extiende a todo tipo de variable. Quedaba por relacionar los dos conceptos: Pearson muestra en 1904 que para una correlación r (en sentido de Galton) entre x e y (variables normales) se tiene como valor límite

$$d^2 = ||p_{IJ} - p_I p_J||^2 = r^2 / (1 - r^2);$$

cuando se hacen muy pequeñas las subdivisiones I y J del eje de las x y del eje de las y .

Recíprocamente, define para toda distribución p_{IJ} , correspondiente a una variable cualitativa bidimensional, un coeficiente de correlación generalizado:

$$r = \sqrt{\frac{d^2}{1 + d^2}}$$

o coeficiente de contingencia, que, posteriormente pasará en análisis de correspondencias a ser la traza, o suma de valores propios.

Pearson vio claramente que la relación más general que revela la observación de los fenómenos naturales es la contingencia, la coocurrencia; e intuyó las posibilidades del análisis de la tabla de contingencia aunque no llegó a proponer explícitamente la investigación del número de factores implícitos en la misma.

Aún fue más allá: "como entre I y J la relación es absolutamente simétrica, Pearson propone rechazar la noción polarizada y rígida de causa (i

causa j ; o al contrario j causa i) para limitarse a las relaciones (conexiones) recíprocas (i y j están comúnmente unidas) que son las percibibles por los sentidos". Para él, "La causación es solamente el límite conceptual de la correlación cuando la banda (banda central de la tabla de contingencia P_{IJ} : llega a ser tan delgada que se asemeja a una curva" y "esta curva es la ley de la "causalidad" que el hombre introduce en la naturaleza como si tuviese una existencia real" (Benzecri, 1982, pg. 46).

Puesto que la noción de causa ha estado relacionada con la idea de asociación y sobrevive, a pesar de las críticas de Pearson, consideramos conveniente en las dos secciones siguientes discutir este tema y su relación con la idea de asociación.

1.1.3. EL CONCEPTO DE CAUSA

En palabras de Cook y Campbell (1979), "la epistemología de la causación y del método científico está en la actualidad en un estado productivo cercano al caos", (pg. 10). Al igual que estos autores reconocemos nuestra limitación para llevar a cabo un estudio completo de esta cuestión, cosa que, por otro lado, caería fuera del objeto de esta Tesis. Por estos motivos, consideramos suficiente presentar un resumen del tratamiento que del tema hacen los mencionados autores. Basaremos nuestra exposición en el trabajo de Cook y Campbell (1979) aunque completado o reinterpretado en ciertos puntos, según otras referencias, principalmente Rivadulla (1991) y Messick (1992).

Según Pozo (1987), la primera teoría sistemática de la causalidad se encuentra en Aristóteles, según el cual existían cuatro clases de causas: la causa material (el soporte material); la causa formal (esencia o cualidad de la cosa); la causa eficiente (el agente externo responsable del efecto); y la causa final (meta hacia la que tiende la cosa). Esta teoría fue admitida en la filosofía occidental hasta la revolución científica debida a las ideas de Galileo. Con él nace la ciencia moderna y queda restringido el concepto de causa a la causa eficiente.

Cook y Campbell (1979) clasifican en diversas escuelas las tradiciones modernas que, en filosofía de la ciencia, se han ocupado de la noción de causa.

La tradición positivista

Esta escuela es representada por Hume, quien exige tres condiciones para que pueda hablarse de causa: (a) contigüidad entre el efecto presumido y la causa; (b) precedencia temporal de la causa sobre el efecto y c) conjunción constante, es decir que la causa ha de presentarse siempre que se dé el efecto. Además preconiza el origen del conocimiento en las impresiones sensoriales, (Rivadulla, 1991). El análisis de Hume mostró que lo que observamos son hechos que covarían, y no directamente la causa y justificó la equiparación de la causación con la predicción fiable. Cook y Campbell (1979) rechazan la teoría de Hume y otros seguidores como Russell o Pearson, quienes supusieron que una alta correlación demostraba o era sinónima de causalidad. Para los positivistas, una vez que se concibe la causa en términos diferentes de la correlación, se convierte en un factor inobservable acerca del cual efectuamos inferencias falibles, porque nos basamos sólo en los observables.

Russell (1973) señaló la falta de preocupación de ciencias como la Astronomía o Física respecto a los inobservables. "Todos los filósofos de todas las escuelas suponen que la causalidad es uno de los axiomas o postulados fundamentales de la ciencia; muy singularmente, sin embargo, en las ciencias adelantadas como la astronomía gravitacional, la palabra "causa" no se presenta nunca" (Russell, 1973). Estas ciencias obtienen buenas predicciones a partir de relaciones funcionales. Se preguntó entonces para qué se necesita el concepto de causa, que no está siempre implícita en una relación de tipo funcional. Cook y Campbell (1979) señalan ciertos argumentos erróneos de Russell, ya que en revistas de investigación en Física aparece con frecuencia referencias a la noción de causa y aunque no todas las relaciones funcionales implican causa, muchas de ellas sí lo hacen. Russell tampoco examina el papel que la búsqueda de relaciones causales ha jugado en el establecimiento de ciertas relaciones funcionales.

Russell acertaba, sin embargo, en el hecho de que el concepto de causa ha jugado un papel menor en las ciencias naturales del que está jugando en las ciencias sociales y humanas; ello es debido a que las primeras pueden emplear rutinariamente ciertos procedimientos de investigación no siempre alcanzables en las últimas. Estos procedimientos son, en opinión de Cook y Campbell (1979):

- a) aislamiento experimental, llevando a cabo ensayos en laboratorio con condiciones muy controladas
- b) usualmente las variables dependientes no varían a lo largo del tiempo si no se produce un tratamiento
- c) se dispone de teorías explícitas y precisas que especifican el tamaño esperado de los efectos y
- d) se dispone de instrumentos de medición suficientemente precisos para medir el efecto esperado.

La negación positivista de la idea de causación está conceptualmente relacionada con otras creencias. En la vida cotidiana hay una tendencia a diferenciar la evidencia de los sentidos del mundo real que creemos percibir a través de ellos. El científico, en la misma forma, usualmente hace una distinción entre los datos obtenidos de su (a veces falible) instrumento y los procesos que quiere confirmar o diagnosticar hablando de constructos teóricos e indicadores empíricos (Carmines y Zeller, 1979). El positivismo se revela contra este dualismo de evidencia y realidad. Por tanto, Hume creyó que no debe hablarse de una necesidad causal o de una realidad separada de la evidencia de los sentidos.

Otra manifestación de esta corriente filosófica ha sido el dogma de emplear definiciones operativas para los términos teóricos que llevó al uso repetido de instrumentos particulares de medida, a los que se dio un papel teórico privilegiado, o bien, a que cada medida alternativa de un mismo proceso definiese un concepto teórico diferente. Esta concepción se abandonó por inaceptable, ya que todas las medidas implican muchas variables teóricas conocidas, otras desconocidas y muchas hipótesis no probadas. La revuelta psicológica que surgió como consecuencia motivó la discusión del concepto de validez de constructo en los test psicométricos.

Según Pozo (1987), Kant coincide con Hume al señalar que la causalidad no es un dato de la experiencia. Nada hay en ésta que nos informe inmediatamente de la existencia de una conexión entre causa y efecto. Pero por oposición a él

no cree que nuestro conocimiento sea una simple copia de la realidad, ni que las impresiones sensoriales sean el origen de nuestro conocimiento. Para Kant existen una serie de conceptos o principios que la mente impone sobre la experiencia, entre las cuales se halla el de la causalidad.

El principio de causación en Kant no es empírico; *"lo que hace que un hecho se considere causa de otro no es su simple yuxtaposición sino que el primer hecho (causa) aporta algo de sí mismo (transmite) al segundo (efecto)"* (Pozo, 1987), pg. 30).

Los principios causales dentro de esta tendencia filosófica serían, según Pozo, los siguientes:

- ▶ Determinismo causal, por el cual todo hecho tiene su causa.
- ▶ Constancia: una causa produce siempre, de modo necesario el mismo efecto.
- ▶ Condicionalidad: si ocurre cierta condición se producirá un consecuente.
- ▶ Asimetría: La relación causal es no reversible.
- ▶ Productividad: hay una transmisión real de la causa al efecto que es originado por ella.

Teoría esencialista

Esta teoría, según Cook y Campbell (1979), describe a los filósofos que argumentan que el término causa debe usarse sólo para referirse a variables que explican fenómenos, en el sentido de ser necesarias y suficientes para que ocurra dicho fenómeno. Por tanto, no toman como causa aquellos factores que a veces, pero no siempre, producen el fenómeno. Sin embargo, esta aproximación no es muy útil en las ciencias sociales, puesto que en ellas no existen teorías probadas empíricamente en sistemas relativamente cerrados, esto es, sistemas en los que todas las variables extrañas han sido excluidas. En su obra "A probabilistic theory of causality", publicada en 1979, Suppes cree que las relaciones causales observadas en estas ciencias son falibles y la conexión entre antecedentes y consecuentes será probabilística. Estas relaciones probabilísticas no son admitidas por los esencialistas que buscan leyes funcionales para expresar la relación entre un conjunto de observables y una comprensión causal completa de un suceso particular.

En su búsqueda de causas últimas, los esencialistas no requieren, en general, que la causa preceda al efecto, aunque sí que las dos variables estén simultáneamente relacionadas. Si no fuese así, podrían ocurrir otros procesos en el periodo intermedio que fuesen necesarios al efecto. A menos que estos procesos fuesen completamente especificados, la causación esencialista no puede ser inferida y si ellos están especificados, pueden ser incluidos en la red causal, de modo que el fenómeno se estudie simultáneamente.

Russell (1973) eleva, a este respecto, una cuestión importante. ¿Cómo especificar la longitud de tiempo entre el cambio de A y la respuesta B? Si la respuesta B es instantánea con A, entonces una medida retardada de B puede fallar en detectar esta respuesta. Si la respuesta es retardada, una medida

prematura de B no la detectaría. Esta cuestión plantea el problema fundamental de si es necesario o no incluir el intervalo de tiempo en cuestión. De no incluirlo, el problema puede no tener significación. Pero la dimensión temporal incluye el efecto de otras causas retardadas que ejercen su influencia en conjunción con las variables mediadoras.

La insistencia esencialista en relaciones causales infalibles y necesarias, lleva a la confusión de una alta correlación con causa y a la cuestión de porqué las condiciones necesarias y suficientes han de preceder al efecto. Las relaciones funcionales implican causación reversible, como por ejemplo, en la relación entre temperatura y presión en los gases. En la práctica, sin embargo, las causas bi-direccionales ocasionan problemas. En los estudios correlacionales es a veces difícil distinguir cual es la causa y cual el efecto. En los estudios experimentales a veces no es posible controlar una variable independiente que también es variable dependiente. Por otro lado, en un programa de investigación es posible manipular un constructo causal en un estudio y, posteriormente, manipular el efecto producido para ser introducido como causa en un segundo estudio.

John Stuart Mill y la causalidad

Mill sostuvo que la inferencia causal depende de tres factores:

- a) la causa ha de preceder al efecto
- b) la causa y el efecto han de estar relacionadas y
- c) han de eliminarse otras explicaciones causa-efecto sobre el fenómeno.

Con estas ideas trabajó en los métodos de concordancia, diferencias y variación concomitante. Para Mill el problema fundamental es si la inducción eliminativa constituye un procedimiento correcto para el establecimiento de relaciones causales, (Rivadulla, 1991).

El método de concordancia establece que un efecto ha de estar presente cuando lo está la causa. El método de diferencias establece que el efecto ha de estar ausente, cuando está ausente la causa. El método de variación concomitante implica que cuando se observan causa y efecto, la inferencia causal será más fuerte que cuando se puedan descartar otras interpretaciones de la covariación entre las variables. La mayor contribución de Mill fue constatar que la comparación de situaciones donde una amenaza particular a la inferencia válida esté y no esté operando proporciona la clave para comprobar si la amenaza en cuestión podría o no explicar la relación observada. El concepto de grupo de control está aquí implícito y es central en el pensamiento de Mill acerca de la idea de causa.

La falta de satisfacción de Mill respecto a las secuencias de covariaciones que ocurren en forma natural, se pone de manifiesto con ejemplos tales como la sucesión entre noche y día. No puede decirse que la noche sea la causa del día ni al contrario, aunque estos covarien. Por otro lado, fenómenos como la covariación entre peso y talla no implican causalidad de una de estas variables sobre la otra, sino la existencia de otros factores genéticos y nutricionales que producen la variación conjunta de estas variables.

Popper y el contraste de hipótesis

Entre los filósofos contemporáneos, Popper (1962) ha sido el más

explícito y sistemático en reconocer la necesidad de basar el conocimiento en desechar explicaciones alternativas de los fenómenos. Aunque su teoría tiene un alcance más general, aquí nos limitamos a considerar lo referente al contraste de hipótesis de tipo causal.

El pensamiento de Popper se basa en su aceptación de la crítica de Hume a la inducción. *"Ahora bien, en mi opinión no existe nada que pueda llamarse inducción. Por tanto, será lógicamente inadmisible la inferencia de teorías a partir de enunciados singulares que estén verificados por la experiencia"* (Popper, 1962, pg. 39). Según Messick (1992) la aceptación de esta crítica lleva a negar la posibilidad de conocimiento confirmatorio basado en la generalización de observaciones particulares a proposiciones científicas generales. Sin embargo, Popper sugiere que un conocimiento deductivo es lógicamente posible en cuanto que la deducción de una proposición científica puede ser puesta a prueba comparando los patrones deducidos en relación con los patrones obtenidos. Si los datos se ajustan a los patrones, la teoría recibe un apoyo provisional, al menos que otra teoría conocida pueda explicar este patrón. *"Pero, ciertamente, sólo admitiré un sistema entre los científicos o empíricos si es susceptible de ser contrastado por la experiencia. Estas consideraciones nos sugieren que el criterio de demarcación que hemos de adoptar no es el de la verificabilidad, sino el de la falsabilidad de los sistemas. Dicho de otro modo: no exigiré que un sistema científico pueda ser seleccionado, de una vez por todas, en un sentido positivo; pero si que sea susceptible de selección en un sentido negativo por medio de contrastes o pruebas empíricas; ha de ser posible aceptar por la experiencia un sistema científico empírico"* (Popper, 1962, pg. 40). Pero esta corroboración nunca prueba que la teoría sea cierta, aunque los fallos en la confirmación pueden falsar la teoría sometida a prueba (Rivadulla, 1991).

Ambos, confirmacionistas y falsacionistas, asumen que las teorías científicas pueden usarse para generar predicciones cuantitativas respecto a los resultados de los experimentos científicos, y que estas predicciones pueden ser comparadas con los datos. Algunas objeciones son que los datos nunca reproducen exactamente una predicción cuantitativa y así, "fallan en confirmar" o "falsan" cada teoría y cada hipótesis causal. La comunidad científica, sin embargo, acuerda que los resultados posibles pueden ser divididos en aquellos que confirman la hipótesis, los que la falsan y los ambiguos (Aunque los grados de precisión requerida para la confirmación varían en diferentes estadios de una ciencia y para diferentes tipos de datos).

Respecto a la elección entre teorías, hay una distinción entre confirmacionistas y falsacionistas. El empiricismo de los positivistas lleva a la interpretación de que la teoría que produce la predicción es un resumen y predictor útil y económico de la experiencia. La ambigüedad que viene del reconocimiento de que esta teoría es sólo una de las muchas diferentes que podría representar igualmente bien los datos no se ve como relevante. La "confirmación" es una confirmación de utilidad, más que de verdad de la teoría.

Según Messick (1992), Popper enfatiza la ambigüedad de la confirmación. Para él, la corroboración sólo prueba que esta teoría ha sido contrastada y que no ha podido ser rechazada. Este estatus de "no rechazada aún", aunque precioso en cualquier ciencia está aún muy lejos del de "ser cierta". La asimetría entre el rechazo lógicamente válido y la confirmación lógicamente inconclusa es la principal clave del énfasis de Popper sobre la "falsación".

Así, el único proceso disponible para establecer una teoría científica es el de eliminar las hipótesis rivales plausibles. Puesto que estas no son nunca enumerables con anticipación y, ya que, en general, cada una de ellas requerirá un modo particular de eliminación, este procedimiento, aunque inevitable es más bien insatisfactorio e inconclusivo.

Por otro lado, sería equivocado establecer que las teorías se rechazan sólo por medio de otras teorías alternativas, ni tampoco por los datos; lo esencial es una combinación de teorías alternativas y hechos discordantes. La tesis rígida de que cualquier observación discordante falsa una teoría es rebatida por Popper, quien enfatiza la necesidad de validación múltiple.

Según Cook y Campbell (1979), la perspectiva de Popper depende de la hipótesis de que las teorías pueden ser comparadas entre sí. Esto es discutido por Kuhn, o Feyerabend. Los postpositivistas defienden que las observaciones o "hechos" están impregnadas por la teoría o paradigma bajo la que son recogidos. De este modo, el mérito relativo de las teorías no puede ser estimado comparando las predicciones de cada una de ellas con datos "objetivos" (libres de teoría). Sin embargo, en las grandes revoluciones científicas, muchos hechos, aunque recogidos en el marco de teorías específicas, han resultado útiles para pruebas comparativas que demostraron los méritos relativos de nuevas teorías rivales.

Cook y Campbell sostienen que algunos de los filósofos de la ciencia han exagerado el papel de la teoría comprensiva en el avance científico y han mostrado la evidencia experimental casi como irrelevante. Por el contrario, señalan que muchas veces la experimentación exploratoria no guiada por una teoría formal o incluso descubrimientos empíricos tangenciales e inesperados han sido la fuente de grandes descubrimientos científicos.

La teoría de la causación activa

Según Cook y Campbell (1979), algunos filósofos como Collingwood y Suppes han señalado que en el lenguaje ordinario, causa implica manipulación. La manipulación de la causa implica el efecto, aunque la probabilidad de obtenerlo decrece cuanto más "social" sea el fenómeno, o cuanto más tiempo transcurra entre causa y efecto.

Según Cook y Campbell (1979), Collingwood distingue tres sentidos del término causa:

- a) Cuando "causa" es un acto libre y deliberado de un ser consciente y es lo que le motiva a actuar de una determinada forma. "¿Qué es lo que causó que Napoleón invadiera Rusia?
- b) La "causa de un suceso natural que produce o impide que ocurra algo. Por ejemplo la vacuna es causa de prevención de una enfermedad. Este sentido de causa acota la idea de ciencia práctica que informa acerca de las consecuencias de algo. Algunos autores comparan esta acepción con un tipo de información parcial parecida a la que se obtiene en una receta de cocina: no sabemos la composición química de los ingredientes, ni porqué el orden en que se mezclan o porqué las cantidades son precisas; pero sabemos el resultado que cabe esperar de la mezcla.
- c) Su tercer sentido coincide con el esencialista; el objetivo sería explicar un fenómeno tan enteramente que llegásemos a la causa inevitable de un suceso único.

Perspectiva crítica-realista

En esta teoría la disposición humana para inferir relaciones causales es producto de la evolución biológica de los procesos mentales-cerebrales que ha resultado en una unidad psíquica referida a la causación. Esta unidad es adaptativa, porque a menudo detecta procesos causales que ocurren en el mundo real; pero no se ajusta totalmente al mundo, pues algunas de las "causas" percibidas por los humanos sólo reflejan concomitancias que no tienen implicaciones para cambiar nuestro comportamiento y adaptarlo más efectivamente a las circunstancias externas.

Esta perspectiva evolutiva nos permite reconocer las percepciones causales como "subjetivas", construidas por la mente, pero a la vez enfatiza el hecho de que muchas de ellas constituyen asertos acerca de la naturaleza del mundo que van más allá de la experiencia de la persona y tienen contenido objetivo que puede ser cierto o falso. La perspectiva es realista porque asume que la relación causal existe fuera de la mente humana y es realista-crítica porque asume que no puede ser totalmente percibida por las limitaciones de nuestros sentidos.

La perspectiva evolutiva nos lleva a una distinción importante entre simple correlación y relación causal verdadera, entre predicción y diagnosis de causas manipulables que nos permitan cambiar el entorno. La mayor parte de los seres vivos tienen capacidad de adaptación que les permite explotar las correlaciones predictivamente útiles entre las variables sensibles de su medio. Más aún, es la existencia de tales relaciones que da sentido a la idea de adaptación. Sin embargo, sólo algunas especies, entre las que se encuentra fundamentalmente el hombre, van más allá de una diagnosis pasiva de las concomitancias e intentan manipular la causa A para producir un efecto esperado B. Estas especies desarrollarían sistemas cerebrales-mentales que proporcionen percepciones e inferencias causales.

Desafortunadamente, la unidad experiencial del concepto de causalidad lleva a los humanos a esperar una certeza lógica cuando perciben una causación. El análisis filosófico cuidadoso muestra, sin embargo, la esencia contradictoria de la relación causa-efecto: antecedencia-consecuencia y simultaneidad, no-identidad y proximidad inmediata.

En tal perspectiva, el status "subjetivo" de la inferencia causal no es incompatible con la validez general descriptiva de la imputación causal resultante y estas ideas no son muy lejanas a la concepción de Kant. Para él, la causalidad es una categoría sintética a priori, descriptiva de la naturaleza del mundo, más que lógicamente verdadera. Para nosotros, el concepto de causa puede ser a priori en el sentido que hemos nacido con él en lugar de haberlo aprendido y, por ello, puede ser que tengamos una disposición tan fuerte a percibir relaciones causales incluso donde no las hay.

1.1.4. ASOCIACION Y CAUSALIDAD

Como se ha expuesto en la sección anterior, numerosos filósofos y científicos han mantenido que la causalidad y la asociación están esencialmente relacionadas. Por ejemplo, Kendall y Lazarsfeld, Campbell and Stanley, H. Blalock, consideran que si A causa B entonces A está correlacionada positivamente con B.

mente con B. Otros autores tales como Asher, consideran que si A causa B entonces una cierta medida de correlación puede servir como aseveración del grado de la influencia causal de A en B. La visión de estos investigadores justifica las prácticas habituales de inferencia causal por las que, por ejemplo, se rechazan ciertas hipótesis causales cuando A no está correlacionado positivamente con B. En esta sección consideramos esta cuestión, estudiando la noción de causalidad desde el punto de vista estadístico y exponiendo similitudes y diferencias entre algunas de las concepciones propuestas para juzgar la asociación entre variables. Se discute, además, si la asociación puede servir como medida de la influencia causal entre las mismas.

Definición de causalidad, desde el punto de vista de los modelos estructurales

El libro de Bollen (1989) presenta una síntesis de las ideas sobre causalidad de Blalock, Campbell y Stanley y otros pioneros del estudio de causalidad, desde el punto de vista de su empleo en la construcción de modelos de ecuaciones estructurales que expliquen diversos fenómenos en las ciencias sociales. Estos modelos extienden las ideas de correlación y regresión en el sentido de admitir en el estudio redes complejas de variables interconectadas, en lugar de efectuar una separación artificial de las variables en dependientes e independientes.

Supongamos una variable y_1 aislada de toda influencia salvo de la de otra variable x_1 . Si un cambio en x_1 puede producir otro cambio en y_1 , entonces, se admite que x_1 es causa débil de y_1 . La definición tiene tres componentes: aislamiento, asociación y dirección de la influencia. No se entra en la discusión de si una variable es causa sólo en el caso de poder ser manipulada. Esto llevaría a la idea contraintuitiva de que la luna no puede causar las mareas. El problema surge, principalmente, de la imposibilidad de establecer el aislamiento, que es un ideal inalcanzable en la realidad.

Davis (1985) señala tres características de una definición de causación débil entre variables que puede ser considerada como relación de orden:

- a) Hablamos de tendencias, por lo cual se esperan excepciones individuales.
- b) Decimos " x_1 es una causa de y_1 " y no " x_1 es la causa de y_1 ". Puede haber más de una causa para y_1 .
- c) Unicamente la correlación no implica causación.

La forma matemática más simple en que podría presentarse este tipo causalidad, sería por una expresión del tipo:

$$y_1 = f(x_1)$$

es decir, una dependencia de tipo funcional; en particular esta expresión es más sencilla aún si toma una forma lineal:

$$Y_1 = \gamma_{11} x_1$$

En este caso, se produciría una asociación entre x_1 e y_1 , puesto que, por cada unidad de cambio en x_1 , se produciría exactamente γ_{11} unidades de cambio en y_1 . Esta expresión corresponde a la noción primitiva de causalidad. Por un lado, aparece una sola causa y un sólo efecto. Por otro, se manifiesta la hipótesis de Hume de "conjunción constante": cada vez que ocurre la causa se produce el efecto.

Un modelo más razonable, que incluiría el componente estocástico, sería:

$$Y_1 = \gamma_{11} x_1 + \xi_1$$

Esto presenta ya una seria implicación sobre el concepto de causalidad. Los requerimientos de aislamiento y asociación son más difíciles de evaluar que en el caso determinista. Se supone que ξ_1 es un error aleatorio y no podemos controlarlo directamente. Por ello haremos la hipótesis de pseudo-aislamiento, que consiste en suponer la incorrelación del término de error con el resto de las variables. Esta hipótesis, usual en los modelos lineales (regresión y análisis de varianza), nos permite evaluar la influencia de x_1 sobre y_1 aisladamente de ξ_1 . Ello es cierto cuando los datos se han tomado de un experimento aleatorizado, pero puede no serlo si provienen de fuentes que no cumplen este requisito. Por otro lado, desaparece la condición de Hume y el efecto ya no es perfectamente predecible a partir de la causa.

Incluso la expresión obtenida es demasiado simple. Es verosímil que haya muchas causas de y_1 , además de x_1 . Un modelo del tipo siguiente es más realista:

$$Y_1 = \gamma_{11} x_1 + \gamma_{12} x_2 + \dots + \gamma_{1q} x_q + \xi_1$$

Aislamiento

En el modelo anterior se supone que el término de error es incorrelacionado con las variables x_1, \dots, x_q . Estudiemos el efecto de violar esta hipótesis.

Una situación común viene dada cuando una variable excluida de las X es parte de ξ y produce una correlación entre x y ξ . Consideremos el modelo dado por las dos ecuaciones:

$$y_1 = \gamma_{11} x_1 + \xi_1$$

$$y_2 = \beta_{21} y_1 + \gamma_{21} x_1 + \xi_2$$

en donde los errores ξ_1 y ξ_2 están incorrelacionados entre sí y con x_1 . El diagrama de la figura 1.1.4.1 muestra la situación.

Si, por error, un investigador omite la variable interviniente y_1 en la segunda ecuación y usa el modelo:

$$y_2 = \gamma_{21} x_1 + \xi_2^*$$

donde,

$$\xi_2^* = \beta_{21} y_1 + \xi_2$$

se puede demostrar que al estimar el efecto directo de x_1 sobre y_2 , γ_{21} , obtendremos en su lugar una estimación del efecto total $\gamma_{21}^* = \gamma_{21} + \beta_{21} \gamma_{11}$. Por ejemplo, si los efectos directo e indirecto tienen magnitudes similares pero distinto signo, podremos obtener una estimación del efecto total mucho menor que el de cualquiera de los efectos mencionados.

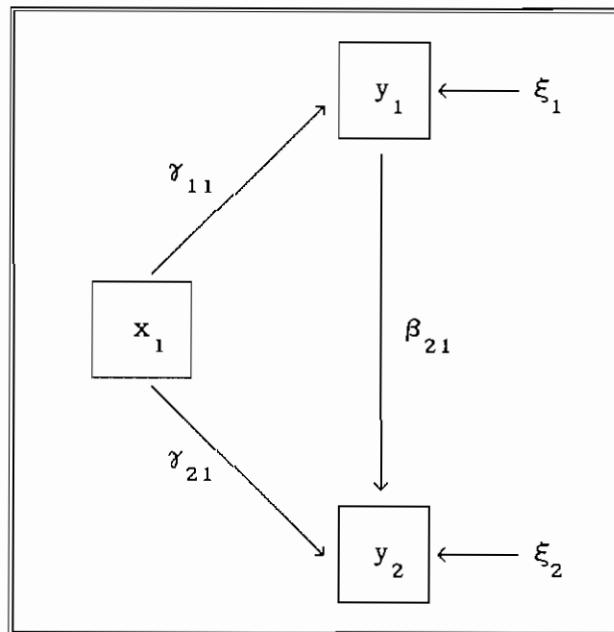


Figura 1.1.4.1

Otro problema surge cuando olvidamos incluir causas comunes de las variables explicativa y dependiente. Supongamos que en el modelo especificado, olvidamos por error la consideración de x_1 .

$$y_2 = \beta_{21} y_1 + \xi_2^*$$

donde:

$$\xi_2^* = \gamma_{21} x_1 + \xi_2$$

Puede mostrarse que al tratar de estimar β_{21} obtenemos en su lugar $\beta_{21}^* = \beta_{21} + \gamma_{21} b$, donde b es el coeficiente de regresión de x_1 sobre y_1 . Las distintas situaciones que pueden presentarse según los valores tomados por los diferentes coeficiente se resumen en la tabla 1.1.4.1

La primera fila de la tabla 1.1.4.1 muestra el caso relativamente inocuo en que x_1 no tiene efecto sobre y_2 o bien x_1 e y_2 son incorrelacionados. Mucho

más serio es el caso en que y_1 no tiene efecto sobre y_2 ($\beta_{21}=0$) pero y_1 e y_2 dependen de x_1 (segunda fila) que lleva a la detección de una correlación totalmente espúrea⁽¹⁾, que justifica la conocida frase de que correlación no implica causación. Las filas tres y cuatro presentan el caso de correlaciones parcialmente espúreas, en las que parte del efecto atribuido a una variable es debido a otras. Por ejemplo, esto ocurre entre puntuaciones que se presentan correlacionadas entre sí, y en realidad son debidas a un rasgo latente de inteligencia general. Por último, las filas finales presentan el caso en que se atenúa el efecto de una variable por la correlación de distinto signo de una tercera no incluida en el modelo.

Tabla 1.1.4.1. Relación entre los valores de $\beta_{21}^* = (\beta_{21} + \gamma_{21} b)$ y β_{21} cuando se omite la causa común.

β_{21}	$\gamma_{21} b$	β_{21}^* versus β_{21}	Relación entre y_1 e y_2
$\neq 0$	0	igual	Ninguna
0	$\neq 0$	mayor	Totalmente espúrea
> 0	> 0	mayor	Parcialmente espúrea
< 0	< 0	mayor	Parcialmente espúrea
> 0	< 0	menor	No se advierte
< 0	> 0	menor	No se advierte

Muchos investigadores sugieren que la correlación es un requisito necesario para establecer causalidad. Este último caso de efectos supresores muestra que una falta de correlación no prueba la ausencia de causalidad.

Medidas de asociación en variables cualitativas y su implicación sobre la causalidad.

En los apartados anteriores se ha realizado una discusión sobre las relaciones entre asociación y causalidad, empleando la notación e hipótesis habituales para variables continuas. En esta sección explicamos cuatro medidas de asociación que han sido propuestas por diversos filósofos, aplicables al caso de variables cualesquiera y mostraremos su mutua interrelación, así como la conexión con el coeficiente de correlación. En Ellet y Erickson (1986) se prueba, para estas nociones de asociación, resultados similares a los que acabamos de exponer para el coeficiente de correlación entre variables continuas. A continuación exponemos un resumen de la discusión que efectúan estos autores.

~~~~~  
 (1) o espuria. "Correlación entre dos variables que desaparece cuando se tiene en cuenta o controla una tercera variable anterior en el tiempo a las primeras. Recibe el nombre de espuria porque no es debida a una asociación real entre dichas variables, sino a una tercera variable fuertemente correlacionada con ambas, que hace que, cuando se tiene en cuenta esta variable, la correlación inicial desaparezca" (Sierra Bravo, 1991, pg. 158).

Comienzan considerando las definiciones utilizadas por Kendall y Lazarsfeld y por Nagel. Dos variables A y B se correlacionan positivamente si y solamente si la probabilidad de que ocurran simultáneamente A y B es mayor que el producto de las probabilidades de A y B. Este producto sería matemáticamente la probabilidad esperada de la intersección de A y B, en caso de independencia estadística. En notación estándar, A y B se correlacionan positivamente si y solamente si

$$P(A \cdot B) - P(A)P(B) > 0$$

definiéndose en forma similar la correlación negativa y nula. Esta definición es equivalente en una tabla de contingencia  $2 \times 2$  a comparar las frecuencias observadas con las frecuencias esperadas.

Se puede demostrar que :

$$(a) \quad P(A \cdot B) - P(A)P(B) = P(A \cdot B)P(\bar{A} \cdot \bar{B}) - P(A \cdot \bar{B})P(\bar{A} \cdot B)$$

La segunda medida de correlación es utilizada por Reinchebach y Suppes. Dos variables están positivamente correlacionadas si y solamente si la probabilidad de B condicionada a A menos la probabilidad de B es mayor que cero. Esto es, A y B están correlacionadas positivamente si y sólamente si:

$$P(B/A) - P(B) > 0$$

definiéndose de forma análoga la correlación negativa y nula. Esta definición es equivalente, en una tabla de contingencia  $2 \times 2$  a comparar una modalidad dentro de la otra con la modalidad respecto al total.

Supuesto que  $P(A)$  sea distinto de cero, se puede demostrar que:

$$(b) \quad P(A/B) - P(B) = [P(A \cdot B)P(\bar{A} \cdot \bar{B}) - P(A \cdot \bar{B})P(\bar{A} \cdot B)]/P(A)$$

La tercera medida de correlación es utilizada por Salmon y Suppes. Dos variables están positivamente correlacionadas si y sólamente si la probabilidad de B condicionada a A menos la probabilidad de B condicionado a no A ( $\bar{A}$ ) es mayor que cero. Esto es, A y B están correlacionadas positivamente si y sólamente si

$$P(B/A) - P(B/\bar{A}) > 0$$

análogamente se definen la correlación negativa y nula. Esta definición es equivalente en una tabla de contingencia  $2 \times 2$  a comparar frecuencias relativas condicionales con su marginal correspondiente.

Dado que  $1 > P(A)$  y supuesto que  $P(A) > 0$ , se puede demostrar que:

$$(c) \quad P(B/A) - P(B/\bar{A}) = [P(A \cdot B)P(\bar{A} \cdot \bar{B}) - P(A \cdot \bar{B})P(\bar{A} \cdot B)] / P(A) P(\bar{A})$$

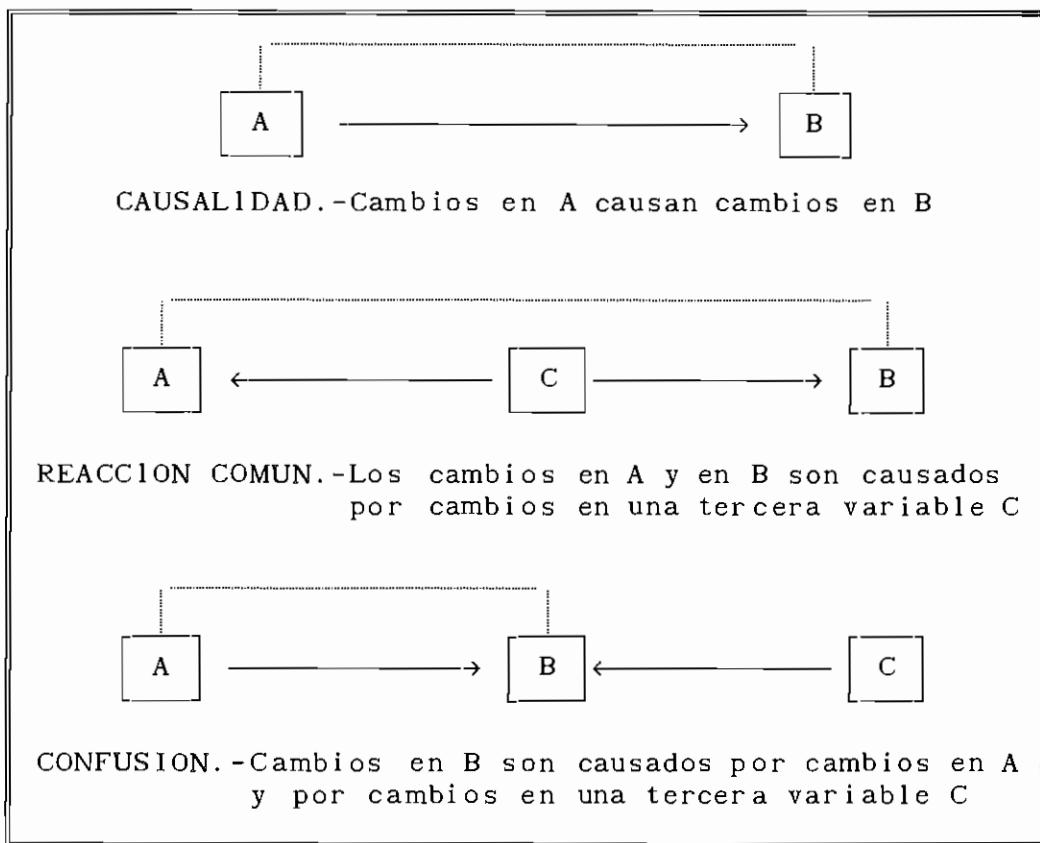
La cuarta medida de correlación la utilizan Asher y Blalock. Dos variables están correlacionadas positivamente si y sólamente si el coeficiente  $\Phi$  (phi) es positivo; A y B están correlacionadas negativamente si y sólamente si el coeficiente  $\Phi$  es negativo; y A y B no están correlacionadas si y sólamente si el coeficiente  $\Phi$  es cero. El coeficiente  $\Phi$  se define de la siguiente manera:

$$(d) \quad \Phi_{AB} = \frac{[P(A \cdot B)P(\bar{A} \cdot \bar{B}) - P(A \cdot \bar{B})P(\bar{A} \cdot B)]}{\sqrt{[P(A)P(\bar{A})P(B)P(\bar{B})]}}$$

el numerador de  $\Phi_{AB}$  equivalente a comparar los productos cruzados en una tabla de contingencia  $2 \times 2$ .

Al comparar estas definiciones, observamos que los numeradores en el miembro de la derecha de las ecuaciones a, b, c y d tienen el mismo signo. No habría, en consecuencia, diferencia entre estas medidas de asociación cuando se utilizan en una teoría cualitativa de inferencia causal. Una teoría cualitativa concluye que A no es causa de B si A no está positivamente correlacionada con B; y quizás se encuentre que A sea causa débil de B si A está positivamente correlacionada con B. Cada una de las cuatro medidas da la misma información sobre si A y B están positivamente correlacionadas.

Figura 1.1.3.1. Algunas explicaciones de la asociación



Las cosas son diferentes en el caso de una teoría cuantitativa, que intenta determinar no sólamente si A causa B, sino el grado o la magnitud de la influencia causal de A en B. Si la correlación es cero, todas las definiciones anteriores coinciden, pero no así cuando fuesen distintas de cero. Se puede mostrar que cuando las correlaciones son positivas.

$\Phi_{AB}$  puede ser mayor que  $P(B/A) - P(B/\bar{A})$ ,

$\Phi_{AB}$  puede ser menor que  $P(B/A) - P(B/\bar{A})$ , pero mayor que  $P(B/A) - P(B)$

$\Phi_{AB}$  puede ser menor que  $P(B/A) - P(A)$ , pero mayor que  $P(B \cdot A) - P(A)P(B)$

Finalizamos indicando que la causalidad no es una idea simple. Raramente es A la única causa de B, sino solamente una causa contributoria, es decir, una de las distintas circunstancias que hacen B más probable. Segundo, los diseños de experimentos apropiados son los mejores medios de establecer cuestiones de causalidad. En ausencia de un experimento, concluir que la asociación es debida a la causalidad requiere evidencia y juicios más allá de los que la estadística puede proporcionar. Moore (1991) afirma que la evidencia para afirmar que la variable A causa cambios en la variable B se fortalece si:

- ▶ La asociación entre A y B se reproduce en diferentes circunstancias; esto reduce los cambios que se deben a distorsiones (confounding).
- ▶ Se dispone de una explicación plausible mostrando como A causa cambios en B.
- ▶ No existe un factor plausible que pueda causar cambios en A y en B conjuntamente.

## 1.2. FUNDAMENTOS DIDACTICOS

### 1.2.1. LAS NOCIONES DE CONCEPTO Y DE CONCEPCION DEL SUJETO

Una noción de concepto, bien adaptada como instrumento de análisis para los estudios didácticos, es la propuesta por Vergnaud (1982, 1990). Este autor define un concepto por medio de una tripleta,  $(S, I, \mathcal{S})$ , en donde S es el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto, I es el conjunto de invariantes operatorios que le son asociados, y  $\mathcal{S}$  el conjunto de significantes que permiten representarlo.

Para este autor, un concepto matemático no puede reducirse a su definición, sino que guarda estrecha relación con las situaciones en que es puesto en juego. *"Cada uno de estos conceptos comporta, en efecto, varias propiedades cuya pertinencia es variable según las situaciones a tratar. Algunas pueden ser comprendidas muy pronto, otras mucho más tarde, en el curso del aprendizaje. Una aproximación psicológica y didáctica de la formación de los conceptos matemáticos conduce a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción"* (Vergnaud, 1990, pg. 145).

Este autor mantiene una visión constructivista del aprendizaje. Al discutir la actividad realizada por un alumno durante el proceso de resolución de problemas, distingue dos tipos de situaciones:

- Situaciones para las cuales el sujeto dispone en su repertorio, en un momento dado, de las competencias necesarias para una tratamiento relativamente rápido de la misma.
- Situaciones para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que le obliga "a un tiempo de reflexión y explora-

ción, de vacilación, de tentativas abortadas, conduciéndole eventualmente al éxito o al fracaso" (Vergnaud, 1990, pg. 136).

Vergnaud llama "*esquema*" a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dadas; considera útil la noción de esquema en los dos tipos de situaciones descritas. En las primeras, el sujeto tendrá una conducta bastante automatizada y tenderá a usar un esquema único. En el segundo tipo de situación, se observará el empleo sucesivo de varios esquemas, que pueden entrar en competición y que deben ser combinados y descombinados, para llegar a la solución buscada; si ésta es correcta se ha producido un aprendizaje.

En los esquemas, Vergnaud (1982, 1990) sitúa los conocimientos en acto del sujeto (conceptos y teoremas en acto). Son "*los instrumentos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operativa*" (pg. 136). "*Un esquema reposa siempre en una conceptualización implícita*" (pg. 139). Reconoce, sin embargo, que un teorema en acto no siempre es un teorema propiamente dicho, porque, para que lo fuese, el alumno debiera reconocer explícitamente su pertinencia y verdad. Pero también indica que "*los conceptos y teoremas explícitos no forman más que la parte visible del iceberg de la conceptualización; sin la parte escondida formada por los invariantes operatorios, esta parte visible no sería nada*" (Vergnaud 1990, pg. 145).

Asimismo, considera que "*son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones, ni en las representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el sujeto*" (p. 158).

No todos los sujetos, sin embargo, construyen los mismos conocimientos sobre un objeto matemático dado, al cual, además, pueden atribuir connotaciones no pertinentes desde el punto de vista matemático. Para diferenciar los diversos puntos de vista, conocimientos y creencias de los sujetos sobre un mismo objeto matemático, se emplea el término **concepción del sujeto**.

Este término se aplica en el lenguaje ordinario para referirse a la idea general que tiene una persona en su mente cuando piensa sobre algo. Recientemente ha sido introducida en los estudios psicológicos y didácticos con un sentido técnico más preciso, como se puede estudiar en los trabajos de Confrey (1990) y Artigue (1990). Se utiliza el término "*misconceptions*" para referirse a las concepciones erróneas o deficientes.

La importancia de la identificación de las concepciones de los estudiantes, es debida, según Confrey (1990), a que, a veces, difieren en aspectos fundamentales de las nociones científicas correspondientes y, con frecuencia, son resistentes al cambio, a pesar de la instrucción.

Sobre las concepciones del sujeto se discuten dos tipos de usos según los distintos autores:

- 1) La concepción como estado cognitivo global que tiene en cuenta la totalidad de la estructura cognitiva del sujeto, en un momento dado, en relación a un objeto. Es el sentido que proporciona Confrey (1990) cuando describe la concepción como "*el sistema global de conocimientos y creencias del sujeto*" en relación a un objeto. También Vergnaud comparte esta idea de globalidad para las concepciones del sujeto: "*Toma en cuenta la totalidad de la*

*"estructura del sujeto en un momento dado, como el concepto toma en cuenta la totalidad del conocimiento sobre el objeto matemático"* (p. 271).

- 2) Los aspectos locales de las concepciones, estrechamente asociados a los diferentes problemas en cuya resolución interviene. Estos aspectos locales son los que, según Artigue (1990), son accesibles a la investigación didáctica, debido al carácter limitado de las mismas.

En nuestra investigación este sentido local de "conocimientos y creencias" parciales sobre un objeto, puestos de manifiesto en situaciones de evaluación específicas, es el que vamos a utilizar. En términos operativos, una concepción sobre la asociación estadística quedará descrita por una tipología de respuestas de los sujetos a cierta clase de situaciones; estas respuestas se refieren a la interpretación de los datos, los juicios emitidos sobre la existencia de asociación, la explicitación de teoría previas sobre la misma y las estrategias seguidas en la resolución de las situaciones problemáticas planteadas.

#### Errores, obstáculos y sus tipos; actos de comprensión

Como indica Rico (1993) *"El estudio de los errores ha sido una cuestión de permanente interés en Educación Matemática, que tiene una larga historia y se ha caracterizado por aproximaciones en intereses muy diferentes. En cada época el análisis de errores en educación matemática se ha visto orientado por las corrientes predominantes en pedagogía y psicología; también ha estado condicionado por los objetivos y formas de organización del currículo de matemáticas en los correspondientes sistemas educativos"* (pg. 11).

Para este autor, cuando un alumno, proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta. Ciertos tipos de errores persistentes son atribuidos a la existencia de obstáculos cognitivos por algunos autores.

La noción de obstáculo, introducida por Bachelard (1938) en el análisis epistemológico de las ciencias e interpretada por Brousseau para la Didáctica de la Matemática, cambia el estatuto dado al error *"el error y el fracaso no tienen el papel simplificado que a veces se les atribuye. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre o el azar, sino de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, se constituyen en obstáculos"* (Brousseau, 1983, pg. 173).

Este autor diferencia entre obstáculos epistemológicos, didácticos y ontogenéticos y atribuye las siguientes características a los obstáculos:

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento.
- Este conocimiento produce respuestas adaptadas en un contexto que el alumno encuentra frecuentemente, pero genera respuestas falsas fuera de este contexto. Una solución universal exigiría un punto de vista más amplio.
- Se resiste a las contradicciones con las cuales se confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es preciso identificarlo para incorporar su rechazo en el nuevo saber.

- Una vez superado, continúa manifestándose esporádicamente.

Las peculiaridades de los tres tipos de obstáculos descritos por Brousseau son las siguientes:

- Los obstáculos ontogenéticos se deben a las limitaciones del sujeto en el momento de su desarrollo, es decir, están ligados a las limitaciones cognitivas de sus capacidades en el momento del aprendizaje.
- Los obstáculos didácticos están ligados al sistema de enseñanza en el que están inmersos nuestros alumnos. Son debidos a las decisiones del sistema educativo o a las del profesor en el aula.
- Los obstáculos epistemológicos están ligados al conocimiento mismo. Se les puede encontrar en la evolución histórica de los propios conceptos. A veces también se les puede encontrar en los modelos espontáneos de los alumnos.

Dada la naturaleza compleja de un concepto, de acuerdo con la teorización de Vergnaud (1982; 1990), la adquisición del mismo no se realiza en un sólo paso. Para Sierpinska (1991), *"comprender el concepto sería concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización o de síntesis de significados relacionados con elementos particulares de la estructura del concepto (la estructura sería la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tendrían que ser también captados en "actos de comprensión""*. (pg. 27).

Estos "actos de comprensión" o adquisición progresiva de los distintos componentes del significado de un concepto estarían ligados, con frecuencia, según Sierpinska (1991) a la superación de obstáculos: *"En el momento que descubrimos algo equivocado en este conocimiento (es decir, nos hacemos conscientes de un obstáculo epistemológico) comprendemos algo y comenzamos a conocer de un modo nuevo. No todos quizás, pero sí algunos actos de comprensión son actos de superación de obstáculos epistemológicos.* (pg. 28).

### **1.2.2. RESOLUCION DE PROBLEMAS Y SU PAPEL EN LA CONSTRUCCION DEL CONOCIMIENTO. SIGNIFICADOS PERSONALES E INSTITUCIONALES DE LOS OBJETOS MATEMATICOS**

#### Resolución de problemas

En palabras de Lester (1980) *"un problema es una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la cual no hay un algoritmo inmediato que determine completamente el método de solución"*, (pág. 287). Identifica cuatro áreas en la investigación en Educación Matemática hasta esa fecha, que se asocian a factores particulares relacionados con la resolución de problemas y son:

- El contenido, formato y estructura del problema.
- Las peculiaridades del resolutor.
- El proceso de resolución empleado: modo de organizar y procesar la información y estrategias cognitivas empleadas.
- Las características contextuales, externas al resolutor, tales como los

materiales disponibles o los métodos de instrucción recibidos.

Desde el punto de vista de la psicología cognitiva, hay tres componentes básicos en un problema:

- Un conjunto de información dada, que constituye la descripción o enunciado del problema.
- Un conjunto de operaciones o acciones que el resolutor puede emplear para obtener la solución.
- Una meta o descripción de lo que debiera ser la solución del problema.

En Castro (1991) se describe con detalle las distintas teorías psicológicas sobre resolución de problemas y las investigaciones llevadas a cabo en el campo de los problemas aritméticos. Estas investigaciones se describen, asimismo, en Puig y Cerdán (1988) y Schoenfeld (1992).

Kilpatrick (1985) discute las diversas perspectivas desde la que se ha contemplado la resolución de problemas en Educación Matemática, distinguiendo, además de la perspectiva psicológica, los puntos de vista social-antropológico, matemático, y curricular. Desde una perspectiva social-antropológica el problema es visto como una tarea, es dado y recibido en una transacción. Esta es la perspectiva adoptada también, en nuestra opinión, en la teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986b), en la cual el aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas, siempre que se produzca la **devolución** de los mismos, es decir, cuando el alumno acepta el problema como suyo y toma un interés personal en su resolución.

El punto de vista matemático, del que también participa la Teoría de Situaciones, es aquél en el que la Matemática se define por los problemas que resuelve: *"toda la Matemática es creada mediante el proceso de formulación y resolución de problemas"* (Kilpatrick, 1985, pg.3). Finalmente, el punto de vista curricular es el que estudia los problemas por su relación con la enseñanza. En esta perspectiva Stanic y Kilpatrick (1989) indican que la utilización de problemas en el currículum puede realizarse con diversos fines: como destreza a aprender; como arte de descubrimiento o inventiva, o bien para alcanzar otros fines, como la motivación del alumno, la transmisión de los conocimientos, la ejercitación y práctica, la evaluación o incluso como actividad recreativa.

#### Papel de la resolución de problemas en la construcción del conocimiento: significados personales e institucionales

Godino y Batanero (1993) formulan una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la Matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado. El punto de partida de esta teorización es la noción de **campo de problemas**, como conjunto de situaciones problemáticas para las cuales puede ser válida una misma solución. Lo que caracteriza un problema como matemático es la actividad desarrollada en su resolución que incluye: buscar lo esencial entre los contextos, simbolizar, validar, generalizar; en síntesis matematizar (Freudenthal, 1991).

En este proceso de resolución se emplean **prácticas**, entendiendo por tales cualquier actividad para resolver el problema, validar la solución, generalizarla o comunicarla a otras personas.

Los autores citados definen una práctica como significativa para una persona, cuando ésta considera que la práctica desempeña un papel en la resolución del problema. Debido al carácter subjetivo con que se dota a esta definición se diferencia entre **prácticas personales y prácticas institucionales** asociadas a un mismo campo de problemas, dependiendo las primeras del sujeto, y siendo las segundas aquellas que son socialmente compartidas en al seno de una institución.

Desde el punto de vista didáctico, esta diferenciación entre prácticas personales e institucionales permite recoger en una teorización común, tanto los procedimientos y las soluciones que en la enseñanza del tema se consideran correctas, como los errores, que para los alumnos constituyen "buenas soluciones" del problema planteado.

A partir de la actividad de resolución de un campo de problemas y del sistema de prácticas asociado, se produce en la institución la emergencia progresiva de ciertos objetos, productos globales de las actividades que forman este sistema de prácticas. Estos objetos, en un momento dado son nombrados y se reconoce su entidad cultural. Sucesivamente son generalizados, dotados de propiedades y empleados en la resolución de nuevos problemas. El sistema de prácticas asociado al objeto se define como **significado del objeto institucional**.

Similarmente, el aprendizaje del sujeto se produce mediante la emergencia progresiva del **objeto personal** a partir del sistema de prácticas personales asociadas a una campo de problemas, las cuales constituyen el **significado del objeto personal**.

La diferenciación entre el objeto (emergente inobservable de un sistema de prácticas) y el significado del mismo (sistema observable de prácticas), que hacen estos autores, supone también el reconocimiento de la problemática de la evaluación de concepciones. Las concepciones tendrían así el carácter de un constructo inobservable, cuya naturaleza se infiere a partir de las prácticas (o respuestas) explicitadas durante la resolución de problemas, que serían los indicadores empíricos utilizables para la evaluación de dichas concepciones.

#### Empleo de la resolución de problemas en el presente trabajo

En nuestra investigación, la resolución de problemas se emplea con una doble finalidad: en primer lugar, como medio de evaluación de las concepciones de los alumnos participantes. Puesto que no nos es posible un acceso directo a dichas concepciones u objetos personales, ya que se trata de constructos inobservables, utilizamos como medio indirecto en la evaluación *los procedimientos y estrategias explicitados* por los alumnos, esto es, sus prácticas, en la resolución de los problemas propuestos. En nuestra opinión, estas prácticas (procedimientos y estrategias) son indicadores empíricos de las concepciones de los alumnos sobre los conceptos implicados en el problema. En particular, las estrategias erróneas en los juicios de asociación obedecen a concepciones erróneas o incompletas referidas a dicho concepto.

El segundo empleo que se realiza de la resolución de problemas en esta investigación es como vehículo para el aprendizaje, ya que adoptamos una visión constructivista del aprendizaje, en el que la resolución de problemas

juega un papel fundamental. Por ello, la experiencia de enseñanza que hemos diseñado se basa en la resolución de problemas. La colección de problemas realizados en las sesiones de prácticas con el ordenador, se ha secuenciado convenientemente, con objeto de que el alumno adquiera progresivamente el concepto de asociación, habiéndose efectuado un diseño cuidadoso de las mismas, que se describe en la sección 3.2.4.

#### Estrategias, procedimientos, algoritmos y heurísticas

Como hemos indicado, la evaluación de las concepciones de los alumnos sobre la asociación estadística se va a efectuar en base a las estrategias manifestadas por los mismos en la resolución de los problemas propuestos. Conviene, en consecuencia, clarificar el sentido con el que van a emplearse los términos estrategia y procedimiento y diferenciarlo de otros tales como heurística o algoritmo. También hay que señalar que se trata de las estrategias efectivamente explicitadas con los instrumentos de recogida de datos, las manifestaciones verbales, escritas, gráficas y de interacción con el ordenador de los alumnos. No se trata, en consecuencia, de acceder a todo el proceso cognitivo empleado por el alumno durante la resolución del problema, sino a las estrategias finales elegidas por el alumno para la solución aportada.

En el informe Cockcroft (Cockcroft, 1985), se describen las estrategias generales como "*procedimientos que guían la elección de la destreza que debe emplearse o de los conocimientos a que se debe recurrir en cada etapa de la resolución de un problema o del desarrollo de una investigación*", (pg. 87). Esta definición coincide básicamente con el sentido dado el término en teoría de la decisión y teoría de juegos. Para Ríos (1976) una estrategia es un "*plan o conjunto de normas que establece un jugador y que indica cual es la acción que debe realizar en cada ocasión que corresponda actuar, en función de la información que tenga de las acciones y resultados anteriores al momento de su intervención*" (pg. 23). Por ello, la estrategia se elige conscientemente, el resolutor puede cambiarla una vez comenzada la resolución del problema si no le resulta productiva; no es, en fin, un mecanismo inconsciente. Se encuentra guiada por la experiencia previa y, por tanto, depende de los conocimientos y creencias, esto es, de las concepciones del resolutor sobre el problema, sobre los datos y sobre los objetos matemáticos requeridos en la resolución.

Un concepto relacionado con el de estrategia es el de heurística, que, como indican Groner y cols. (1983), ha sido empleado con significados muy diversos. En Matemáticas, este término ha sido identificado con el de estrategia. En la antigua Grecia (*heuriskein* = *encontrar*), encontramos, descritos por Pappus de Alejandría, métodos heurísticos usados por Euclides en el campo de la Geometría (método de análisis, método de síntesis). La historia posterior lo liga con el desarrollo de algoritmos o procedimientos paso a paso que automáticamente producen las solución para cualquier problema, aunque las heurísticas no siempre garantizan la solución. El interés reciente por este tema es debido al trabajo de Polya, quien dio una descripción detallada de varios métodos heurísticos y los condensó en unos pocos principios generales. Eligiendo ejemplos brillantes los aplicó con éxito en la enseñanza de la Matemática. Su libro "How to solve it" ha constituido un gran éxito y ha contribuido al renacimiento de la heurística como disciplina.

Otra ciencia que utiliza la noción de heurística es la Inteligencia Artificial, en la cual hay dos ideas subyacentes:

- El comportamiento inteligente se caracteriza por la búsqueda de soluciones a problemas planteados a un sistema.
- El espacio de estado asociado con estos problemas es típicamente tan grande que deben emplearse heurísticas para reducirlo a un tamaño manejable.

Por este motivo, esta ciencia se ha preocupado por definir un conjunto de técnicas, denominadas heurísticas, sobre cómo generar conocimiento para producir nuevos pasos en el espacio de estado del problema. Pero estos estudios han mostrado que el empleo único de conocimiento muy general no basta para limitarlo a un tamaño manejable. Como regla heurística, podría decirse que cualquier pieza de conocimiento tan específico como sea posible, debe ser usado para limitar este espacio.

En el campo de la toma de decisiones (Scholz, 1983), el enfoque heurístico ha sido popularizado por Simon, con sus conceptos de "racionalidad limitada" y "satisfacción". En los modelos convencionales de toma de decisiones se suponía que el hombre actuaría optimizando la utilidad esperada, sin tener en cuenta la cantidad de cálculo necesaria para ello (Ortega Martínez, 1991). Simon no está de acuerdo, ya que defiende que la potencia de pensamiento humano es muy modesta respecto a la complejidad del ambiente. Enfrentado a esta complejidad e incertidumbre, faltándole suficientes recursos para optimizar la solución, ha de contentarse con hallar soluciones "suficientemente buenas". El hombre posee así una rationalidad limitada, que incorpora mecanismos para manejar la complejidad, aunque no la "asimile" completamente. En este contexto se enmarcan los trabajos de Tversky y Kahneman (1982b) sobre las heurísticas de representatividad, ajuste y anclaje y disponibilidad, quienes admiten incluso el carácter inconsciente de algunas de estas heurísticas.

En las investigaciones sobre juicios de asociación, se suele emplear el término estrategia para referirse a la información seleccionada por el sujeto para resolver los problemas y al modo en que utiliza esta información, esto es, la serie de comparaciones o cálculos que efectúa con la misma. Así, por ejemplo, Jennings, Amabile y Ross (1982), habla de "*estrategias de evaluación de la asociación*" (pg. 234), para referirse al modo en que los sujetos deciden cual es el grado de covariación en los datos presentados. Pérez Echeverría (1990), describe "*la estrategia [A] consiste en fijarse exclusivamente si el número de veces en que las dos variables coocurren (p,q) es más alto que el resto de los casos*" (pg. 128). Del mismo modo, Ortega Martínez (1991) indica "*Otra estrategia que pueden utilizar los sujetos al evaluar la relación entre dos variables consiste en comparar las frecuencias de las casillas a y c*" (pg. 34).

En consecuencia, creemos justificado el empleo que en el resto del trabajo hacemos del término estrategia, de acuerdo al dado en las investigaciones sobre juicios de asociación, que coincide con la definición de Ríos (1976), expuesta anteriormente. Asimismo, emplearemos el término *procedimiento* para referirnos a la descripción detallada de los pasos empleados en la resolución del problema, esto es, al método particular seguido por un sujeto en la resolución.

El término algoritmo enfatiza, a nuestro juicio, el carácter mecánico, repetitivo y aprendido del proceso, que no tiene por qué hallarse en los procedimientos empleados por los sujetos de nuestro estudio. Generalmente, varios de estos procedimientos pueden clasificarse en una misma estrategia, de

la cual constituyen manifestaciones con variaciones no relevantes para la estrategia considerada.

### 1.2.3. EL PAPEL DEL ORDENADOR EN EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS ESTADÍSTICOS

Como indica Benzecri (1982), el rápido desarrollo y difusión de la Estadística ha sido una conquista del siglo XX y ha estado notablemente influenciado por el de los ordenadores. La disponibilidad actual de programas de cálculo, fácilmente manejables, hace posible el empleo de métodos estadísticos complejos a un número creciente de usuarios. Este papel del ordenador en el desarrollo de la Estadística es también reconocido por Hawkins y cols. (1992): *"La construcción de ordenadores más potentes ha ocasionado el desarrollo de nuevos métodos de análisis estadístico y hecho realidad la implementación de algunas técnicas sugeridas previamente, particularmente de representación gráfica y de análisis multivariante. La computación ha llevado también al ahorro de horas de cálculo y permitido el estudio de mayores conjuntos de datos"*, (pg. 152). Esta dependencia se espera que continúe en el futuro: *"La estrecha relación entre la Estadística y el ordenador implica que cuando uno cambia el otro también cambiará"*. (Råde, 1991, pg. 436).

Históricamente, pueden distinguirse cuatro etapas en la elaboración del software estadístico. La primera estaba caracterizada por la escritura individual de programas para ser usados en problemas específicos que, a veces, no contaban con documentación estandarizada. La segunda etapa se caracterizó por la existencia de colecciones de programas o **paquetes** provistos de documentación. Sin embargo, estos programas, generalmente, no eran interactivos y no tenían posibilidad de relacionarse con los gestores de bases de datos, lo que dificultaba su uso en aplicaciones con gran volumen de información. El tercer estadio se ha caracterizado por software que conecta automáticamente a bases de datos. El usuario crea un fichero inicializando variables y los programas pueden ser usados interactivamente. Por ejemplo, los paquetes B.M.D.P., SYSTAT, STAGRAPHICS y S.P.S.S.. corresponden a esta etapa que, en la actualidad se entrecruza con una nueva que se inicia, marcada por la aparición de los sistemas expertos, que se espera desemboquen en sistemas de análisis automático de datos.

En estos sistemas expertos, como Statistical Navigator (Brent y cols., 1991), el usuario puede plantear una serie de cuestiones relacionadas con varias hipótesis o modelos y el sistema automáticamente elige uno o más análisis estadísticos apropiados para dar respuesta a las cuestiones. También indica varias precauciones relacionadas con el posible alcance o inconvenientes de la metodología apropiada y cómo pueden afectar a las conclusiones.

Sin embargo, por el momento, esta posibilidad no elimina, sino que refuerza el papel de la interpretación y, por tanto, del aprendizaje de la Estadística. Como señala Hawkins (1990) el quitar al usuario la responsabilidad en el proceso de toma de decisiones esenciales impide el análisis y la interpretación sensibles e informados, dando la visión errónea de que la Estadística es un proceso mecánico.

#### Análisis exploratorio de datos

El papel del ordenador en el desarrollo de la Estadística queda reforzado, al permitir la aplicación del enfoque exploratorio en el análisis de los

datos, introducido por Tukey (1977). En el enfoque clásico o confirmatorio, el interés del análisis se centraba en los parámetros. En la actualidad, al poder aplicar repetidamente una gran variedad de cálculos y representaciones gráficas a todo o partes diferentes del conjunto de datos, es posible estudiar tanto los patrones generales como la variabilidad individual respecto a los mismos. Esto permite una comprensión más profunda de los fenómenos bajo estudio, y también la generación de nuevas hipótesis a partir de las observaciones (Hartwing y Dearing, 1979).

En el enfoque confirmatorio se supone que el conjunto de datos se ajusta a un modelo previamente establecido que se desea contrastar. *"Al contemplar solamente dos alternativas, (confirmación o no de la hipótesis), los datos no se suelen explorar para extraer cualquier otra información que pueda deducirse de los mismos"*. (Batanero y cols., 1991a, pg. 26). Por el contrario, el análisis exploratorio de datos estudia los mismos desde diversas perspectivas, con objeto de buscar un modelo, no necesariamente establecido de antemano, que se ajuste a las observaciones. Como contrapartida, no podemos realizar contraste de hipótesis, en el sentido estadístico del término, en el análisis exploratorio, sino, en todo caso, generar hipótesis provisionales que precisarán una posterior confirmación. Esto propicia un enfoque inductivo y observacional en la investigación que constituye una ruptura epistemológica con la Estadística clásica (Gras, 1992).

Las posibilidades didácticas de introducir un enfoque exploratorio en la enseñanza de la Estadística descriptiva se deben, en primer lugar, al fuerte apoyo de este enfoque en las representaciones gráficas: *"al usar representaciones múltiples de los datos se convierte en un medio de desarrollar nuevos conocimientos y perspectivas"* (Biehler, 1988, pg. 2).

Tampoco precisa una teoría matemática compleja: *"como el análisis de datos no supone que éstos se distribuyen según una ley de probabilidad clásica (frecuentemente la normal) no utiliza sino nociones matemáticas muy elementales y procedimientos gráficos fáciles de realizar. Hasta aquí es, pues, bastante parecida a la Estadística descriptiva tradicional, pero se aleja de ella por su intención. Pues, al contrario que en ella, la representación o el cálculo no son un fin, sino un medio de descubrir la información oculta en los datos"*. (Jullien y Nin, 1989, pg. 30).

Finalmente, la capacidad de almacenamiento de los ordenadores hace posible que el profesor use situaciones problemáticas realistas, lo que motivará al alumno y le permitirá dotar de sentido a los conceptos y procedimientos matemáticos empleados. A partir de conjuntos de datos recogidos por los mismos alumnos, se puede fomentar la investigación y creatividad del estudiante, quien puede plantearse muchas cuestiones diferentes sobre la situación analizada.

#### Paquetes de análisis de datos y enseñanza

La existencia de programas de ordenador para el análisis de datos y las grandes posibilidades en sus aplicaciones, crea la necesidad a una población cada vez mayor de estudiantes de conocer su uso. En los niveles universitarios y en cursos de Estadística Aplicada el manejo de paquetes estadísticos se constituye en un nuevo objetivo de enseñanza.

La disponibilidad mayor, en la actualidad, de programas de ordenador

obliga a una reflexión sobre las formas de enseñanza tradicionales de la Estadística. Por una parte, el manejo de un paquete ha de ser en sí un objetivo importante, pues la posibilidad cada vez más generalizada de acceso a estos medios, permite el empleo de métodos estadísticos que en el pasado exigían cálculos laboriosos.

No hay que olvidar, por otra parte, el peligro que tiene un uso no adecuado de estos recursos. A menudo nos encontramos con investigadores que, habiendo recogido un conjunto de datos sin ningún tipo de consulta con el estadístico en la etapa de diseño de la investigación, piensan que el análisis consiste simplemente en la elección de un programa adecuado que automáticamente dará una interpretación a sus investigaciones (Batanero y cols, 1988). Este problema se agrava por la dificultad de comunicación entre el estadístico y los especialistas en otros campos, que, con frecuencia esperan de él una solución inmediata de problemas excesivamente complejos (Barnett, 1988).

Quizás ello haya sido debido al énfasis hecho en la enseñanza tradicional sobre los métodos y algoritmos de cálculo. En un curso en el que los cálculos pueden ser hechos con facilidad mediante el uso de ordenadores, el énfasis se volverá hacia los modelos, las hipótesis impuestas y consecuencias de no cumplimiento de las mismas. Este tipo de enseñanza facilita también el desarrollo del "método de proyectos" que permite acercar más la teoría a la práctica al posibilitar, desde el comienzo, el estudio de problemas reales, que generalmente manejan un volumen considerable de datos.

#### El ordenador como recurso didáctico

Los recursos didácticos han servido tradicionalmente para facilitar la labor al profesor y al alumno. Un recurso didáctico es tanto más eficaz cuanto más número de posibilidades tenga para facilitar el aprendizaje de una materia de enseñanza. El ordenador tiene una serie de características que le hacen muy útil en la enseñanza de la Estadística: rapidez y exactitud en los cálculos, realización de toda clase de gráficos, color, sonido, impresión y todas las otras tareas de tratamiento de la información.

Otro rasgo que ofrece el ordenador es su capacidad motivadora. Todas las experiencias realizadas utilizando el ordenador nos resaltan su poder para captar la atención de los alumnos. Por su funcionalidad puede asumir un papel de asistente en el aula, haciendo posible, además, el diseño de nuevas situaciones de aprendizaje.

Al igual que en otros campos de la Matemática, el ordenador puede ser usado en la enseñanza de la Estadística en cada una de las facetas de cálculo, simulación y ejercitación y práctica. Este papel ha sido reconocido hasta el punto de haberse dedicado sesiones especiales dedicadas al tema en los Congresos Internacionales de enseñanza de la Estadística, ICOTS I celebrado en Sheffield en 1982, ICOTS II, que tuvo lugar en Victoria en 1986 e ICOTS III celebrado en Otago en 1990. Entre los trabajos sobre los aspectos globales del uso del ordenador en la enseñanza de la Estadística destacamos las de Goodman (1986), Holmes (1986) y Kanji y Harris (1986) y Biehler (1991). Comentaremos, a continuación, cada uno de estos aspectos.

En primer lugar, debemos considerar el cálculo y ejercitación. Joiner (1982) señala que el proceso de análisis estadístico tiene varios pasos, la mayor parte de los cuales deben hacerse en ciclos, varias veces en cualquier

proyecto. Estos pasos son los siguientes:

- Comprender el contexto de los datos.
- Comprender el fin del análisis.
- Comprobar si los valores obtenidos son razonables.
- Decidir si se puede o no cumplir total o parcialmente sus fines
- Explicar las fuentes de variación o incertidumbre.
- Realizar una serie de gráficos que incrementen la comprensión de los datos.
- A veces, transformar o reexpresar los datos en una métrica más apropiada.
- Seleccionar algoritmos de cálculo.
- Efectuar los cálculos.
- Comprobación de los cálculos.
- Interpretación de los resultados.

Mientras que, en el pasado, la mayor parte del tiempo de los cursos de Estadística se dedicaba a los cálculos o al estudio de las propiedades de las fórmulas estadísticas básicas, hoy, gracias a los ordenadores, podemos dedicar más tiempo a cada uno de los aspectos restantes.

Otro aspecto destacado por Russell (1988) y Golden (1986) es el papel del ordenador para la realización de gráficos. En un curso tradicional, pocos alumnos harían más de unos pocos gráficos a mano, generalmente uno sólo sobre el mismo conjunto de datos y, con frecuencia, no comparable a los que pueden obtenerse con los medios actuales. Es, precisamente, la importancia dada a los gráficos una de las características del Análisis Exploratorio de Datos.

Pero, además, el ordenador permite trabajar con casos reales. Los alumnos pueden estudiar cualquier tema de su interés y realizar sus propias encuestas entre los compañeros de clase, vecinos, comercios, etc. Es probable también usar la Estadística para realizar trabajos de otras asignaturas. El efectuar los cálculos y gráficos de una manera sencilla, permiten recoger tantos casos como deseen y todas las variables que consideren oportunas sobre un mismo tema. También podemos mostrar a los alumnos otras colecciones de datos cedidas por investigadores en campos relacionados con sus estudios. Todo ello permite incorporar el enfoque del método de proyectos a la enseñanza y aumentar la motivación del alumno.

La resolución de problemas aplicados, utilizando las capacidades de proceso de datos de los ordenadores, es destacada por R. Lesh (1987) como un procedimiento para hacer las ideas matemáticas más significativas y útiles. Pero no solo estos logiciales pueden ser herramientas para ayudar a los alumnos en la adquisición de ideas matemáticas más complejas e incrementar su significación, sino que también *"pueden amplificar el poder de los conceptos adquiridos"* (pg. 202)

El último aspecto es la simulación. Anderson y Barnet (1983), Bland (1985), Engel (1986), Biehler (1991), Dear (1991) y Kader (1991), entre otros, han resaltado su interés didáctico.

Hay fenómenos que, por sus características espacio-temporales o de otra índole, son difíciles de observar. Por medio de la simulación se construye, con el ordenador, un modelo simplificado de dicho fenómeno, eliminando las variables irrelevantes a su estructura, condensado en el tiempo y manipulable por el alumno.

En el caso de los fenómenos aleatorios, el fundamento de la simulación se basa en dos principios, según Heitele (1975). El primero es la concepción frecuencial de la probabilidad, que considera ésta como el número a que tendería la frecuencia relativa de un suceso, al repetir indefinidamente un experimento aleatorio, y viene avalada teóricamente por el teorema de Bernoulli. Aunque es importante discutir las probabilidades teóricas y las técnicas necesarias para su cálculo, estamos a veces interesados en determinarlas experimentalmente. El segundo es la posibilidad de estudiar las propiedades de un fenómeno aleatorio, sustituyéndolo por otro "isomorfo", es decir, en el que el espacio muestral, y el álgebra de sucesos considerada sean isomorfas y los sucesos elementales, que se corresponden en los dos experimentos, tengan las mismas probabilidades. El uso de programas de simulación permite poner en manos del alumno un nuevo instrumento que hace posible la exploración y el descubrimiento de conceptos y principios que de otro modo serían notablemente más abstractos, contribuyendo a proporcionar experiencia estocástica y a mejorar la intuición probabilística que, en general, no se desarrolla espontáneamente (Feller, 1973; Fischbein, 1975; Fischbein, 1990).

En general, los métodos de Montecarlo se definen como cualquier procedimiento que usa el muestreo estadístico para obtener soluciones aproximadas a problemas matemáticos o físicos. La solución aproximada que obtenemos, no lo es en el sentido ordinario del análisis numérico, sino en el sentido estocástico, de convergencia de las frecuencias relativas a las correspondientes probabilidades teóricas.

Las simulaciones pueden usarse también para relacionar las ideas estadísticas con otras ramas de la Matemática, por ejemplo, con métodos numéricos o geométricos. Baste citar como ejemplos el cálculo de áreas complejas o la mecánica estadística. Por otra parte, podemos utilizar la simulación dentro del contexto de lo que hoy entendemos por exploración y descubrimiento en Matemáticas. Como se expone en Howson y Kahane (1986) la exploración y el descubrimiento son dos componentes importantes en el proceso de Educación Matemática ya que:

- Favorecen una mayor comprensión y retención de la Matemática.
- Estimulan una mayor confianza en la capacidad para usar la Matemática en la resolución de problemas.
- El descubrimiento proporciona la mejor experiencia estética de la Matemática, haciéndola más atractiva.

Otras veces, la solución de los problemas por medios teóricos queda por encima de las capacidades de quien resuelve el problema. ¿Significa esto que debemos desanimar una investigación más detallada de dicho problema?. Con la ayuda de los ordenadores y las probabilidades empíricas, no tenemos excusa para eliminar la discusión de algunos de los más interesantes e importantes problemas. En especial, los estudiantes con conocimientos de programación pueden usar la simulación para explorar problemas que encontrarían difíciles de abordar por otros medios, con lo que, sin duda, aumentará su interés por el tema, (Engel, 1991). También puede usarse para comprobar experimentalmente la solución correcta de problemas contra-intuitivos que aparecen con frecuencia en teoría de la probabilidad. Esta posibilidad es especialmente viable con lenguajes como RESAMPLING STATISTICS (Simon, 1990) que proporciona un lenguaje de simulación de propósito general para usar los métodos de Montecarlo para resolver problemas de Probabilidad y Estadística.

### Software estadístico

El uso del ordenador como recurso didáctico depende en gran medida del software empleado. Una descripción detallada de los diversos programas utilizables con este propósito puede verse en Biehler (1991). Asimismo la revista *Teaching Statistics* incluye una sección fija dedicada al comentario crítico del software didáctico.

Una primera opción es que el mismo alumno escriba sus programas de ordenador si conoce un lenguaje de programación, (Engel, 1991), que puede ser desde LOGO hasta un lenguaje estadístico específico como S (Becker y cols.; 1988). Este enfoque implicaría una orientación algorítmica de la enseñanza, aunque en el caso de la simulación tiene la ventaja de poder explorar fácilmente nuevas posibilidades en los modelos, simplemente variando algunas líneas de los programas escritos, como se muestra en trabajos como los de Godino y Batanero (1983, a) y b)) referidos al estudio de los teoremas de límite y a las distribuciones en el muestreo.

También el software profesional puede emplearse como recurso en la enseñanza. Disponemos para ello de paquetes como STATGRAPHICS (se dispone manual en versión de 1991), SPSS (Nie y cols., 1975), SYSTAT, BMDP (Dixon, 1990), STATVIEW... que contienen los algoritmos, procedimientos y gráficos estadísticos usuales. Existe una gran variedad de paquetes estadísticos. Råde (1991) cita 53 paquetes estadísticos que fueron referidos en los 70 trabajos presentados en SOFTSTAT'89 (V Conferencia sobre el uso científico del software estadístico que tuvo lugar en Heidelberg, en 1989) y publicados en sus Actas. Ante tal variedad como señalan Hawkins y cols. (1992) los profesores debieran elegir un software que proporcione un entorno integrado de computación estadística, lo que precisa:

- Facilidades de edición de textos para la escritura de los informes de investigación.
- Herramientas gráficas y de generación de tablas.
- Editor para la grabación y depuración de datos y, en su caso, del programa de comandos.
- Librería de procedimientos de cálculo estadístico.
- Posibilidades de importación/exportación de ficheros con otras aplicaciones usuales, tales como hojas electrónicas u otros programas estadísticos.

Para Råde (1991) también es importante que sea interactivo y fácil de usar.

Sin embargo, se debe tener cuidado con los paquetes estadísticos profesionales muy sofisticados en su aplicación en la enseñanza, puesto que pueden ser contraproducentes, como señala Engel (1991): "*El software estadístico sofisticado es pedagógicamente dañino*", pág. 168; apuntando seguidamente que: "*Aprender su uso requiere un esfuerzo comparable al esfuerzo de aprender un nuevo lenguaje de programación*", por lo que en nuestra opinión podría producirse lo que Brousseau (1986a) llama deslizamiento metacognitivo.

Además del software estadístico propiamente dicho, habría que añadir otro software de uso general, como las hojas electrónicas, cuya utilidad en la enseñanza de la Estadística ha sido descubierta por los profesores, pues mientras que en el ICOTS II no hay trabajos que las mencionen, en el ICOTS III

hay docenas que le dedican un espacio sustancial. Los paquetes gráficos y los sistemas expertos específicos de asistencia en el diseño de la investigación, y elección del método de análisis (Brent y cols., 1991), se cuentan entre estas herramientas.

Por último están los programas preparados con fines exclusivamente didácticos, aunque como resalta Råde (1991): *"existen muy pocos programas educativos de Estadística"*, (pág. 437). Entre ellos se incluye el paquete PRODEST (Batanero y cols., 1987) empleado en esta investigación. También podemos citar como ejemplos el MINITAB (Ryan, Joiner y Ryan 1982) y el MAXIMA (Harrison, 1993) que son programas de cálculo estadístico general; el *"Understanding statistics"*, del Centre for Statistical Education de Sheffield, disponible en versión PC desde 1992; el preparado por el N.C.T.M. (1988) para el análisis exploratorio de datos, el STATLAB (Stirling, 1987) para simulación de conceptos de inferencia estadística o el GASP (Fisch y cols. 1988) para enseñanza de conceptos sobre procesos estocásticos.

Esta diversidad de opciones permite según Biehler (1991) diversos enfoques en la enseñanza cada uno de los cuales tiene sus propios aspectos representacionales y computacionales. Chevallard (1987) señala asimismo que la introducción efectiva de cualquier objeto técnico en la enseñanza es un tema delicado y reclama la atención sobre los tres aspectos siguientes:

- El "hardware didáctico" que incluye tanto los ordenadores como los programas, manuales, etc, esto es lo que habitualmente se conoce como "software informático";
- el "software didáctico" que estaría constituido por la ingeniería didáctica específica construida para llevar a cabo enseñanza del tema elegido;
- el "sistema de explotación didáctica" o planificación detallada de la acción del profesor y del trabajo de los alumnos que asegure la coordinación e integración de los primeros elementos.

Todo ello requiere un esfuerzo considerable de investigación en el campo de Didáctica de la Matemática, si se quiere aprovechar las enormes posibilidades que el ordenador puede aportar a la enseñanza de la Estadística.

### 1.3. INVESTIGACIONES PSICOLOGICAS

#### 1.3.1. INTRODUCCION

La toma de decisiones es una actividad importante, cuyo análisis es objeto de estudio en diversas disciplinas y ocupaciones del mundo actual, como Economía, Dirección de Empresas, Estadística o Sociología. Dentro de este ámbito de toma de decisiones, una destreza importante es la realización de juicios sobre la existencia o inexistencia de asociación entre variables (Alloy y Tabachnik, 1984).

Por ejemplo, la relación existente entre la climatología y el comportamiento de las cosechas ha preocupado al agricultor, desde que el ser humano comenzó a ejercitarse en tan noble tarea. Desde la prehistoria hasta nuestros días, el discernimiento sobre la posible relación que puede existir entre dos sucesos ha sido un aspecto importante del conocimiento humano. *Conocer si los sucesos se relacionan y, con que intensidad lo hacen, facilita a las personas explicar el pasado, controlar el presente y predecir el futuro*". (Crocker, 1981, pg. 272).

Pozo (1987) sitúa las investigaciones sobre asociación estadística dentro de las relacionadas con el pensamiento causal. Describe también las dos teorías comprehensivas principales sobre este tipo de razonamiento que se han establecido en el marco de la psicología.

La primera de ellas es debida a Piaget, quien considera que el estudio de la causalidad requiere previamente el desarrollo operacional, pero no se agota con él. La causalidad, como toda operación, supone a la vez transformación y conservación. Transformación porque la causa produce algo, porque el efecto es nuevo respecto a la situación anterior. Pero al mismo tiempo hay conservación de lo que se transmite entre la causa y el efecto y esta realidad transmitida la captamos por vía inferencial.

En la causalidad, más que en otras situaciones, el conocimiento es fruto de la interacción del sujeto y el objeto, que se rige por los procesos de asimilación y acomodación (Piaget y García, 1973). Lo específico del pensamiento causal es que la operación no sólo se aplica a los objetos sino que se atribuye a los objetos, al considerar que estos actúan unos sobre otros por sí mismos, en un isomorfismo con nuestras propias operaciones (Pozo, 1987). Por ello, para estudiar la causalidad no basta conocer las operaciones del sujeto, sino que es preciso conocer al objeto.

Pozo (1987) diferencia tres períodos en la obra de Piaget sobre pensamiento causal. De ellos, el más prolongado y conocido es el que se enmarca dentro del estudio de la génesis de las categorías formales del pensamiento. En especial, las investigaciones sobre el azar, la probabilidad y la correlación están estrechamente relacionadas con el estudio del pensamiento causal. Puesto que el interés de nuestro trabajo se centra en el estudio de la asociación, describiremos las investigaciones de Piaget sobre este aspecto particular en la sección 1.3.2 con mayor detalle.

La segunda de las teorías psicológicas sobre pensamiento causal citadas por Pozo (1987) es debida a Kelley y se conoce como teoría de la atribución causal. Nacida en el seno de la psicología social, "su objetivo primordial es estudiar las reglas de inferencia que utilizan los sujetos para determinar las causas, tanto de su propia conducta observada, como de la conducta de los demás" (Pozo, 1987, pg. 34). Según Kelley (1973), su teoría permite ocuparse de dos problemas causales distintos, según la cantidad de información disponible para el sujeto:

- a) El sujeto tiene información que procede de observaciones múltiples. En este caso se plantea un problema de covariación.
- b) El sujeto dispone de información de una sola observación. El problema se conoce entonces como de configuración de causa.

En el primer caso, en el que se encuadrarían las investigaciones sobre asociación estadística, Kelley supone que se cumple el principio de covaria-

ción, por el que un efecto es atribuido a aquella de sus posibles causas con la que siempre covaría. Además, se asume la contigüidad temporal entre causas y efectos (Pozo, 1987). Para decidir entre las causas posibles cual es la efectiva, el sujeto actuaría empleando una versión ingenua del método usado en la ciencia, teniendo en cuenta tres dimensiones: consistencia (la causa es seguida por el efecto), discriminabilidad (otras causas no son seguidas por el efecto) y consenso (en otros casos se produce la misma causa con los mismos efectos).

Kelley toma de Piaget la noción de esquema. Para este autor, la persona madura ha adquirido un repertorio de ideas sobre la operación e interacción de factores causales. Cuando el sujeto carece de información sobre esa situación causal, recurre a esas concepciones o esquemas causales. Los esquemas causales reflejan las nociones básicas de la realidad que tiene el sujeto, aunque no hacen referencia a los contenidos de estas concepciones, sino a su forma o configuración. Un ejemplo sería el esquema de causas múltiples suficientes. Según este esquema, cuando existen varias causas plausibles que aparecen conjuntamente, el sujeto atribuye menor peso al efecto de cada una de las causas individuales (Pozo, 1987).

Otro aspecto necesario para comprender el juicio causal sería producir una clasificación de los tipos de tarea que se han utilizado en las investigaciones, resaltando sus diferencias esenciales. Shanks (en prensa) propone la siguiente:

- a) En un primer tipo de situaciones la causa potencial y sus efectos ocurren sucesivamente a través de un periodo de tiempo. Estas situaciones representan la forma en que la secuencia causal se experimenta típicamente en la vida real y se llamarían situaciones causales directas. Por ejemplo, pulsar una tecla o secuencia de teclas en un ordenador y observar los efectos que producen es una situación causal directa. La tarea de la persona es aprender los efectos que producen los distintos golpes de tecla. El elemento fundamental de tales situaciones es que hay una distribución temporal de los sucesos. En los experimentos de Wasserman, Chatlos y Neunaber (1983), los sujetos disponen de una tecla de telégrafo y unas luces (roja y blanca) y deben obtener la relación que existe entre pulsar la tecla y que luzca la luz blanca.
- b) Otro tipo de juicios causales se pueden llamar situaciones causales indirectas, que a la vez se pueden dividir en dos categorías:
  - b1) En la primera se pide a los sujetos que hagan atribuciones causales en situaciones donde se da la información resumida y presentada en forma estadística, generalmente en forma de tabla de contingencia. En esta situación se requiere razonamiento causal, pero tiene poco que ver con los problemas causales del mundo real.
  - b2) En la segunda se consideran las inferencias causales de las personas a partir de historias, textos, narraciones o escenarios.

Por su parte, Pozo (1987) cree que un modelo sobre el pensamiento causal debe contemplar las interacciones entre los aspectos representacionales de la causalidad (teorías causales) y los aspectos procesuales (reglas de inferencia). Las reglas de inferencia tendrían una naturaleza esencialmente formal y un alto grado de generalidad, mientras que las representaciones son factuales y mas específicas. Un tercer aspecto lo constituyen un conjunto de principios generales que determinarían la forma del vínculo causal que adoptarían los

otros dos componentes.

Entre las reglas de inferencia, la más estudiada ha sido la covariación y la detección de la misma por parte de los sujetos, en la que se han estudiado problemas de tipo muy diferente. Una de las clasificaciones habituales de estas investigaciones es diferenciar la situación experimental en función de las relaciones mantenidas entre causa y efecto. *"La relación de causalidad necesaria y suficiente es aquella en que la causa va seguida siempre del efecto sin que éste pueda producirse en su ausencia (covariación perfecta, en el 100 por 100 de los casos). La relación de causalidad suficiente es aquella en que la causa va siempre seguida del efecto, pero éste puede producirse en ausencia de la causa (covariación imperfecta). La causalidad necesaria se produce cuando el efecto no puede producirse en ausencia de la causa, pero puede no producirse en su presencia (covariación imperfecta) y, por último, la causalidad contribuyente (ni necesaria ni suficiente) es aquella en que la causa no va seguida siempre del efecto, que a su vez puede producirse en ausencia de la causa (covariación imperfecta)"* (Pozo, 1987, pg. 96).

Dentro de las investigaciones sobre detección de la covariación, Pozo diferencia la covariación simple y múltiple. La covariación simple se refiere a la causalidad necesaria y suficiente. La covariación múltiple a los otros tres tipos. Pozo (1987) sitúa dentro de ellas las investigaciones sobre la detección de la asociación.<sup>(2)</sup> *"Utilizaremos la denominación de correlación, por considerarla más apropiada para definir la pauta de covariación múltiple en la que se producen tres al menos de los cuatro tipos de relación posible entre una causa y un efecto"* (pg. 111). Veremos más adelante, al estudiar las variables de tarea en los juicios de asociación en la sección 2.1, que pueden también plantearse problemas de asociación en contextos no causales.

Al describir las investigaciones sobre asociación y sobre probabilidad, Pérez Echeverría (1990) habla de "revolución probabilística" y la equipara con la "revolución cognitiva", en cuanto a la importancia que estos estudios han tenido en Psicología, por el nuevo giro que han supuesto en los trabajos sobre pensamiento y razonamiento.

En el estudio de la racionalidad humana, (Jungerman, 1983), se ha considerado durante largo tiempo al hombre, desde un punto de vista aristotélico - tomista, como un ser *racional*, que rige sus pensamientos y razonamientos de acuerdo con las reglas de la lógica formal. Por otra parte, el mundo actual está regido más por los fenómenos probabilísticos que por los deterministas, lo que va convirtiendo a las ciencias cada vez más en probabilísticas. Por ello, la concepción del hombre como un *ser racional* que reacciona ante las situaciones propuestas de acuerdo con la lógica formal tradicional, se ha transformado, en Psicología, en la concepción de un *estadístico intuitivo* (Peterson y Beach, 1967), que toma unas decisiones de acuerdo a un sistema probabilístico complejo adquirido en su relación empírica con el mundo que le rodea.

En la perspectiva cognitiva, adoptada en la mayor parte de estas investigaciones, se supone que el hombre tiene una capacidad limitada para procesar la información que recibe del exterior. Hogarth (1980) distingue cuatro limitaciones fundamentales en el proceso humano de la información:

---

(2) Aunque emplea el término correlación, se está refiriendo por el contexto a los problemas de asociación.

- a) La selección de la información recibida. Si de la información disponible se desprecia alguna necesaria para resolver el problema, la solución se verá afectada.
- b) De modo general, el hombre procesa la información de forma secuencial, lo que puede influir en la percepción de procesos causales presentados no secuencialmente.
- c) La memoria humana, que reconstruye la información dentro de conjuntos esquemáticos.
- d) La utilización de heurísticos que pueden dar lugar a decisiones razonables con poco esfuerzo, pero también a conclusiones erróneas cuando se aplican indiscriminadamente.

Trabajos como los de Peterson y Beach (1967) y Kahneman y cols, (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982), cambiaron la manera de concebir el razonamiento humano, pasando de una visión de un ser humano dotado de una lógica equivalente a la lógica formal, a concebir dicho razonamiento como una aplicación de heurísticos mentales, obtenidos en la experiencia diaria y adaptados a la resolución del problema concreto que se nos plantee.

El razonamiento correlacional es un campo de investigación que ha permitido analizar conjuntamente dos puntos de vista diferentes. Por un lado, y a partir de los trabajos de Piaget, se han estudiado las estrategias utilizadas en los procesos de resolución de problemas, lo que permite comparar estas estrategias con las normativas que seguiría un individuo que aplicase normas racionales y estadísticas. Otra corriente estudia la influencia del contenido de los problemas y de las teorías previas sobre las soluciones de estos problemas. Se presentan también en este campo posturas muy diferentes: desde los que consideran que la actuación de los adultos se ajusta a las normas estadísticas (por ejemplo Shaklee, 1979) a los que como Nisbett y Ross (1980) sostienen que el razonamiento sobre la asociación estadística es, en general, muy pobre, pasando por las posturas intermedias.

Para Crocker (1981) el proceso para realizar un juicio de covariación entre dos variables consta de los seis pasos siguientes, en cada uno de los cuales pueden producirse errores que ocasionen un juicio inadecuado:

- a) Decidir qué clase de datos se deben recoger.
- b) Tomar una muestra representativa de la población.
- c) Codificar los datos tomados.
- d) Recordar la información que ha recogido y estimar las frecuencias de casos que confirman y falsan las hipótesis.
- e) Integrar los datos.
- f) Usar las estimaciones como base de las estimaciones o juicios que se hagan.

A continuación se realiza un recorrido sobre las aportaciones de la Psicología al estudio sobre juicios de asociación entre variables estadísticas. Nos limitamos a las investigaciones sobre los puntos d) a f) que son los tratados en el presente trabajo. Debido a la abundante bibliografía sobre el tema, no se pretende ser exhaustivos, sino señalar los trabajos que sirven de apoyo a esta investigación.

### 1.3.2. EL ESTUDIO DE INHELDER Y PIAGET

El estudio del concepto de asociación lo realizan Inhelder y Piaget (1955) en el capítulo XV (Las dispersiones probables y las correlaciones) de su obra "De la Lógica del niño a la Lógica del adolescente". Consideran la comprensión de la idea de asociación<sup>(3)</sup> como el último paso para comprender el concepto de probabilidad. Por tanto, los antecedentes evolutivos de los dos conceptos son los mismos y la comprensión de la idea de asociación implica, para estos autores, las de proporción, y probabilidad y requiere la capacidad combinatoria. Observan que algunos chicos al explicar las dispersiones y determinar la ley por la que se rige dicho fenómeno utilizan los casos más favorables y los menos favorables acercándose así al problema de las correlaciones. Sobre el origen de la correlación en la mente humana afirman: "La correlación es una noción que procede simultáneamente de la de probabilidad y de una estructura emparentada con las proporciones" (pg. 272).

El problema más simple de asociación se presenta al clasificar una población o muestra respecto a dos variables estadísticas, cada una de las cuales presenta sólo dos valores posibles (presencia o ausencia de un atributo), como se muestra en la siguiente tabla:

|      |   |      |
|------|---|------|
|      | B | no B |
| A    | a | b    |
| no A | c | d    |

Inhelder y Piaget plantean a los sujetos el problema de la asociación entre el color de los ojos y el color del cabello en personas. Para ello construyen unas cuarenta tarjetas con dibujos de rostros con ojos y cabellos coloreados. Le dan al sujeto unas pocas, bien sin clasificar o bien clasificadas, por ejemplo la cuaterna (6,6,2,2), correspondiente a las casillas (a,b,c,d), y se le pide al sujeto si existe alguna relación entre el color del cabello y el color de los ojos en ese grupo de tarjetas ofrecido. Otras veces se le ofrecen dos grupos de tarjetas y se le pregunta en qué grupo la relación es más nítida.

Para probar una asociación entre las dos variables el sujeto deberá tener en cuenta los casos favorables ( $a+d$ ), los casos desfavorables ( $b+c$ ) y los casos posibles ( $a+d$ ) + ( $b+c$ ). A menudo el sujeto sólo tiene en cuenta el caso a (positivo-positivo), sin tener en cuenta el caso d (negativo-negativo) que equivale normativamente al anterior; otras veces relacionará a con b o con c, sin percatarse de d. Estos autores enuncian así el verdadero problema de la asociación. "Superadas estas dificultades iniciales, el problema reside en comprender que la correlación no consiste en una simple probabilidad, es decir, una relación elemental entre los casos favorables ( $a+d$ ) y el conjunto de los casos posibles ( $a+d+b+c$ ). Sin duda alguna el problema verdadero de la correlación reside en este punto, y ello explica por qué la correlación sólo se adquiere en el nivel III B, aunque se posea la probabilidad simple en el nivel III A en su forma multiplicativa" (Inhelder y Piaget, 1955, pg. 198).

~~~~~  
⁽³⁾ Aunque Piaget emplea en su trabajo problemas relativos a tablas de contingencia, a los que hoy en día se les aplica preferentemente el término "asociación", usa el término correlación, ya que en esa época este término se usaba indistintamente para todo tipo de problema de asociación.

Dando la siguiente fórmula para hallar el coeficiente de correlación⁽⁴⁾ en su forma aditiva:

$$R = \frac{(a+d) - (b+c)}{(a+d) + (b+c)}$$

El sujeto después de encontrar la probabilidad $\frac{(a+d)}{(a+d) + (b+c)}$ y la probabilidad $\frac{(b+c)}{(a+d) + (b+c)}$ debe comprender que la correlación es una función de $(a+d)-(b+c)$ en relación con el todo. Si se trata de probabilidades iguales la correlación sería cero y sería más fuerte en tanto que la desigualdad $(a+d) > (b+c)$ fuese más intensa. Se observa que, debido al contexto elegido, estos autores sólo tratan la correlación positiva; tan sólo al final del capítulo se habla de correlación negativa.

Esta manera de detectar las contingencias solamente es correcta cuando las frecuencias marginales son iguales, como afirman Shaklee y Tucker (1980) "Esta estrategia identificaría correctamente muchas contingencias, pero puede resultar errónea cuando las frecuencias de los estados alternativos del factor A (y/o factor B) son distintos" (pg. 460). Un contraejemplo que corrobora esta afirmación es el ítem D que hemos utilizado en el pretest, en el que existe independencia entre las variables. Sin embargo, según la estrategia de Inhelder y Piaget antes expuesta, existiría dependencia, aunque de intensidad débil.

El sujeto del nivel III A (subestadios III A de 11-12 a 14-15 años) puede estimar probabilidades simples, al calcular los casos favorables y los casos posibles, pero sólo compara las celdas dos a dos, por lo que puede comparar los casos *a* con los casos *b* o con los casos *a+b*. No consigue relacionar los favorables (*a+d*) y los desfavorables (*b+c*) a la existencia de asociación, con todos los casos posibles. Los sujetos comprenden que hay relación entre los ojos azules y el cabello rubio, que también hay entre el cabello negro y los ojos negros, pero no llegan a comprender que *a* y *d* tienen la misma significación, ya que oponen los casos *a* a los *b* y los *c* a los *d*. Una segunda dificultad es que, una vez admitido que los casos *a* y *d* son favorables a la asociación y los casos *b* y *c* desfavorables a la misma, no los comparan entre sí o con el todo, sino que siguen comparando *a* con *b* y *c* con *d*. Al finalizar el subestadio III A hay una etapa intermedia entre éste y el III B; el sujeto llega poco a poco a establecer las relaciones diagonales y a considerar (*a+d*) y (*b+c*) y a compararlas entre ellas o con (*a+b+c+d*) lo que nos indica el comienzo de la idea de asociación.

En el sujeto del nivel III B (subestadios III B a partir de los 14-15 años) la relación es espontánea entre los casos favorables a la asociación (*a+d*) y los casos desfavorables (*b+c*) y con el conjunto de los casos posibles. Primero se comprende la reciprocidad entre los casos (*a* y *d*), después comprende la de los casos (*b* y *c*). El nivel III B se diferencia del intermedio entre III A y III B en que, mientras en esta etapa intermedia se buscan las relaciones $\frac{(a+d)}{(a+d) + (b+c)}$ y $\frac{(b+c)}{(a+d) + (b+c)}$, en el nivel III B el sujeto relaciona de modo directo (*a+d*) con (*b+c*) para juzgar el grado de correlación existente, llegando al descubrimiento de los tres casos de correlación:

⁽⁴⁾Este coeficiente se corresponde con el coeficiente de concordancia (Sierra Bravo, 1991).

positiva, nula y negativa.

1.3.3. CONCLUSIONES OBTENIDAS EN ESTUDIOS POSTERIORES

1.3.3.1. Estrategias empleadas en problemas de asociación

Posteriormente a los estudios de Piaget e Inhelder, la forma de resolver los problemas de asociación abarca un amplio abanico de investigaciones, entre las que se pueden citar: (Smedlund, 1963); (Jenkins, 1965); (Chapman y Chapman, 1969); (Abramson y Alloy, 1980); (Allan y Jenkins, 1980); (Nisbett y Ross, 1980); (Peterson, 1980); (Shaklee y Tucker, 1980); (Crocker, 1981); (Shaklee y Mims, 1981); (Beyth-Marom, 1982); (Crocker, 1982); (Evans, 1982); (Arkes y Harkness, 1983); (Shaklee, 1983); (Wasserman y cols, 1983); (Alloy y Tabachnik, 1984); (Wasserman y cols, 1984); (Arkes y Rothbart, 1985); (Shanks, 1985); (Chatlosh y cols, 1985); (Dickinson y cols, 1984); (Vazquez, 1987); (Pérez Echeverría, 1990);

Las aportaciones de la Psicología a la investigación sobre como las personas realizan los juicios de asociación entre variables es abundante en lo relativo a las tablas de contingencia 2x2 y bastante más exiguo en los demás formas de relacionar dos variables.

Para Arkes y Harkness (1983) la discrepancia existente en las investigaciones sobre el tema es debida a la dificultad metodológica. Si se quiere conocer si los sujetos basan sus juicios en la casilla a, el investigador cambia el valor de esta casilla con lo que ha cambiado la relación de contingencia, pero si mantiene la relación de contingencia constante y cambia la casilla a también tiene que alterar el resto de casillas. Un primer grupo de trabajos estudia las estrategias empleadas en la resolución de estos problemas por adultos. Pérez Echeverría (1990) distingue siete tipos de estrategias hallados en estos trabajos: [a], [a-b], [a-c], [a,b,c], [a-b]/[c-d], [a+d]/[b+c] y [cualquier método de relación multiplicativa entre las cuatro casillas].

La estrategia [a] consiste en utilizar solamente la casilla (presente - presente) donde las dos variables contempladas coocurren. La relación será positiva, negativa o nula si el valor de a es mayor, menor o igual que el de las otras tres casillas. Puede producir errores graves cuando las frecuencias de las casillas b o c son altas. Inhelder y Piaget (1955) ven esta estrategia como precursora de las operaciones formales. Algunos investigadores han encontrado que los adultos utilizan esta estrategia para basar sus juicios de asociación, (Smedlund, 1963; Shaklee y Tucker, 1980; Shaklee y Mims, 1982); Beyth-Marom, (1982); Yates y Carley (1986).

La estrategia [a-b] se utiliza para indicar la diferencia de frecuencias absolutas entre la casilla a (presente-presente) y la casilla b (presente-ausente). Ha sido estudiada por Inhelder y Piaget (1955); Smedlund, (1963); Adi y cols. (1978); Shaklee y Mims (1982). En uno de su experimentos Arkes y Harkness (1983) encontraron que era la estrategia más utilizada. La estrategia [a-c] es similar a la anterior, indica la diferencia de las frecuencias absolutas de la casilla a con la c (ausente-presente).

La estrategia [a, b, c], en términos de un juicio causal, determina la necesidad y suficiencia de las causas a partir de las diferencias encontradas sin realizar cálculo matemático, sólamente se infiere de manera subjetiva, a

partir de las diferencias encontradas (Pérez Echeverría, 1990).

La estrategia $[a-b]/[c-d]$ se utiliza para calcular la razón entre las diferencias de las frecuencias de ambas filas (Pérez Echeverría, 1990).

La estrategia $[a+d]/[b+c]$ se utiliza para calcular la razón entre los casos que confirman la posible relación y los que la falsan. Una variedad de esta estrategia fue estudiada por: (Shaklee y Tucker, 1980; Shaklee y Mims, 1982; Arkes y Harkness, 1983; Allan y Jenkins, 1983), que consiste en hallar la diferencia de la suma de las diagonales y se le suele llamar en la literatura $\delta D = [(a+d)-(b+c)]$, Jenkins y Ward (1965) observan la limitación de esta estrategia a los casos en que las frecuencias marginales son iguales, ya que en el caso de que sean desiguales se puede detectar asociación cuando existe independencia, por ejemplo, el ítem D del pretest que se propone en nuestro experimento. Allan y Jenkins (1983) encuentran que los juicios de asociación tienden a hacerse de acuerdo con la regla δD . Fue la estrategia más utilizada en el trabajo de Shaklee y Tucker (1980).

En cuanto al último tipo de estrategia mencionado: *[cualquier método de relación multiplicativa entre las cuatro casillas]*, se consideró cuando los sujetos relacionaban las frecuencias absolutas de las cuatro casillas utilizando la multiplicación. Una de tales estrategias es la llamada en la literatura $\delta P = a/(a+b) - c/(c+d)$, propuesta por Jenkins y Ward (1965), y estudiada entre otros por Shaklee y Mims (1982) y consiste en calcular la diferencia de las frecuencias relativas de las primeras casillas de las dos filas, o bien, en términos probabilísticos, comparar las probabilidades condicionadas de un suceso, dados los valores alternativos de otro suceso. Según este criterio las variables serían independientes si $\delta P = 0$, siendo la asociación positiva o negativa según el signo de δP .

Pérez Echeverría (1990) agrupa estas siete estrategias en cinco niveles según el número de casillas empleado y el modo en que se integra la información:

- Nivel 1, estrategia $[a]$ (3.7 por ciento de uso)
- Nivel 2, estrategias $[a-b]$ y $[a-c]$ (30.56 por ciento de uso)
- Nivel 3, estrategia $[a, b, c]$ (15.74 por ciento de uso)
- Nivel 4, estrategias $[a-b]/[c-d]$ y $[a+d]/[b+c]$ (37.96 por ciento de uso)
- Nivel 5, estrategia *[cualquier método de relación multiplicativa entre las cuatro casillas]* (12.04 por ciento de uso)

Las diversas estrategias utilizadas por los sujetos en los problemas sobre juicios de asociación no es lo único que influye en la solución que propongan, dándose el caso que estrategias que no son correctas, en general, puedan dar soluciones correctas en problemas específicos. Por tanto, la tasa de aciertos en problemas propuestos en estas investigaciones depende del problema correlacional propuesto. (Shaklee y Tucker, 1980). Esto nos lleva, en los diversos análisis que se realizan de los datos de los experimentos llevados a cabo, a clasificar las estrategias de nuestros alumnos en correctas, parcialmente correctas e incorrectas, como veremos en la parte experimental de esta Tesis. Asimismo, clasificamos las estrategias no sólo en cuanto al número de casillas empleadas y el modo en que se integra la información, sino en cuanto a los conceptos matemáticos implícitos en esta integración.

1.3.3.2. Influencia de las teorías previas

La experiencia vital de cualquier sujeto y el ambiente cultural donde se ha desenvuelto le han dotado de una serie de teorías que son utilizadas en la interpretación de los hechos y fenómenos que ocurren a nuestro alrededor. Shanks (1987) indica que la adquisición de una creencia con el contenido , "la acción A causa el resultado R", a menudo dependerá de la experiencia de las contingencias en el entorno entre la acción y el resultado. Necesitamos realizar acciones y mostrar sus consecuencias, para hacernos una idea de la relación acción-resultado. También necesitamos explicar cómo la exposición de alguna contingencia acción-resultado provoca una creencia sobre esa relación y cómo se determina la fortaleza de esa creencia por la situación específica de la persona, en la exposición a ella. Estas teorías o expectativas previas que tenemos sobre el mundo están presentes cuando un sujeto realiza un juicio de asociación entre variables.

Jennings, Amabile y Ross (1982) compararon los juicios de correlación que realizaban los sujetos, en situaciones donde existían fuertes teorías previas y donde no existían (relacionar una serie de números y letras). Llegaron a la conclusión de que, cuando existían teorías previas, se sobreestimaba la correlación, mientras que cuando no existían teorías previas, era necesaria la existencia de una fuerte correlación entre los datos para detectar la asociación, y aún así se subestimaba.

Un concepto relacionado con las teorías previas es el de "correlación ilusoria", definido por Murphy y Medin (1985) del siguiente modo: "Cuando percibimos que existe una correlación basándonos en nuestras propias teorías pero no existe ningún hecho empírico que las sustente, se habla de "correlación ilusoria".⁽⁵⁾ Este fenómeno ha sido estudiado por Chapman y Chapman (1969). Tversky y Kahneman (1982b) argumentan que el heurístico de la accesibilidad nos proporciona una explicación razonable para el efecto de la correlación ilusoria, resumiendo que "la experiencia nos ha enseñado que, en general, los casos de clases numerosas se recuerdan mejor y con más seguridad que los casos de clases menos frecuentes; que los sucesos probables son más fáciles de imaginar que los improbables y que las conexiones asociativas entre los hechos se fortalecen cuando los hechos co-ocurren con cierta frecuencia" (Tversky y Kahneman, 1982b, pg.14; también pg. 179 de la traducción castellana) .

Otro término relacionado con el influjo de las teorías previas es el de "ilusión de control", acuñado por Langer (1975) y definido de la siguiente manera: "Como ilusión de control se define la expectativa inapropiada de que la probabilidad de un éxito personal sea más alta que lo que garantiza la probabilidad objetiva" (Langer, 1975, pg. 232).

Wright y Murphy (1984) suponen que los juicios de correlación dependen de las teorías previas que tengan los sujetos y de los datos presentados. Realizaron varios experimentos con variables continuas y con coeficientes de correlación 0.10, 0.50, 0.90, en diferentes contextos: cociente intelectual de gemelos univitelinos (los sujetos esperan una fuerte relación entre los datos), de compañeros de habitación en un internado (los sujetos apenas esperan relación) y entre dos variables continuas descontextualizadas (no existencia de teorías previas).

⁽⁵⁾ (Tomado de Pérez Echeverría (1990), pág. 101)

Concluyen que, en presencia de teorías en concordancia con los datos, los sujetos dan una buena aproximación de la correlación aún cuando ésta es baja. Cuando no hay teorías previas la estimación de la asociación es más dispersa y se apartan más de la realidad objetiva. Por tanto, en este sentido, las teorías previas ayudan a realizar los juicios de asociación entre variables, como afirman estos autores: *"Las teorías en las que la gente tiene más confianza y que no son fácilmente refutables por los datos tendrían probablemente el mayor efecto en los juicios. Sin embargo, como se muestra en nuestros experimentos, esos efectos no son siempre malos"*. (Wright y Murphy, 1984, pg. 320).

Alloy y Tabachnik (1984) afirman que *"Para percibir el grado de covariación entre dos sucesos son relevantes dos fuentes de información: la información situacional sobre la contingencia objetiva entre los sucesos proporcionada por el entorno y las teorías previas o creencias del organismo respecto a los sucesos de covariación en cuestión"* (pg. 114). Para explicar esta idea construyen un modelo (marco de trabajo), materializándolo en una especie de tabla 2x2 como la siguiente (pg. 115):

Teorías previas	Información de la situación	
	Baja	Alta
Baja	Casilla 1	Casilla 3
Alta	Casilla 2	Casilla 4

donde el contenido de las casillas es el siguiente:

- Casilla 1:** El sujeto se abstendrá de realizar alguna atribución causal o inferencia de covariación o realizará juicios con poca confianza.
- Casilla 2:** Se realizará una atribución causal o percibirá la covariación de acuerdo con sus teorías previas.
- Casilla 3:** El sujeto realizará una atribución causal o percibirá la covariación de acuerdo con la información de la situación.
- Casilla 4:** Se distinguen dos casos. Si la percepción de la covariación coincide con las teorías previas y con la información de la situación, se realizaría una atribución o percepción de la covariación con una confianza extrema. En caso de desacuerdo, se estaría en un dilema cognitivo. En este caso la relativa fortaleza de las dos fuentes de información determina la naturaleza y exactitud de la percepción de la covariación.

1.3.3.3. Exactitud en los juicios de asociación

En general, según Crocker (1981), los juicios de asociación tienden a ser más exactos cuando:

- Los datos se presentan simultáneamente y las frecuencias son bajas.
- Se presentan en forma de tablas.
- Los sucesos que covarián lo hacen juntos en el tiempo.

- d) Las variables son continuas y tienen una correlación positiva fuerte.
- e) Se elimina de las tareas la necesidad de obtener muestras.
- f) Los datos no son ambiguos.
- g) Se elimina la necesidad de recordar casos o estimar frecuencias.

En los juicios sobre la asociación de variables tiene gran importancia la memoria requerida para realizar el juicio. Shaklee y Mims (1982) llevan a cabo dos experimentos para investigar la competencia de las personas en la realización de juicios de covariación de sucesos rutinarios, teniendo en cuenta la memoria requerida por los sujetos. En el primer experimento se les presenta a los sujetos 24 diapositivas, pidiéndoles que recontaran las frecuencias y llevaran el conteo en la memoria, y después el juicio de covariación con lo que recordaran sin proporcionarles las frecuencias. En el segundo experimento utiliza distractores. Con estas condiciones comparan los juicios de covariación y demuestran que la exactitud en los juicios decrece conforme se incrementa la memoria requerida. El efecto de la memoria es debido a un recuerdo pobre de las frecuencias y a una tendencia a utilizar unas estrategias más simples y menos exactas. En la presente investigación no es preciso el uso de la memoria, puesto que los datos están al alcance del alumno durante la realización de la prueba.

Allan y Jenkins (1983) consideran problemas sobre la asociación entre una variable de entrada o independiente, y una variable resultante o dependiente. Ambas variables pueden tomar dos valores: sucede, no sucede. Los juicios de asociación se realizan sobre los cuatro casos que se pueden dar ligando las dos variables. Realizan tres experimentos y concluyen que los patrones de los juicios de asociación encontrados se basan en dos principios:

- a) Se tiende a basar los juicios en la diferencia entre casos confirmatorios y no confirmatorios.
- b) La compatibilidad causal entre las variables independiente y dependiente juega un papel crítico.

Algunos investigadores han encontrado que la exactitud de los juicios de asociación depende del signo de la misma. Erlick y Mills (1967) encuentran que los sujetos juzgan las asociaciones negativas como muy proximas a cero. Wasserman y cols. (1983) y Shanks (1987) indican que, si la contingencia es positiva, los juicios mejoran conforme los sujetos aumentan su experiencia.

Arkes y Harkness (1983) demuestran la presencia de tres factores que influencian los juicios de contingencia:

- a) El valor de la frecuencia en la casilla a parece tener mayor impacto en las contingencias estimadas.
- b) La etiquetación de las filas y columnas puede drásticamente influenciar las contingencias estimadas.
- c) La presencia de números pequeños en las casillas puede influir en una sobreestimación.

Lane, Anderson y Kellan (1985) obtienen como una de sus conclusiones que la presentación en forma gráfica induce a juicios de relación más altos que la presentación en forma tabular, acusándose más en individuos inexpertos.

Erlick y Mills (1967) estudian la estimación de la correlación entre dos variables continuas, obteniendo como resultados los siguientes:

- a) La estimación de las correlaciones positivas se hace con más exactitud.
- b) Se producen sesgos positivos de estimación cuando las series incluyen unas cuantas desviaciones grandes y muchas pequeñas versus todas las desviaciones intermedias.
- c) Hay un sesgo general en personas sin preparación hacia estimaciones positivas.

1.3.3.4. Sobre el contexto y la presentación de la información

Las instrucciones dadas a los sujetos antes de comenzar la prueba pueden afectar a los resultados obtenidos. Así en Shaklee y Tucker (1980) se contemplan dos grupos, en uno de los cuales las instrucciones dadas a los sujetos inducen a que estos se decanten por la estrategia *a* versus *b* (comparación de las casillas *a* y *b*) mientras que las instrucciones que recibió el otro grupo les inducían a comparar las probabilidades condicionadas. Por este motivo se incluyen en los cuestionarios de la presente investigación instrucciones estandarizadas y han sido siempre administrados por el investigador, quien explicó con claridad a los sujetos lo que se esperaba de su respuesta.

La presentación de la información varía en las distintas investigaciones realizadas, si bien las podemos resumir en dos modos: a) en forma de tabla de doble entrada, como por ejemplo, Arkes y Rothbart (1985); Tversky, Sattach y Slovic, (1988); Pérez Echeverría (1990); Ortega Martínez (1991), y b) de manera secuencial, donde la información se presenta por medio de tarjetas, diapositivas, o medios electrónicos (pulsar un botón, juegos de ordenador, etc), como por ejemplo, Inholder y Piaget (1955); Wasserman, Chatlosh y Neunaber, (1983); Dickinson, Shanks y Eveden (1984); Shanks (1989); Chapman y Robbins (1990). En la presente investigación se ha presentado la información en tablas de contingencia 2x2; se ha ampliado a tablas rxc, una 2x3 y otra 3x3; también se ha ampliado a la presentación en forma de nube de puntos y a la comparación de muestras, ofreciendo los datos en forma de tablas en muestras independientes y relacionadas.

Ward y Jenkins (1965) comparan sistemáticamente la presentación secuencial de los datos y mediante tablas, y comprueban que los juicios de asociación son mejores cuando se presentan los datos en forma de tabla de doble entrada. Waserman y Shaklee (1984) llegan a la misma conclusión.

La presentación de la información y los contextos utilizados en las tareas propuestas a los sujetos sobre juicios de asociación en las diferentes investigaciones pueden influir en los resultados y conclusiones obtenidas. Citamos como ejemplo uno de los argumentos que Arkes y Harkness (1983) dan sobre el hecho de haber encontrado en su investigación menos frecuencia en el uso de la probabilidad condicional en la resolución de tareas de contingencia que Shaklee y Mins (1982). Para Arkes y Harkness es debido a que en el experimento de Shaklee y Mins el sujeto debe elegir entre las frases: "mucho más probable que...", "algo más probable que...", etc. induce al sujeto a comparar las distintas probabilidades con más intensidad que en los casos donde la pregunta es más neutra.

Arkes y Harkness (1983) encuentran que cuando los sujetos se ven forzados a recordar las frecuencias de las casillas utilizan estrategias más simples. Si se incrementa el valor de la casilla *c*, no tiene efecto sobre el juicio de contingencia, esto es consistente con la creencia de que el valor de la

casilla *c* es irrelevante, sin embargo si se incrementa la casilla *b*, se nota el efecto en el juicio de asociación.

Por último, según Beyth-Marom (1982), la presentación de la información por medio de variables simétricas o asimétricas también tiene influencia en los juicios sobre correlación emitidos por los sujetos. Aunque el concepto de variable simétrica y asimétrica está bien definido en Estadística esta autora da una nueva acepción para explicar sus resultados de la manera siguiente: Una variable simétrica es aquella en que los valores que puede tomar tienen el mismo peso para el individuo perceptor, por ejemplo la variable sexo (masculino, femenino). Una variable asimétrica es aquella cuyos valores no tienen el mismo peso para el sujeto perceptor, por ejemplo padecer una enfermedad (padece la enfermedad, no la padece) sería su expresión asimétrica; mientras que su expresión simétrica es (individuo enfermo, individuo sano). La variable sexo expresada de forma asimétrica es (masculino, no masculino). En las variables asimétricas se discrimina entre la ocurrencia y no ocurrencia de los sucesos, entre el caso positivo y el negativo. Según Nisbett y Ross (1980) los sucesos negativos tienen menor impacto en la atención de la gente que los sucesos positivos por lo que en el caso de las variables asimétricas los dos valores se evalúan con pesos diferentes. Beyth-Marom (1982) encontró una mejor percepción de la correlación cuando se utilizan variables simétricas. En la presente investigación las variables de las tablas 2x2 son asimétricas; mientras que las de las tablas rxc son simétricas. Se han elegido así porque son la forma más natural de presentarse en la realidad.

1.4. DESCRIPCION DEL PROBLEMA Y DE LA METODOLOGIA DE LA INVESTIGACION

1.4.1. INTRODUCCION

El antecedente inmediato de esta Memoria es la investigación de Estepa Castro (1990), donde se realizó un estudio exploratorio sobre la Enseñanza de la Estadística Descriptiva basada en el uso de lógicales informáticos. El tiempo total de la enseñanza fue de 7 semanas y la muestra estuvo constituida por alumnos del segundo curso de los estudios de Formación del Profesorado de E. G. B. de la Especialidad de Ciencias.

Para poder llevar a cabo este estudio se puso a punto un paquete de programas estadísticos (Batanero y cols., 1987) y un libro de texto complementario (Batanero y cols., 1988), que, después de sucesivas revisiones son los que hemos empleado en la investigación actual. Asimismo, en el aspecto metodológico citamos el método de análisis de la interacción alumno-ordenador que ha servido de prueba piloto al utilizado en este trabajo (Batanero y cols., 1992; Estepa y cols., 1992).

La investigación citada se inició con la recopilación, clasificación y estudio teórico de las posibles actividades de análisis de datos, a plantear en un curso de Estadística Descriptiva en los niveles indicados, determinando las variables didácticas incluidas en las mismas (Godino y cols., 1991). También se describieron las estrategias de análisis de datos en función de dichas variables.

Además, se comprobó experimentalmente la dificultad de dichas actividades de análisis de datos, estudiando el proceso de resolución por parte de los alumnos y catalogando sus posibles errores, tanto desde el punto de vista estadístico, como de índole informática, durante el periodo de enseñanza y al final del mismo. Respecto al tema concreto de la asociación estadística, los resultados obtenidos se recogen, además de en la Memoria citada, en Godino y cols. (1990) y Batanero y cols. (1991).

Como consecuencia de los resultados obtenidos, se hizo evidente el interés potencial de la metodología de enseñanza empleada en el estudio de la asociación entre variables. Los problemas relacionados con este concepto surgen de un modo natural, desde las primeras sesiones de enseñanza y pueden emplearse situaciones prácticas en área de interés para el alumno. La investigación realizada puso, sin embargo, en evidencia la existencia de errores conceptuales referidos al tema de asociación al finalizar la instrucción. Puesto que en dicha experiencia no se dispuso de pretest, no pudo tampoco efectuarse una evaluación del cambio de concepciones de los alumnos participantes respecto a la asociación estadística, quedando claro el interés de continuar la misma línea de investigación.

1.4.2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION

Aunque las investigaciones sobre la asociación estadística, realizadas desde el campo de la Psicología, proporcionan una información necesaria y muy valiosa, consideramos que la aportación realizada hasta la fecha es todavía insuficiente para una correcta planificación de la enseñanza del tema. Las investigaciones se han centrado principalmente en el modo en que los sujetos realizan juicios sobre la asociación a partir de la información proporcionada en una tabla de contingencia 2x2. Incluso para la tabla de contingencia 2x2, el estudio realizado no es completo, por no realizarse un análisis exhaustivo de las diferentes estrategias halladas experimentalmente, desde el punto de vista del contenido matemático puesto en juego y por no describirse sistemáticamente las concepciones sobre la asociación entre variables dicotómicas que subyacen en las estrategias y juicios explicitados por los sujetos.

Un primer objetivo de nuestra investigación será realizar, desde una perspectiva matemática, el estudio de las concepciones previas de los alumnos, correctas o incorrectas sobre la asociación entre variables dicotómicas. Debido al carácter inobservable de las concepciones de los alumnos, será preciso inferir estas concepciones a partir de los sistemas de prácticas (juicios de asociación, procedimientos, estrategias correctas e incorrectas ...) que los alumnos emplean al realizar un estudio de asociación en una tabla de contingencia. Ello lleva a la necesidad de una clasificación previa de las estrategias en los juicios de asociación, desde un punto de vista matemático.

Las investigaciones psicológicas han tratado una clase muy particular de problemas de asociación: tablas 2x2. El concepto general de asociación, como de variación de la distribución de una variable al condicionar por los valores de la otra, lleva al estudio de una clase de problemas más amplia que, en general, podemos clasificar de la siguiente forma:

- ▶ Asociación entre dos variables cualitativas, en tabla 2x2 (directa o inversa) o de dimensión superior (ordinal o no).
- ▶ Asociación entre dos variables cuantitativas o correlación, directa o inversa.
- ▶ Asociación entre una variable cualitativa y otra cuantitativa o comparación de muestras, independientes o relacionadas.

Aunque para el campo psicológico sea de gran interés el estudio aislado de la infinidad de problemas que podrían surgir al considerar esta división y todas las posibles variables, tanto de tarea, como de sujetos o instruccionales, consideramos, como Scholz (1991) que no lo es tanto, desde el punto de vista educativo. La enseñanza debe organizarse en un periodo muy limitado de tiempo, con objeto de dar a conocer al alumno un concepto general de asociación, así como unas pocas estrategias generales que se derivan de este concepto y puedan ser aplicadas a toda la gama posible de situaciones. Por otro lado, para evaluar de algún modo las "concepciones" del alumno sobre el concepto de asociación es insuficiente utilizar sólo tareas del tipo tabla 2x2, ya que esto nos daría una parte muy limitada de aquellas.

De este modo, un segundo objetivo es realizar un estudio global de las concepciones del sujeto referidas a una muestra representativa de problemas de asociación, abarcando las diferentes categorías descritas. Ello requiere una clasificación previa, desde el punto de vista matemático, de las estrategias empleadas en la detección de asociación en tablas de contingencia rxc, nubes de puntos y comparación de muestras. También será preciso un estudio de la relación existente entre la exactitud de los juicios de asociación en las diferentes clases de problemas descritos, con objeto de estudiar la estructura

global de los juicios de asociación.

En las investigaciones mencionadas, la información se presenta a los sujetos integrada en una tabla de contingencia o en unas tarjetas con los datos de cada unidad estadística relativos a las dos variables. La disponibilidad actual de ordenadores hace, sin embargo, que en las aplicaciones reales, la información se presente formando parte de un fichero de datos, que incluye no sólo las dos variables objeto de estudio, sino muchas otras, algunas de las cuales pueden también influir en la asociación entre las dadas y, que el sujeto que tiene que tomar la decisión, puede analizar con un conjunto de programas a su alcance.

Esto supone, entre otras cosas, que, para tomar la decisión acerca de la asociación entre las variables, es posible disponer la información en otros formatos diferentes a una tabla de contingencia, por ejemplo, visualmente mediante un diagrama de barras. Cada uno de estos formatos constituye una representación diferente, y da origen a un modelo matemático distinto para tratar un mismo problema. Cuando el sujeto que tiene que resolver un problema de asociación entre variables tiene a su disposición un conjunto de programas de ordenador, se plantea la pregunta sobre cuál es la forma en que se debe resumir la información, como paso previo a la toma de la decisión sobre la asociación y, cómo influye el modo en que ha elegido resumir esta información sobre las estrategias de cuantificación de asociaciones.

Un tercer objetivo es el estudio del efecto de la manera en que se hace la integración de la información, cuando se plantea un problema de asociación estadística a partir de un fichero de datos y se dispone de una colección de programas para realizar el análisis, sobre las estrategias de solución de problemas de asociación.

La consecución de este tercer objetivo implica la realización de un experimento de enseñanza, ya que el alumno desconoce el manejo de un paquete de programas estadísticos. Una vez que se ha decidido realizar este experimento, surgen otras preguntas de interés. En particular, interesa el estudio de la evolución de las concepciones de los alumnos participantes, como consecuencia de la instrucción recibida. En consecuencia, el último objetivo es el siguiente:

Cuarto objetivo: Realizar un estudio de la evolución de las concepciones referidas a la asociación estadística, como consecuencia de un proceso de enseñanza basado en el uso de ordenadores y en la resolución de problemas.

1.4.3. POBLACION Y MUESTRA

La iniciación al concepto de asociación estadística se realiza, en la actualidad, en nuestro país, en los últimos cursos de secundaria (tercero de BUP y COU para el estudio de regresión), aunque muy brevemente y no en todos los centros de enseñanza. Es en los primeros cursos de Universidad donde se introduce el concepto general de asociación estadística y tablas de contingencia. Por ello, nuestro interés se ha centrado, en primer lugar, en estas poblaciones de alumnos.

La consideración, sin embargo, de la variabilidad de la formación previa de estos alumnos nos ha hecho fijarnos un objetivo más modesto habiéndonos centrado en los alumnos de las Escuelas de Formación del Profesorado de E. G. B., que suelen recibir enseñanza de Estadística en tercer curso de la especialidad de ciencias durante un cuatrimestre.

La experiencia de enseñanza se ha realizado en un sólo grupo, con objeto de emplear una aproximación etnográfica (Goetz y Lecompte, 1988) que nos permita una mayor profundización en el estudio. En la terminología de Cook y Campbell (1979) se trata de un estudio quasi-experimental en un solo grupo.

Al emplear una muestra intencional el objetivo perseguido, más que la generalización a otras muestras de alumnos sería alcanzar la comparabilidad y traducibilidad de los resultados obtenidos. Con este propósito, se decidió tomar dos muestras adicionales de sujetos en las cuales se pudiera comparar las concepciones previas de los alumnos participantes en el experimento de enseñanza. Estas muestras han estado constituidas por alumnos de COU que no habían recibido enseñanza explícita del tema de asociación durante este curso escolar.

Se tomó primeramente una muestra piloto de 51 alumnos que se empleó para la puesta a punto del cuestionario empleado como pretest. Una vez depurado el instrumento, una segunda muestra de 213 de alumnos, en las mismas condiciones, se usó para el estudio comparativo de concepciones, habiéndose hallado una similitud en las concepciones iniciales de los tres grupos de alumnos. La muestra piloto también ha sido empleada para un estudio cualitativo de las argumentaciones, con objeto de lograr la fiabilidad necesaria en el proceso de codificación de los datos y en la interpretación de los resultados.

1.4.4. VARIABLES

Variables dependientes

Puesto que se trata de una metodología que incorpora elementos cualitativos y cuantitativos, las principales variables dependientes de la investigación son de tipo cualitativo. Desde una perspectiva sistemática de la investigación didáctica, consideramos que el mismo sistema cognitivo del sujeto es un todo complejo y organizado, que no puede reducirse a un estado dicotómico (sabe o no sabe) ni a un grado o porcentaje (conoce 3 de los 10 ítems). Como expresan Godino y Batanero (1993) el aspecto cualitativo -qué se conoce- es tanto o más importante que el cuantitativo. *"La intención es evaluar la creación de conocimientos y los procesos implicados más que medir el grado en que los estudiantes han adquirido una parcela o campo de las matemáticas; se precisa una variedad más amplia de medidas, muchas de ellas cualitativas"* (pg. 35).

Nos interesa, en primer lugar, describir los significados que los alumnos expresan respecto a la asociación estadística entre variables, y de allí inferir sus concepciones previas sobre la misma. De acuerdo con Webb (1992) creemos que la evaluación en matemáticas debe considerar *"el informe comprensivo del funcionamiento de un sujeto o grupo respecto a la matemática o la aplicación de la matemática"* (pg. 662). Puesto que consideramos el significado sobre un objeto personal como un sistema de prácticas que el sujeto manifiesta al resolver problemas referidos a dicho objeto, serán para nosotros de interés estos tipos de prácticas, entre las que citamos:

- ▶ Juicio sobre la asociación entre variables.
- ▶ Procedimientos detallados y clases generales de estrategias de resolución de los problemas propuestos.
- ▶ Tipos de errores cometidos durante el proceso, tanto en el estudio de estrategias iniciales como en el estudio tras la instrucción.
- ▶ Modo en que el alumno integra la información, previamente a la resolución del problema.

- ▶ Teorías previas que explicita sobre la asociación esperada en las variables y su relación con el juicio formulado.
- ▶ Interpretación de los datos en las tablas y gráficos presentados.

Variables independientes:

Los problemas de asociación estadística que serán estudiados en la investigación se refieren a las siguientes categorías:

- ▶ Tablas de contingencia 2x2;
- ▶ tablas de contingencia rxc (nos limitaremos a un problema de tabla 2x3 y otro de tabla 3x3);
- ▶ comparación de 2 muestras independientes;
- ▶ comparación de 2 muestras relacionadas;
- ▶ correlación entre variables numéricas.

Las variables de tarea que se considerarán en estos problemas se describen con detalle en la sección 2.1 y son las siguientes:

V1: Tipo de dependencia que pueden presentar las variables, con tres categorías:

- ▶ independencia,
- ▶ dependencia directa,
- ▶ dependencia inversa.

V2: Intensidad de la dependencia, medida por el coeficiente de correlación, para las variables cuantitativas, el coeficiente ϕ para tablas 2x2 y el coeficiente V de Cramer, para las tablas rxc.

V3: Diferencia o no entre la variable dependiente e independiente, esto es, si una de las variables juega el papel de dependiente, o se trata sólo de una covariación en que indistintamente cada variable puede jugar el papel de dependiente.

V4: Concordancia o no de los datos con las teorías previas de los alumnos, esto es, si la asociación que presentan los datos tiene el mismo sentido que la esperada por el alumno según su conocimiento del fenómeno.

V5: Tipo de covariación: se contemplan las cinco categorías consideradas por Barbancho (1973):

- ▶ Dependencia causal unilateral,
- ▶ interdependencia,
- ▶ dependencia indirecta,
- ▶ concordancia,
- ▶ covariación casual.

Todas estas variables, así como el tipo de problema, intervendrán como variables independientes en el estudio de estrategias iniciales, así como en el de las resultantes tras el experimento de enseñanza.

Variables concomitantes controladas

Como variables de tarea se controlará el contexto del problema, de modo que resulte familiar al alumno, la forma de presentación de los datos y el

modo de plantear las preguntas en el enunciado, así como las magnitudes numéricas empleadas.

También se tendrá en cuenta la prueba sobre conocimientos previos sobre asociación, que se utilizará como pretest en estos alumnos.

1.4.5. HIPOTESIS Y ENFOQUE DE LA INVESTIGACION

Hipótesis

Como hemos indicado, se realizará un estudio conjunto de la resolución, por los mismos alumnos, de una muestra representativa de las diferentes categorías de problemas de asociación, con objeto de identificar y clasificar las estrategias previas a la instrucción en cada una de estas categorías. De este primer objetivo se derivan las siguientes hipótesis:

H1: Al clasificar los procedimientos de resolución de problemas de asociación previos a la instrucción, se espera identificar estrategias generales, para los diferentes problemas. Entre ellas, es posible identificar estrategias generales erróneas, detrás de las cuales existen concepciones erróneas sobre la idea de asociación.

H2: Existen, asimismo, estrategias que, siendo parcialmente correctas, puedan resultar adecuadas para estudiar algunos de los problemas más simples, como es la tabla 2x2. Tras estas estrategias, específicas para estos problemas, pero erróneas al generalizarlas, se espera encontrar concepciones incompletas, aunque parcialmente correctas, referidas a la asociación estadística.

H3: Las variables de tarea consideradas en nuestro estudio como variables independientes influyen significativamente sobre los procedimientos de resolución, así como sobre los errores de los alumnos.

Por otro lado, hemos señalado que estamos interesados en la evolución de las concepciones tras una enseñanza basada en el uso del ordenador. De este segundo objetivo se deducen las siguientes hipótesis:

H4: Las concepciones de los alumnos tras la enseñanza específica se ven afectadas, en cuanto a los tipos de error y la estructura de los mismos (relaciones entre sí y con las variables independientes).

H5: Por el hecho de disponer de un ordenador, el alumno utiliza diversas estrategias de integración de la información necesaria para resolver las diversas categorías de problemas de asociación estadística. Estas estrategias de integración de la información dependen de las variables independientes de nuestro estudio.

H6: Se producen diferencias sobre las estrategias de solución de un mismo problema de asociación y sobre los errores cometidos, en función del modo en que se integra la información.

Enfoque metodológico

Se ha empleado un paradigma metodológico mixto entre los métodos cuantitativos y cualitativos: ya que las principales variables dependientes son cualitativas. Hoy día es difícil substraerse al debate entre métodos cuantitativos y cualitativos. Goetz y Lecompte (1988) indican que es mejor

situar el enfoque de una investigación considerando cuatro modos suposicionales: inductivo - deductivo, generativo - verificativo constructivo - enumerativo y subjetivo-objetivo.

El primero de estos ejes sitúa el lugar de la teoría en la investigación. Nosotros partimos del estudio teórico previo de tipo matemático, histórico, epistemológico y psicológico del tema de la asociación estadística y tratamos de explicar el significado previo a la instrucción que de este concepto tienen los alumnos, así como la evolución experimentada como consecuencia de la enseñanza, basándonos en el estudio previo. De este modo, nos encontramos más cerca del enfoque deductivo que del inductivo, aunque no realizamos un estudio confirmatorio de las hipótesis, en el sentido estadístico del término, sino que realizamos un estudio exploratorio de los datos. Por esta misma razón estamos en un punto intermedio entre las posiciones generativa y verificativa de hipótesis.

Respecto a las categorías de análisis de los variables cualitativas, nos hallamos en un punto intermedio entre los enfoques constructivo y enumerativo. Por un lado, ya se disponía de ciertas categorías previas de análisis, que habían sido empleadas por otros autores, en especial, en las investigaciones psicológicas sobre juicios de asociación en tablas de contingencia. Para el resto de los juicios de asociación, las categorías han sido definidas por el investigador, basándose tanto en el análisis previo de las tareas como en las respuestas observadas de los alumnos.

Aunque nos interesa las percepciones de los participantes, los constructos empleados son analizados empleando categorías objetivas de análisis establecidas por el investigador y así, adoptamos un enfoque objetivo (frente al subjetivo) en la investigación.

Se han empleado métodos múltiples de recogida de datos, con objeto de conseguir una mayor información sobre las variables de interés: observación participante, protocolos escritos de los alumnos, el registro de su interacción con el ordenador y entrevistas con los mismos. La investigación consta de dos partes diferenciadas:

1) Estudio de concepciones previas sobre la noción de asociación estadística

Este estudio se ha realizado no sólo sobre la muestra que tomará parte en la experiencia de enseñanza, sino sobre algunos grupos adicionales de alumnos, con objeto de determinar la extensión con que se presentan los errores más típicos sobre una muestra más representativa de la población objeto del estudio. Como instrumentos de recogida de datos en esta fase se han empleado cuestionarios estructurados, con respuesta libre, formado por una colección representativa de problemas de asociación estadística. La construcción y contenido del cuestionario se describe en la sección 2.1.

2) Experiencia de enseñanza y su evaluación

Como instrumentos de recogida de datos en esta fase se emplearán los siguientes:

- ▶ Cuestionario empleado en el estudio de concepciones de la primera parte del trabajo, como pretest y otro cuestionario paralelo empleado como postest. El contenido del postest se describe en la sección 2.1 y se muestra en el anexo 2.1.3.

- ▶ Cuestionario complementario sobre resolución de problemas de asociación estadística, para ser cumplimentado con ayuda del ordenador en el proceso de cálculo, que se describe en la sección 3.4.1 y se muestra en el anexo 3.5.
- ▶ Ficha de observación para estudiar el trabajo de una pareja de alumnos durante el proceso de aprendizaje y entrevista a esta misma pareja de alumnos sobre el proceso de resolución de los problemas en el postest, se muestra en el anexo 3.5.
- ▶ Registro de la interacción de los alumnos con el ordenador durante el proceso de enseñanza y en la evaluación final de la misma, se muestra en el anexo 3.5.

Esta variedad de fuente de datos ha supuesto un reto en el análisis de los mismos, habiéndose planteado la necesidad de adaptar las metodologías disponibles de análisis de datos, como podrá observarse en los capítulos 2 y 3. Sin embargo, este esfuerzo queda suficientemente compensado con los resultados obtenidos de dicho análisis: *"la observación sistemática de los estudiantes haciendo matemáticas cuando trabajan sobre un proyecto, complementadas por sus respuestas para probar cuestiones son indicadores más auténticos de su habilidad para hacer matemáticas que la puntuación en un test"* (Webb, 1992, pg. 670).

Análisis de datos

Los datos obtenidos de todos los instrumentos anteriores se han sometido a un proceso de análisis de contenido (Weber, 1985) para su análisis cualitativo y para su tratamiento estadístico empleando los paquetes SPSS y BMDP. Aunque el análisis de tipo cualitativo (Miles y Huberman, 1984) nos ha permitido la categorización inicial de las respuestas y el estudio del proceso de aprendizaje de la pareja de alumnos observada, cuando ha sido posible se han empleado métodos estadísticos para el análisis de los datos.

Un punto de interés es el análisis del registro de la interacción del alumno con el ordenador. Aunque lo habitual en las investigaciones que emplean este tipo de registro es limitarse a un análisis cualitativo del mismo, en nuestro caso se ha completado con un tratamiento estadístico de las variables obtenidas a partir del análisis de contenido de dicho registro.

En los cuestionarios escritos, además de tablas de frecuencias simples y tabulaciones cruzadas, hemos empleado el análisis de correspondencias, análisis factorial y el análisis cluster, como técnicas de análisis multivariante de datos (Cuadras, 1991). Estos métodos se adaptan especialmente al estudio de la interacción entre los elementos de sistemas complejos, es decir a la determinación de la estructura de tales sistemas (Cornejo, 1988). En consecuencia, el empleo de estos métodos nos ha permitido emplear una aproximación estructural (Herman, 1990) en el estudio de los significados y concepciones de los alumnos sobre la asociación estadística. En los capítulos que siguen se describe con detalle este estudio y las conclusiones alcanzadas.

CAPITULO 2:

ESTUDIO DE CONCEPCIONES INICIALES SOBRE LA ASOCIACION ESTADISTICA

INTRODUCCION

En este Capítulo se aborda el estudio de las concepciones iniciales de una muestra de alumnos sobre la asociación estadística que servirá de comparación con la muestra sobre la que se ha llevado a cabo el experimento de enseñanza.

El objeto de este estudio de concepciones iniciales es englobar en un contexto más amplio -en cuanto al número de alumnos investigados- los resultados que presentamos en el capítulo 3. Puesto que la enseñanza se ha realizado en un grupo reducido de alumnos, la comparación entre las concepciones iniciales de ambas muestras nos amplía las posibilidades de generalización de los resultados del citado experimento, aumentando con ello la validez interna de la investigación (Cook y Campbell, 1979).

En el capítulo primero se ha realizado un análisis del concepto de asociación desde los puntos de vista matemático, histórico, y psicológico, abordando también las conexiones y diferencias de este concepto respecto de la idea de causalidad y mostrando la complejidad de su significado. Como se señala en la descripción de los objetivos de la investigación, esta complejidad obliga a centrarse en un tipo particular de tareas. Se trata de utilizar la información presentada sobre la covariación entre dos variables para emitir un juicio sobre la asociación existente entre las mismas, en los datos facilitados, sin plantear ninguna pregunta relativa a la inferencia a otros casos diferentes.

Este tipo de tareas se conocen en la literatura de investigación en Psicología como juicios de asociación. Desde el punto de vista estadístico

corresponde al estudio descriptivo de la asociación entre dos variables a partir de los datos sobre la distribución de una variable estadística bidimensional, puesto que no se plantean problemas de inferencia que requerirían el uso de contrastes de hipótesis o estimación.

Desde el punto de vista didáctico la tarea mencionada nos parece adecuada al objeto de nuestra investigación, al permitirnos inferir algunos aspectos de las concepciones de los alumnos a partir de sus prácticas en la resolución de los problemas planteados.

Al considerar la diversidad de variables de tarea (Kilpatrick, 1978) en los juicios de asociación que se describen en la sección 1.3, ha sido necesario optar por elegir algunas de ellas y fijar ciertos valores para las mismas, con exclusión de otras posibles. Los criterios de selección han partido fundamentalmente del análisis matemático de las tareas, aunque se han incluido también otras variables que se describirán más adelante en la sección 2.1.

Mientras que lo habitual en las investigaciones en Psicología ha sido centrarse en un tipo muy particular de juicio de asociación (la tabla 2x2), en el presente trabajo se ha optado por una mayor diversidad. Esto nos ha obligado a construir un instrumento propio de recogida de datos, con el proceso que se describe en esta sección, en la que también se razona la validez de contenido del instrumento, respecto a los fines descritos.

Previo al estudio de la muestra de comparación se realizó un estudio piloto con otra muestra que se describe en la sección 2.2. En la prueba piloto se estudió la fiabilidad del instrumento, y se puso a punto el sistema de categorización de las estrategias en los juicios de asociación. Para asegurar al máximo la fiabilidad de este proceso se ha llevado a cabo un estudio detallado cualitativo de las argumentaciones de los 51 alumnos de la muestra piloto que se presenta también en la sección 2.2.

Finalmente tanto el sistema de categorización, como el propio instrumento fueron depurados previamente a su empleo en la muestra, cuyos resultados se presentan en la sección 2.3 a la que sigue una sección de conclusiones.

2.1. DESCRIPCION DEL INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE DATOS

2.1.1. PROCESO DE CONSTRUCCION DEL INSTRUMENTO

Técnica de recogida de datos y tipo de instrumento utilizado

Podemos clasificar la técnica de recogida de datos empleada como de medición (Fox, 1987), ya que las respuestas proporcionadas por los sujetos a las preguntas planteadas dan una estimación de conocimientos y aptitudes del sujeto, que no pueden obtenerse directamente por observación o encuesta.

Las variables objeto de nuestro proceso de medición son las concepciones de los alumnos sobre la asociación estadística, así como su capacidad de detectar tales asociaciones a partir de datos resumidos y organizados, por ejemplo, en una tabla de contingencia. *"El término para estas imágenes mentales ... es concepción". "Estas imágenes mentales no pueden ser comunicadas"*

das directamente", (Babbie, 1989, pg. 109). Este autor diferencia tres tipos de medidas cualitativas: directa e indirectamente observables y constructos o inobservables entre los que sitúa a las concepciones.

Mediante el proceso de conceptualización se especifica con precisión el significado de los conceptos o "*familias de concepciones*" (Babbie, 1989, pgs. 109-110), y se termina definiendo un conjunto de indicadores que señalen la ocurrencia o presencia de las concepciones y conceptos de interés.

En nuestro caso, como indicadores empíricos (Carmines y Zeller, 1979) de estos constructos inobservables se tomarán los juicios de asociación y los procedimientos explicitados en las respuestas de los alumnos, así como en los argumentos expuestos por los mismos. A partir de una clasificación de estos procedimientos, se identificarán las estrategias empleadas por los alumnos en la resolución de los problemas propuestos que son también indicadores empíricos de sus concepciones.

La teoría psicométrica que se adopta en esta investigación se aproxima al método de maestría de dominio, que, según Thorndike (1989), se centra sobre el grado de maestría que se tiene en cierto dominio definido de conocimientos o habilidades y corresponde a lo que recientemente se ha llamado prueba **con referencia a criterio**. Este método supone la existencia de cierta área o dominio claramente definido y delimitado de un conocimiento o habilidad.

La abundancia de la información que se obtenga sobre la maestría de dominio depende de la posibilidad de definirlo clara y precisamente, de tal manera que toda la gama de rendimiento que se abarque en dicho dominio, pueda especificarse y estandarizarse. Entonces se podrán hacer ítems de muestra del dominio, de tal modo que el dominio completo esté representado adecuadamente, y que las deducciones acerca de la plenitud de la maestría sea una posibilidad razonable.

Cuando se ha especificado un dominio de conocimiento, o habilidad, con fronteras y límites definidos, la medición se vuelve asunto de realizar un muestreo de las tareas que componen ese dominio, probar al individuo en esas tareas, e inferir qué proporción de todas las tareas que abarque dicho dominio puede realizar el sujeto. La inferencia deseada puede expresarse como "cuántos" en lugar de como "cuánto", lo cual es la inferencia deseada en el caso de un atributo latente.

No obstante, a diferencia de este método, no estamos interesados sólo en los aspectos cuantitativos (cuánto se conoce del dominio) sino en los cualitativos, que incluye qué se conoce del dominio, así como la descripción de los errores específicos en aspectos del mismo.

El instrumento que se ha utilizado es una prueba realizada por escrito. Consta de una serie de problemas breves a los que los alumnos deben responder y en los que la respuesta correcta posible no es única, es decir, se trata de una prueba con respuesta libre limitada. Puede clasificarse como una prueba de ensayo en la terminología de Sax (1989) que, según este autor tiene, entre otras las siguientes ventajas:

- a) Difieren de las pruebas objetivas de elección múltiple de respuesta en que el alumno tiene más libertad cuando se dispone a contestar a las preguntas realizadas, pudiendo escribir su respuesta de manera más extensa y explicando su razonamiento con todo detalle.
- b) Como la prueba de ensayo no ofrece ningún tipo de elección de

respuesta sino que el alumno debe elaborarla, se elimina la posibilidad de que se pueda responder sólo por azar al escoger la respuesta.

- c) Con este tipo de pruebas se favorece el pensamiento divergente que se caracteriza por ser original, creativo y por fomentar la formulación de respuestas poco comunes.
- d) Al tener el alumno plena libertad de respuesta en este tipo de pruebas, se aumenta la posibilidad de que ofrezca respuestas que el investigador no espera y que pueden tener especial interés.

El proceso de recogida de datos se ha realizado mediante un cuestionario, utilizado principalmente cuando la unidad de análisis es una persona (Babbie, 1989). Además, según este autor, es el mejor método para recoger datos de una población grande, que no puede ser observada directamente, pudiéndose utilizar en estudios descriptivos y exploratorios.

Brent (1989a), da criterios para seleccionar los procedimientos de recogida de datos tales como: el tipo de datos y la precisión del proceso; sugiere el empleo del cuestionario si existen cuestiones epistemológicas: como permitir que los sujetos se expresen libremente en las preguntas o las exigencias del análisis de los datos recogidos; también consideraciones pragmáticas: como el tamaño de la muestra, el tiempo, la accesibilidad de los sujetos.

En el momento preciso de la recogida de datos se ha utilizado la *interacción mixta* (Fox, 1987), por tratarse de una muestra grande. El investigador se reunió en distintas ocasiones (en el segundo trimestre del curso escolar 1991/92) con los distintos grupos que componen la muestra, les explicó el propósito de la investigación y respondió a todas las preguntas que le hicieron y les rogó encarecidamente que contestaran con la máxima atención e interés.

En cuanto a la construcción de la prueba propiamente dicha, como indica Scott (1989), no es una tarea propia de la investigación, añadiendo a continuación: "el investigador a veces se ve más o menos obligado a desarrollar su propio test, si quiere que el mismo responda al problema que va a investigar. ... Un test es un instrumento de medición, y por tanto el investigador, cuando desarrolla un test, tiene que decidir qué es lo que se va a medir, como se va a medir, y como se va a validar las mediciones" (pg. 60). Este autor propone los siguientes pasos para la construcción de un test, que se han seguido en esta investigación:

- a) *Definir las metas (los objetivos específicos) y el contenido del test.* Los objetivos se han expuesto en la sección 1.4.2. Los contenidos se seleccionaron entre los que se especifican más abajo.
- b) *Examinar tests que sean semejantes.* Se han examinado las pruebas descritas en investigaciones de tipo psicológico como las de Yates y Curley (1986), Arcuri y Forzi (1988), Gebotys y Claxton-Oldfield (1989), Pérez Echeverría (1990), Ortega Martínez (1991), entre otras; libros de problemas de un nivel similar a los alumnos que iba dirigida la prueba como, López Corella y Díez Lozano (1988), Lecoutre (1990); libros que contienen teoría y problemas como Barbanch (1973), Gokhale y Kullback (1978), Nortes Checa (1977) o bien libros de ítem sobre el tema como Cruise y cols. (1984), también se utilizaron conjuntos sencillos de casos reales.

- c) *Definir las especificaciones del cuestionario.* Una vez examinados el material referido en el punto anterior y teniendo en cuenta los alumnos a los que iba dirigido, se decidió el formato general, el tipo de ítems, el número de ítems, la presentación y las instrucciones al alumno.
- d) *Desarrollar un banco de ítems.* Con el examen referido en el apartado b) y los objetivos y contenidos especificados se consiguió un banco de unos 40 ítems entre los que se seleccionaron los empleados finalmente con el proceso que se describe a continuación.
- e) *Preparar un borrador,* así se hizo y se utilizó con alumnos comprendidos entre 10 y 16 años.
- f) *Evaluar el borrador,* con los datos obtenidos con los alumnos y teniendo en cuenta la legibilidad y comprensión de los enunciados, estudiando, asimismo, el tiempo necesario para completar la prueba.
- g) *Revisión.* Se procedió a una serie de revisiones hasta obtener la prueba piloto.
- h) *Averiguar más acerca de la fiabilidad y validez.* Para ello se realizó un estudio sobre la prueba piloto que se expone en la sección 2.2.7. Asimismo, en nuestro caso, se realizó un estudio completo sobre esta muestra, que queda descrito en la sección 2.2.

Conceptos que intervienen en el estudio descriptivo de la asociación estadística

El primer paso que se dio en la construcción de la prueba fue obtener de manera sistemática todos los conceptos que intervienen en la idea general de asociación en su estudio descriptivo, confeccionando una lista que se muestra a continuación:

1. Idea de tabla de doble entrada
 - 1.1. Tablas de contingencia, que pueden ser de cada uno de los siguientes tipos:
 - 1.1.1. Variables cualitativas en filas y columnas.
 - 1.1.2. Variable cualitativa cruzada con una variable cuantitativa (discreta o continua).
 - 1.1.3. Variable cuantitativa (discreta o continua) en filas y columnas cuantitativa (discreta o continua).
 2. Dentro de cada una de estas clases de tablas, se pueden distinguir los siguientes tipos de frecuencias:
 - 2.1. Absolutas.
 - 2.2. Relativas respecto al total de casos o frecuencias relativas dobles.
 - 2.3. Marginales absolutas.
 - 2.4. Marginales relativas.
 - 2.5. Relativas condicionales respecto a filas.
 - 2.5. Relativas condicionales respecto a columnas.
 3. Dependencia y sus tipos
 - 3.1. Funcional.
 - 3.2. Aleatoria.

- 3.3. Independencia.
- 4. Asociación en tablas de contingencia.
 - 4.1. Variables en las que se puede establecer un orden y dicotómicas.
 - 4.1.1. Directa.
 - 4.1.2. Inversa.
 - 4.1.3. Independencia.
 - 4.1.4. Asociación perfecta.
 - 4.1.5. Asociación parcial.
 - 4.2. Variables no ordenadas, como las cualitativas.
 - 4.2.1. Independencia.
 - 4.2.2. Asociación perfecta.
 - 4.2.3. Asociación parcial.
- 5. Determinación de la asociación en tablas de contingencia.
 - 5.1. A partir de frecuencias condicionales.
 - 5.2. A partir de frecuencias esperadas.
 - 5.3. Cálculo de coeficientes de asociación.
- 6. Diagrama de dispersión.
 - 6.1 Construcción.
 - 6.2 Interpretación de la asociación.
 - 6.2.1. Lineal o no lineal.
 - 6.2.2. Directa o inversa.
 - 6.2.3. Intensidad.
 - 6.3. Dibujo aproximado de la línea de regresión.
 - 6.4. Estimación aproximada de la magnitud del coeficiente de correlación.
 - 6.5. Estimación del signo del coeficiente de correlación.
- 7. Posibilidad de predicción de una variable aleatoria a partir de otras.
 - 7.1. Predicción por rectas
 - 7.1.1. y sobre x
 - 7.1.2. x sobre y
- 8. Calculo de las rectas.
 - 8.1. Puntuaciones brutas.
 - 8.2. Puntuaciones tipificadas.
- 9. Interpretación de rectas.
 - 9.1. Pendiente.
 - 9.2. Término independiente.
- 10. Covarianza
 - 10.1. Cálculo.
 - 10.2. Interpretación.
 - 10.3. Relación con la recta.
- 11. Coeficiente de correlación.
 - 11.1. Cálculo.
 - 11.1.1. A partir de puntuaciones brutas.
 - 11.1.2. A partir de puntuaciones tipificadas.
 - 11.2. Interpretación.
 - 11.3. Relación con la recta.
 - 11.4. Relación con la covarianza.
 - 11.5. Coeficiente de correlación de variables ordinales.
 - 11.5.1. Cálculo.
- 12. Varianza residual.

13. Comparación de muestras.
 - 13.1. Muestras independientes.
 - 13.2. Muestras relacionadas.

Contenidos incluidos

Puesto que se quiere observar las concepciones previas sobre la asociación estadística que tienen los alumnos que se enfrentan a un programa de instrucción en Estadística, cuyos contenidos incluyen las ideas básicas sobre covariación de variables estadísticas, en los ítems propuestos, sólo se han incluido en la prueba las diversas técnicas de disposición y representación de los datos: tablas de contingencia y nube de puntos, para interpretar la existencia de una posible asociación estadística. En la tabla de contingencia se ha contemplado la interpretación de frecuencias absolutas dobles, de frecuencias absolutas marginales, de frecuencias relativas marginales y de frecuencias relativas condicionales, incluyéndose distintos tipos de tablas 2x2, 2x3 y 3x3; en la nube de puntos se ha contemplado la lectura de la ordenada dada la abscisa y la lectura de la abscisa dada la ordenada. También se han incluido problemas de comparación de muestras con el fin de abarcar todas las "modalidades" existentes referidas a asociación entre variables. En concreto el contenido de la prueba abarca los elementos 1, 2, 3, 4, 5.1, 6.2, 6.4, 6.5 y 13 de la relación dada anteriormente.

Selección y depuración de ítems

Los ítems fueron seleccionados a partir del banco de ítems inicial. En la redacción de los mismos se tuvo en cuenta los siguientes aspectos indicados por Brent (1989b): Evitar detalles innecesarios, relevancia de las preguntas formuladas para el estudio, nivel de lectura adecuado, brevedad, evitar las cuestiones negativas, evitar cuestiones sesgadas o interdependientes, claridad y falta de ambigüedad, que la respuesta sea razonable para el sujeto y pueda darla, evitar hipótesis implícitas, nivel apropiado de abstracción, asegurar que las preguntas tienen el mismo significado para todos los sujetos y claridad del marco de referencia (temporal, familiar, etc...).

El proceso de selección y depuración incluyó la resolución de los posibles ítems, con objeto de conseguir valores adecuados para los coeficientes de asociación o contingencia, que fue una de las variables a controlar. Con un programa de ordenador en lenguaje BASIC, escrito con este propósito, se realizaron las modificaciones necesarias sobre los datos y se llegó a un conjunto de ítems potencialmente adecuado, siendo además revisados por otros investigadores en Didáctica de la Matemática y profesores de Estadística.

Una vez elegidos estos ítems y después de varias versiones en que se comprobó de nuevo la legibilidad del enunciado y la adecuación del formato de presentación se procedió a una primera prueba de la comprensión del enunciado resultante. Para ello se contó con la colaboración de varios alumnos, de edades comprendidas entre 10 y 16 años a los que se les pasó la prueba, que resultó asequible, incluso al más joven. Posteriormente se les realizó una entrevista en la que los alumnos dieron su interpretación del enunciado, que coincidió en todos los casos con las intenciones buscadas. Asimismo, aportaron sugerencias de mejora en la presentación que fueron recogidas en la versión final.

En cuanto a la ordenación de los ítems también se ha seguido las siguientes indicaciones de Brent (1989b):

- a) Instrucciones generales al sujeto. Además de las que se exponen en el cuestionario por escrito, se dieron explicaciones a los alumnos sobre los objetivos de la prueba y modo de realizarla, terminando con una petición encarecida de que la hicieran con el máximo interés y atención.
- b) Las primeras cuestiones deben ser interesantes, fáciles y atractivas para el usuario y deben estimularle a continuar. Las primeras preguntas que se han realizado son de tipo personal y el primer ítem, cuyo contexto se refiere a los trastornos bronquiales y hábito de fumar es una cuestión que consideramos de interés para el alumno.
- c) Se sugiere que entre las primeras cuestiones haya pocas "abiertas" ya que requieren mayor esfuerzo del sujeto y éste puede pensar que le faltará tiempo para responder a todo el cuestionario. Como ya se ha dicho las primeras preguntas son de tipo personal y cerradas.
- d) Las primeras cuestiones deberían referirse a hechos ya que son más fáciles de responder y menos comprometidas.
- e) A lo largo del cuestionario las preguntas deben mostrar alguna variedad y no ser demasiado monótonas. Las cuestiones de un formato o contenido similar deben alternarse para reducir la monotonía.
- f) Cuando se produzca un cambio significativo del formato, cuando las cuestiones sean apropiadas sólo para un subgrupo, o cuando cambien alguna otra circunstancia en el cuestionario que pueda confundir al sujeto se deben proporcionar instrucciones adecuadas.
- g) Se deben agrupar las cuestiones que tengan un formato similar a menos que se tengan razones de peso para no hacerlo así.

2.1.2. DESCRIPCION DE LA PRUEBA PILOTO Y DEL CUESTIONARIO USADO COMO PRETEST EN EL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

La prueba piloto se muestra en el anexo 2.1.1 y el cuestionario usado como pretest en el anexo 2.1.2. La diferencia esencial entre ambas es que en el cuestionario usado como pretest se suprimió la pregunta que pedía marcar en un diagrama lineal la intensidad de la asociación percibida por el alumno.

En primer lugar, incluimos tres preguntas relativas a si han estudiado, en cursos anteriores, alguna noción de asociación o de dependencia funcional y aleatoria, (Ítems A, B y C), que son fundamentales para interpretar el resto de las respuestas.

Clases de problemas incluidos

Además de estos ítems el contenido sustancial de la prueba se ha dividido en tres grandes bloques:

- a) *Tablas de contingencia*: Se incluyen tres ítems sobre tablas 2x2 y dos ítems sobre tablas rxc, una de 2x3 y otra de 3x3, con objeto de realizar una primera aproximación al estudio de las tablas rxc.
- b) *Nube de puntos*: Se incluyen tres ítems (los señalados con las letras

I, J y K) con objeto de estudiar la asociación entre variables numéricas.

- c) *Comparación de muestras:* Por último se han incluido dos ítems en este apartado (los señalados con las letras L y M), porque la comparación de muestras se puede tomar como un problema de asociación estadística entre dos variables, una dicotómica y otra numérica.

Preguntas incluidas en cada ítem

En los ítems referidos a tablas de contingencia (ítems D, E, F, G y H), se contemplan dos apartados fundamentales: la lectura de las tablas y su interpretación. Para indagar sobre la destreza de lectura de tablas se incluyen, en el ítem D, cuatro preguntas dirigidas a la lectura de frecuencias absolutas condicionadas, frecuencias absolutas marginales, transformación de las frecuencias absolutas marginales en frecuencias relativas marginales y transformación de frecuencias condicionales absolutas en frecuencias condicionales relativas.

En cuanto a la interpretación de las tablas para efectuar un juicio de asociación entre las variables implicadas, se realiza una pregunta referida a razonar si, a la vista de los datos contenidos en la tabla, se puede decir que existe o no dependencia entre las dos variables. Puesto que se trata de una prueba para ser cumplimentada, a nivel previo a la instrucción, se ha empleado un lenguaje de tipo coloquial evitando el empleo de palabras técnicas, tales como correlación o asociación que resulten desconocidas para el alumno. En las tablas de contingencia la pregunta se hace siempre en términos de si existe o no dependencia de una variable respecto a la otra, manteniendo constante el enunciado de la pregunta, así como la forma en que se presenta el resto del enunciado.

En los ítems referidos a la nube de puntos (ítems I, J y K), se realizan dos tipos de preguntas, uno referidas a la lectura de los puntos (sólo en el ítem I) y otro referidas a la interpretación de la nube de puntos para decidir la posible relación existente entre las variables y su tipo (no hay relación, directa o inversa). Las dos preguntas que componen la lectura de la nube de puntos son: lectura de la ordenada dada la abscisa y lectura de los valores de la abscisa dada la ordenada. En cuanto a la pregunta del segundo tipo, el sujeto debe expresar el tipo de relación existente (directa, inversa, ninguna relación), explicando el porqué de esta elección. Se ha mantenido constante el enunciado de la pregunta, así como la presentación del problema. Solamente en la prueba piloto, se pide una estimación gráfica de la intensidad de la relación en una escala [0, 1]. La pregunta sobre asociación se hace en términos de si las variables están o no relacionadas, porque en el estudio de la correlación, las variables juegan un papel simétrico.

Respecto al último bloque de ítems sobre la comparación de muestras (ítems L y M), se realizó una pregunta sobre si existe o no dependencia entre los valores de la variable continua referidos a los dos valores de la variable dicotómica.

Descripción de las variables de tarea

La prueba ha sido pensada para ser realizada por escrito como, por ejemplo, en las investigaciones de Beyth-Marom (1982) y Wright y Murphy (1984).

Las variables de tarea (Kilpatrick, 1978) incluidas en nuestro cuestionario pueden clasificarse en la terminología de este autor en variables de contexto (V_5 y V_6) y variables de estructura (el resto). Estas últimas se clasifican como variables de contenido en la terminología de Kulm (1980). Se han tenido en cuenta las siguientes variables de tarea.

V1. Tipo de dependencia: que se plantea en el ítem. Las categorías que puede tomar esta variable son:

- Independencia.
- Dependencia que puede ser directa o inversa en variables dicotómicas o numéricas.

Esta variable ha sido utilizada por: Erlick y Mills (1967); Shaklee y Mins (1982); Alloy, Abramson y Kossman (1986); Yates y Curley (1986).

V2 Intensidad de la dependencia: La intensidad de la dependencia puede ser causa determinante de la respuesta dada por el alumno. Ha sido utilizada por diversos autores como: Erlick y Mills (1967); Beyth-Marom (1982); Jennings Amabile y Ross, (1982); Shaklee y Mins (1982); Wright y Murphy (1984); Lane, Anderson y Kellan (1.985); Alloy, Abramson y Kossman (1986); Troiler y Hamilton (1986); Pérez Echeverría (1990), Well, Boyce, Morris, Shinjo y Chumbley (1988); Shanks, Pearson y Dickinson (1989). Para medir esta variable utilizamos el coeficiente de correlación de Pearson para las variables continuas, para las tablas de contingencia 2x2 el coeficiente PHI que puede tomar valores positivos y negativos, aunque no siempre varía entre -1 y +1, y para las demás tablas utilizamos el coeficiente V de Cramer que varía entre 0 y 1.

V3 Se diferencia la variable dependiente de la variable independiente: En ciertos problemas de asociación se puede distinguir claramente la variable dependiente de la variable independiente, en otros problemas esta distinción es menos clara, puede ser difícil decidir cuál es la variable dependiente o independiente o incluso cualquier variable puede tomarse unas veces como variable independiente y otras como variable dependiente. Esta cuestión puede influir en la respuesta. No hemos encontrado que se tenga en cuenta esta variable en las investigaciones revisadas.

V4 Tamaño de los números: Diversas investigaciones como: Erlick y Mills (1967); Shaklee y Mins (1982); Yates y Curley (1986), Arcuri y Forzi (1988), han tenido en cuenta el tamaño de los números, que también puede influir en las respuestas. Se distinguen dos categorías: mayores que 10 y menores o iguales a 10, para los ítems referidos a las tablas de contingencia y la comparación de muestras. Para los ítems sobre la nube de puntos se contempla el mayor recorrido de las variables implicadas.

V5 Contexto familiar: Como indica Pérez Echeverría (1990), el contexto puede ser familiar y no familiar, por tanto puede influir en las respuestas de los sujetos, manifestando sus teorías previas sobre el mismo en las respuestas. Se ha decidido elegir contextos familiares con el objeto de que los ítems tengan un significado más concreto para los sujetos. Esta variable ha sido tenida en cuenta por: Shaklee y Mins (1982); Well, Boyce, Morris, Shinjo y Chumbley (1988).

V6 ¿Concuerdan los datos con las teorías previas? Esta variable tiene su interés en que detecta si el sujeto da la respuesta basándose en los datos o

hace caso omiso de los datos proporcionados y basa sus respuestas en sus propias "teorías previas" (concepciones del sujeto sobre el fenómeno descrito en el enunciado). Distintos autores conceden gran importancia a los elementos que introduce el sujeto en los datos presentados por los investigadores. Como señalan Nisbett y Ross (1980), las restricciones encontradas en el razonamiento en tareas de laboratorio deben ser pequeñas, si queremos compararlas con las realizadas en la vida ordinaria. En esta mantenemos una serie de creencias sobre el modo en que se correlacionan acontecimientos concretos y, debido a nuestra escasa capacidad para detectar contingencias ambientales, puede darse el caso en que se produzca lo que se denomina "correlación ilusoria". Esta variable ha sido estudiada por: Alloy, Abramson y Kossman (1986); Yates y Curley (1986) Well, Boyce, Morris, Shinjo y Chumbley (1988).

V7 ¿Se dan las distribuciones marginales de frecuencias absolutas en las tablas de contingencia? Dar las distribuciones marginales en las tablas de contingencia facilita la respuesta del alumno, o al menos puede sugerirle la necesidad de empleo de un procedimiento diferente de resolución. En algunas investigaciones como la de Shaklee y Mins (1982) no se dan las frecuencias marginales. En otras son controladas como la de Arkes y Rothbart (1985).

V8 Tipo de covariación: Esta variable no ha sido tenida en cuenta hasta la fecha en la investigación. Se toman las cinco categorías que se contemplan en Barbancho (1973) que son:

- ▶ *Dependencia causal unilateral:* Cuando la ocurrencia de una variable X influye en la ocurrencia de Y, pero no al contrario.
- ▶ *Interdependencia:* Cuando la ocurrencia de una variable X influye en la ocurrencia de una variable Y y viceversa.
- ▶ *Dependencia indirecta:* Dos variables pueden mostrar una covariación a través de una tercera variable que influye en ambas. Esta tercera variable puede no ser tenida en cuenta.
- ▶ *Concordancia:* A veces sabemos que dos variables X e Y son independientes; sin embargo, en sus variaciones puede existir un cierto paralelismo.
- ▶ *Covariación casual:* Algunas veces parece que dos variables X e Y tienen una variación sincronizada y puede parecer que existe entre ambas una asociación o dependencia. Sin embargo, dicha covariación puede ser casual o accidental.

V9 Número de puntos: Sólo aplicable a los ítems referidos a la nube de puntos. Las respuestas de los sujetos pueden estar influenciadas por el número de puntos que se representen en la nube. Ha sido utilizada por: Wright y Murphy (1984).

V10 Tipo de muestras: La comparación de dos muestras se puede interpretar como la búsqueda de relación entre una variable dicotómica y otra continua. La posible relación existente entre ambas puede ser interpretada de distinta forma si las muestras están relacionadas o son independientes. Esta variable no ha sido empleada en otras investigaciones.

Valores elegidos de las variables y motivo de su elección

A continuación se exponen los valores que se han tomado de las variables

implicadas en cada uno de los bloques de que consta el test, un informe resumido se proporciona en la tabla 2.1.2.1 - A y 2.1.2.1 - B.

Tabla 2.1.2.1 - A Variables de tarea en la prueba usada como pretest

VARIABLES	TABLAS DE CONTINGENCIA					
	Tablas 2x2			Tablas rxc		
	Item D	Item E	Item F	Item G	Item H	
V1.-Tipo de dependencia	Independencia	Depend. Inversa	Depend. Directa	Directa variable ordinal	Independencia	
V2.-Intensidad de la dependencia	0	-0.44	0.67	0.37	0.10	
V3.-Se diferencia la variable dependiente de la variable independiente	Sí	Sí	No	Sí	No	
V4.-Tamaño de los números	> 10	< 10	> 10	> 10	< 10	
V5.-Contexto familiar	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	
V6.-¿Concuerdan los datos con las teorías previas?	No	Sí	No hay teorías previas	Sí	No hay teorías previas	
V7.-¿Se dan los márgenes?	Sí	No	No	Sí	No	
V8.-Tipo de covariación	Causal unilateral	Causal unilateral	Covariación casual	Causal unilateral	Interdependencia	
V9.-Número de puntos						
V10.-Tipo de muestras						

V1 Tipo de dependencia: Se contempla en los tres bloques: tablas de contingencia, nube de puntos y comparación de muestras.

En las tablas de contingencia 2x2, se han tomado los distintos tipos de dependencia (no dependencia, directa e inversa) que pueden ocurrir con variables cualitativas. También se ha incluido un ítem con una tabla 2x3, incluyendo una variable ordinal, con objeto de utilizar todas las variables posibles en tablas sencillas de este tipo, y otra tabla 3x3.

En la nube de puntos se han tomado todos los tipos de dependencia (no dependencia, directa e inversa), si bien, en el ítem J se ha creído conveniente incluir una dependencia no lineal, observada en la nube de puntos. Con el menor número de ítems se han cubierto todas las posibilidades existentes.

En la comparación de muestras se han tomado los dos casos posibles: no hay dependencia entre las muestras, si hay dependencia entre las muestras.

Tabla 2.1.2.1 - B Variables de tarea en la prueba usada como pretest

VARIABLES	NUBE DE PUNTOS			COMPARACION DE MUESTRAS	
	Item I	Item J	Item K	Item L	Item M
V1.-Tipo de dependencia	Independencia	Depend. no lineal Inversa	Depend. lineal directa	Significativa	No significativa
V2.-Intensidad de la dependencia	0.11	-0.77	0.55	t=3.3	t=1.58
V3.-Se diferencia la variable dependiente de la variable independiente	Si	Si	No		
V4.-Tamaño de los números	1-20	0-65	1-20	> 10	< 10
V5.-Contexto familiar	Si	Si	Si	Si	Si
V6.-¿Concuerdan los datos con las teorías previas?	No	Si	No hay teorías previas	Si	No
V7.-¿Se dan los márgenes?					
V8.-Tipo de covariación	Interdependencia	Dependencia indirecta	Concordancia	Interdependencia	Covariación casual
V9.-Número de puntos	20	14	20		
V10.-Tipo de muestras				Relacionadas	Independientes

V2 Intensidad de la dependencia: La intensidad de la dependencia es otra variable a tener en cuenta para cumplimentar el objetivo que perseguimos. Se contempla en las tablas de contingencia y en la nube de puntos.

En las tablas de contingencia se ha elegido una intensidad de dependencia fuerte (0.67, ítem F), dos de intensidad moderada (-0.44 en el ítem E y 0.37 en el ítem G), uno de intensidad nula (ítem D) y otro de intensidad muy baja (0.10, ítem H). Se ha cubierto así el abanico de posibilidades existentes.

En la nube de puntos, se han tomado tres intensidades de dependencia: baja (0.11), alta (-0.77) y media-alta (0.55) que cubren con suficiencia los casos posibles.

V3 Se diferencia la variable dependiente de la variable independiente: La clara distinción entre la variable dependiente y la variable independiente puede influir en las respuestas de los sujetos. En las tablas de contingencia y en la nube de puntos se han incluido ítems donde la distinción es clara y en otros donde no lo es.

V4 Tamaño de los números: Numerosas investigaciones referidas a resolución de problemas aritméticos han demostrado que el tamaño de los números puede influir en las repuestas de los sujetos. Para dar una respuesta, los interpelados harán comparaciones o pequeños cálculos con los números dados, por lo que, obviamente, el tamaño de las cantidades puede influir en las respuesta. En las tablas de contingencia y en la comparación de muestras se distingue entre números mayores y menores que 10. En la nube de puntos se toma el mayor dominio de cada una de las variables.

V5 Contexto familiar: Es una variable controlada. Todos los ítems se han planteado en un contexto familiar al sujeto, pues si no ha estudiado Estadística o bien se le ha olvidado, un contexto familiar le facilitará la respuesta pensada y razonada.

V6 ¿Concuerdan los datos con las teorías previas? Excepto los ítems F, H y K, el resto se han elegido de entre los que los sujetos deben tener sus propias teorías previas y se distinguen aquellos en que los datos concuerdan con las teorías previas y los que no, cuidando que haya de ambos en los tres bloques de ítems.

V7 ¿Se dan las distribuciones marginales de frecuencias absolutas en las tablas de contingencia? Obviamente esta variable se refiere a las tablas de contingencia. El dar las frecuencias marginales absolutas puede facilitar la tarea al sujeto. Sólo se han dado en dos tablas una 2x2 (ítem D) y otra 2x3 (ítem G).

V8 Tipo de covariación: Se han elegido ítems de los cinco tipos que propone Barbancho (1973).

V9 Número de puntos: Referida al bloque de la nube de puntos. Se ha elegido un número medio de puntos para facilitar su lectura e interpretación. Es, pues, una variable controlada.

V10 Tipo de muestras: Referida al bloque de comparación de dos muestras. Se ha elegido un ítems de muestras relacionadas y otro de muestras independientes por si se pudiera apreciar alguna diferencia en su interpretación por parte de los sujetos.

En las tablas de contingencia se ha tomado siempre distribuciones de frecuencias con diferentes frecuencias marginales en filas y en columnas, con objeto de evitar la ambigüedad respecto a la clasificación de estrategias como correctas, incorrectas o parcialmente correctas.

Decididos los valores pertinentes de las variables independientes (V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , V_6 , V_7 , V_8 , V_{10}) así como los valores de las variables a controlar (V_5 , V_9) se ha procedido al diseño del cuestionario.

Hemos preferido tomar un enfoque observacional multivariante, incluyendo el mayor número de variables pertinentes que puedan afectar al modo en que los alumnos resuelven los problemas de correlación y al resultado que obtienen. Por ello, no es posible utilizar un diseño factorial completo (Das y Giri, 1986), sino que se decidió utilizar uno que, incluyendo el mayor número posible de variables, fuese factible con un pequeño conjunto de ítems, eligiendo la combinación de variables en los distintos ítems, que se expresa en las tablas 2.1.2.1 - A y 2.1.2.1 - B.

Variables que se mantienen controladas

Las variables de tarea que se han mantenido constantes son:

La presentación de los problemas propuestos, se ha preferido el cuestionario escrito (como en la investigación de Beyth-Marom (1982)), a la presentación secuencial mediante tarjetas, diapositivas o juegos de ordenador, como se ha realizado en otras investigaciones (Inhelder y Piaget (1955), Shaklee y Mins (1982), Trolier y Hamilton (1986)). También se da un enunciado similar con cambios mínimos en el mismo.

Las instrucciones dadas a los alumnos, que han sido reflejadas al principio del cuestionario.

La disposición de variables dependiente/independiente en filas y columnas se ha aleatorizado presentándose en los ítems D, G la variable independiente en columnas y en los E, F en filas.

Las tablas de contingencia sólo han sido de tres tipos 2×2 , 2×3 y 3×3 .

2.1.3. DESCRIPCION DEL CUESTIONARIO USADO COMO POSTEST EN EL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

Puesto que se trata de evaluar los cambios en las concepciones sobre asociación estadística en los alumnos participantes en el experimento de enseñanza, es preciso, en estos alumnos, realizar dos procesos de toma de datos: uno como pretest y otro como postest.

Para evitar el posible riesgo de un efecto de aprendizaje de la prueba, (Cook y Campbell, 1979) se decidió construir un instrumento paralelo en el que, conservándose los mismos valores de las variables de tarea se variase el enunciado de los ítems particulares.

La construcción del postest se ha realizado de la manera siguiente:

Se ha mantenido el número y estructura de los ítems, así como los valores de las variables V_3 a V_{10} , esto es, la distinción entre la variable dependiente y la variable independiente, el tamaño de los números, el contexto sigue siendo familiar, la concordancia de los datos con las teorías previas, se han

dado las distribuciones marginales de frecuencias absolutas en las tablas de contingencia en los mismos contextos que en el pretest, el tipo de covariación -se han incluido dos de dependencia inversa-, el número de puntos y el tipo de muestras. En la tabla 2.1.3.1 - A y 2.1.3.1 - B se hace un resumen de los valores que toman las variables V₁ a V₁₀ en el postest.

Tabla 2.1.3.1 - A Variables de tarea en la prueba usada como postest

VARIABLES	TABLAS DE CONTINGENCIA					
	Tablas 2x2			Tablas rxc		
	Item D	Item E	Item F	Item G	Item H	
V1.-Tipo de dependencia	Depend. Inversa	Depend. Inversa	Independencia	Independencia	Independencia	
V2.-Intensidad de la dependencia	-0.44	0.67	0	0.03	0.43	
V3.-Se diferencia la variable dependiente de la variable independiente	Si	Si	No	Si	No	
V4.-Tamaño de los números	< 10	> 10	> 10	> 10	< 10	
V5.-Contexto familiar	Si	Si	Si	Si	Si	
V6.-¿Concuerdan los datos con las teorías previas?	No	Si	No hay teorías previas	No	No hay teorías previas	
V7.-¿Se dan los márgenes?	No	No	Si	Si	No	
V8.-Tipo de covariación	Causal unilateral	Causal unilateral	Covariación casual	Causal unilateral	Interdependencia	
V9.-Número de puntos						
V10.-Tipo de muestras						

En un primer paso se han intercambiado entre sí los valores numéricos en las celdas de las tablas de contingencia D, E y F, con objeto de permutar el orden de los ítems en que aparecen los valores elegidos en las variables V₁ y V₂: tipo de dependencia e intensidad.

Tabla 2.1.3.1 - B Variables de tarea en la prueba usada como postest

VARIABLES	NUBE DE PUNTOS			COMPARACION DE MUESTRAS	
	Item I	Item J	Item K	Item L	Item M
V1.-Tipo de dependencia	No lineal inversa	Independencia	Lineal directa	Independencia	Dependencia
V2.-Intensidad de la dependencia	-0.82	-0.10	0.55	t=0.49	t=3.68
V3.-Se diferencia la variable dependiente de la variable independiente	Si	Si	No		
V4.-Tamaño de los números	1-20	0-65	1-20	> 10	< 10
V5.-Contexto familiar	Si	Si	Si	Si	Si
V6.-¿Concuerdan los datos con las teorías previas?	Si	No	No hay teorías previas	No hay teorías previas	No hay teorías previas
V7.-¿Se dan los márgenes?					
V8.-Tipo de covariación	Causal unilateral	Dependencia indirecta	Concordancia	Interdependencia	Covariación casual
V9.-Número de puntos	20	11	20		
V10.-Tipo de muestras				Relacionadas	Independientes

En los ítems referidos a las tablas de contingencia 2x2, se han mantenido fijos los contextos y se han permutado los datos contenidos en las tablas: así el ítem D mantiene el contexto de las variables fumar y trastornos bronquiales y las frecuencias que se incluyeron en el pretest en el ítem E, por lo que ahora tiene un tipo de asociación inversa. El nuevo ítem E mantiene el contexto de "tomar dieta blanda" y "padecer trastornos bronquiales" y se les asignan las frecuencias del ítem F del pretest. Se ha cambiado también la posición de las columnas en la segunda variable, que ahora se presenta como "no tuvo trastornos digestivos" en la primera columna y "si tuvo" en la segunda. De esta manera obtenemos un nuevo ítem de asociación inversa. El motivo de incluir dos ítems de este tipo ha sido la gran dificultad observada respecto a la dependencia inversa en el pretest, por lo que deseamos comprobar

con más de un ítem si ha habido un efecto apreciable de la instrucción sobre la falta de apreciación de la dependencia inversa.

El cambio de orden de las columnas en este ítem permite comprobar si los alumnos juzgan la existencia de dependencia inversa en la tabla por la posición relativa de las casillas de mayor frecuencia o si realmente comprenden la idea de dependencia inversa que implica la presencia de una de las variables y ausencia de la otra.

Por último, el nuevo ítem F mantiene el contexto de "llevar una forma de vida sedentaria" y los números asignados han sido los del ítem D del pretest, por lo que ahora tiene ausencia de dependencia. No se ha incluido ningún ítem relativo a la dependencia directa, ya que esta es bien apreciada a nivel intuitivo por los alumnos de la muestra.

En las tablas de contingencia 2x3 se ha mantenido el mismo contexto, "horas de estudio" y "aprobar o suspender el examen", pero se han modificado las frecuencias, de manera que den una dependencia muy débil, asimilable a la independencia.

Por el contrario en la tabla 3x3 se han modificado las frecuencias para pasar de una relación muy débil a una asociación fuerte, dejando inmutable el contexto.

Los ítems relativos a la nube de puntos también se han modificado, los cambios han sido: En el ítem I, se ha mantenido el mismo contexto, la "Liga Nacional de Fútbol", pero se ha cambiado la variable "partidos empatados" por la variable "partidos ganados", lo que transforma la independencia del pretest en dependencia inversa en el postest. La variable "lugar ocupado en la clasificación final de la Liga" ha permanecido. En el ítem J se han mantenido las variables y el contexto y se han modificado los puntos de forma que ahora exista independencia. El ítem K se ha mantenido idéntico al del pretest.

El resto de las variables del pretest se han mantenido con los mismos valores, lo que asegura la comparabilidad de los instrumentos de recogida de datos.

En los ítems sobre la comparación de muestras (ítems L y M), se han modificado los valores de "presión sanguínea" (ítem L) y "nivel de azúcar en la sangre" (ítem M) con el fin de obtener una dependencia muy débil en las muestras relacionadas (ítem L) y una dependencia intensa en las muestras independientes (ítem M).

El efecto conseguido con estos cambios es disponer en ambas pruebas de ítems comparables en el mayor número posible de variables y mantener la estructura global del cuestionario en cuanto a los valores incluidos en cada una de sus variables.

2.2. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CONCEPCIONES EN LA MUESTRA PILOTO.

2.2.1. DESCRIPCION DE LA MUESTRA PILOTO

La prueba piloto del cuestionario de evaluación de las concepciones fue llevada a cabo en Jaén, con un grupo de alumnos de primero de la Escuela de Formación del Profesorado de E.G.B. La Especialidad de estos alumnos (Preescolar), en general, tiene gran número de mujeres, lo que se refleja en nuestra muestra, que estaba compuesta por 47 hembras y 4 varones.

A pesar de que la enseñanza de la Estadística es obligatoria en séptimo de E. G. B., en primero y tercero de B.U.P. y en algunas opciones del Curso de Orientación Universitaria (COU), 32 de estos alumnos declararon no haber estudiado Estadística. De los que respondieron que habían estudiado Estadística, uno de ellos no indica en qué nivel de enseñanza lo ha hecho. En cuanto al resto, dos alumnos lo han hecho en primero de BUP, uno en tercero de BUP, uno en segundo de Formación Profesional, dos en primero y tercero de BUP y uno en otros estudios y 11 alumnos lo han hecho en COU, lo que representa un 61.1 por ciento de los alumnos que declaran haber estudiado Estadística.

Profundizando más en los conocimientos previos que tienen estos alumnos en Estadística, se ha incluido una pregunta sobre si han estudiado la diferencia entre la dependencia funcional y aleatoria; tan sólo 4 alumnos de los 51 declaran haber estudiado tales conceptos. También se ha pedido sendos ejemplos de dependencia funcional y aleatoria; de los cuatro alumnos que han declarado haber estudiado estos conceptos, ninguno ha sido capaz de proponer un ejemplo correcto.

En resumen, los alumnos de esta muestra son en la mayoría mujeres de unos 20 años de edad. Una tercera parte de ellos declara haber estudiado nociones de Estadística, generalmente en C.O.U. Sólo cuatro alumnos declaran haber estudiado la diferencia entre dependencia funcional y aleatoria, no siendo capaz ninguno de poner un ejemplo válido de tales conceptos.

2.2.2. INTERPRETACION DE TABLAS DE CONTINGENCIA Y GRAFICOS

Interpretación de tablas de contingencia

El objetivo principal de la prueba es el estudio de la realización de juicios de asociación entre variables. Para ello, es necesario leer e interpretar en porcentajes o proporciones las frecuencias presentadas en una tabla de contingencia. Con objeto de estudiar la capacidad de los alumnos para realizar esta tarea, se incluyeron cuatro preguntas en el ítem D, cuyos resultados se comentan a continuación. En los comentarios que se hacen de las tablas, algunas veces, en lugar de utilizar los porcentajes reflejados en las mismas se recalculan los porcentajes sobre los alumnos que han contestado, eliminando las respuestas en blanco.

La primera cuestión se refiere a la interpretación de las frecuencias absolutas dobles en la tabla de contingencia. Se preguntó a los alumnos cuántas personas cumplían las dos condiciones de fumar y además padecer trastornos bronquiales en el ítem D. En la tabla 2.2.2.1 se muestra la

frecuencia y el porcentaje de respuestas correctas e incorrectas. Esta tarea no fue difícil para estos alumnos, ya que tan sólo 2 de los 51 han contestado incorrectamente a esta pregunta, dando en este caso 150, es decir, el total de fumadores.

Tabla 2.2.2.1 Frecuencia y porcentaje de las respuestas en la lectura de frecuencias absolutas dobles en tablas 2x2

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	49	96.1
Incorrecta	2	3.9
	-----	-----
Total	51	100.0

Para estudiar la lectura e interpretación de las frecuencias marginales absolutas, se preguntó a los alumnos cuál era el total de fumadores en el ítem D. Esta pregunta no es difícil para estos alumnos, ya que tan sólo uno ha errado la respuesta como se observa en la tabla 2.2.2.2. Este alumno que contesta 90 en la pregunta anterior también responde que hay 90 personas que padecen trastornos bronquiales y además fuman.

Tabla 2.2.2.2 Frecuencia y porcentaje de respuestas en la lectura de las frecuencias absolutas marginales en tablas 2x2

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Incorrecta	1	2.0
Correcta	50	98.0
	-----	-----
Total	51	100.0

El cálculo de una frecuencia relativa marginal se da en la tabla 2.2.2.3 en porcentajes. La contestación correcta la tiene el 53.2 por ciento de las respuestas.

Llama la atención la dispersión de las respuestas, debida en parte a que no saben calcular una proporción, ya que 13 alumnos (el 27.6 por ciento de las respuestas) responde con el número absoluto de fumadores (150); este error, confundir el porcentaje de una cantidad con su valor absoluto, se repite con frecuencia a lo largo de la prueba, por lo que se puede considerar que no es casual. Un alumno calcula la proporción como $250/150 = 166$, esto es, invierte los términos en la proporción, transcribe en el mismo orden la expresión "de 250 pacientes, 150 fuman" a expresión numérica. Otro da la frecuencia doble relativa $90/250 = 36$. Los demás son errores de cálculo. Hay que destacar que 4 alumnos de los 51 no responden a esta pregunta y no es por falta de tiempo, pues contestan a las preguntas posteriores.

Tabla 2.2.2.3 Frecuencia y porcentaje de respuestas en el cálculo de una frecuencia relativa marginal

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	20	3.9
	33	2.0
	36	2.0
	60	49.0
	62	2.0
	75	3.9
	100	2.0
	150	25.5
	166	2.0
	En blanco	7.8

Total	51	100.0

El cálculo de la frecuencia relativa condicional se da en la tabla 2.2.2.4. El 52.2 por ciento de las respuestas dadas son correctas y corresponden a este valor (60). Que el 21.7 de las respuestas sea de 40 puede deberse a que hayan entendido la pregunta a la inversa, es decir, el porcentaje de los que no padecen trastornos bronquiales entre los fumadores, confunden el condicionado y la condición que es un error descrito por Falk (1986) para la probabilidad condicional. Los alumnos que responden 24 (8.7 por ciento de las respuestas) han calculado $(90/250) \times 100$, es decir, el porcentaje de fumadores con trastornos bronquiales respecto al total. Dos alumnos dan la frecuencia absoluta de personas sin trastornos. Otro obtiene 15 (probablemente a partir de $150/100 = 1.5$, esto es, divide la frecuencia absoluta de los que fuman por la de los que tienen trastornos). Otro calcula $(40/250) \times 100 = 16$, es decir, el porcentaje relativo de los que fuman y no tienen trastornos. El que approximadamente la mitad de los alumnos no calculen correctamente un porcentaje en una tabla de contingencia es un hecho a tener en cuenta en la interpretación de la literatura sobre juicios de asociación.

Tabla 2.2.2.4 Frecuencia y porcentaje de respuestas en el cálculo de una frecuencia relativa condicional

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcto	9	2.0
	15	2.0
	16	2.0
	24	7.8
	40	19.6
	50	2.0
	60	47.1
	65	2.0
	100	3.9
	190	2.0

En blanco	5	9.8
Total	51	100.0

En resumen, podemos decir que la lectura directa de la tabla no ofrece dificultad, pero que el cálculo de proporciones o de porcentajes es más difícil, llegando a un error considerable (sólo lo realizan correctamente 52 ó 53 por ciento). Ocho alumnos (el 15.7 por ciento) han realizado correctamente las cuatro cuestiones anteriores.

Interpretación de la nube de puntos

Para cumplir este objetivo se incluyeron dos preguntas en el Item I. En la primera se da la abscisa y el alumno debe responder la ordenada y, en la segunda, se da la ordenada y el alumno debe responder la abscisa correspondiente. A continuación se estudian estas dos cuestiones.

En la tabla 2.2.2.5 se dan los resultados de la lectura de la ordenada, dada la abscisa. Los 40 alumnos que han respondido correctamente representan el 86.9 por ciento de los alumnos que han respondido. Se podrían considerar correctas las respuestas 9 y 10 que pueden ser debidas a errores visuales.

Tabla 2.2.2.5 Frecuencia y porcentaje de respuestas en la lectura de la ordenada dada la abscisa en la nube de puntos

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
9	1	2.0
10	1	2.0
Correcta	11	40
otras	4	7.8
blanco	5	9.8
	-----	-----
Total	51	100.0

Tabla 2.2.2.6 Frecuencia y porcentaje de respuestas de la lectura de la abscisa dada la ordenada en la nube de puntos

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
el 16 y el 20	40	78.4
Otras	5	9.8
En blanco	6	11.8
	-----	-----
Total	51	100.0

En la tabla 2.2.2.6, se dan los resultados de la lectura de la abscisa dada la ordenada. Los 6 que no contestan son los 5 anteriores más uno que en la pregunta anterior contesta 3, en lugar de 11 que era la contestación correcta. En este caso, es el 10 por ciento de respuestas incorrectas frente al 12 por ciento anterior. De los 5 que han contestado "Otras", tan sólo 2 han contestado mal la pregunta anterior, los otros 3 la han contestado bien. También en esta cuestión han respondido correctamente el 86.9 por ciento de

los alumnos que han contestado a la pregunta.

En resumen, algo más del 80 por ciento de los alumnos que han realizado la prueba interpretan correctamente los puntos de la nube de puntos presentada.

2.2.3. JUICIOS DE ASOCIACION

En la tabla 2.2.3.1 se estudia cómo detectan los alumnos de esta muestra el tipo de asociación que existe entre las parejas de variables que se presentan en una tabla de contingencia 2x2.

Tabla 2.2.3.1 Frecuencia y porcentaje de respuestas sobre el tipo de asociación en tablas 2x2

Item	Directa	Inversa	Independencia	No contesta
D	32 (62.7)		*16 (31.4)	3 (5.9)
E	4 (7.8)	*24 (47.1)	22 (41.2)	
F	*45 (88.2)		6 (11.8)	

* (solución correcta)

En el ítem D (Fumar y trastornos bronquiales), podíamos pensar al observar el bajo porcentaje de aciertos que es debido a la existencia de teorías previas, que se manifiestan en 21 individuos (41.2 por ciento), de los cuales 17 responden que la asociación es directa. También puede ser debido a que la casilla a (positivo-positivo), de una tabla de contingencia, tiene la mayor frecuencia absoluta. Además, el alto porcentaje de respuestas afirmando la existencia de asociación directa puede ser debido a que se ha dado el fenómeno de correlación ilusoria (Chapman y Chapman, 1969), ya que en las investigaciones sobre correlación se muestra que los humanos, cuando esperamos la existencia de correlación entre las variables estudiadas, ignoramos los datos presentados cuando éstos manifiestan ausencia de asociación (Pérez Echeverría, 1990). No hay que olvidar tampoco que el juicio de correlación corresponde a un problema de comparación de dos probabilidades y, en tales problemas, el caso proporcional es el que presenta mayor dificultad (Piaget e Inhelder, 1951); Fischbein, 1975); Green, 1981). Este caso corresponde, en un problema de asociación, al de independencia.

En el ítem E (Dieta y trastornos digestivos) el número de aciertos aumenta (47.1 por ciento). El alto porcentaje de alumnos que manifiestan que no hay dependencia puede ser debido a que busquen una relación directa y, al comprobar que no existe la dependencia directa, concluyan que no hay dependencia. Por otra parte, al no ser muy fuerte la dependencia, puede influir en la baja proporción de aciertos. Jenkins y Ward (1965), Erlick y Mills (1967) y Wasserman y Shaklee (1984) encontraron que la estimación subjetiva de la asociación negativa puede ser menos exacta que la estimación de una asociación positiva de la misma intensidad.

Como se ha visto en el estudio histórico realizado en la Sección 1.1.2, la idea de correlación negativa ha sido posterior (aunque sólo en algunos años) a la de correlación positiva y, como el mismo Pearson (1920) indicó,

incluso Galton creyó en sus primeros trabajos que la correlación entre variables siempre correspondería a una variación en el mismo sentido de las magnitudes implicadas. Podemos considerar, entonces, que los alumnos de nuestra muestra piloto que no identifican el caso de asociación negativa, así como los casos citados por los autores que hemos mencionado corresponderían a una concepción unidireccional de la asociación.

En el ítem F (Padecer alergia en la piel y vida sedentaria) al ser la dependencia directa y muy fuerte produce un alto porcentaje de aciertos; este hecho ha sido detectado, entre otros por Jennings, Amabile y Ross (1982)

En la tabla 2.2.3.2 se ofrece el tipo de asociación en las tablas rxc. Obsérvese el alto porcentaje de aciertos en el ítem G (Aprobar y horas de estudio). Esto concuerda con los resultados a los que llegaron Trolier y Hamilton (1986) que encontraron que la estimación de la correlación es mejor cuando los sujetos esperan que las variables estén relacionadas que cuando esperan que no lo estén. Allan y Jenkins (1983), encontraron que la compatibilidad causal entre las variables juega un papel crítico en el juicio de asociación realizado.

Tabla 2.2.3.2 Frecuencia y porcentaje de respuestas sobre el tipo de asociación en tablas rxc

Item	Asociación	Independencia	No contesta
G	*45 (88.2)	2 (3.9)	4 (7.8)
H	4 (7.8)	*26 (51.0)	21 (41.2)

* (solución correcta)

En el ítem H (Lateraldad en ojos y manos), creemos que la asociación, prácticamente nula de este problema y el ser una tabla 3x3 ha provocado que un gran porcentaje de sujetos no conteste. Sin embargo, entre los que contestan el porcentaje de alumnos que detecta la no dependencia es importante.

Tabla 2.2.3.3 Frecuencia y porcentaje de respuestas sobre el tipo de asociación en nube de puntos

Item	Directa	Inversa	Independencia	No contesta
I	5 (9.8)	13 (25.5)	*27 (52.9)	6 (11.8)
J	3 (5.9)	*39 (76.5)	3 (5.9)	6 (11.8)
K	* 7 (13.7)	5 (9.8)	25 (49.0)	14 (27.5)

* (solución correcta)

En la tabla 2.2.3.3 se ofrece el tipo de asociación en "nube de puntos". En el ítem I (Clasificación en la Liga y partidos empatados), el alto porcentaje que registra la respuesta inversa, respecto a directa, puede ser debido a que los equipos que menos partidos han empatado han quedado en los

puestos 16 y 20 de la clasificación, lo que hace pensar que el mínimo número de partidos empatados corresponden a los últimos puestos en la clasificación general. Obsérvese que más de la mitad de los alumnos dan una respuesta correcta.

En el ítem J, el porcentaje de respuestas correctas es alto. Las respuestas directa e independencia son extrañas ya que la relación inversa está muy marcada en este ítem. Consideramos que ambos casos se explicarían también por la existencia de una concepción unidireccional de la asociación, aunque esta se ha manifestado con preferencia en el ítem E. En el caso que nos ocupa, la fuerte intensidad de la relación y el hecho de ser las variables numéricas, hace apreciar a los alumnos el hecho de que se trata (con la excepción de un valor x) de una correspondencia unívoca que en algunos es identificado con la idea de dependencia. De los 6 que no contestan uno responde a ítems posteriores.

En el ítem K, al estar los puntos relativamente dispersos, y por tanto, el coeficiente de correlación relativamente bajo (0.55) produce que los alumnos se inclinen por declarar ninguna relación, Trolier y Hamilton (1986) indicaron que los juicios de asociación de los sujetos eran sensibles a la alta o baja correlación entre los estímulos de la información. De los 14 alumnos que no han respondido 5 contestan ítems posteriores en la prueba, lo que nos indica cierto grado de dificultad en este ítem.

En el ítem L, se destaca que la cuarta parte de los alumnos no ha respondido, lo que nos muestra su grado de dificultad. En segundo lugar el alto porcentaje de alumnos que dan una respuesta correcta (92.1 por ciento de los alumnos que han respondido).

Tabla 2.2.3.4 Frecuencia y porcentaje de respuestas sobre el tipo de asociación en comparación de muestras

Ítem	Asociación	Independencia	No contesta
L	*35 (68.6)	3 (5.9)	13 (25.5)
M	*26 (51.0)	5 (9.8)	20 (39.2)

* (solución correcta)

En el ítem M, se sigue destacando el alto porcentaje de alumnos que no responden, lo que nos da su grado de dificultad. En cuanto a la proporción de alumnos que han dado una respuesta correcta, el 83.9 por ciento de los alumnos que han respondido, es algo más bajo que en el ítem anterior.

Como resumen de este apartado podemos indicar que:

En las tablas de contingencia: Cuando la dependencia es fuerte los alumnos, suelen responder el tipo de dependencia correcto. Cuando no es muy fuerte algunos alumnos suelen basar sus argumentaciones en sus teorías previas sobre el contexto del problema propuesto, en concordancia con lo expuesto por Nisbett y Ross (1980), Crocker (1981) y Jennings, Amabile y Ross (1982). Muchos alumnos no contemplan más que el tipo de asociación directa o ausencia de dependencia, no teniendo en cuenta la relación inversa, manifestando una

concepción unidireccional de la asociación.

En la "nube de puntos": Cuando la relación es fuerte, los alumnos dan respuestas correctas al tipo de dependencia en un alto porcentaje. Cuando es de intensidad media o baja, el porcentaje de alumnos que da ausencia de relación es similar.

Finalmente en la **comparación de dos muestras:** Estos ítems son los que más alta frecuencia dan de "no respuestas".

Del estudio de la tabla 2.2.3.5 se observa una gran proximidad entre el valor estimado y el valor exacto del coeficiente de correlación o asociación para los casos E, F y J. Estos son aquellos en que la intensidad de la asociación ha sido moderada o alta y los datos no contradicen las teorías previas. En los casos D, G y K la estimación se ha visto sesgada por las teorías previas. Por último, los alumnos han sobreestimado el valor del coeficiente en los casos de no asociación. De este modo, se tiende a ver asociaciones incluso cuando no las hay, confirmando en cierto modo las teorías sobre correlación ilusoria. También se debe tener en cuenta que el segmento unitario dado, conduce al alumno a la estimación de una magnitud cuyos valores son proporcionales entre si y el coeficiente de correlación no lo es.

Tabla 2.2.3.5 Estimación del coeficiente de correlación

Item	Situación	Valor medio estimado	Valor real
D	Fumar/bronquios	0.56	0.0
E	Dieta/trastornos	0.48	0.44
F	Vida sedent/alergia	0.76	0.67
G	Aprob/suspender examen	0.72	0.37
H	Lateralidad ojos/manos	0.31	0.10
I	Clasf. Liga/empates	0.38	0.11
J	Proteínas/natalidad	0.76	0.77
K	Juicio de jueces	0.28	0.55

Debido a la longitud de la prueba y ya que este aspecto no ha producido resultados nuevos respecto a los existentes en la bibliografía, esta pregunta fue suprimida en los instrumentos definitivos.

2.2.4. EXPLICITACION DE TEORIAS PREVIAS

Como indican Nisbett y Ross, (1980, pág. 10) "En particular, parece que las teorías a priori o expectativas pueden ser más importantes para la percepción de la covariación que la observación de los datos presentados". Debido a que las teorías previas pueden influir en los juicios de correlación que dan los sujetos, se ha observado cuando los alumnos las manifestaban explícitamente, lo que se recoge en la tabla 2.2.4.1

En el ítem D el contexto es muy familiar al alumno, además, los datos no concuerdan con las teorías previas del alumno al respecto. Por tanto, es natural que el alumno las exponga. Más del 40 por ciento de los sujetos han manifestado teorías previas al argumentar la relación existente entre las variables.

Del mismo modo, el contexto "Liga Nacional de Fútbol" es muy familiar a los alumnos, lo que unido a la dificultad del problema ha provocado que un tercio de los alumnos que han respondido al ítem I manifiesten teorías previas sobre el mismo.

Tabla 2.2.4.1 Frecuencia de alumnos que explicitan teorías previas en sus argumentos

Ítem	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
D	Fumar/bronquios	21	41.2
E	Dieta/trastornos	3	5.9
F	Vida sedentaria/alergia	2	3.9
G	Aprob/suspender examen	7	13.7
H	Lateralidad ojos/manos	0	0.0
I	Clasf. Liga/empates	14	27.5
J	Proteínas/natalidad	4	7.8
K	Juicio de jueces	3	5.9
L	Presión sang/tratamiento	0	0.0
M	Nivel de azucar/sexo	0	0.0

Los contextos de los ítems E, F y J son menos conocidos por los alumnos y, por ello, se observan menos las teorías previas sobre los mismos.

El contexto del ítem G es muy usual para los alumnos, por lo que las teorías previas se manifiestan un poco más que en los dos o tres precedentes, pero no con la intensidad que cabría esperar, debido, probablemente a que la relación existente en las variables es la esperada por el alumno y no como ocurre en el ítem D que no lo es. El contexto del ítem K no es muy conocido por los alumnos, la mayoría opina que no existe relación entre las variables, por tanto, no les ha sido necesario utilizar teorías previas para argumentar la relación entre las variables. La ausencia de teorías previas en los ítems H, L y M es total.

En resumen, parece ser que los alumnos exponen teorías previas a la hora de argumentar la relación existente entre dos variables, cuando el contexto les es muy conocido y los datos ofrecidos no concuerdan plenamente con lo que ellos esperan.

2.2.5. ESTRATEGIAS EN LOS JUICIOS DE ASOCIACION

2.2.5.1. Estrategias en tablas de contingencia

Estrategias en tablas 2x2

Como se ha indicado en la sección 1.4, uno de los objetivos de la investigación se centra en el estudio de las concepciones de los alumnos sobre asociación estadística, que tienen el carácter de constructo inobservable (Sax, 1989; Dane, 1990). Estas concepciones serán inferidas, no sólo de los

juicios emitidos, sino a partir de la observación de las estrategias de los alumnos en la resolución de los problemas propuestos. En la sección 1.2 se especificó que se trata de estudiar las estrategias explicitadas por el alumno en las argumentaciones aportadas por escrito, no entrando en la problemática del estudio de los procesos cognitivos llevados a cabo durante la resolución de los problemas.

En las investigaciones sobre la asociación estadística se han empleado diversos métodos para averiguar cuales son estas estrategias, cada uno de los cuales tiene sus ventajas e inconvenientes. En nuestro caso, el método empleado utiliza el autoinforme, como han hecho Smedlund (1963) o Beyth-Marom (1982), ya que los sujetos efectúan descripciones del modo en que realizan los juicios de asociación. Sin embargo, en nuestro caso, este autoinforme se realiza por escrito, en lugar de verbalmente, ya que el tamaño de la muestra que hemos empleado y el elevado número de cuestiones hace más efectivo este método de recogida de datos. Puesto que el autoinforme se ha efectuado por escrito, se ha procedido a un análisis de contenido del mismo (Weber, 1985; Fox 1987).

En un primer paso se clasificaron todas las respuestas en procedimientos o modos diferentes de resolver el problema, atendiendo a la información empleada en la respuesta y al modo en que se compara o combina. *"La manera en que los sujetos que no han recibido instrucción integran la información es una cuestión central en los juicios intuitivos de covariación"* (Crocker, 1981, pág. 279). Estos procedimientos se describen con detalle en el anexo 2.2.1 en el que se presenta también un ejemplo de respuesta clasificada en cada una de las categorías obtenidas. Se hizo un recuento de frecuencias y se obtuvieron las tablas A.2.2.1.1, A.2.2.1.2, A.2.2.1.3, referidas a los ítems D, E y F que se presentan en anexo 2.2.1. En un segundo paso se decidió agrupar cada uno de estos procedimientos en grupos que denotasen una estrategia similar con el fin de estudiar las concepciones que tienen los alumnos sobre la asociación estadística en este tipo de tablas.

Como ya se ha dicho en el capítulo primero, una tabla de contingencia 2x2 que relate dos variables A y B, que pueden tomar sendos valores: presente, no-presente se expresaría de la siguiente forma:

	B	no B
A	a	b
no A	c	d

La primera forma de clasificación que se adoptó fue emplear el criterio usado en muchas investigaciones psicológicas en el tema, considerando estrategias diferentes según las celdas que se habían usado en la resolución del problema planteado y el modo en que se usa la información. Consideramos la utilización de una casilla, sólo si sirve para apoyar el argumento dado y no si se ha empleado para calcular las frecuencias marginales. Así en el ejemplo siguiente, tomado del ítem F,

... he llegado a la conclusión de que el porcentaje de personas que llevan una forma de vida sedentaria y están enfermos (43%) es mucho mayor que el porcentaje de personas que llevan una forma de vida no sedentaria y están enfermos (7%).

observamos, obviamente, que el alumno ha utilizado las 4 celdas para hallar el total. Sin embargo, en el argumento empleado para realizar el juicio sobre la asociación de las dos variables solo utiliza las casillas a (13) y c (2), comparándolas con el total, por tanto, este caso se tomaría como que ha usado solamente dos celdas, la a y la c. Cuando se comparan las frecuencias condicionadas con la marginal correspondiente se admite que se han utilizado cuatro celdas, como en el caso siguiente tomado del ítem F.

De los 14 con vida no sedentaria sólo 2 tienen alergia en la piel. Mientras que de los 16 con vida sedentaria 13 padecen alergia en la piel.

Los procedimientos, descritos en el anexo 2.2.1 se han agrupado, según el número de celdas utilizadas, de la siguiente manera:

Utiliza una sola casilla:

Casilla a [procedimientos: 1, 12, 40, 46, 54, 56]
Casilla b [procedimiento: 2]
Casilla c [procedimientos: 3, 33, 34, 53]
Casilla d [procedimiento: 4]

Utiliza dos casillas:

Casillas a y b [procedimientos: 6, 14, 18]
Casillas a y c [procedimientos: 7, 11, 20, 22, 24, 25, 55, 57]
Casillas a y d [procedimientos: 5, 23]
Casillas b y c [procedimientos: 50, 58]
Casillas b y d [procedimientos: 27, 28, 29]
Casillas c y d [procedimientos: 8, 30, 31, 44]

Utiliza las cuatro casillas: [procedimientos: 9, 10, 13, 15, 16, 17, 19, 21, 26, 41, 45, 48]

Otras: [procedimientos: 36, 37, 38, 39, 42, 43, 51]

De esta manera se ha obtenido la tabla 2.2.5.1.1. Aunque la comparación con los resultados de las investigaciones psicológicas se hará en la muestra de comparación, podemos extraer en este momento las siguientes conclusiones:

- Los alumnos tienden a utilizar una, dos o cuatro celdas. En ningún caso utilizan solamente tres, para realizar el juicio de asociación.
- Un número elevado de alumnos utilizan una sola celda: 9 alumnos (17.6%) en la cuestión D, 6 (11.7%) en la E y 10 (18.9%) en la F. En este caso, la celda más utilizada es la de máxima frecuencia, (así la única que se utiliza en E es la c y en F la a, en lugar de centrarse exclusivamente en la casilla a como sugieren diferentes investigaciones psicológicas).

Tabla 2.2.5.1.1 Frecuencia y porcentaje de estrategias empleadas en las tablas 2x2, clasificadas por el número de casillas

	Item		
	D	E	F
Utiliza una sola casilla			
La casilla a	4 (7.8)		7 (13.7)
La casilla b	1 (2.0)		
La casilla c	4 (7.8)	6 (11.7)	1 (2.0)
La casilla d			1 (2.0)
Utiliza dos casillas			
Las casillas a y b	3 (5.9)	1 (2.0)	
Las casillas a y c	5 (9.8)	2 (3.9)	4 (7.8)
Las casillas a y d	1 (2.0)		3 (5.9)
Las casillas b y c	1 (2.0)		1 (2.0)
Las casillas b y d	2 (3.9)	2 (3.9)	
Las casillas c y d		2 (3.9)	2 (3.9)
Utiliza las 4 casillas			
Proced. aditivos	8 (15.7)	12 (23.5)	16 (31.4)
Proced. multiplic.	4 (7.8)	10 (19.6)	9 (17.6)
Otras	17 (33.3)	16 (31.4)	7 (13.7)
No contesta	1 (2.0)		

- Casi un tercio del total de la muestra emplean sólo dos casillas de una distribución condicional, comparándolas entre sí o con la marginal correspondiente (cuando comparan a con b, o bien, a y b con a+b). También suelen comparar dos celdas pertenecientes cada una a distinta distribución marginal, por ejemplo, cuando comparan c con a+c y b con b+d. Es de destacar el uso de las celdas a y d, que representan los casos (presente, presente) y (no-presente, no-presente) de la tabla y tienen una equivalencia normativa. Del mismo modo ocurre con el uso de las celdas b y c (no-presente, presente) y (presente, no-presente) que también tienen una equivalencia normativa.
- Para realizar un juicio de asociación correcto entre las variables de una tabla de contingencia 2x2 es necesario tener en cuenta las cuatro celdas, ahora bien, esto no quiere decir que sea suficiente, como ocurre cuando usan procedimientos aditivos, más empleados que los multiplicativos que son correctos. Los alumnos eligen procedimientos aditivos cuando toman las cuatro casillas comparando las frecuencias relativas dobles o realizando la adición o la sustracción entre ellas. Cuando las cuatro casillas se relacionan mediante multiplicaciones o cocientes decimos que han utilizado un procedimiento multiplicativo. Estos procedimientos han sido menos frecuentes que los aditivos, aunque su porcentaje es apreciable. Observando los protocolos, podemos ver que, en general, los procedimientos de resolución de E son más elaborados que los de D e inferiores a los de F. Por tanto, podemos decir que ha habido un proceso de aprendizaje en el transcurso de la prueba.

En el apartado **Otras** hemos incluido los procedimientos de resolución que

no se pueden incluir en los apartados anteriores, como "Plantea un sistema de ecuaciones", o bien, "Compara los números sin especificar como".

Como se ha señalado en la sección 1.4, uno de los objetivos de la investigación es clasificar las estrategias de los problemas de asociación en tablas 2x2 atendiendo a su corrección desde el punto de vista de los conceptos matemáticos puestos en juego implícita o explícitamente.

Como se ha indicado en la sección 1.2, Vergnaud (1990), al discutir la actividad realizada por un alumno durante el proceso de resolución de problemas, distingue dos tipos de situaciones:

- 1) Situaciones para las que el sujeto dispone en su repertorio, en un momento dado, de las competencias necesarias para un tratamiento relativamente rápido de la misma.
- 2) Situaciones para las cuales el sujeto no dispone de dichas competencias.

También se indicó en la sección 1.2 que este autor llama "*esquema*" a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dadas: lo considera útil en los dos tipos de situaciones descritas. En las primeras el sujeto tendrá una conducta bastante automatizada y tenderá a usar un esquema único. En el segundo tipo de situaciones se observará el empleo sucesivo de varios esquemas, que pueden entrar en competición y que deben ser combinados y descombinados, para llegar a la solución buscada; si esta es correcta se ha producido un aprendizaje. En ellos sitúa los conocimientos en acto del sujeto (conceptos y teoremas en acto). Ahora bien, los alumnos de nuestra muestra no habían recibido instrucción sobre la asociación estadística. Por tanto, para resolver los problemas propuestos, los estudiantes estarían ante el segundo tipo de situaciones descrito por Vergnaud. En las estrategias identificadas en nuestro estudio se han observado organizaciones invariantes de la conducta para un mismo tipo de situaciones. El análisis de estos "*esquemas*" latentes tras las estrategias descubre elementos cognitivos implícitos, esto es, conceptos y teoremas en acto, según este autor. A partir de los datos de esta muestra piloto se ha efectuado una primera clasificación desde este punto de vista, que será revisada en la muestra definitiva en la sección 2.3.5.

Una característica importante de la tarea consistente en realizar un juicio de asociación sobre los datos de una tabla de contingencia, es que el alumno ha de comparar directamente las frecuencias de la tabla. Al tratarse de variables cualitativas, no es posible buscar relaciones numéricas entre los valores de las dos variables correspondientes a una celda. Tampoco se dispone de algún tipo de gráfico que ligue las variables entre sí, ni tampoco ningún tipo de representación que relacione las frecuencias de los valores de una variable como función de la otra.

La clasificación de las estrategias debe partir del análisis del modo en que el alumno compara o combina los diferentes tipos de frecuencias de la tabla de contingencia. Estas pueden ser frecuencias absolutas o relativas y en cada una de estas categorías, frecuencias dobles, marginales o condicionales.

A partir de los ítems D, E y F, se ha obtenido la tabla 2.2.5.1.2. En ella se contemplan tres categorías de estrategias, atendiendo al grado de corrección de las argumentaciones dadas, que son: correctas, parcialmente correctas e incorrectas y a los conceptos y teoremas en acto empleados en el caso de las correctas y parcialmente correctas y a los tipos de errores en las incorrectas. La explicación de su contenido se da a continuación:

Estrategias correctas

1. *Compara todas las distribuciones de frecuencias relativas condicionadas de una variable para los diferentes valores de la otra variable.* [Procedimientos 19, 21, 26, descritos en el anexo 2.2.1]. Esta estrategia es correcta, ya que las distribuciones condicionales de una variable en función de la otra serán iguales si existe independencia.
2. *Compara todas las frecuencias relativas condicionadas de una variable para un sólo valor de la otra variable con la marginal correspondiente.* [Procedimientos 20, 28, descritos en el anexo 2.2.1]. Es correcta, ya que en caso de independencia, la distribución de frecuencias relativas condicionales ha de ser igual a la marginal correspondiente. Estas dos propiedades son equivalentes a la independencia entre variables aleatorias (Gutiérrez Jaímez y cols. 1993)

Estrategias parcialmente correctas

3. *Compara todas las frecuencias absolutas condicionadas de una variable con la frecuencia absoluta marginal correspondiente.* [Procedimientos 15, 17, descritos en el anexo 2.2.1]. Es parcialmente correcta, porque aunque no se pueda hallar la intensidad de la asociación si se puede determinar el tipo de relación existente.
4. *Compara las frecuencias absolutas condicionadas de una variable para un sólo valor de la otra variable con la frecuencia absoluta marginal correspondiente.* [Procedimientos 11, 27, 58, descritos en el anexo 2.2.1]. Similar a la 2 pero no utiliza frecuencias relativas, por lo que se ha considerado parcialmente correcta.
5. *Compara las frecuencias absolutas condicionadas entre sí.* [Procedimientos 9, 10, descritos en el anexo 2.2.1]. Similar a la 1 pero no utiliza frecuencias relativas, por lo que se ha considerado parcialmente correcta.
6. *Utiliza las celdas a y d o bien b y c, esto es las diagonales en la tabla de contingencia.* [Procedimientos 5, 50, descritos en el anexo 2.2.1]. Es decir, emplea o bien los casos favorables a la asociación o los que la niegan. Para que fuese correcta debería utilizar los cuatro casos.

Estrategias incorrectas

7. *Utiliza una sola celda.* [Procedimientos 1, 2, 3, 4, 12, 53, 54, 56, descritos en el anexo 2.2.1]
8. *Compara las frecuencias absolutas de una sola distribución condicional.* [Procedimientos 6, 7, 8, descritos en el anexo 2.2.1]
9. *Compara las frecuencias absolutas de una sola distribución condicional con la marginal correspondiente.* [Procedimientos 14, 24, descritos en el anexo 2.2.1]
10. *Compara las frecuencias relativas de una sola distribución condicional.* [Procedimientos 18, 25, 44, descritos en el anexo 2.2.1]
11. *Utiliza frecuencias relativas dobles respecto al total de la muestra.* [Procedimientos 16, 22, 23, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 40, 41, 45, 46, 48, 55, 57, descritos en el anexo 2.2.1]
12. *Utiliza diversos tipos de frecuencias, por ejemplo, frecuencias marginales.* [Procedimientos 32, 47, 49, descritos en el anexo 2.2.1]
13. *Otro tipo de estrategias.* [Procedimientos 13, 37, 38, 39, 42, 43, 51, 52, descritos en el anexo 2.2.1].

Tabla 2.2.5.1.2 Frecuencia y porcentaje de estrategias en tablas 2x2 clasificadas por conceptos matemáticos implícitos

Estrategias:	Ítem		
	D	E	F
Correctas			
1	2 (3.9)	4 (7.8)	5 (9.8)
2		5 (9.8)	3 (5.8)
Parc. correctas			
3	3 (5.9)	4 (7.8)	5 (9.8)
4	3 (5.9)	1 (2.0)	4 (7.8)
5	2 (3.9)	6 (11.8)	6 (11.8)
6	1 (2.0)		3 (5.9)
Incorrectas			
7	7 (13.7)	5 (9.8)	7 (13.7)
8	5 (9.8)	2 (3.9)	
9	1 (2.0)	1 (2.0)	
10	4 (7.8)		1 (2.0)
11	5 (9.8)	8 (15.7)	10 (19.6)
12	2 (3.9)	2 (3.9)	1 (2.0)
13	15 (29.4)	13 (25.5)	6 (11.8)
No contesta	1 (2.0)		

Como podemos observar en la tabla 2.2.5.1.2 se corrobora que ha habido un proceso de aprendizaje en el transcurso de resolución de estos tres ítems. En efecto, en la tabla 2.2.5.1.2 han utilizado una estrategia correcta en la resolución de la cuestión D 2 alumnos (3.9 por ciento), el E 9 personas (17.6 por ciento) y el F 7 personas (9.8 por ciento). Más aún, si observamos conjuntamente los estrategias correctas y parcialmente correctas, tenemos: en la cuestión D aparecen 11 alumnos (21.5 por ciento), en E 20 personas (39.2 por ciento) y en F 25 alumnos (49.0 por ciento).

Si cruzamos las estrategias correctas, parcialmente correctas o incorrectas con el tipo de relación que ha dado el alumno, en el ítem D, obtenemos la tabla 2.2.5.1.3, donde podemos observar que, en general, una estrategia correcta o parcialmente correcta no se corresponde con una decisión correcta en el tipo de dependencia correcta (no hay relación). Nuestra hipótesis sobre este hecho es que ello es debido a dos hechos:

- Si un alumno, empleando una estrategia correcta o parcialmente correcta desde el punto de vista matemático, extrae un juicio incorrecto sobre el tipo de asociación es debido a que tiene concepciones erróneas sobre la asociación, que se superponen con otras correctas, que son las que han motivado su estrategia.
- El caso de estrategias incorrectas que llevan a decisiones correctas sobre la asociación es debido a particularidades del ítem que hacen que esta estrategia funcione en este caso particular.

En ambos casos se pone de manifiesto la estrecha relación entre las concepciones del alumno y las situaciones en que los aspectos locales de las mismas se ponen de manifiesto. *"La definición pragmática de un concepto hace referencia al conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus*

diferentes propiedades y al conjunto de esquemas puestos en juego por los sujetos en estas situaciones", (Vergnaud, 1990, pág. 145).

Artigue (1984) habla de concepciones locales para referirse a aquellas que se manifiestan en una situación y están ligadas, como consecuencia al saber que se pone en juego en esta situación.

Análisis de las estrategias del ítem D

Estrategia correcta y tipo de dependencia en el ítem D

Con objeto de comprobar las hipótesis a) y b) mencionadas en el punto anterior, se ha efectuado un estudio detallado caso a caso de los argumentos de los alumnos. De este modo hemos podido observar que nuestros datos apoyan estas dos hipótesis. A continuación efectuamos un resumen del análisis efectuado. Puesto que sería demasiado reiterativo mostrar todos los casos, el estudio se limita a mostrar sólo algunos de los argumentos de los estudiantes, que pueden servir para ilustrar este trabajo.

De los dos alumnos que utilizan la estrategia correcta, (número 1 de la tabla 2.2.5.1.3), uno ha dado el tipo de dependencia correcto; el otro que no lo ha hecho por falta de razonamiento proporcional, ya que argumenta:

Alumno 30: Si tiene influencia, ya que tanto el porcentaje de fumadores que padecen trastornos bronquiales, como el de los fumadores que no padecen, es el 60%; aunque el porcentaje de los no fumadores tanto como si padecen o no trastornos, es el 40%. Por tanto, los fumadores con trastornos son más numerosos que los no fumadores.

Esta respuesta es típica en la comparación de probabilidades, en el caso de que el número de casos favorables y posibles sea proporcional y ha sido descrita por Inhelder y Piaget (1955) o Green (1981), aunque no la hemos encontrado descrita en la resolución de problemas de asociación.

Estrategias parcialmente correctas y tipo de dependencia en el ítem D

Los alumnos que "comparan todas las frecuencias absolutas condicionadas de una variable con la frecuencia absoluta marginal correspondiente", (número 3 de la tabla 2.2.5.1.3), dan como tipo de dependencia directa, por falta de razonamiento proporcional, como el ejemplo siguiente:

Alumno 13: Observamos que de 150 fumadores 90 padecen trastornos y 60 no. Mientras que los no fumadores, sólo 60 padecen trastornos y 40 no, por lo que se puede decir que el padecer trastornos bronquiales depende del tabaco, pero no totalmente.

Igualmente ha sucedido con los alumnos que "comparan las frecuencias absolutas condicionadas de una variable para un sólo valor de la otra variable con la frecuencia absoluta marginal correspondiente", (número 4 en la tabla 2.2.5.1.3).

Un alumno que compara las frecuencias absolutas condicionadas entre sí (número 5 en la tabla 2.2.5.1.3) da un tipo de relación directa debido a que realiza una comparación de diferencias entre las frecuencias absolutas dobles,

estrategia típica de la comparación de probabilidades en alumnos que no han alcanzado el nivel de las operaciones formales según Inhelder y Piaget (1955) y que ha sido descrita en problemas correlacionales por Adi y cols. (1978). La respuesta es la siguiente:

Tabla 2.2.5.1.3 Clasificación de respuestas según estrategia y tipo de dependencia en el Item D

Estrategias:	Tipo de dependencia			Total
	No contesta	directa	Independ. correcto	
Correcta				
1		1	1	2 (3.9)
Parc. correctas				
3		3		3 (5.9)
4		2	1	3 (5.9)
5		1	1	2 (3.9)
6		1		1 (2.0)
Incorrectas				
7		4	3	7 (13.7)
8	1	2	2	5 (9.8)
9		1		1 (2.0)
10		2	2	4 (7.8)
11		2	3	5 (9.8)
12		2		2 (3.9)
13	2	11	2	15 (29.4)
No contesta	0	1		1 (2.0)
	4	32	15	51
Total	7.8	62.7	29.4	100.0

Alumno 6: Depende en parte porque se puede comprobar que hay más personas que fuman y además padecen trastornos bronquiales que las que no fuman. Pero eso no quiere decir que todas las personas que fuman son las que padecen más trastornos bronquiales puesto que más abajo se indica que hay más fumadores que no padecen trastornos bronquiales que los no fumadores. Por lo tanto no hay una relación total entre los no fumadores y los que padecen trastornos bronquiales.

En cuanto al último apartado de las parcialmente correctas (número 6 en la tabla 2.2.5.1.3) hay un alumno que utilizando las celdas b y c llega a la

conclusión de que la relación entre las variables es directa, razonando que las celdas deberían ser cero, lo que indica una concepción funcional de la dependencia.

Alumno 45: Influye el ser fumador, pero tampoco mucho, ya que hay personas fumadoras sin dichos trastornos y no fumadoras con ellos

Estrategias incorrectas y tipo de dependencia en el ítem D

De los 7 alumnos que han utilizado una sola celda. (número 7 en la tabla 2.2.5.1.3), para emitir su juicio de asociación, 4 han dado un tipo de dependencia directa (incorrecto) y 3 han respondido que no existe dependencia (correcto). Los que han utilizado la celda a, dan una dependencia directa porque esta celda es la de máxima frecuencia.

Alumno 48: Depende en gran parte porque la mayoría de los que padecen trastornos bronquiales fuman.

Se da aquí una concepción localista de la asociación, porque no se considera necesario comparar todos los valores diferentes de la variable. Basta con que en algún valor (en este caso entre los que fuman) se observe la relación para deducir la existencia de la asociación.

Cuatro alumnos emplean la celda b llegando tres a decir que no existe relación entre las variables y 1 que si hay relación entre las variables el argumento es el mismo para los cuatro:

"Hay un alto porcentaje de personas que fuman y no padecen trastornos".

Estos alumnos manifiestan una concepción determinista de la relación. Se debe cumplir que siempre que haya trastornos la persona fume, esto es, para que se dé el efecto se debe dar la causa, lo que se corresponde con la tercera regla de Hume (Pozo, 1987). El que supone que debe haber relación directa añade "que hay un número excesivo de las personas que no fuman y padecen trastornos".

Entre los que comparan las frecuencias absolutas de una sola distribución condicional (número 8 en la tabla 2.2.5.1.3), tenemos 5 casos; 2 de ellos han dado un tipo de dependencia directa, 2 ninguna dependencia y uno compara las frecuencias sin decantarse sobre el tipo de relación. Los que han señalado un tipo de dependencia directa lo han hecho al comparar los valores absolutos de la celda a y b. Los dos que afirman no haber relación entre las variables, uno es debido a las teorías previas, y el otro considera que en caso de dependencia la frecuencia de la celda d debería ser mayor que la de la c, afirmando:

Parece ser que no es o no depende mucho el fumar para padecer trastornos bronquiales ya que entre los que no fuman y no padecen trastornos bronquiales hay un número más pequeño del que hay en el casillero de los fumadores (60), y si dependiera el no fumar de alguna manera el número de personas (en los no fumadores) debería superar en gran porcentaje a los que fuman.

Entre los que comparan las frecuencias absolutas de una sola distribución condicional con la marginal correspondiente (número 9 de la tabla 2.2.5.1.3), un alumno ha dado un tipo de relación directa. Este alumno no percibe el problema como de comparación de dos proporciones, teniendo en cuenta sólo una

de las poblaciones de interés, por lo que consideramos que también manifiesta una concepción localista de la asociación.

Alumno 20: Padecer trastornos bronquiales depende de ser fumador ya que el número de personas que fuman y padecen trastornos bronquiales es mayor. De un total de 150 personas, 90 es fumador y padece trastornos bronquiales, siendo 60 personas las que fuman sin padecer trastornos.

Los alumnos que comparan las frecuencias relativas de una sola distribución condicionada, dos han detectado una relación directa y dos ninguna relación. En los dos casos, (número 10 en el tabla 2.2.5.1.3) al tomar sólo una distribución condicionada y no tener en cuenta la otra, depende de que distribución se tome para que resulte un determinado tipo de relación. La argumentación dada en la relación directa ha sido:

Alumno 34: Bueno en realidad si hay 150 personas que fuman en total y de ellos el 60% padecen trastornos bronquiales mientras que de el 40% solamente de los que fuman no los padecen pues se podría decir que existe más peligro de padecer trastornos bronquiales si se fuma.

los que han optado por decir que no existe relación lo argumentan así:

Alumno 24: Personalmente creo que no depende el ser fumador a la hora de padecer o no trastornos bronquiales, ya que si nos fijamos en la tabla, los que no padecen trastornos bronquiales, es de mayor porcentaje los que fuman.

con este argumento debía haber terminado afirmando que la relación es inversa, es decir, tienen más trastornos bronquiales los que no fuman, pero como veremos en otras ocasiones, a lo largo de estos comentarios, algunos alumnos no contemplan la relación inversa entre variables, solamente relación directa o independencia. Este alumno manifiesta de esta manera una concepción unidireccional de la asociación.

Los que utilizan las frecuencias relativas dobles respecto al total (número 11 en la tabla 2.2.5.1.3) han dado la respuesta correcta. Uno de ellos tiene una concepción determinista de la asociación, pues indica que no existe relación porque "los trastornos bronquiales los padecen tanto personas que fuman como los que no lo hacen", (Alumno 39). Otro señala que no existe relación porque las frecuencias marginales son iguales "lo sumes por donde lo sumes siempre da igual" (Alumno 26). El tercero argumenta independencia, comparando la distribución marginal de fumadores con la condicional de no padecer trastornos bronquiales:

Alumno 7: Según el resultado la proporción de fumadores son el 60% y también hay un 60% de fumadores que no tienen trastornos bronquiales, no depende aquí si tienes o no trastornos bronquiales".

Los dos alumnos que han realizado un juicio correcto de asociación en el apartado "Otras", no dan una argumentación clara.

Análisis de las estrategias del ítem E

Si cruzamos las estrategias correctas o parcialmente correctas con el tipo de relación que ha dado el alumno en la cuestión E, obtenemos la tabla 2.2.5.1.4, donde podemos observar que, en general, un juicio correcto sobre el

tipo de dependencia entre las variables no se corresponde siempre con una estrategia correcta, (Shaklee, 1983).

Tabla 2.2.5.1.4 Clasificación de las respuestas según estrategia y tipo de dependencia en el ítem E

Estrategias	Tipo de dependencia			Total
	Directa	Inversa (correcto)	Independencia	
Correctas				
1		3	1	4 (7.8)
2		4		4 (7.8)
Parc. correctas				
3		2	2	4 (7.8)
4		1		1 (2.0)
5		3	3	6 (11.8)
Incorrectas				
7		2	3	5 (9.8)
8			2	2 (3.9)
9			1	1 (2.0)
11		4	3	7 (13.7)
12	1	1		2 (3.9)
13	3	4	6	13 (25.5)
Total	4	24	21	51
	7.8	47.1	41.2	100.0

Estrategias correctas y tipo de dependencia en el ítem E

En la categoría "compara todas las distribuciones de frecuencias relativas condicionadas de una variable para los diferentes valores de la otra variable" (número 1 en la tabla 2.2.5.1.4), tres alumnos han dado una respuesta correcta (dependencia inversa). El alumno que da un solución incorrecta (no hay dependencia) se resiste a deducir que la relación es de tipo inverso, manifestando de este modo una concepción unidireccional de la asociación.

Alumno 10: La dependencia es mínima ya que el porcentaje de ancianos que tuvieron trastornos digestivos y no tomaron una dieta blanda es mayor que el de los ancianos que tomaron una dieta blanda y tuvieron trastornos digestivos, siendo también mayor el porcentaje de ancianos

nos que tomaron una dieta blanda y no tuvieron trastornos digestivos.

Cuatro alumnos que manifiestan la estrategias "compara todas las frecuencias relativas condicionadas de una variable para un sólo valor de la otra variable con la marginal correspondiente", (número 2 en la tabla 2.2.5.1.4) dan una solución correcta (dependencia inversa). Otro no se decanta sobre el tipo de dependencia.

Estrategias parcialmente correctas y tipo de dependencia en el ítem E

De los cuatro alumnos que comparan todas las frecuencias absolutas condicionadas de una variable con la frecuencia absoluta marginal correspondiente, (número 3 de la tabla 2.2.5.1.4), dos dan una solución correcta y dos incorrecta. Los dos que dan una solución incorrecta es debido, de nuevo, a no admitir el tipo de dependencia inversa:

Alumno 15: Según estos datos creo que padecer trastornos no se debe a la dieta empleada, ya que al usar la blanda solo los tuvieron 7 ancianos de los 15 que la utilizaron y de los que no la emplearon tuvieron 9 trastornos y 1 no los tuvo.

El alumno que usa la estrategia descrita como "compara las frecuencias absolutas condicionadas de una variable para un sólo valor de la otra variable con la frecuencia absoluta marginal correspondiente", (número 4 en la tabla 2.2.5.1.4) da una solución correcta. Seis alumnos comparan las frecuencias absolutas condicionadas entre si, (número 5 en la tabla 2.2.5.1.4) de los cuales tres dan una solución correcta y 3 una solución incorrecta, nuevamente por no admitir el tipo de relación inversa.

Estrategias incorrectas y tipo de dependencia en el ítem E

Hay cinco alumnos que utilizan una sola celda, (número 7 de la tabla 2.2.5.1.4) que siempre es la celda c, la de mayor valor absoluto. Dos han dado un tipo de relación correcta y tres incorrecta. Uno de los que ha dado un tipo de relación correcta lo argumenta de la manera siguiente:

Alumno 1: Si depende, pues al no ingerir dieta blanda en una de las partes de la tabla aparece un 90% de trastornos digestivos.

Los tres que dan un tipo de relación incorrecta es debido a que no aceptan la dependencia inversa.

Los dos alumnos que comparan las frecuencias absolutas de una sola distribución condicional (número 8 de la tabla 2.2.5.1.4) dan un tipo de relación incorrecta (no existe dependencia) debido a la no aceptación de la dependencia inversa:

Alumno 43: Tener o no trastornos digestivos no depende de ingerir una dieta blanda porque hay 8 personas que no tuvieron trastornos digestivos (ingirió una dieta blanda) y 1 que no ingirió dieta blanda.

Un alumno compara las frecuencias absolutas de una sola distribución condicional con la marginal correspondiente, (número 9 de la tabla 2.2.5.1.4). Indica ausencia de relación (incorrecto) debido a que estudia sólo una distribución condicional, manifestando una concepción localista de la

asociación.

Alumno 32: Creo que no depende el comer dieta blanda en los trastornos digestivos, a pesar del alto índice de ancianos que comieron una dieta normal, ya que de los 15 ancianos que tomaron una dieta blanda, la mitad -1 Sí tuvo problemas.

Lo mismo ocurre con los ocho alumnos que han utilizado frecuencias relativas respecto al total, (número 11 de la tabla 2.2.5.1.4). Cuatro de ellos llegan a la solución correcta (dependencia inversa) porque emplean los porcentajes respecto al total de una fila o columna favorable a la relación inversa, celdas c y d, o bien, celdas b y d:

Alumno 9: Parece ser que si depende de ingerir una dieta blanda ya que las personas que la ingirieron no tuvieron trastornos digestivos el 32% (celda b) y de las personas que no ingirieron dieta blanda sólo un 4% (celda d) no tuvieron trastornos digestivos.

Si hubiese tomado las celdas a, b, o bien, las a, c, la conclusión hubiese sido de independencia, que es lo que les ha ocurrido a los que indican ausencia de dependencia, como por ejemplo:

Alumno 20: Padecer trastornos digestivos no depende de ingerir una dieta blanda, ya que de 25 ancianos observados 7 (celda a) por ingerir una dieta blanda tuvieron trastornos digestivos, pero el número de ancianos con trastornos sin ingerir una dieta blanda es mayor. (celda c)

En la categoría "utiliza diversos tipos de frecuencias", (número 12 en la tabla 2.2.5.1.4), un alumno indica un tipo de dependencia directa, debido a que compara entre si la frecuencia marginal de los que tienen trastornos y de los que toman la dieta. Al ser ambas las de mayor valor en su distribución asocia este hecho con la dependencia.

Alumno 34: De los 25 ancianos 16 sufrieron trastornos y 9 no, 15 ingirieron dieta blanda y 10 no. Haciendo porcentajes $(16/25) \times 100 = 64\%$ tuvo trastornos. De la misma manera hallamos que el 20% no tuvo trastornos, que el 60% ingirieron dieta blanda, que el 40% no ingirieron dieta blanda. Yo creo que al haber más porcentaje de los que ingirieron dieta blanda y de los que tuvieron trastornos puede ser que efectivamente fueran ocasionados por la dieta blanda.

El alumno que da un tipo de relación inversa (respuesta correcta) lo argumenta empleando la distribución marginal:

Alumno 44: No pues hay un menor porcentaje de ancianos que no tienen trastornos (es beneficiosa en todo caso la dieta blanda) y son menores los trastornos digestivos.

De los alumnos que han argumentado su respuesta en la categoría señalada con "Otras" (número 13 en la tabla 2.2.5.1.4), uno ha planteado un sistema de ecuaciones, 5 responden sin especificar la estrategia utilizada, 3 comparando los números sin especificar como lo ha hecho. Los que comparan las diferencias entre celdas llegan a un tipo de dependencia u otro dependiendo de que celdas calculen la diferencia.

Análisis de las estrategias del ítem F

Si cruzamos las estrategias correctas, parcialmente correctas o incorrectas (cuestión F1) con el tipo de relación que ha dado el alumno (cuestión F3), obtenemos la tabla 2.2.5.1.5.

Tabla 2.2.5.1.5 Clasificación de respuestas según estrategia y tipo de dependencia en el ítem F

	Tipo de dependencia		Total
	Directa (correcto)	Independencia	
Correctas			
1	5		5 (9.8)
2	3		3 (5.9)
Parc. correctas			
3	5		5 (9.8)
4	4		4 (7.8)
5	5	1	6 (11.8)
6	2	1	3 (5.9)
Incorrectas			
7	7		7 (13.7)
10	1		1 (2.0)
11	10		10 (19.6)
12		1	1 (2.0)
13	3	3	6 (11.8)
Total	45	6	51
	88.2	11.8	100.0

Estrategias correctas y tipo de dependencia en el ítem F

Todos los alumnos que utilizan una estrategia de resolución correcta 8, (números 1 y 2 de la tabla 2.2.5.1.5), (13.7 por ciento) dan también un tipo de dependencia correcto (dependencia directa).

Estrategias parcialmente correctas y tipo de dependencia en el ítem F

Los cinco alumnos que han comparado todas las frecuencias absolutas de una variable para un sólo valor de la otra con la marginal correspondiente,

(número 3 en la tabla 2.2.5.1.5), han respondido correctamente al tipo de dependencia, aunque manifiestan una concepción localista de la asociación. En este caso es sencillo detectar la asociación directa entre las variables con este procedimiento, lo que no ocurre en los ítems anteriores, pues en el ítem D al comparar las celdas vertical u horizontalmente parecía existir una asociación directa; en el ítem E, al realizar la comparación vertical u horizontalmente, a algunos alumnos les puede parecer una relación débil.

En los 4 alumnos que han comparado las frecuencias absolutas condicionadas de una variable para un sólo valor de la otra variable con la frecuencia absoluta marginal correspondiente, (número 4 en la tabla 2.2.5.1.5), han encontrado un tipo de dependencia correcto. En este caso se pueden hacer las consideraciones anteriores, pues al elegir una fila o una columna de la tabla 2x2 y comparar sus frecuencias absolutas, siempre puede apreciarse la relación directa, no ocurre lo mismo en el ítem D.

De los 6 alumnos que han "Comparado las frecuencias absolutas condicionadas entre si", (número 5 en la tabla 2.2.5.1.5), para los 5 que han dado un tipo de dependencia correcto se pueden hacer los mismos comentarios que en los dos apartados anteriores. En la respuesta del alumno que ha supuesto que no hay dependencia no se puede apreciar su argumento.

De los 3 alumnos que utilizan "las celdas a y d, o bien, c y b", (número 6 en la tabla 2.2.5.1.5), 2 han señalado un tipo de relación correcto, debido a que consideran la celda d como desfavorable a la asociación, aunque normativamente es equivalente a la celda a:

Alumno 43: Con forma de vida sedentaria y alergia en la piel hay una mayoría (13) y con forma de vida no sedentaria y sin alergia en la piel hay 12, luego la mayoría se encontraría en que tiene una forma de vida sedentaria y que padecen alergia en la piel.

Igualmente el alumno que ha apreciado ninguna dependencia ve la celda d como desfavorable a la asociación y piensa además que su valor ha de ser la mitad que el de la celda d:

Alumno 46: Del estudio de comparación de la tabla, se observa que si el número de personas que padecen alergia en la piel y la forma de vida sedentaria es elevado en comparación con el número de personas que no padece alergia en la piel y lleva una vida no sedentaria. Creo que no se puede afirmar, puesto que la proporción no es la mitad.

Estrategias incorrectas y tipo de dependencia en el ítem F

Los 7 alumnos que han utilizado una sola celda, (número 6 en la tabla 2.2.5.1.5) han respondido el tipo correcto de relación entre las variables. Seis de ellos han utilizado la celda a de diversas formas. La celda a es la de mayor valor absoluto, además de ser la celda (presente, presente):

Alumno 44: Sí, pues hay un mayor número de ellos que al llevar una vida sedentaria tienen alergia en la piel.

Un alumno ha empleado la celda d (ausente, ausente), equivalente normativamente a la celda a. Otro "Compara las frecuencias relativas de una sola distribución condicionada", (número 10 en la tabla 2.2.5.1.5) y da un tipo de relación directa, ya que al utilizar una sola distribución condicionada en este caso concreto siempre se obtiene una relación directa.

Los 10 alumnos que "utilizan frecuencias relativas dobles respecto al total", (número 11 en la tabla 2.2.5.1.5, dan un tipo de dependencia correcto, ya que aunque las frecuencias utilizadas sean respecto al total de la muestra, las celdas a y d se obtienen con una frecuencia mayor.

En "Utiliza diversos tipos de frecuencias", (número 12 de la tabla 2.2.5.1.5), aparece un alumno que da un tipo de dependencia incorrecto (ausencia de dependencia). Su respuesta ha sido:

Alumno 26: Padecer alergia en la piel no depende de tener una vida sedentaria porque el número de personas que padecen alergia en la piel es el mismo que no la padece: $15 \cdot 13 + 2 = 15$; $3 + 12 = 15$.

Se puede observar que, para este alumno, la posible dependencia se debe obtener de la distribución marginal del efecto. Si las frecuencias marginales son iguales, no hay dependencia, independientemente de la distribución de la variable que actúa como causa.

En la categoría "Otras", (número 13 en la tabla 2.2.5.1.5), de los 3 alumnos que han dado una dependencia incorrecta (ausencia de dependencia), uno ha planteado un sistema de ecuaciones y dos dan la respuesta sin especificar la estrategia. De los tres que dan una respuesta de dependencia correcta, uno no ha especificado la estrategia, otro ha comparado los números sin decir como (alumno 5) y el último ha restado los números con poco sentido (alumno 25).

Conclusiones del análisis cualitativo de estrategias en tablas 2x2

Hemos visto en el análisis anterior que el hecho de elegir una estrategia correcta o parcialmente correcta, no implica un juicio correcto de asociación entre variables. En estos casos se ha llegado a detectar, a veces, una asociación correcta por alguno de los motivos siguientes:

- Falta de razonamiento proporcional, al no identificar como iguales las razones $60/100$ y $90/150$ en el ítem D. A este respecto Garfield y Ahlgren (1988) indican como la falta de razonamiento proporcional es una de las causas principales que explican las dificultades de los alumnos con los conceptos estadísticos.
- Ausencia de capacidad de comparación de dos probabilidades, al suponer que la probabilidad $90/150$ es mayor que $60/100$, aunque las razones sean equivalentes, al haber más casos favorables en la primera de estas dos razones. Este error ha sido descrito por Inhelder y Piaget (1955), Lecoutre (1986) y Green (1981) para los problemas de comparación de probabilidades, aunque no se ha encontrado descrito para el caso de juicios de correlación.
- Influencia de teorías previas sobre los datos. Como indican Nisbett y Ross (1980), el sujeto introduce en los datos de los problemas que resuelve nuevos elementos sugeridos por sus teorías previas. Aunque con propósito experimental presentamos a los sujetos tareas concretas, estas son bastante alejadas de las que encuentra en su vida cotidiana. Por ejemplo, normalmente no nos encontramos con tablas de contingencia cuando nos enfrentamos a juicios de decisión, aunque atribuimos un efecto a causas determinadas. Mantenemos unas creencias sobre la forma en que se (co)relacionan acontecimientos concretos, aunque la mayor parte de estas teorías no se corresponden con las contingencias

ambientales. Observamos aquí el proceso de compartamentalización descrito por Vinner y Dreyfus (1989). Se manifiesta cuando una persona tiene dos esquemas que, potencialmente, entran en conflicto en la estructura cognitiva, siendo usado uno u otro esquema en función de las situaciones.

- Algunos alumnos aprecian la dependencia aleatoria entre variables, otros, por el contrario, esperan que para que exista la dependencia, esta debe ser determinista. Para ellos, siempre que se produzca un valor dado de la variable independiente ha de aparecer también el valor correspondiente de la dependiente. Considerada la detección de la covariación como regla de inferencia causal, estos sujetos estarían aplicando el principio de constancia (Pozo, 1987) que supone que toda relación causal es constante, esto es, que las mismas causas se siguen siempre de los mismos efectos y lo hacen de una manera invariable. Desde un punto de vista matemático, los alumnos esperan que la dependencia se traduzca en una correspondencia tal que, a cada valor de la variable independiente, corresponde un sólo valor de la dependiente. Es decir, para ellos la idea de dependencia implica la noción de aplicación (dependencia funcional). Sabemos que este tipo de dependencia es un caso límite (pero no el único) de la dependencia estadística que modeliza las correspondencias en las cuales a un único valor de la variable independiente puede corresponderle diferentes valores de la dependiente. Llamaremos a esta concepción concepción determinista o funcional de la asociación.
- En otros casos el alumno indica que si se da el valor positivo de la variable dependiente, también debe ocurrir el valor positivo de la independiente. Supone que una vez producido el efecto necesariamente ha de darse la causa o bien se combina esta creencia con la anterior. En este caso, como regla de inferencia de una relación causal, se aplicaría el principio de condicionalidad (Pozo, 1987), en el que en toda relación causal el antecedente es una condición para la ocurrencia del consecuente.
- Algunos alumnos no contemplan la relación inversa entre variables, solamente conciben la relación directa o la independencia, por lo que no han detectado la asociación en el ítem E. Con respecto a este punto podemos recordar aquí cómo Galton compartió esta misma creencia en sus primeros trabajos sobre la correlación (Pearson, 1920). Diremos que estos alumnos tienen una concepción unidireccional de la asociación: perciben la existencia de ésta, pero no diferencian los dos sentidos posibles para la misma.
- Algunos alumnos dan menos importancia a la celda d que a la a para realizar un juicio de asociación entre variables, aunque sean equivalentes para decidir la existencia de asociación directa. Distintas investigaciones sugieren la tendencia a creer más relevantes los casos que confirman una hipótesis que aquellos que la falsan (Crocker, 1982; Kunda y Nisbett (1982); Carretero y cols. 1985). Por otra parte, aunque los casos negativos que confirman una hipótesis tienen una equivalencia formal con los casos positivos que la confirman, no tienen una equivalencia pragmática con ellos. Un acontecimiento negativo tiene mucho menor impacto en la atención que los acontecimientos positivos (Nisbett y Ross, 1980) por lo que los dos valores son "pesados" de distinta manera por el sujeto.

Se ha llegado a una decisión correcta de independencia a pesar de haber

empleado una estrategia incorrecta, por alguno de los siguientes motivos:

- Cuando los alumnos utilizan sólo una distribución condicionada, dan un juicio de asociación que depende de la distribución condicionada que hayan elegido. Otras veces dan un juicio erróneo por no interpretar bien las proporciones.
- Un alumno opina que cuando las dos distribuciones marginales son iguales las variables son independientes.
- Existencia de teorías previas en contra de la dependencia contenida en los datos presentados. Para estos alumnos habría que repetir los mismos comentarios hechos a propósito del peso de las teorías previas en la detección de la covariación.
- Algunos alumnos no contemplan la relación inversa entre las variables, por lo que cuando han estudiado solo la distribución condicional de no fumadores, deducen inadecuadamente la independencia, manifestándose aquí de nuevo la concepción unidireccional de la asociación.
- Concepciones deterministas sobre la asociación, por lo que se piensa que al darse el contrario de un hecho A ha de producirse el contrario del hecho B. De nuevo se aplica el principio de constancia (Pozo, 1987). Para Piaget existe la necesidad psicológica de la constancia causal en el ser humano, por lo que el sujeto puede creer en la necesidad de esta constancia y no ser capaz de detectar una de sus formas, la covariación, o, inversamente detectarla, pero no creer en necesidad de su lógica (Pozo, 1987).
- Errores en la lectura e interpretación de la tabla. Aunque este es un aspecto poco estudiado en Psicología, hemos visto en algunos párrafos de esta sección que un número importante de alumnos tienen dificultad en esta tarea.
- Creencia de que dos muestras sólo son comparables si tienen igual tamaño.

Estrategias en tablas 2x3.

En el anexo 2.2.1 se describe la codificación de procedimientos utilizados por los alumnos en la resolución del ítem G, con los que se obtuvo la tabla A.2.2.1.4 del mencionado anexo. Como se puede observar, dicha tabla no es operativa, y se decidió agrupar estos procedimientos simples en grupos homogéneos de estrategias, con el fin de estudiar las concepciones que tienen los alumnos sobre la asociación estadística en este tipo de tablas. La primera forma que se adoptó fue agrupar estas estrategias según las celdas que se habían utilizado en la resolución del problema planteado, si bien entendiendo la utilización de la celda en el argumento dado y no si se había utilizado como frecuencia marginal, obteniéndose la siguiente categorización:

Utiliza una casilla

1 La casilla c [procedimientos: 16, 19]

Utiliza dos casillas

2 Las casillas d y f [procedimientos: 17]

3 Las casillas c y f [procedimientos: 18, 23, 24]

Utiliza tres casillas

4 Las casillas d, e y f [procedimientos: 3]

5 Las casillas a, b y c [procedimientos: 5, 14, 25]

Utiliza cuatro casillas

6 Las casillas a, c, d, y f [procedimientos: 1, 4, 15]

7 Las casillas b, c, e, y f [procedimientos: 13, 22]

Las seis casillas [procedimientos: 2, 7, 9, 10, 11, 20, 21]**Otras** [procedimientos: 6, 8, 12]**No contesta** [procedimiento: 0]

En esta clasificación el significado de las casillas es el siguiente:

	B ₁	B ₂	B ₃
A	a	b	c
no A	d	e	f

Al aumentar la dimensión de la tabla de contingencia nos encontramos que, mientras la variable dependiente A sigue tomando dos únicos valores que pueden seguir interpretándose en un contexto de inferencia causal como ausencia/presencia de un efecto, la variable independiente B posee ahora tres valores diferenciados. Por ello, ya no puede interpretarse como presencia/ausencia de una causa, sino como una variación de intensidad de la causa potencial. De este modo el empleo de las diferentes celdas de la tabla no tienen ahora el mismo sentido normativo que en el caso de la tabla 2x2.

Observando la tabla 2.2.5.1.6 concluimos que el 60 por ciento de los alumnos no utilizan las seis celdas al estudiar la relación existente entre las dos variables.

Cuando se emplea una sola casilla, es la c, que tiene máxima frecuencia, como ya se había observado en las tablas 2x2. Esta celda coincide también con el valor máximo de la variable independiente (supuesta causa) y la presencia del efecto, por lo que podemos equiparar el empleo de esta celda, con el empleo de la casilla a en una tabla 2x2. Cuando se utilizan dos celdas, se tiende a comparar la celda de máxima frecuencia, c, con la de mínima frecuencia y que, además, coincide en este caso con la comparación de la presencia o no presencia del efecto cuando se da la máxima intensidad en la variable que actúa como causa.

Los 10 alumnos que utilizan tres celdas (19.6 por ciento), emplean las tres relativas a una fila u otra. 9 utilizan las celdas a, b y c de la primera fila, que se refieren al caso positivo (aprobar), es decir, estudian la frecuencia con que se produce el efecto para diversas intensidades de la causa.

Tabla 2.2.5.1.6 Frecuencia y porcentaje de estrategias empleadas en la tabla 2x3 (ítem G) clasificadas por el número de casillas.

		Frecuencia	Porcentaje
Utiliza una casilla			
	casilla c	2	3.9
Utiliza dos casillas			
	casillas d y f	1	2.0
	casillas c y f	4	7.8
Utiliza tres casillas			
	casillas d, e y f	1	2.0
	casillas a, b y c	9	17.6
Utiliza cuatro casillas			
	casillas a, c, d, y f	3	5.9
	casillas b, c, e, y f	3	5.9
Utiliza las seis casillas			
	seis casillas	21	41.2
Otras		5	9.8
No contesta		2	3.9
-----		-----	-----
Total		51	100.0

Seis alumnos utilizan cuatro celdas correspondientes a dos columnas para argumentar su estrategia. De las tres formas que hay de elegir dos columnas, la primera y segunda columna, no la ha tomado ninguno. Es de destacar que la tercera columna la eligen los seis, donde está la casilla de máxima frecuencia. Vemos aquí el intento de reducción del problema a uno correspondiente a una tabla 2x2, eliminando el valor intermedio de la variable independiente.

Veinte alumnos (el 39.2 por ciento) utilizan las seis celdas; tan sólo uno ha dado la relación de dependencia errónea, debido al uso de las teorías previas.

Otra forma de clasificar las estrategias de los problemas de asociación en tablas 2x3 es atendiendo a su corrección desde el punto de vista de los conceptos matemáticos puestos en juego implícita o explícitamente. Así se ha obtenido la tabla 2.2.5.1.7, en ella se contemplan tres categorías, atendiendo al grado de corrección de las estrategias dadas y dentro de estas categorías respecto a los conceptos en acto del sujeto (Vergnaud, 1982, 1990), manifestados en las estrategias correctas y parcialmente correctas o respecto a los errores manifestados en las estrategias incorrectas. Los comentarios respecto a cada una de estas estrategias son similares a los que hemos hecho para las equivalentes en la tabla 2x2. La descripción de las mismas y el código numérico que le asignamos lo damos a continuación:

Estrategia correcta

1. Utiliza todas las distribuciones de frecuencias relativas condicionadas de una variable para los diferentes valores de la otra variable. [Procedimiento: 9]

Estrategias parcialmente correctas

2. Utiliza las frecuencias absolutas de las distribuciones condicionales de las dos filas. [Procedimientos: 2, 20, 21, 22]
3. Utiliza las frecuencias absolutas de las tres columnas. [Procedimientos: 7, 10]
4. Utiliza las frecuencias de dos columnas. [Procedimientos: 1, 15, 17]
5. Compara una fila con su marginal correspondiente. [Procedimiento: 5]
6. Utiliza dos celdas de cada una de las filas. [Procedimiento: 13]
7. Compara c con d y a con f y c con $(a+b+c)$ y $(d+e+f)$. [Procedimiento: 4]

Estrategias incorrectas

8. Utiliza una sola celda. [Procedimiento: 16]
9. Utiliza una sola fila. [Procedimientos: 3, 14, 25]
10. Utiliza una sola columna. [Procedimientos: 18, 23, 24]
11. Otras. [Procedimientos: 6, 8, 11, 12, 19]

Tabla 2.2.5.1.7 Frecuencia y porcentaje de estrategias en el ítem G clasificadas por conceptos matemáticos implícitos

Estrategia	Frecuencia	Porcentaje
Correctas		
1	1	2.0
Parcialmente correctas		
2	14	27.5
3	6	11.8
4	4	7.8
5	1	2.0
6	2	3.9
7	1	2.0
Incorrectas		
8	1	2.0
9	9	17.6
10	3	5.9
11	7	13.7
No contesta	0	3.9

Total	51	100.0

Si observamos la tabla 2.2.5.1.7, podemos observar que sólo un alumno ha utilizado una estrategia correcta, aunque el 57.14 por ciento de los que han contestado han utilizado una estrategia parcialmente correcta. Si sumamos las estrategias correctas y parcialmente correctas en las tablas 2x2 y 3x2, observamos que esta última supera a las primeras. El alumno, conforme avanza en la realización de la prueba va mejorando la estrategia.

En las respuestas parcialmente correctas destaca la comparación de las frecuencias absolutas de las celdas bien por filas o columnas (estrategias 2, 3 y 4 de la tabla 2.2.5.1.7). En las incorrectas, la estrategia 9, utilizar una sola fila y la 11, etiquetada bajo el nombre global de "Otras", que incluye los procedimientos no clasificados en las otras estrategias como plantear un sistema de ecuaciones y las respuestas confusas.

Aproximadamente el 40 por ciento de los alumnos que han contestado esta

cuestión utilizan una estrategia incorrecta. Pero esto no quiere decir que el tipo de dependencia que han dado sea incorrecto.

Si cruzamos las estrategias correctas, parcialmente correctas e incorrectas con el tipo de dependencia que ha dado el alumno en la cuestión G3, obtenemos la tabla 2.2.5.1.8. De modo análogo al caso anterior se hace un estudio detallado con objeto de identificar las concepciones de los alumnos sobre la dependencia en tablas rx_c.

Estrategia correcta y tipo de dependencia en el ítem G

Un alumno compara las frecuencias relativas de todas las distribuciones condicionales (número 1 en la tabla 2.2.5.1.8). La respuesta dada al tipo de relación es correcta. Aunque se observa la influencia de teorías previas, ha interpretado los porcentajes correctamente:

Sujeto 15: Utilizando esta tabla el tanto por ciento de aprobados depende del tiempo de estudio, ya que de los que estudiaron menos de 5 horas suspendieron 57% y de los que estudiaron entre 5 y 10 lo hicieron 21.5% y de los que estudiaron más 16.5, o sea se que si más se estudia menos proporción de suspensos hay (aunque esto muchas veces en la realidad no es así).

Estrategia parcialmente correcta y tipo de dependencia en el ítem G

Puede observarse en este ítem que prácticamente todos los alumnos que responden obtienen el tipo de dependencia correcto, independientemente de la estrategia, debido a la coincidencia, en este caso, de la experiencia personal (teorías previas) con la asociación presente en la tabla.

Catorce alumnos comparan las frecuencias absolutas de las dos filas (número 2 en la tabla 2.2.5.1.8). 11 alumnos comparan a, b y c entre sí y d, e y f entre si, de ellos 10 dan una dependencia correcta y uno una dependencia incorrecta. Los que dan la respuesta correcta se basan en el incremento o disminución de las categorías de una variable cuando la otra crece. Un ejemplo es el siguiente:

Sujeto 10: Si depende el aprobar o el suspender del tiempo dedicado para prepararlo. Ya que como se puede ver en la tabla, el porcentaje de aprobados va aumentando según van aumentando el número de horas dedicadas a preparar el examen; así como también el número de suspensos aumenta cuando se va reduciendo el número de horas dedicadas a preparar el examen.

Un alumno ha dado una respuesta incorrecta por el fuerte influjo que le producen las teorías previas, no llegando a tener en cuenta las frecuencias que se presentan en la tabla. Otro alumno al comparar las distribuciones de filas con su marginal correspondiente, llega a un juicio de asociación correcto, aunque utiliza comparación de frecuencias absolutas. La respuesta del alumno ha sido la siguiente:

Sujeto 40 De todas las personas 100, 71 aprueban y 29 suspenden. De los 71, 11 menos de 5 h, 25 entre 5 - 10 h, 35 más de 10 h De los 29, 15 menos de 5 h, 7 entre 5 - 10 h y 7 más de 10 h En estos últimos suspenden

los mismos independientemente del tiempo, aunque en general hay más aprobados estudiando más tiempo.

Tabla 2.2.5.1.8 Clasificación de respuestas según estrategia y tipo de dependencia en la tabla 2x3 (item G)

Estrategia	Tipo de dependencia			Total
	No contesta	Directa (correcto)	Independencia	
Correcta				
1		1		1 (2.0)
Parc. correctas				
2		13	1	14 (27.6)
3		6		6 (11.6)
4	1	3		4 (7.8)
5		1		1 (2.0)
6		2		2 (3.9)
7		1		1 (2.0)
Incorrectas				
8		1		1 (2.0)
9		8	1	9 (17.6)
10		3		3 (5.9)
11	1	6		7 (13.7)
No contesta	0	2		2 (3.9)
	4	45	2	51
	7.8	88.2	3.9	100.0

Los dos últimos intentan reducir la tabla 3x2 a una tabla 2x2. Han dado un tipo de relación correcta entre las variables, ya que el procedimiento funciona en este caso. La respuesta de uno de ellos ha sido:

Sujeto 41 Si depende ya que de 100 alumnos un 74% de ellos han utilizado entre 5 y 10 horas y más de 10 horas y han aprobado un 60% y suspendido un 14% mientras que los alumnos que han estudiado menos de 5 horas han aprobado el 11 y suspendido el 15.

Seis alumnos han comparado las frecuencias absolutas de las tres columnas (número 3 de la tabla 2.2.5.1.8), obteniendo un tipo de dependencia directa, al comprobar como crecen o disminuyen las categorías de una variable cuando la

otra crece:

Sujeto 16: Si se demuestra que el aprobar o suspender un examen depende del número de horas utilizadas. Se va viendo con los propios datos, mientras que los aprobados que estudian menos de 5 horas son 11, los suspensos son 15, los que estudian entre 5 y 10 horas aprobados 25 y suspensos 7 y más de 10 horas aprobados 35 y suspensos 7. En conclusión a mayor número de horas estudiadas por alumno mayor será el número de aprobados y menor el de suspensos.

Tres alumnos comparan las frecuencias de dos columnas (número 4 en la tabla 2.2.5.1.8). Uno compara las frecuencias relativas de una columna respecto a su marginal correspondiente reduciendo así la tabla a una 2x2 ya que prescinde de una columna.

Sujeto 12: Me fijo en el resultado total de alumnos aprobados y suspensos. Entre los alumnos aprobados hay 71 personas y los suspensos 29. Observando los alumnos que al dedicarle más de 10 horas han suspendido y han aprobado es muy significativa (35 y 7 respectivamente). Pero no obstante, esto se refleja también en los suspensos y aprobados que han dedicado menos de 5 horas (11 y 15).

El resto de alumnos con estrategia parcialmente correcta, en general, emplean diversos modos de reducción de la tabla 2x3 a una 2x2.

Estrategia incorrecta y tipo de dependencia en el ítem G

Un alumno usa una sola celda, (número 8 en la tabla 2.2.5.1.8), llegando a un tipo de asociación correcta en su respuesta al utilizar la celda de mayor frecuencia:

Sujeto 25: Si depende del tiempo dedicado ya que del 100% de alumnos un 35% aprobaron ya que le dedicaron más horas.

Nueve alumnos utilizan una sola fila (números 9, 14 y 25 en la tabla 2.2.5.1.8). Uno de ellos, que ha utilizado la segunda fila, llega a una respuesta incorrecta sobre el tipo de asociación entre variables, al ser consecuente con el procedimiento utilizado. En concreto la respuesta ha sido:

Sujeto 3: Yo creo que no depende del todo porque de los 29 suspensos la mitad (14) han suspendido por estudiar más de 5h y la otra mitad (15) igualmente ha suspendido habiendo dedicado menos de 5 horas a sus estudios.

La primera fila la han empleado 8 alumnos, dando todos la solución correcta al tipo de dependencia. El motivo ha sido que la distribución condicionada utilizada crece cuando lo hace la otra variable (la variable tiempo), y de aquí obtienen los alumnos el tipo de relación directa entre las variables.

Sujeto 49: Si depende del número de horas que se halla estudiado, los que estudiaron más tiempo tienen un mayor índice de aprobados que los que estudiaron menos.

Tres alumnos utilizan la última columna, (número 10 en la tabla 2.2.5.1.8). Llegan a un tipo de asociación correcto porque la columna utilizada está en consonancia con el tipo de relación.

Siete alumnos han sido clasificados en "otras" (número 11 en la tabla 2.2.5.1.8). De ellos tres alumnos han utilizado una "Respuesta confusa o no da argumento", llegan a un tipo de asociación correcto, posiblemente habrán utilizado un tipo de estrategia más sofisticada, pero no la han hecho explícita en la respuesta.

Un alumno "Plantea un sistema de ecuaciones", no da respuesta al tipo de relación de las variables. En concreto su respuesta ha sido:

Sujeto 18: El procedimiento seguido es el siguiente:

$$\begin{aligned} 11a + 25b + 35c &= 71 \\ 15a + 7b + 7c &= 29 \\ 26a + 32b + 42c &= 100 \end{aligned}$$

Dos alumnos comparan las frecuencias marginales de columnas, llegan a dar la respuesta correcta al tipo de relación porque hay más aprobados que suspensos. Una de las respuesta ha sido:

Sujeto 20: Aprobar el examen depende del tiempo dedicado, a mayor número de horas menor número de suspensos. De un total de 100 alumnos, 71 aprueban y suspenden 29.

Un alumno llega también a una respuesta correcta al estimar el tipo de dependencia, basando su respuesta en la celda c que es la de máxima frecuencia:

Sujeto 39 Para aprobar un examen depende del tiempo dedicado a prepararlo. El 71% aprueban y el 29% suspenden. De ese 71% 35 personas aprobaron con más de 10 h de estudio. El 42% estudiaron más de 35 h.

Conclusiones del análisis cualitativo de estrategias en tablas 2x3

En síntesis, se puede decir que en este ítem el alumno que ha empleado una estrategia correcta y la mayor parte de los que utilizan una parcialmente correcta identifican correctamente la relación de dependencia. El único caso en que ello no ocurre así es debido a las teorías previas en contra de los datos.

En el caso de emplear una estrategia incorrecta se ha llegado a veces a un juicio correcto de asociación por los motivos siguientes:

- Usar la celda de máxima frecuencia que en este caso es favorable a la asociación, manifestando la concepción localista de la asociación, que se describe en las conclusiones del análisis de estrategias en tablas 2x2
- Usar las frecuencias de una fila o columna favorables al tipo de dependencia, incluso la comparación de marginales y llegando a la misma conclusión.

Por último se puede observar el intento de un número importante de sujetos de reducir la tabla a otra 2x2.

Estrategias en tablas 3x3 (ítem H)

Al pasar a la tabla de contingencia 3x3 nos encontramos con que las dos

variables presentan, respectivamente, tres modalidades no ordinales. Por tanto, desde el punto de vista de un contexto de causalidad, la interpretación de las celdas de la tabla es más compleja. Todas las celdas son ahora equivalentes, en el sentido de que, no puede hablarse ahora de presencia y ausencia ni de causa ni de efecto, sino de tres posibles causas incompatibles y tres posibles efectos, también incompatibles. En general, una tabla de contingencia 3x3 es como la siguiente:

	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	a	b	c
A ₂	d	e	f
A ₃	g	h	i

Los procedimientos utilizados por los alumnos en este ítem se describen en el anexo 2.2.1. En primer lugar, se han agrupado según el número de celdas utilizado de la siguiente manera:

Dos casillas [procedimiento: 1]

Tres casillas [procedimientos: 5, 10, 11]

Seis casillas [procedimientos: 8, 9]

Nueve casillas [procedimientos: 2, 4, 7]

Otras [procedimientos: 3, 6, 12]

A la vista de la tabla 2.2.5.1.9, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Hay dos alumnos que no utilizan las celdas como base de sus argumentos, utilizan la distribuciones marginales, lo que es incorrecto porque sólo se tiene en cuenta la distribución de una variable.
- Hay un alumno que emplea dos celdas: la a y la h que es la que muestra máxima frecuencia.

Tabla 2.2.5.1.9 Frecuencia de estrategias en el ítem H según número de casillas empleadas

	Frecuencia	Porcentaje
dos casillas	1	2.0
tres casillas	9	17.7
seis casillas	6	11.8
nueve casillas	12	23.5
otras	6	11.8
No contesta	17	33.3
<hr/>		
Total	51	100.0

- Nueve alumnos (el 26.47 por ciento de los que han contestado a esta

cuestión) usan tres celdas, es decir, una fila o una columna de la tabla, comparando así para un valor dado de una variable las frecuencias de los diferentes valores de la otra variable. De los nueve, seis utilizan una fila y 3 una columna, lo que parece indicar que los alumnos tienden más a usar una fila que una columna.

- Seis alumnos basan sus argumentos sobre el tipo de relación que existe entre las dos variables en seis celdas, es decir, utilizan dos filas, dos columnas o una fila y una columna. Cinco han empleado dos filas, lo que parece indicar que los alumnos tienden a utilizar las filas más que las columnas. Estos alumnos están comparando entre sí dos distribuciones de frecuencias condicionales.
- Doce alumnos (35.9 por ciento de los alumnos que han contestado esta cuestión) usan las nueve celdas para argumentar el tipo de relación que existe entre las variables, bien por filas o por columnas. Once alumnos comparan las tres filas, lo que vuelve a indicar que los alumnos tienden a utilizar las filas más que las columnas. En el apartado "Otras" se ha incluido los alumnos que no se puede saber el número de celdas que han empleado.

También se han estudiado las estrategias elegidas por los alumnos en la resolución de este ítem, clasificándolas según el grado de corrección en correctas, parcialmente correctas e incorrectas, de la siguiente forma:

Estrategias correctas

7. *Utiliza las frecuencias relativas condicionadas de las tres filas.* [Procedimiento 7 que se describe en el anexo 2.2.1]

Estrategias parcialmente correctas

2. *Utiliza las tres distribuciones condicionales de frecuencias absolutas de columna.* [Procedimiento 2 que se describe en el anexo 2.2.1]
4. *Compara las frecuencias absolutas por filas en las tres filas,* (distribuciones condicionales por filas). [Procedimiento 4 que se describe en el anexo 2.2.1]
9. *Compara las frecuencias absolutas en dos filas.* [Procedimiento 4 que se describe en el anexo 2.2.1]

Estrategias incorrectas

1. *Utiliza las casillas a y h.* [Procedimiento 1 que se describe en el anexo 2.2.1]
3. *Utiliza la distribución marginal de fila.* [Procedimiento 3 que se describe en el anexo 2.2.1]
5. *Compara las frecuencias absolutas de una fila.* [Procedimiento 5 que se describe en el anexo 2.2.1]
6. *No da procedimiento o respuesta confusa.* [Procedimiento 6 que se describe en el anexo 2.2.1]
8. *Compara las frecuencias absolutas de una columna y una fila.* [Procedimiento 8 que se describe en el anexo 2.2.1]
10. *Utiliza una distribución condicionada de frecuencias relativas de columna.* [Procedimiento 10 que se describe en el anexo 2.2.1]
11. *Compara las frecuencias absolutas de una columna. Equivalente al 5.* [Procedimiento 11 que se describe en el anexo 2.2.1]
12. *Utiliza la distribución marginal de columna.* [Procedimiento 12 que se describe en el anexo 2.2.1]

Tabla 2.2.5.1.10 Frecuencia de las estrategias del ítem H clasificadas por conceptos matemáticos implícitos

Estrategias	Frecuencia	Porcentaje
Correctas		
7	1	2.0
Parc. correctas		
2	1	2.0
4	10	19.6
9	5	9.8
Incorrectas		
1	1	2.0
3	1	2.0
5	6	11.8
6	4	7.8
8	1	2.0
10	1	2.0
11	2	3.9
12	1	2.0
No responde	0	33.3
Total	51	100.0

Las frecuencias de utilización de estas estrategias se dan en la tabla 2.2.5.1.10, observando esta tabla la primera conclusión que sacamos es que 1/3 de los alumnos no han contestado este ítem, otro tercio ha utilizado una estrategia correcta o parcialmente correcta y otro tercio ha utilizado una estrategia incorrecta.

Si cruzamos las estrategias correctas, parcialmente correctas e incorrectas en la cuestión H1 con las respuestas dadas sobre el tipo de dependencia en la cuestión H3, obtenemos la tabla 2.2.5.1.11.

Estrategia correcta y tipo de dependencia en el ítem H

Un alumno ha utilizado una estrategia correcta y ha dado un tipo de dependencia correcto, (número 7 en la tabla 2.2.5.1.11), calculando las frecuencias relativas condicionadas.

Sujeto 15: La lateralidad de las manos de los ambidextros no depende con la lateralidad de los ojos. En los zurdos sin embargo hay más de la mitad que son ambioculares y mucho menos del ojo derecho. También en los diestros hay la mitad son ambioculares. (Ha escrito los porcentajes correspondientes en las celdas de la tabla)

3 → 27% 6 → 54% 2 → 18%
 2 → 33% 2 → 33% 2 → 33%
 5 → 27% 9 → 50% 4 → 23%

Estrategia parcialmente correcta y tipo de dependencia en el ítem H

Un alumno ha comparado las tres distribuciones condicionadas por columnas

(número 2 en la tabla 2.2.5.1.11), llegando al tipo de relación correcto:

Sujeto 4: La mayoría del ojo izquierdo son diestros. La mayoría del ojo derecho son diestros. La mayoría son ambioculares y de ellos la mayoría son zurdos y diestros. Luego no veo ninguna relación entre la lateralidad de manos y ojos.

Diez alumnos han empleado las frecuencias absolutas de las tres filas, (número 4 en la tabla 2.2.5.1.11). De ellos la mitad, han dado una respuesta correcta al tipo de dependencia, basándose en la comparación de las modas de las distribuciones condicionales:

Sujeto 4: La mayoría del ojo izquierdo son diestros. La mayoría del ojo derecho son diestros. La mayoría son ambioculares y de ellos la mayoría son zurdos y diestros. Luego no veo ninguna relación entre la lateralidad de manos y ojos.

Dos alumnos no contestan, con claridad, al tipo de dependencia, ya que el argumento utilizado no aclara si existe o no dependencia:

Sujeto 12: Comparando los zurdos con los diestros, y cada grupo con los del ojo izq., ambiocular y derecho. Incide bastante sobre todo en el grupo de las personas ambioculares con las del ojo izquierdo y derecho. También los que son diestros en los casilleros del ojo izquierdo ambiocular y ojo derecho se observa una gran diferencia entre ellos.

Los tres que detectan la dependencia afirman que las variables están relacionadas por las pequeñas diferencias existentes entre las frecuencias absolutas. Estos alumnos emplearían estrategias correspondientes al nivel IV de Pérez Echeverría (1990), ya que se realizan comparaciones aditivas y no multiplicativas.

Cinco alumnos utilizan las frecuencias absolutas de dos filas (número 9 en la tabla 2.2.5.1.11). De ellos, 4 han dado una respuesta correcta y uno no contesta. La base del argumento de estas respuestas es comparar las frecuencias absolutas de las filas primera y tercera. Los alumnos exigen que para existir dependencia deben ser mayores las frecuencias ojo derecho-diestros y ojo izquierdo-zurdos

Sujeto 24: No depende, porque los diestros aumentarían al ser el ojo derecho, sin embargo, en la tabla disminuye, aunque por otro lado, los zurdos aumentan en el ojo izquierdo, pero se toma menor porcentaje de 14 personas, y en los diestros es de 18 personas.

Estrategia incorrecta y tipo de dependencia en el ítem H

Un alumno ha usado dos celdas para dar su argumento (número 1 en la tabla 2.2.5.1.11), una de ellas la primera y la otra la de máxima frecuencia:

Sujeto 22: Hay un total de 35 personas 11 zurdos, 6 ambidextros, 18 diestros; 10 ojo izquierdo, 17 ambioculares, 8 ojo derecho. Según estos datos de 21 personas zurdas y con lateralidad en el ojo izquierdo solo 3 tienen las 2 cosas. Se sigue observando la tabla y se puede llegar a la conclusión que la mayoría de estas personas sin depender de la lateralidad del ojo son diestras y que sin depender de la lateralidad de las manos son ambioculares, pero a la vez la mayoría de per-

Tabla 2.2.5.1.11 Clasificación de las respuestas en el ítem H según la estrategia y tipo de dependencia.

Estrategias	Tipo de dependencia			Total
	No contesta	Dependencia	Independ. (correcto)	
Correcta				
7			1	1 (2.0)
Parc. correctas				
2			1	1 (2.0)
4	2	3	5	10 (19.6)
9	1		4	5 (9.8)
Incorrectas				
1			1	1 (2.0)
3			1	1 (2.0)
5		1	5	6 (11.8)
6			4	4 (7.8)
8			1	1 (2.0)
10			1	1 (2.0)
11			2	2 (3.9)
12	1			1 (2.0)
No contesta	0	17		17 (33.3)
Total	21	4	26	51
	41.2	7.8	51.0	100.0

Un alumno utiliza la distribución marginal de filas. (número 3 en la tabla 2.2.5.1.11). Como los ambioculares tienen mayor frecuencia, de ahí deduce la no existencia de dependencia.

Sujeto 5: La lateralidad del ojo no depende de la lateralidad de la mano. Los números los he usado mirando a ver cual era el número mayor en lo de los ojos y efectivamente el porcentaje en los ambioculares es mayor con respecto a los demás (ojo Izq. ojo drch.).

Seis alumnos emplean la distribución condicionada de una fila (número 5 en la tabla 2.2.5.1.11). Volvemos a destacar que hay dos alumnos que han utilizado una sola columna, sin embargo, hay seis que han utilizado una sola

fila, lo que indica que las filas son preferidas a las columnas. Cinco de ellos han respondido de manera correcta al tipo de dependencia, basándose en la idea de que debe coincidir la lateralidad del ojo con la de la mano. Es un fenómeno parecido a la no admisión de la dependencia inversa en la tabla 2x2, por lo que se podría concluir que estos sujetos tienen una concepción unidireccional de la asociación.

Sujeto 10: Como se puede observar en la tabla la dependencia entre la lateralidad del ojo y de la mano es mínima ya que el porcentaje es mayor cuando no coinciden la lateralidad del ojo con el de la mano que cuando si lo hace. Habiendo por ejemplo mayor número de personas diestras ambioculares que diestras con lateralidad en el ojo derecho.

El alumno que no respondió correctamente al tipo de dependencia indica que, en total, hay más diestros que zurdos y que ambidextros, no quedando claro el tipo de razonamiento empleado.

Sujeto 21: Depende mucho, aunque tiene preferencia en diestros, 5, 9, 4; puede haber más de estos.

Cuatro alumnos no han indicado su estrategia al argumentar el tipo de dependencia entre las variables, (número 6 en la tabla 2.2.5.1.11).

Un alumno ha comparado las frecuencias absolutas de una fila y una columna (número 8 en la tabla 2.2.5.1.11). En su argumentación queda satisfecho con poner dos ejemplos que falsen la dependencia entre las variables, manifestando de este modo una concepción determinista de la asociación.

Sujeto 23: Yo creo que no depende porque el número de personas que son ambioculares tienen un mayor número aún siendo zurdos, ambidextros o diestros, al igual que, por ejemplo, hay más personas diestras, ojo izquierdo que diestros, ojo derecho.

Un alumno emplea frecuencias relativas condicionadas, (número 10 en la tabla 2.2.5.1.11). Su respuesta ha sido:

Sujeto 28: 100% → 11
x → 3; $x = (100 \times 3) / 11 = 25\%$ zurdos que utilizan el ojo derecho
100% → 6
x → 2; $x = (100 \times 2) / 6 = 33\%$ ambidextros/ambioculares
100% → 18
x → 5; $x = (100 \times 5) / 18 = 34\%$ diestros que utilizan el ojo derecho
Conclusiones: los ambidextros utilizan los dos ojos y en ellos no hay relación. Vemos los porcentajes de los diestros y de los zurdos: estos nos demuestran que no hay relación entre que una persona sea diestra o zurda y utilice más el ojo derecho o izquierdo respectivamente.

Dos alumnos han usado una sola columna en su argumentación (número 11 en la tabla 2.2.5.1.11). También creen suficiente poner un ejemplo para deducir que no existe dependencia, manifestando tanto una concepción localista como unidireccional de la asociación.

Sujeto 39: Aquellas personas que son ambioculares en su mayoría son diestros.

Por último, un alumno ha utilizado la distribución marginal de columna, (número 12 en la tabla 2.2.5.1.II). En su respuesta, no se decanta sobre el tipo de relación que existe entre las variables:

Sujeto 49: Hay una mayor cantidad de diestros que de zurdos o ambidextros.

Conclusiones del análisis cualitativo de estrategias en tablas 3x3

En general se observa menor variedad de estrategias en las tablas 3x3 que en los dos casos anteriores. La dificultad de esta tarea ha sido mucho mayor, teniendo en cuenta la proporción de faltas de respuesta, así como el menor número de estrategias correctas o parcialmente correctas.

- Sólo un alumno utilizó una estrategia correcta, calculando las frecuencias relativas condicionadas de las columnas. El modo de utilizar las filas o columnas de los otros alumnos es comparar las frecuencias absolutas de las mismas.
- Hay dos alumnos a los que les bastan las distribuciones marginales para dar respuesta al tipo de asociación entre variables.
- De los 16 alumnos que utilizan dos, tres o seis celdas, seis de ellos han utilizado la celda h de máxima frecuencia. En general, los alumnos que emplean sólo algunos casos para decidir sobre la asociación manifiestan la concepción localista de la misma, que se ha puesto de manifiesto en las conclusiones del análisis de estrategias en tablas 2x2.
- Se observa en algunos alumnos un fenómeno similar al que se daba en la tabla 2x2 al no admitir la relación inversa entre las variables, manifestando una concepción unidireccional de la asociación. Este fenómeno consiste en suponer que, en caso de dependencia, han de coincidir la lateralidad del ojo con la de la mano. Asimismo, en algunos casos se ha observado la concepción determinista de la asociación. Ambos tipos de concepciones han sido descritas en las conclusiones del análisis de estrategias en tablas 2x2.

2.2.5.2. Estrategias empleadas por los alumnos en los juicios de asociación en las nubes de puntos.

Al igual que en las tablas de contingencia, uno de los pasos previos al estudio de las concepciones ha sido obtener clasificación de las estrategias usadas por los alumnos en los juicios de asociación en nube de puntos. En la tarea consistente en realizar un juicio de asociación, a partir de una nube de puntos, la información sobre la covariación de las variables se presenta al alumno en forma de diagrama cartesiano de un conjunto de pares de valores (x_i , y_i). Cada par representa los valores observados de las variables X e Y en un mismo individuo. La información viene dada en un cuadro gráfico, aunque, a partir de la lectura de las escalas en ambos ejes el alumno puede realizar una traducción de la misma al cuadro numérico, en el sentido de Douady (1986).

Al ser las dos variables cuantitativas, pueden compararse los valores x_i e y_i de una misma unidad estadística para hallar una expresión algebraica exacta o aproximada que relacione las variables. No es necesario ahora, ni natural, el trabajo directo con las distribuciones condicionales de frecuencias relativas. Por el contrario, a partir de la representación gráfica puede determinarse visualmente la asociación entre las variables, teniendo en cuenta las dos características siguientes de la nube de puntos:

- la forma aproximada, esto es, la tendencia o lugar geométrico de los valores medios de la variable Y en función de la variable X. Puesto que la dependencia no es funcional, sino aleatoria, los puntos no están situados sobre una misma línea, pero, bajo ciertos criterios de optimización, puede hallarse una curva de regresión que aproxime la nube de puntos. Visualmente podía apreciarse la familia de funciones sobre la que es adecuado efectuar el ajuste: lineal o no, creciente o decreciente.
- la dispersión de los puntos en torno a la tendencia; esto es la intensidad de la asociación de la que se deduce también la bondad del ajuste.

En el anexo 2.2.1 se describen con detalle los procedimientos empleados por los alumnos en estos problemas. Se ha realizado un agrupamiento de ellos, atendiendo al grado de corrección de los conceptos matemáticos puestos en juego de manera implícita o explícita, esto es, de los teoremas en acto utilizados (Vergnaud, 1982), agrupándose en tres categorías de estrategias: correctas, parcialmente correctas e incorrectas. Tras esta agrupación las estrategias quedan:

Correctas [Procedimientos: 1, 2, 3, 4]

Parcialmente correctas [Procedimiento: 5]

Incorrectas [Procedimientos: 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]

Las estrategias correctas incluyen los siguientes procedimientos: efectuar una comparación global de los valores de las dos variables y emplear el crecimiento, decrecimiento o constancia de la nube de puntos, adecuadamente interpretados.

Se ha considerado parcialmente correcto el citar pares concretos de valores de las variables bien interpretados, puesto que aunque puedan llevar a un juicio correcto de asociación, en general, es preciso el estudio de todos

los puntos de la nube y no de algunos puntos particulares. De lo contrario se manifestaría de nuevo una concepción localista de la asociación.

Las estrategias incorrectas incluyen los siguientes procedimientos:

- Emplear puntos aislados que son interpretados incorrectamente.
- Argumentar que no existe dependencia puesto que la correspondencia entre los valores de la variable independiente y la dependiente no es una aplicación, esto es, manifestar explícitamente una concepción determinista de la asociación en este caso, incluso teniendo en cuenta que ahora la pregunta se realiza en términos de si hay relación entre las variables y no se usa la palabra "dependencia".
- Usar sus teorías previas sobre el contexto dado para argumentar sobre la asociación, en lugar de emplear los datos proporcionados, manifestando explícitamente el fenómeno de "correlación ilusoria".
- Argumentar la existencia de otras variables para indicar que no existe asociación o que no puede saberse si existe. Estos alumnos están interpretando la pregunta en términos de relación causa-efecto, manifestando una concepción causalista de la asociación y una concepción determinista de la causación, cercana a la sostenida por J. Stuart Mill ya que, para este autor, un requisito esencial para la causación es que se eliminen otras explicaciones causales del fenómeno.
- Esperar una uniformidad en la gráfica, esto es la ausencia de dispersión en la nube. De nuevo se manifiesta aquí, con un argumento diferente, la concepción determinista de la asociación.
- No admitir la concordancia, (Barbancho, 1973). Es un nuevo argumento que proviene de la concepción causalista de la asociación. Si una variable no puede causar un influjo en otra, no se admite la relación, aunque exista una correlación entre las mismas.
- Al no encontrar una regla que relacione las dos variables, declaran independencia. Vemos aquí una nueva tipología de concepciones que llamaremos "algebraica" consistente en exigir la existencia de una expresión algebraica que relacione las variables; sería un caso particular y más restringido de la concepción determinista sobre la asociación estadística.

Podemos observar el número menor de procedimientos diferentes en este caso, respecto a los obtenidos en las tablas de contingencia. Ello es debido a que, para este tipo de problema, no se cuenta con un apoyo previo de investigación referido al análisis de estrategias. Debe considerarse, en consecuencia, que este trabajo es un primer paso, necesariamente limitado, en esta línea de investigación. En el resto del trabajo consideraremos que cada uno de los procedimientos es indicativo de una estrategia diferenciada, por lo que los analizaremos desde este punto de vista.

Una vez efectuada la categorización se ha hecho un recuento de frecuencias del empleo de las estrategias en cada uno de los ítems I, J y K, obteniéndose la tabla 2.2.5.2.1.

En ella puede observarse que el ítem que menos se ha respondido ha sido el K y que también esta cuestión presenta menor número de estrategias correctas o parcialmente correctas. Como veremos posteriormente, la mayor dificultad se ha dado debido a que la correlación presente en estos datos es baja y choca fuertemente con las teorías previas de los alumnos lo que les induce a una concepción causalista de la asociación.

En el ítem J, hay un predominio en el empleo del decrecimiento de la nube de puntos, debido a que la fuerte correlación, así como el valor relativamente alto de la pendiente de la recta de regresión, hacen este decrecimiento muy acusado.

Tabla 2.2.5.2.1 Frecuencia y porcentaje de estrategias empleadas para los juicios de asociación en "nubes de puntos"

Estrategias	Item I	Item J	Item K
CORRECTAS			
Compara globalmente	8 (15.7)	1 (2.0)	7 (13.7)
Emplea crecimiento	1 (2.0)	1 (2.0)	1 (2.0)
Emplea decrecimiento		34 (66.7)	
Función constante	1 (2.0)		
PARCIALMENTE CORRECTA			
Interpreta pares	8 (15.7)	2 (3.9)	2 (3.9)
INCORRECTAS			
Pares mal interpret.	5 (9.8)		9 (17.6)
Aplicación biyectiva	1 (2.0)		
Teorías previas	5 (9.8)	4 (7.8)	2 (3.9)
Otras variables	8 (15.7)		
Uniformidad gráfica	2 (3.9)		
No causalidad			11 (21.6)
No existe regla	1 (2.0)		
Otras		2 (3.9)	1 (2.0)
Argumento confuso	2 (3.9)		
No contesta	9 (17.6)	7 (13.7)	18 (35.3)

Entre las estrategias erróneas se pueden señalar algunas que manifiestan la existencia de concepciones incorrectas sobre la dependencia aleatoria. Una de ellas es que la existencia de otras variables implique la no dependencia estadística, manifestada en el ítem I, hecho observado por Ruiz Higueras, (1991) en el estudio de la dependencia funcional. La otra es la confusión entre asociación estadística y relación causa-efecto de las variables manifestadas en 11 respuestas al ítem K; Hawkins y cols. (1992) señalan que es un error común atribuir una dependencia de tipo causal a dos variables cuando existe una alta correlación entre ellas. Estos alumnos no aceptan la asociación entre las variables debida a la concordancia.

Relación entre la estrategia empleada y el tipo de asociación detectado en el ítem I

Una vez categorizadas las estrategias y, para cada uno de los ítems, se ha realizado un estudio de la influencia del tipo de estrategia sobre la corrección del juicio de asociación obteniendo las tablas 2.2.5.2.2, 2.2.5.2.3 y 2.2.5.2.4. Como puede comprobarse, no hay una relación clara entre el tipo de estrategia y el juicio obtenido.

Para comprobar nuevamente las hipótesis expresadas en el caso de las tablas de contingencia se procedió a realizar un estudio caso a caso de los argumentos de los alumnos. A continuación presentamos un resumen de este tipo

de estudio para la nube de puntos.

Estrategias correctas y tipo de dependencia en el ítem I

La estrategia de comparación global ha consistido en estudiar cualitativamente la relación existente entre las coordenadas X e Y en los puntos del gráfico. Si se observa que en la mayor parte de los casos existe una relación entre estas coordenadas, se deduce la existencia de asociación y, en caso contrario, la independencia. Hemos denominado a esta estrategia "comparación global" porque no se estudian los casos uno a uno, sino que se da un juicio para la globalidad de los datos.

Ocho alumnos han comparado globalmente las dos variables (número 1 en la tabla 2.2.5.2.2), de los cuales cinco han considerado un tipo de dependencia correcto, como en el caso siguiente:

Tabla 2.2.5.2.2 Clasificación de respuestas al ítem I por tipo de asociación detectado y estrategia empleada.

Estrategia	Tipo de dependencia				Total
	No contesta	directa	inversa	Independ. (correcto)	
CORRECTAS					
1 Compara global		1	2	5	8(15.7)
2 Crecimiento		1			1(2.0)
4 Función constante				1	1(2.0)
PARCIAL. CORREC.					
5 Interpreta pares				8	8(15.7)
INCORRECTAS					
6 Pares mal interp.		2	3		5(9.8)
7 Aplicación				1	1(2.0)
8 Teorías previas		1	2	2	5(9.8)
9 Otras variables			2	6	8(15.7)
10 Uniformidad gr.			1	1	2(3.9)
11 No existe regla				1	1(2.0)
12 Argumento confuso			1	1	2(3.9)
0 No contesta	6		2	1	9(17.6)
Total	6 11.8	5 9.8	13 25.5	27 52.9	51 100.0

Sujeto 10: El lugar ocupado no tiene nada que ver con el número de partidos empatados, ya que hay equipos situados en las primeras posiciones con menos número de partidos empatados que otros equipos que están situados en posiciones posteriores a el y equipos con mayor número de empates situados en las últimas posiciones

Otros dos estudiantes comparando globalmente los valores de las dos variables, han llegado a un tipo de dependencia incorrecto (dependencia inversa). Ello ha sido debido a que, aunque la comparación ha sido global, al final deciden utilizar unos pocos casos particulares, manifestando tanto una concepción localista como unidireccional de la asociación.

Sujeto 31: Porque los últimos en la clasificación final son los que tienen menos número de partidos empatados.

Algo parecido ocurre en el alumno restante, aunque este se decanta por la relación directa:

Sujeto 51: La mayoría de los equipos en peor lugar, empataron; aunque el último tenga menos partidos es una proporción muy pequeña. El equipo que más partidos empató está más o menos en el centro, pero esto al igual que lo del último no es una proporción baja.

Al presentarse los datos mediante un cuadro gráfico, el alumno puede emplear las propiedades de la representación gráfica resultante para emitir su juicio. Una de estas propiedades es la monotonía (crecimiento o decrecimiento observado en la nube de puntos). Cuando el alumno emplea esta estrategia, utiliza implícitamente la propiedad de que la dependencia de una variable Y respecto de otra X implica la variabilidad de la media condicional $E(Y|X)$ en función de X. Está, además, actuando en el nivel de comprensión de los gráficos de "lectura entre los datos", (Curcio, 1989), ya que se requiere una interpretación y no simplemente una lectura del gráfico.

Un alumno ha utilizado el crecimiento de la nube de puntos (número 2 en la tabla 2.2.5.2.2), para decidir el tipo de relación existente entre las variables. Declara que la relación existente entre las variables es directa, respuesta que es errónea. Este es un caso en el que con una estrategia correcta se llega a una respuesta no correcta, debido a la mala interpretación de la nube de puntos y no al uso de la estrategia en sí. La respuesta ha sido:

Sujeto 37: Cuantos mas partidos empatados según el cuadro, mayor número en la clasificación.

Un alumno ha utilizado el crecimiento nulo en la relación (número 4 en la tabla 2.2.5.2.2). La estrategia es correcta y como, en este caso, no existe dependencia entre las variables, ha llegado a una respuesta correcta:

Sujeto 04: Porque veo una estabilidad en el crecimiento y decrecimiento en casi toda la parte central (3 - 17) del eje x

Estrategias parcialmente correctas y tipo de dependencia en el ítem I

Algunos alumnos basan su juicio de asociación en el análisis de la existencia o no existencia de relación numérica entre las coordenadas X e Y para un subconjunto de puntos concretos. La estrategia no puede ser considerada incorrecta si la interpretación que se hace es correcta, en el sentido de

que los puntos elegidos confirman o falsan (según los casos) la existencia de asociación. Sin embargo, esta estrategia no es en general correcta, porque existe la posibilidad de que algunos de los puntos excluidos tengan una influencia fuerte sobre el tipo de asociación. Aquí se manifiesta un concepción localista de la asociación.

Ocho estudiantes citan pares concretos bien interpretados (número 5 en la tabla 2.2.5.2.2) para decidir el tipo de relación existente entre las variables, llegando a una solución correcta, como en el caso siguiente:

Sujeto 24: Ya que si nos fijamos en la tabla observamos que el puesto que ocupa el primero de la liga, sólo tiene 6 partidos empatados, sin embargo, el que ocupa el 17, tiene 13 partidos empatados. Al igual, que, el que ocupa el 14 puesto en la liga, queda como ganador en la clasificación de partidos empatados, ya que alcanza 14 partidos.

Estrategias incorrectas y tipo de dependencia en el ítem I

La primera estrategia de este tipo (número 6 en la tabla 2.2.5.2.2) es el mismo caso de la estrategia anterior, pero ahora se hace una interpretación incorrecta de los puntos. Esta estrategia ha sido empleada en cinco casos que llegan a respuestas erróneas. Tres de ellos afirman que la relación entre las variables es inversa, como el siguiente:

Sujeto 46: Inversa, porque el equipo que ocupa el lugar número 20 es el que tiene menor número de partidos empatados.

Dos alumnos creen que la dependencia es directa, como el caso siguiente:

Sujeto 47: Porque el que más partidos empató es el que ocupa el mayor puesto en la liga. El número 11 empató 16 partidos (el mayor).

Un alumno espera que la relación entre las variables sea una aplicación biyectiva (número 6 en la tabla 2.2.5.2.2), es decir, manifiesta una concepción de tipo funcional o determinista sobre la dependencia entre variables, proponiendo un ejemplo para demostrar que no lo es y concluyendo que no existe relación entre las variables. En concreto, la respuesta ha sido:

Sujeto 9: Porque por ejemplo hay un grupo que tiene 5 partidos empatados y está en 16 y 20 posición cada uno y si dependiera de alguna forma los partidos empatados estaría en igual posición.

En las tablas de contingencia se hizo una diferenciación entre la variable independiente y la dependiente, al plantear al alumno la pregunta sobre la asociación usando el término "dependencia". Ello hace que estas preguntas pudieran ser interpretadas en términos de relación causa/efecto, jugando la variable independiente el papel de causa.

En este caso, la pregunta sobre la asociación se hace en términos de "relación". En este término no se diferencia el papel de las variables. Como hemos discutido en el capítulo I, desde el punto de vista estadístico, en la correlación, las variables desempeñan un papel simétrico, ya que el coeficiente de correlación no varía si se intercambia el papel de las variables dependiente e independiente. En el razonamiento causal, sin embargo, el papel de las variables es asimétrico, (Pozo, 1987).

A pesar de ello, algunos estudiantes han hecho una interpretación causal

de la pregunta. Cinco estudiantes han basado su argumentación en las teorías previas que poseen y en los conocimientos sobre el contexto que han adquirido a través de su propia experiencia, no empleando los datos. De ellos dos dan un tipo de relación correcto (independencia), dos dan dependencia inversa y uno directa (obviamente incorrectas):

Sujeto 2: Porque lo que importa para clasificarse es el número de puntos no el número de veces que empatan y no tiene nada que ver.

(No hay relación)

Sujeto 16: Porque el lugar depende de los puntos conseguidos a lo largo de toda la liga, quien más puntos consiga, ocupará uno de los primeros puestos, puesto lo que tiene es que ganar los partidos y habrá empatados pocos, puesto que ocupa uno de los primeros lugares.

(Relación inversa)

Sujeto 8: Porque si un equipo durante toda la temporada empata los partidos ocupará una posición superior a los que no llevan su temporada así. Lógicamente los que además de empatar partidos ganen sacarán más puntos que los equipos que siempre vayan empatados. Y también los equipos que por el contrario además de empatar, pierdan partidos pierden puntos y por lo tanto su puesto en la clasificación será más bajo.

(Relación directa)

Jennings y cols. (1982) estudian la percepción de la asociación y correlación entre variables, tanto en tablas de datos bivariantes, como en nube de puntos. Encontraron que las discrepancias entre las impresiones subjetivas y las correlaciones numéricas son muchas veces debidas a las expectativas previas. La conclusión obtenida sugiere que los sujetos necesitan teorías que los guíen. De otro modo, es difícil que detecten correlaciones, a menos que estas se encuentren próximas a la unidad. En nuestro caso vemos también que la existencia de teorías previas a favor de la existencia de correlación produce el fenómeno de correlación ilusoria (Nisbett y Ross, 1980).

Ocho alumnos han argumentado la influencia de otras variables, (número 9 en la tabla 2.2.5.2.2), para dar su respuesta. También en este caso se están utilizando las teorías previas que se tienen sobre el contexto donde se propone el problema. Tanto este caso como el anterior corresponde a una concepción causalista de la asociación. De los ocho alumnos que emplean esta estrategia, seis dan un tipo de relación correcto entre las variables (independencia), como el siguiente:

Sujeto 22: No hay relación porque la tabla debería hacerse también con los partidos ganados y perdidos de cada equipo. Un ejemplo, el número 4 de la clasificación empató 12 partidos, sin embargo, el número 20 con 5 empates está el último.

Otros dos alumnos dan una relación inversa; han respondido de la siguiente manera:

Sujeto 26: Porque los partidos empatados dan menos puntos que los ganados.

Dos estudiantes utilizan la estrategia que hemos denominado "espera uniformidad en la gráfica", es decir, creen que, para que exista dependencia, los puntos deben agruparse alrededor de una línea imaginaria de trazado uniforme, (número 10 en la tabla 2.2.5.2.2), manifestando una concepción

determinista de la asociación. De ellos, uno ha dado ausencia de relación entre las variables (respuesta correcta), debido a que exige que la relación directa entre las variables sea una aplicación biyectiva y además lineal.

Sujeto 40: Porque para que fuese directa el gráfico tendría que tener 1 línea recta.

Un alumno ha argumentado que no existe una regla que relate las variables, (número 11 en la tabla 2.2.5.2.2). Necesita una regla, una fórmula para encontrar dependencia entre dos variables, en otro caso, no existe dependencia, manifestando una concepción algebraica de la asociación. Su respuesta ha sido:

Sujeto 30: Es un caso más o menos natural, no depende de los empates el lugar de la clasificación. No se sigue una regla que diga que haya relación.

Por último, dos alumnos han dado un argumento confuso.

Relación entre la estrategia empleada y el tipo de asociación detectado en el ítem J

Estrategias correctas y tipo de dependencia en el ítem J

Un alumno ha comparado globalmente las dos variables (número 1 en la tabla 2.2.5.2.3). Su respuesta al tipo de asociación entre las variables ha sido correcta, aunque ha expresado lo contrario de lo que parece ser quería expresar, habla de "*la mayoría de la natalidad apenas consume proteínas ...*", cuando parece ser que quiere decir, "*la mayoría de los que consumen tienen poca tasa de natalidad*". En concreto ha escrito:

Sujeto 47: La mayoría de la natalidad a penas consume proteínas animales, sino que hay un tanto por ciento pequeño que consume bastantes proteínas animales.

Un alumno ha utilizado el crecimiento de la nube de puntos (número 2 en la tabla 2.2.5.2.3). Aunque la estrategia es correcta, en este caso da una respuesta falsa, porque la forma de la nube es decreciente y este alumno la toma como creciente:

Sujeto 41: Cuando más proteínas comen mayor es la tasa de natalidad.

Treinta y cuatro alumnos utilizan el decrecimiento de la gráfica (número 3 en la tabla 2.2.5.2.3). De ellos, 33 dan un tipo de relación correcta (asociación inversa), como el caso siguiente:

Sujeto 18: Porque conforme va aumentando el consumo diario de proteínas animales desciende poco a poco la tasa de natalidad. La gráfica va de forma descendente en lugar de ascender.

El que ha supuesto la independencia interpreta el decrecimiento de la nube como ausencia de asociación, manifestando la concepción unidireccional de la asociación.

Tabla 2.2.5.2.3 Clasificación de respuestas al ítem J por tipo de asociación detectado y estrategia empleada.

Estrategia	Tipo de dependencia				Total
	No contesta	directa	inversa (correc.)	Independencia	
CORRECTAS					
1 Compara globalmen			1		1(2.0)
2 Usa el crecimiento		1			1(2.0)
3 Usa decrecimiento			33	1	34(66.7)
PARCIAL. CORREC.					
5 Interpreta pares			2		2(3.9)
INCORRECTAS					
8 Teorías previas		2	2		4(7.8)
14 Otras			1	1	2(3.9)
0 No contesta	6		1		7(15.7)
Total	6	3	40	2	51
	11.8	5.8	78.5	3.9	100.0

Estrategias parcialmente correctas y tipo de dependencia en el ítem J

Dos alumnos han utilizado casos particulares bien interpretados (número 5 de la tabla 2.2.5.2.3) para decidir la asociación entre las variables. Por lo que su respuesta es correcta (dependencia inversa), manifestando una concepción localista de la asociación.

Sujeto 22: Esta relación es inversa porque los que consumen 5 gr de proteínas al día hay un 46% de natalidad y los que consumen 20 gr de proteínas hay un 21% de natalidad, o sea, la gráfica va en sentido opuesto, hacia abajo.

Estrategias incorrectas y tipo de dependencia en el ítem J

Cuatro alumnos han expuesto teorías previas (número 8 en la tabla 2.2.5.2.3), para decidir sobre el tipo de asociación existente entre las variables. La respuesta será acertada según la creencia previa que se exponga. De estos cuatro alumnos, dos dan un tipo de asociación incorrecto y otros dos correcto. En sus respuestas se aprecia también la idea de causa y efecto.

Sujeto 11: Porque en un país donde exista una natalidad menor lógicamente todas las posibilidades de alimentación serán mayores y mejores.

Sujeto 49: Están mejor alimentados y por lo tanto la natalidad es mayor, por-

que tienen más alimento que otros que no tienen nada. Se ve como en el gráfico a mayor consumo de proteínas el índice de natalidad es mayor, que el que consume menos proteínas.

De los dos alumnos que han sido clasificados en "Otras" en la tabla 2.2.5.2.3, uno ha dado el tipo de respuesta correcta por exclusión de la asociación directa.

Sujeto 25: Directa no ya que (63,15). La inversa ya que hay 63% de consumo y sólo un 15% de natalidad.

El otro da una respuesta incorrecta, indicando que no existe relación entre las variables. Su respuesta ha sido:

Sujeto 37: Por que no tiene relación alguna esta cuestión.

Relación entre estrategia empleada y tipo de asociación detectada en el ítem K

Estrategias correctas y tipo de dependencia en el ítem K

Siete alumnos han comparado globalmente las dos variables, (número 1 en la tabla 2.2.5.2.4), de los que 2 han dado un tipo de asociación correcto, dependencia directa, y 5 incorrecta: 1 inversa y 4 independencia. Ello es motivado, en parte, por la intensidad de la asociación que no es muy grande (el coeficiente de correlación de Pearson es de 0.55).

Los dos alumnos que han respondido un tipo de dependencia directa han detectado valores similares en ambas variables, admitiendo las oscilaciones de la dependencia aleatoria:

Sujeto 11: Es directa porque la puntuación que daba un juez y otro es muy similar, no quiero decir igual pero sí bastante parecida. Por lo tanto, podemos decir que el puesto asignado por cada juez a las concursantes tiene bastante relación.

El alumno que ha dado un tipo de dependencia inversa tiene una concepción determinista de la asociación. Las fluctuaciones en los puestos asignadas por los dos jueces, le parecen tan excesivas que le llevan a dar una asociación inversa. A continuación se transcribe su respuesta:

Sujeto 33: Porque las puntuaciones por lo general se contradicen. A la concursante que un juez le ha dado una puntuación determinada, el otro juez le ha dado otro completamente distinta, no guardan relación las puntuaciones.

Los cuatro estudiantes que creen en la ausencia de relación, quizás debido a que la asociación no es muy intensa, no admiten las oscilaciones en las puntuaciones de ambos jueces, por otra parte, características de la dependencia aleatoria, manifestando un concepción determinista de la asociación, como el siguiente ejemplo:

Sujeto 51: En algunas de las concursantes, sobre todo en la de los primeros puestos, aunque no han coincidido son más o menos parecidos; pero los puestos intermedios y en los últimos cada uno ha dado una puntuación distinta, donde no hay relación entre unas y otras.

Tabla 2.2.5.2.4 Clasificación de respuestas al ítem K por tipo de asociación detectado y estrategia empleada.

Estrategia	Tipo de dependencia				Total
	No contesta	directa (correc.)	inversa	Independencia	
CORRECTAS					
1 Compara globalmente		2	1	4	7(13.7)
2 Usa el crecimiento		1			1(2.0)
PARCIAL. CORREC.					
5 Interpreta pares		2			2(3,9)
INCORRECTAS					
6 Pares mal interp.			3	6	9(17.6)
8 Teorías previas			1	1	2(3.9)
13 No causalidad				11	11(21.6)
14 Otras				1	1(2.0)
0 No contesta	14	2		2	18(35.3)
Total	14 27.5	7 13.7	5 9.8	25 49.0	51 100.0

Un alumno ha utilizado el crecimiento de la nube de puntos, obviamente su respuesta al tipo de asociación ha sido correcta.

Sujeto 44: Existe una relación proporcional, en la mayoría de las veces los jueces coinciden al dar sus veredictos. Cuando el eje horizontal (que es el juicio emitido por el juez y es grande) el eje vertical (juicio emitido por el juez X también lo es)

Estrategias parcialmente correctas y tipo de dependencia en el ítem K

Dos alumnos han utilizado pares concretos de valores y dan un tipo de asociación correcta (número 5 en la tabla 2.2.5.2.4), para realizar su juicio sobre la asociación de las variables.

Sujeto 43: Porque por ejemplo: A la concursante que el juez y le ha dado el primer puesto también el juez X lo ha hecho y por ejemplo: a otras concursantes que el juez y le ha dado un puesto alejado del primero también el juez X lo ha hecho.

Estrategias incorrectas y tipo de dependencia en el ítem K

Nueve alumnos citan pares concretos de puntos y detectan un tipo de asociación errónea, (número 6 en la tabla 2.2.5.2.4). De ellos 3 coinciden en que la relación es inversa y 6 creen que existe independencia. Los tres que dan un tipo de asociación inversa, es debido al hecho de no existir coincidencia entre el puesto asignado por ambos jueces o a exagerar la disparidad de criterio, manifestando una concepción determinista de la asociación:

Sujeto 3: Considero que es más bien inversa aunque hay algunos casos en que ambos jueces parecen coincidir. Es inversa porque hay una diferencia bastante marcada entre el puesto que le ha concedido el juez X a una chica y el que le ha concedido el juez Y a esa misma chica.

Por ejemplo: Juez X: 7 8 18 20
 Juez Y: 1 2 5 14

Los que argumentan la ausencia de relación lo hacen de modo similar al siguiente:

Sujeto 50: Porque por ejemplo el juez Y a una concursante le ha dado el puesto 20 y el juez X el 11 aunque no son iguales no hay disparidad tampoco.

Dos alumnos basan su juicio de asociación en sus teorías previas, (número 8 en la tabla 2.2.5.2.4) sobre el contexto, manifestando una concepción causalista de la asociación. Uno da un tipo de asociación inversa:

Sujeto 8: Porque las concursantes para un juez y para otro son, en su gran mayoría, de belleza diferente. Las puntuaciones dadas por un juez y por otro a una concursante son muy dispares en una gran número.

y el otro ausencia de asociación:

Sujeto 16: Cada uno le ha asignado el puesto que cree que se merece.

Once alumnos manifiestan la independencia de las dos variables (número 13 en la tabla 2.2.5.2.4), lo que equivale a una concepción causalista de la asociación. No consideran lo que Barbancho (1973) llama concordancia (precisamente este ítem se propuso como prototipo de este modalidad de asociación). La estrategia manifestada por los alumnos en este ítem está influenciada también por sus teorías previas sobre el contexto en el que se plantea el problema:

Sujeto 23: Observando la tabla yo pienso que no existe ninguna relación entre la puntuación dada por cada juez, cada uno ha tenido distinto gusto, tal vez han coincidido en alguno de ellos pero no existe relación entre los dos al igual que tampoco hay contradicción, cada uno de ellos tiene distinta opinión.

Por último, un alumno se ha clasificado en "otras" (número 14 en la tabla 2.2.5.2.4). Su respuesta ha sido la siguiente:

Sujeto 21: No veo sentido al diagrama.

Conclusiones sobre el análisis cualitativo de estrategias en las nubes de puntos

Hemos visto, en el análisis efectuado, que el empleo de una estrategia

correcta o incorrecta, en un juicio de asociación en nube de puntos, no se corresponde con la corrección sobre el juicio de asociación. A continuación señalamos las principales causas que se han observado para esta falta de correspondencia y su relación con las concepciones descritas en las conclusiones sobre el análisis de estrategias en las tablas 2x2

Una estrategia correcta o parcialmente correcta lleva a un juicio de asociación incorrecto por alguno de los siguientes motivos:

- Interpretación incorrecta del crecimiento o decrecimiento de la nube de puntos, especialmente cuando la forma de la misma es no lineal. Estos estudiantes han presentado dificultades en lo que Curcio (1989) llama nivel de "*lectura entre los datos*".
- A veces, aunque se compara globalmente la gráfica, el juicio se basa en ejemplos concretos de puntos que no cumplen el tipo de relación esperado. Ello supone una concepción determinista de la asociación, por la que no se admite la dispersión de la nube de puntos.

Por otro lado, las estrategias incorrectas han ocasionado un juicio correcto en los siguientes casos:

- Selección de puntos mal interpretados que favorecen el tipo de asociación. Los alumnos, sin embargo, manifiestan una concepción localista sobre la asociación estadística que se produce, no como consecuencia de la existencia de una relación en los valores de la variable en casos aislados, sino en la totalidad o una gran parte de los casos.
- Uso de teorías previas. Cuando se hace una interpretación causal de la tarea, a pesar de que la pregunta planteada en términos simétricos, el alumno no asigna un papel asimétrico a las variables.
- Cuando la asociación presente entre dos variables no puede ser interpretada de manera adecuada a una relación de causalidad, de dependencia directa, como se puede apreciar en el ítem K, algunos alumnos lo argumentan para decidir la ausencia de asociación, es decir, no suelen aceptar lo que Barbancho (1973) llama concordancia. Tanto en este caso como en el anterior se manifiesta una concepción causalista de la asociación.

Además se ha observado las siguientes concepciones incorrectas en casos en que coinciden la estrategia con el tipo de juicio dado:

- Creencia en que la existencia de asociación implica una correspondencia biyectiva entre los valores de la variable. Ello supone una concepción funcional o determinista de la dependencia entre variables.
- La existencia de otras variables que influyan sobre la dependiente es vista como falta de asociación entre las variables. Se manifiesta aquí tanto una concepción causalista de la asociación, como una concepción determinista sobre la relación causa - efecto y se aplica un razonamiento similar al método de variación concomitante de Stuart Mill.
- Existe la creencia de que es necesaria "una regla" para la existencia de la asociación, es decir, se manifiesta una concepción algebraica de la misma.

Estas tres últimas concepciones también fueron encontradas por Ruiz Higueras (1991) en su estudio sobre la dependencia funcional, aunque en porcentajes ligeramente superiores, lo que es natural, ya que la muestra considerada por ella fue de alumnos de BUP y COU.

2.2.5.3. Estrategias empleadas por los alumnos en los juicios sobre asociación en la comparación de muestras

Lo mismo que ha ocurrido con la nube de puntos, tampoco en este caso tenemos resultados de otras investigaciones sobre comparación de muestras y por el mismo motivo, cada estrategia se corresponde, en general, con un único procedimiento. También en estos ítems se procedió a una categorización de los mismos que se presentan en el anexo 2.2.1. Puesto que, en este caso, cada estrategia corresponde a un sólo procedimiento de los descritos en este anexo, utilizaremos el término estrategia para referirnos a ellos en el resto de este trabajo. En un primer recuento de frecuencias se obtuvo la tabla 2.2.5.3.1 para los ítems L y M. En esta tabla se han clasificado las estrategias atendiendo al grado de corrección que contienen respecto al contenido matemático puesto en juego, bien de manera explícita o implícita.

La emisión de un juicio de asociación de una variable cuantitativa respecto a una dicotómica (comparación de muestras) es una tarea presentada en el cuadro numérico (Douady, 1986). El alumno puede trabajar con los valores numéricos de la variable dependiente, aunque no posee ahora una representación gráfica que le permita apreciar visualmente la asociación. Puede también trabajar con distribuciones de frecuencias condicionales, como en una tabla de contingencia, pero ello requerirá la integración previa de los datos, ya que los valores se presentan individualmente y no formando una tabla de frecuencias.

Además, al ser la variable dependiente cuantitativa no tiene porqué restringirse a la comparación de las frecuencias de las distribuciones condicionales, sino que puede comparar diversos estadísticos de estas distribuciones, como las medias o recorridos.

Las estrategias empleadas, descritas con detalle, como ha quedado dicho más arriba, en el anexo 2.2.1, se han agrupado de acuerdo con su contenido matemático puesto de manifiesto explícita o implícitamente y son las siguientes:

Estrategias correctas

1. *Compara la media de las dos muestras.*
2. *Compara la suma de los valores de cada muestra.*
3. *Compara los valores correspondientes en ambas muestras señalando proporciones o porcentajes.*
4. *Halla la diferencia de valores correspondientes en ambas muestras indicando proporciones o porcentajes.*
5. *Compara las distribuciones de frecuencias.*

Estrategias parcialmente correctas

6. *Compara los valores correspondientes en ambas muestras.*
7. *Compara los valores correspondientes en ambas muestras, señalando casos excepcionales.*
8. *Halla la diferencia de valores correspondientes en ambas muestras.*

9. Halla la diferencia de valores correspondientes en ambas muestras, mostrando casos excepcionales.
10. Comparación global de las dos muestras.

Estrategias incorrectas.

11. Halla diferencias de valores correspondientes en ambas muestras, sólo en algunos casos.
12. Espera valores similares en cada muestra.
13. Otras.

Se puede observar en la tabla 2.2.5.3.1 que 14 alumnos (27.5 por ciento) no han contestado al ítem L y 20 (39.2 por ciento) al M. Doce alumnos (el 23.5 por ciento del total y el 32.4 de los que han contestado) han usado una estrategia correcta en el ítem L y 18 (31.4 por ciento del total y 51.6 por ciento de los que han respondido) en el ítem M. 23 alumnos (el 45 por ciento del total y el 62.1 de los que han contestado) han utilizado una estrategia parcialmente correcta en el ítem L, mientras que en el ítem M lo han hecho 11 estudiantes (el 21.6 por ciento del total y el 35.5 por ciento de los que han respondido). Dos alumnos (3.9 por ciento del total de alumnos y el 5.4 por ciento de los que han contestado) han empleado una estrategia incorrecta, mientras que en el ítem M lo han hecho el 7.8% del total y el 12.9 de los que han respondido.

Tabla 2.2.5.3.1 Frecuencia y porcentaje de estrategias empleadas por los alumnos en la comparación de muestras

Estrategias	Item L	Item M
CORRECTAS		
1 Compara las medias		1 (2.0)
2 Compara los totales	2 (3.9)	9 (17.6)
3 Compara porcentajes	8 (15.7)	
4 Halla dif. y compara %	2 (3.9)	
5 Compara distribuciones		6 (11.8)
PARCIALMENTE CORRECTAS		
6 Compara caso a caso	10 (19.6)	
7 Señala casos de excepción	11 (21.6)	1 (2.0)
8 Halla la diferencia	1 (2.0)	
9 Difer. y casos excepción	1 (2.0)	1 (2.0)
10 Comparación global		9 (17.6)
INCORRECTAS		
11 Halla dif. algunos casos	1 (2.0)	
12 Espera valores simil.	1 (2.0)	2 (3.9)
13 Otros		2 (3.9)
0 No contesta	14 (27.5)	20 (39.2)

El menor número de respuestas de este último ítem puede ser debido al cansancio de los alumnos, aunque habíamos hecho unas pruebas previas del tiempo necesario para completar el cuestionario. En conclusión, se decidió aumentar este tiempo en la muestra de comparación. Es notable la diferencia de estrategias en uno y otro ítem, apreciándose claramente que los alumnos emplean con más frecuencia unas estrategias en la comparación de muestras

relacionadas (ítem L) y otras en la comparación de muestras independientes (ítem M).

Ahora bien, si cruzamos la respuesta a si hay o no dependencia entre las dos variables y el tipo de estrategia elegida en el ítem L obtenemos la tabla 2.2.5.3.2, donde se puede observar que tampoco en este caso una estrategia correcta o parcialmente correcta implica una respuesta correcta a la existencia de dependencia, hecho que pasamos a estudiar:

De los catorce alumnos que no han especificado el procedimiento empleado, (número 0 en la tabla 2.2.5.3.2), uno ha respondido que existe dependencia en la presión sanguínea antes y después del tratamiento.

Relación entre la estrategia empleada y el tipo de asociación en el ítem L

Estrategias correctas y tipo de dependencia en el ítem L

Dos alumnos han comparado la suma de los valores de la variable en cada una de las muestras (número 2 en la tabla 2.2.5.3.2), contestando de manera correcta sobre la dependencia de la presión sanguínea del tiempo antes y después del tratamiento. La respuesta de uno de ellos ha sido:

Sujeto 18: Antes del tratamiento la presión sanguínea es menor y se puede averiguar con el mero hecho de observar esa tabla. Si sumamos las presiones sanguíneas antes del tratamiento, observamos que es mucho menor que la suma de las presiones sanguíneas del tratamiento es mayor.

De este modo está implícitamente empleada la propiedad de que la dependencia de una variable numérica respecto a una variable cualitativa implicará la variación de los estadísticos de la distribución de la variable, lo que constituye un teorema en acto, (Vergnaud, 1982), así como otras propiedades empleadas implícitamente por los alumnos, que se comentarán en el resto de la sección.

Ocho alumnos han comparado pares de valores correspondientes señalando proporciones o porcentajes de casos en los que aumenta o disminuye la presión, (número 3 en la tabla 2.2.5.3.2), dando una respuesta correcta a la dependencia de la presión sanguínea del tratamiento. En este caso, ya no se reduce la distribución de frecuencias a un estadístico, sino que se está implícitamente realizando una agrupación de las frecuencias de las diferencias entre los valores de la variable en dos categorías. Si no hubiese dependencia, estas dos categorías deberían tener una frecuencia similar. Este es el fundamento de los métodos no paramétricos basados en la comparación de signos o de rachas (Siegel, 1986). El razonamiento que realizan los alumnos es que la proporción de mujeres a las que les ha subido el nivel de azúcar es muy grande. Sólo se ha utilizado en el ítem L, ya que en el ítem M no tendría sentido. Veamos una respuesta:

Sujeto 36: De las 10 señoras que han realizado el tratamiento a todas les ha variado la presión sanguínea, a dos de ellas (2/10) les ha bajado y a 8 de ellas (8/10) les ha subido. Para hacer las proporciones, he sumado el número de señoras = N = 10 ; luego he utilizado la fórmula (casos favorables/casos posibles).

Este alumno intuye que la solución del problema se relaciona con la

probabilidad y utiliza la regla de Laplace, que recuerda.

Dos alumnos han hallado la diferencia entre pares de valores correspondientes en ambas muestras, indicando proporciones o porcentajes de casos en que tal diferencia es positiva o negativa, (número 4 en la tabla 2.2.5.3.2). Estos alumnos, además de comparar, hallan la diferencia entre los pares de valores. Sólo se ha utilizado en el ítem L, ya que en el M no tendría sentido. Veamos una respuesta.

Tabla 2.2.5.3.2 Clasificación de respuestas en el ítem L por tipo de asociación detectada y estrategia empleada.

Estrategias	Tipo de asociación			Total
	No contesta	Dependencia (correcto)	Independencia	
CORRECTAS				
2 Compara los totales		2		2 (3.9)
3 Compara porcentajes		8		8 (15.7)
4 Halla dif. y compara %		2		2 (3.9)
PARCIAL. CORRECTA				
6 Compara caso a caso		8	2	10 (19.6)
7 Señala casos de excepción		11		11 (21.6)
8 Halla la diferencia		1		1 (2.0)
9 Difer. y casos excepción		1		1 (2.0)
INCORRECTAS				
11 Halla dif. algunos casos		1		1 (2.0)
12 Espera valores similares			1	1 (2.0)
0 No contesta	13	1		14 (27.5)
Total	13	35	3	51
	25.5	68.6	5.9	100.0

Sujeto 39: Sí porque en su mayoría aquellas mujeres que han tomado tratamiento, su presión sanguínea ha aumentado. Es decir hay una proporción del 98%. Tan solo el 2%, después de haber tomado el tratamiento le ha descendido su presión sanguínea. He ido restando la presión de cada mujer después del tratamiento con la anterior para ver si ha aumentado o descendido. Después he hecho una proporción: si en 10 mujeres 9 aumentan su presión con el tratamiento, en 100 pues habrá x, ese x es el que me da el porcentaje.

Estrategias parcialmente correctas y tipo de dependencia en el ítem L

Diez alumnos comparan pares de valores correspondientes mostrando casos excepcionales (número 6 en la tabla 2.2.5.3.2). De ellos, 8 han declarado que la presión sanguínea depende de haber tomado el tratamiento y dos que no. Los argumentos de los primeros son similares al siguiente:

Sujeto 26: Porque la presión sanguínea ha aumentado en casi todas las mujeres después del tratamiento.

Los otros dos alumnos han respondido que no depende la presión sanguínea de haber tomado el tratamiento, bien porque la variación existente les parezca escasa o porque esperan que la variación tenga el mismo signo en todos los casos; este último argumento muestra una concepción funcional o determinista de la dependencia.

Sujeto 50: Porque después del tratamiento la presión sanguínea ha subido o bajado muy poco. Los números se han usado pues comparando los números antes y después del tratamiento.

(Le parece escasa la oscilación de la presión sanguínea).

Sujeto 30: Los he comparado y he comprobado que después del tratamiento en algunas mujeres disminuye, pero que en otras aumenta, dependiendo de cada mujer.

(Espera que todos aumenten o todos disminuyan).

Once alumnos han comparado pares de valores correspondientes en ambas muestras señalando casos excepcionales sin haber llegado a comparar porcentajes o proporciones, (número 7 en la tabla 2.2.5.3.2). La mayoría han comparado los valores y argumentando los dos casos de excepción, en que la presión sanguínea aumenta. Todos han dado una respuesta correcta a la dependencia. Veamos una respuesta:

Sujeto 44: Pues en solamente dos datos baja la presión en todas las demás aumenta. Unicamente se ha utilizado la tabla en sentido vertical comprobando a la cifra de abajo es mayor o menor que la de arriba.

Un alumno ha hallado la diferencia de los valores correspondientes en ambas muestras, (número 8 en la tabla 2.2.5.3.2). Ha dado una respuesta correcta a la dependencia de la presión sanguínea del tratamiento, atribuyendo la misma a los incrementos en la presión sanguínea. No detecta los casos en que disminuye.

Sujeto 21: Porque ha aumentado desde 1 puntos hasta 13 indistintamente.

Un alumno ha hallado la diferencia en pares correspondientes de ambas muestras, resaltando los casos excepcionales, (número 9 en la tabla 2.2.5.3.2). Ha dado una respuesta correcta a la dependencia. Esta estrategia es similar a la anterior, pero en lugar de comparar el alumno declara haber restado. En concreto su respuesta ha sido:

Sujeto 5: He cogido los números de antes del tratamiento y los números de después del tratamiento y he visto la diferencia, han subido después del tratamiento excepto 2.

Estrategias incorrectas y tipo de dependencia en el ítem L

Un alumno ha hallado la diferencia entre pares correspondientes de ambas muestras, sólo de algunos casos (número 11 en la tabla 2.2.5.3.2), manifestando una concepción localista de la asociación. El alumno ha dado su juicio (correcto) sobre la dependencia de la presión sanguínea del tratamiento. En concreto su respuesta ha sido:

Sujeto 9: Porque después de haber tomado el tratamiento la presión sanguínea ha aumentado en 2, 3 o como mucho en 5 unidades.

Un alumno espera que los valores de cada muestra sean similares (número 12 en la tabla 2.2.5.3.2) y, por tanto, que a todas las señoritas les aumente o disminuya de forma similar la presión sanguínea. Como no es así, concluye que la presión sanguínea no depende del tratamiento (respuesta incorrecta), debido a una concepción determinista de la asociación:

Sujeto 51: Viendo la tabla podemos ver que hay mucha variedad; se puede ver que las mujeres que tenían una presión sanguínea mayor le ha aumentado en relación con esta y al contrario. Solo a una le ha disminuido la presión, o sea un tanto por ciento muy bajo.

Relación entre estrategia empleada y tipo de asociación en el ítem M

Si cruzamos la respuesta a si hay o no relación entre las dos muestras y el tipo de estrategia utilizada en el ítem M obtenemos la tabla 2.2.5.3.3.

En primer lugar, observamos que todos los alumnos, menos cinco, han dado una respuesta correcta a la existencia de dependencia. De los veinte alumnos que no han explicado su estrategia para resolver el problema, ninguno ha dado respuesta a la existencia de dependencia, como ha ocurrido en otros ítems.

Estrategias correctas y tipo de dependencia en el ítem M

Un alumno ha comparado la media de las dos muestras (número 1 en la tabla 2.2.5.3.3) y ha concluido que el nivel de azúcar depende del sexo. La diferencia de medias es 2.2, que en relación a los valores absolutos de las medias de las muestras (6.9 y 4.7 respectivamente), es relativamente alto, de ahí la respuesta del alumno. Este es un ejemplo de respuesta correcta para la relación institucional presentada al estudiante, que no incluye los procedimientos usuales de contraste de igualdad de medias, en los que, además del tamaño de las medias es preciso tener en cuenta la variabilidad de los dos conjuntos de datos; el tamaño de las muestras y el nivel de significación (Rios, 1967). Si este problema se hubiese planteado en un curso de inferencia, la respuesta de este alumno hubiese sido incorrecta, ya que la diferencia de medias en este problema no es significativa. En concreto su respuesta ha sido:

Sujeto 43: Porque al sumar la cantidad de azúcar los varones, el total de azúcar en los varones es 69 y entonces lo divido entre 10 que es el total de alumnos luego me da 6'9%, mientras que en las hembras pasa lo mismo, el total de azúcar en los hombres es de 47 y lo divido entre los 10 alumnos que hay, luego me da 4'7% luego sí que depende del sexo, ya que al ver más nivel de azúcar en los varones, el porcentaje sería mayor.

Nueve alumnos han comparado las sumas de las dos muestras (número 2 en la

tabla 2.2.5.3.3). Todos han contestado que el nivel de azúcar en la sangre depende del sexo debido a que la diferencia de las sumas es elevada:

Sujeto 50: Porque los niños tienen más cantidad de azúcar en la sangre que las niñas. He sumado el nivel de azúcar en los niños y el nivel de azúcar en las niñas y da 69 en los niños frente a 47 en las niñas.

Tabla 2.2.5.3.3 Clasificación de respuestas del ítem M por tipo de asociación detectado y de estrategia empleada.

Estrategias	Tipo de dependencia			Total
	No contesta	Dependenc. (correcto)	Independencia	
CORRECTAS				
1 Compara las dos medias		1		1 (2.0)
2 Compara los totales		9		9 (17.6)
5 Compara distribuciones		6		6 (11.8)
INCORRECTAS				
7 Señala casos excepción		1		1 (2.0)
9 Difer. y casos excepción		1		1 (2.0)
10 Comparación global		8	1	9 (17.6)
12 Espera valores similares			2	2 (3.9)
13 Otras			2	2 (3.9)
0 No contesta	20			20 (39.2)
Total	20 39.2	26 51.0	5 9.8	51 100.0

Seis alumnos han comparado las distribuciones de frecuencias de las dos muestras (número 5 en la tabla 2.2.5.3.3). Han fijado el mismo valor en las dos distribuciones de frecuencias y han comparado cuantos varones o hembras hay por encima o por debajo de este valor. También aquí han coincidido en afirmar que el nivel de azúcar en la sangre depende del sexo, ya que las dos distribuciones no son idénticas.

Sujeto 51: Mirando la tabla se ve que son los varones los que tienen el nivel de azúcar en sangre más alto. Casi un 80% de los varones tiene el nivel de azúcar superior a 5; y en las hembras se da un 55% más o menos. En los varones hay un número muy alto que casi llega al 10, en las mujeres no encontramos ninguna.

Estrategias incorrectas y tipo de dependencia en el ítem M

Un alumno ha comparado los valores correspondientes de ambas muestras señalando casos excepcionales, (número 7 en la tabla 2.2.5.3.3); llega a la conclusión de que el nivel de azúcar depende del sexo. Su respuesta ha sido:

Sujeto 28: He comparado el nivel de azúcar de los niños con el de las niñas y he comprobado que los niños tienen salvo excepciones el nivel de azúcar más alto que las niñas.

Un alumno ha hallado la diferencia entre los valores correspondientes de ambas muestras (número 9 en la tabla 2.2.5.3.3), llegando a la conclusión de que el nivel de azúcar en la sangre depende del sexo, porque ha encontrado diferencias:

Sujeto 39: Las mujeres son más propicias a tener menos azúcar en la sangre. Sólo en dos casos tienen más azúcar que el hombre. He ido haciendo una diferencia entre la azúcar en cada hombre menos la azúcar en cada mujer para saber si aumentaba o disminuía.

Nueve alumnos han realizado una comparación global de las dos muestras (número 10 en la tabla 2.2.5.3.3). Ocho de ellos concluyen que el nivel de azúcar en la sangre depende del sexo, después de la comparación.

Sujeto 21: Se observa en los varones mayor nivel de azúcar a simple vista, no hace falta calcular nada.

El alumno que ha respondido que el nivel de azúcar no depende del sexo (respuesta incorrecta), no ha apreciado diferencia entre los valores de ambas muestras.

Sujeto 33: Porque no se aprecian grandes diferencias en los cuadros del nivel de azúcar en la sangre entre un sexo y otro.

Dos alumnos esperan encontrar valores similares en cada muestra, (número 12 en la tabla 2.2.5.3.3), al no encontrarlos, concluyen la no dependencia (respuesta incorrecta), manifestando una concepción determinista. Ambos escriben:

Sujeto 27: Creo que no porque casi todos los valores son diferentes en cada caso de V. o H. y no se pueden comparar.

Por último, dos alumnos los he clasificado en "Otros" (número 13 en la tabla 2.2.5.3.3). Han dado un tipo de dependencia incorrecto. Sus respuestas han sido:

Sujeto 41: Puesto que hay un 50% de hombres y de mujeres por lo tanto no depende del sexo.

Para este alumno el hecho de que las dos muestras tengan el mismo tamaño implica independencia.

Sujeto 2: No depende.

Conclusiones sobre el análisis cualitativo de estrategias en la comparación de muestras

Del análisis realizado se deduce que, independientemente de que al estudiar las muestras la relación sea significativa o no, estos alumnos, en general, al encontrar diferencias entre las muestras, siempre la creen significativa. En el ítem L, el 92.1 de los alumnos que han contestado han encontrado las muestras diferentes y en el ítem M el 83.9 de los alumnos que han respondido han encontrado las muestras diferentes.

Las estrategias varían según las muestras sean independientes o relacionadas. Las más empleadas para comparar muestras independientes han sido:

- Comparar la suma de valores en ambas muestras (9 casos), llegando incluso un alumno a comparar las medias de las dos muestras.
- Estudiar por separado la distribución de la variable en cada una de las muestras (6 casos) para deducir posibles diferencias.
- Realizar una comparación global cualitativa de las dos muestras sin realizar comparaciones o cálculo numérico (9 casos).

Entre las estrategias erróneas encontradas en las muestras independientes hemos encontrado un alumno que empareja indebidamente dichas muestras y compara los pares de valores.

Las estrategias más empleadas para comparar muestras relacionadas han sido:

- Comparar los pares de valores correspondientes al mismo sujeto o hallar la diferencia (31 casos) para deducir de este modo una única variable a partir de las dadas. Dentro de estas estrategias se da el caso de calcular (8 casos) o no (10 casos) porcentajes de valores en que se produce un aumento o disminución de la presión sanguínea. Otra variante a esta estrategia es comparar los pares de valores dos a dos señalando los casos excepcionales (11 casos) o hallar las diferencias señalando los casos excepcionales (2 casos).

Entre las concepciones erróneas referidas tanto al caso de muestras independientes como al de muestras relacionadas se han encontrado alumnos que obtienen sus conclusiones sólo a partir de unos pocos casos (concepción localista) y otros que esperan la igualdad de valores en cada una de las muestras, esto es, la dependencia funcional, para admitir la idea de asociación (concepción determinista).

En general, cuando las muestras son relacionadas, los alumnos tienden a estudiar los pares de valores correspondientes, bien comparándolos o hallando la diferencia y añadiendo proporciones o porcentajes o casos excepcionales. Cuando las muestras son independientes, los alumnos tienden a utilizar la comparación de la media de las muestras, la comparación de la suma de los valores de cada muestra, la comparación de las distribuciones de frecuencias de cada muestra, o la comparación global de los valores de cada muestra. Por tanto, se aprecia que los alumnos, sin haber tenido instrucción en técnicas de comparación de muestras, utilizan procedimientos diferentes al estudiar las muestras relacionadas o las independientes.

2.2.6. OTROS ASPECTOS ESTUDIADOS

Alumnos que unen los puntos con una línea en la nube de puntos

Algunos alumnos han unido los puntos, en los ítems relativos a nube de puntos (I, J y K), con una línea recta para estudiar la relación existente entre las variables. Creemos que ello es debido a que buscan una función matemática que permita obtener el valor de la variable dependiente conocido el de la independiente y, como primer paso intentan trazar la gráfica, para reconocer la función a partir de la misma. Ruiz Higueras (1991) indica que, en los manuales escolares de bachillerato se sugiere a veces a los estudiantes el representar gráficamente una serie de valores de una función y unir los puntos obtenidos entre sí, para obtener una gráfica aproximada de la función. En su estudio encontró que los estudiantes unían los puntos en los ítems correspondientes a reconocimiento de funciones con dominio discreto, antes de decidir si se trataba o no de una función matemática.

Por ello, consideramos que esta práctica es también un indicador de la concepción determinista de la asociación en los sujetos que la manifiestan. Por tanto, se ha incluido en el presente estudio la frecuencia de alumnos que usan esta práctica. Los resultados se pueden observar en la tabla 2.2.6.1. El porcentaje de alumnos que unen los puntos con un línea oscila entre el 11.8 en el ítem K y el 15.7 en el ítem J, similar, aunque ligeramente inferior que el encontrado (17 por ciento) por Ruiz Higueras (1991) en su investigación sobre concepciones acerca de la noción de función. Interpretamos este hecho como que el alumno intenta aproximar la nube de puntos mediante una gráfica lineal, para tratar de encontrar, a partir de ella, una expresión algebraica de una función que le sea familiar.

Tabla 2.2.6.1 Frecuencia de alumnos que unen los puntos con una línea

Ítem	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
I	Clasf. Liga/empates	8	15.7
J	Proteínas/natalidad	7	13.7
K	Juicio de jueces	6	11.8

Simplificación de las tablas 2x3 y 3x3

Otro aspecto a tener en cuenta en el estudio que se ha realizado, es observar si, cuando el alumno se enfrenta con tareas de realización de juicios de asociación entre variables en tablas de contingencia con dimensión mayor a 2x2, utiliza la estrategia de simplificarlas y reducirlas a otras más sencillas.

En una tabla 2x2 cada una de las variables es dicotómica y, de este modo, cada una de las cuatro casillas de la tabla tiene una interpretación distinta en el contexto de una relación causa-efecto, que es la siguiente:

- Casilla [a] presencia simultánea de causa y efecto.
- Casilla [b] presencia de la causa pero no del efecto.
- Casilla [c] efecto producido sin causa.
- Casilla [d] ni causa ni efecto se producen.

Cuando se pasa a una tabla de contingencia de mayor dimensión se pierde esta interpretación. En todo caso, podría pensarse en variar posibles causas y diferentes efectos, cada uno de los cuales puede combinarse entre sí, lo cual aumenta bastante la dificultad de la tarea, si esta se interpreta en términos de causalidad. En definitiva, si el alumno hace esta interpretación (si posee una concepción causalista de la asociación) cabe esperar que intente reducir la tabla a otra 2x2.

Por ello, se ha incluido el estudio de esta conducta en el ítem G (tabla 2x3) y en el ítem H (tabla 3x3), obteniéndose los resultados que se contemplan en la tabla 2.2.6.2.

Tabla 2.2.6.2 Frecuencia de alumnos que intentan reducir las tablas

Item	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
G	Aprob/suspender examen	11	21.6
H	Lateralidad ojos/manos	5	9.8

Como se puede observar en esta tabla, 11 alumnos, el 21.6 por ciento intentan reducir la tabla 2x3 a una 2x2, sin embargo en la tabla 3x3 hay menos intentos de reducción, sólo 5 alumnos, el 9.8 por ciento. No obstante son dos porcentajes nada despreciables. Se puede concluir que la tabla 2x2 es más fácil de resolver para estos alumnos, por los motivos indicados se puede tomar esta práctica como indicativa de una concepción causalista de la asociación.

Empleo de porcentajes

El uso de porcentajes o proporciones es requisito imprescindible para utilizar una estrategia correcta en el estudio de la asociación entre dos variables en una tabla de contingencia, aunque a lo largo del presente estudio hemos observado que una estrategia parcialmente correcta o incorrecta puede llevar al alumno, en cierto tipo de ítems a una solución correcta. En la tabla 2.2.6.3 se estudia esta cuestión:

Tabla 2.2.6.3 Frecuencia de alumnos que emplean porcentajes

Item	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
D	Fumar/bronquios	17	33.3
E	Dieta/trastornos	13	25.5
F	Vida sedent/alergia	13	25.5
G	Aprob/suspender examen	6	11.8
H	Lateralidad ojos/manos	1	2.0

Más de un tercio de los alumnos que han respondido al ítem D (el 34.7 por ciento) han utilizado proporciones o porcentajes. Seguramente la mayor dificultad del caso de independencia ha hecho necesario su empleo con más

frecuencia que en el resto de los ítems.

La cuarta parte de los alumnos utilizan proporciones o porcentajes en la resolución de los ítems E y F

En el ítem G, la clara relación existente entre las variables y la existencia de teorías previas, confirmadas por los datos presentados, puede haber provocado el bajo uso de porcentajes. Apenas se utilizan las proporciones o porcentajes en el ítem H, quizás debido a su mayor número de casillas, los alumnos optan por la comparación entre las frecuencias absolutas de las mismas.

En resumen, el uso de proporciones o porcentajes en la resolución de problemas de asociación en tablas de contingencia no es abundante (el máximo aparece en un tercio de los alumnos en el ítem D). Se han utilizado más en las tablas 2x2, donde oscila entre un tercio y un cuarto de los alumnos. En la tabla 2x3 se utilizan menos y aún menos en la 3x3. Por tanto parece ser que conforme aumenta la tabla de dimensiones, se utilizan menos los porcentajes. También parece que se utilizan poco cuando coinciden las teorías previas y la relación ofrecida en los datos presentados, apoyando este hecho los resultados obtenidos en el análisis de correspondencias, sección 2.3.5.1

Empleo de frecuencias marginales

Las frecuencias marginales es un dato importante para utilizar una estrategia correcta al estudiar la relación de dependencia entre las variables en una tabla de contingencia. En la tabla 2.2.6.4 se dan las frecuencias y porcentajes relativos a esta cuestión, donde como se puede observar en las tablas 2x2, ítems E y F el cálculo de frecuencias marginales es más utilizado que en el ítem H, tabla 3x3. Se corrobora en esta última lo que decíamos más arriba que al existir más filas y más columnas, parece ser que los alumnos tienden a comparar las casillas por filas y/o columnas, sin tener en cuenta los totales de cada fila. Estos alumnos comparan, en consecuencia, las distribuciones de frecuencias absolutas en lugar de emplear las frecuencias relativas, indicando de nuevo una dificultad en el razonamiento proporcional.

Tabla 2.2.6.4 Frecuencia de alumnos que emplean frecuencias marginales

Item	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
E	Dieta/trastornos	34	66.7
F	Vida sedent/alergia	35	68.6
H	Lateralidad ojos/manos	13	25.5

2.2.7. ESTIMACION DE LA FIABILIDAD DE LA PRUEBA PILOTO

Cualquier instrumento de evaluación consta de un conjunto de tareas que nos proporciona una muestra del universo de respuestas posibles del sujeto. Se espera que este universo corresponda al atributo que se desea medir. "Al evaluar una prueba se plantean dos amplias interrogantes: ¿con cuánta exactitud representa la muestra al universo del cual se seleccionó? ¿con qué fidelidad corresponde este universo al atributo latente que se va a medir?. La primera se relaciona con la fiabilidad de la prueba, la segunda con su validez. Ambas representan la posibilidad de generalización a partir de las puntuaciones de la prueba; la gama de inferencias que puede hacerse a partir de ellas". (Thorndike, 1989, pg. 177).

Las hipótesis en el modelo clásico de medición psicométrica, que se describe en Feldt y Brennan (1991) son las siguientes:

- 1) La puntuación observada en un ítem X_o es igual a la suma de la puntuación verdadera desconocida, X_v y el error de medición X_e :

$$X_o = X_v + X_e$$

- 2) El error de medición es independiente de la puntuación verdadera.

- 3) Los errores de medición en las diferentes observaciones son independientes entre sí.

En estas condiciones, se define la *fiabilidad* de una prueba como el porcentaje de varianza observada atribuible a la puntuación verdadera, esto es,

$$F = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_o^2}$$

en donde σ_v^2 y σ_o^2 son las varianzas de X_v y X_o respectivamente. Debido a las hipótesis 1) a 3) esta fórmula se convierte en:

$$F = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \sigma_e^2}$$

y, como indica, Thorndike, "lo que se incluya bajo el encabezado "varianza del error" dependerá de la forma como se defina el universo que se supone representa la puntuación de la prueba considerándose a ciertas fuentes de la varianza como error bajo una definición del universo y como puntuación verdadera bajo otra". (Thorndike, 1989, pg. 193).

Con objeto de obtener una estimación para la fiabilidad de nuestro instrumento, a partir de la muestra piloto, se han utilizado las cuestiones en las que podría atribuirse a cada alumno una puntuación 0 o 1 según las respuesta fuese correcta o incorrecta, esto es, los ítems correspondientes a lectura de tablas y gráficos (D1, D2, D3, D4, I1 e I2) y los correspondientes a detección del tipo de asociación en los diez problemas propuestos (D7, E3,

F3, G3, H3, I3, J1, K1, L1, M1). En la tabla 2.2.7.1 se presentan los porcentajes de respuestas correctas (índices de dificultad) y varianza de dichas variables.

Al estudiar estos porcentajes observamos que la gama de dificultad de los ítems ha presentado una gran variación, lo que confirma el hecho de que la prueba no es homogénea, puesto que se han presentado en ella diversos tipos de tareas, con objeto de cumplir los objetivos propuestos en la investigación. Hemos preferido abarcar una mayor validez de contenido respecto al tema de los juicios de asociación, como ya se razonó en la descripción del instrumento, aunque ello pueda suponer una menor homogeneidad de las respuestas.

Tabla 2.2.7.1 Índices de dificultad y desviaciones típicas de los ítems de la prueba piloto

Variáble	Índice de dificultad	Desviación típica
D1	.961	.196
D2	.980	.140
D3	.490	.505
D4	.471	.504
D7	.294	.460
E3	.471	.504
F3	.882	.325
G3	.922	.272
H3	.490	.505
I1	.765	.428
I2	.784	.415
I3	.510	.505
J1	.765	.428
K1	.137	.348
L1	.667	.476
M1	.490	.505

Para la estimación de la fiabilidad existen diferentes acepciones y métodos. Al tratarse de una prueba no homogénea no hemos creído conveniente aplicar uno de los índices clásicos, como el de Cronbach o el KR20. En lugar de ello, utilizaremos el marco de la teoría de la generalizabilidad (Brennan, 1983) que emplea la descomposición de la varianza observada por medio del análisis de varianza, para la estimación de la fiabilidad. Para ello hemos realizado un análisis de varianza de medidas repetidas de la puntuación en cada ítem, por medio del paquete estadístico SPSS (subprograma MANOVA), obteniéndose la tabla 2.2.7.2.

A partir de ella, y siguiendo el modelo de estimación de Dunn y Clark (1987, pg. 239) se han obtenido las siguientes estimaciones puntuales de los componentes de la varianza:

Varianza residual: $\sigma_r^2 = 0.17$

Varianza dentro de los items: $\sigma_i^2 = 0.013$

Varianza dentro de los sujetos: $\sigma_s^2 = 0.058$

Tabla 2.2.7.2 Resultados del análisis de varianza de medidas repetidas

Fuente de Variación	SS	DF	CM	CME
Sujetos	19.11	50	.38	$\sigma_e^2 + 51\sigma_p^2$
Residual	124.11	750	.17	σ_e^2
Item	47.01	15	3.13	$\sigma_e^2 + 16\sigma_i^2$
$SS = \text{Suma de cuadrados}; DF = \text{Grados de Libertad}$ $CM = \text{Cuadrados medios}; CME = \text{Cuadrados medios esperados}$				

Utilizando estos valores para aplicar la fórmula de estimación de la fiabilidad, propuesta en Thorndike, pg. 203 y siguientes, para nuestro diseño, obtenemos:

$$F = \frac{\frac{\sigma_v^2}{v}}{\frac{\sigma_v^2 + \sigma_e^2}{v}} = \frac{\frac{\sigma_s^2}{s}}{\frac{\sigma_s^2 + \frac{\sigma_r^2}{16}}{s}} = 0.84$$

Dadas las características señaladas del instrumento, que incluye un contenido no homogéneo, consideramos suficiente este valor para el propósito de nuestro trabajo. La interpretación que debemos dar a este índice, ha de concordar con el sentido de la inferencia psicométrica. Por ello, el coeficiente de fiabilidad obtenido mide la extensión, por la cual, las conclusiones obtenidas por las preguntas elegidas podrían extenderse a otras preguntas sobre juicios de asociación extraídas al azar, en un universo de posibles preguntas, de las que las incluidas en la prueba, podrían ser una muestra. Un 71 por ciento de la varianza experimental observada sería debida a la verdadera varianza en los juicios de asociación, que los sujetos de la muestra serían capaces de dar, en cualesquiera otras situaciones tomadas de la población teórica de problemas de las que se ha tomado la muestra y, el resto de la varianza se explicaría por la variabilidad entre las preguntas concretas que se han tomado para elaborar el cuestionario.

Del mismo modo, si consideramos ahora los items fijos y nos preguntamos por la posibilidad de generalización a otros sujetos semejantes en características a los de la muestra, que sería la población teórica de la que se han tomado los sujetos, obtenemos:

$$F' = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \sigma_e^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \frac{\sigma_r^2}{51}} = 0.80$$

De lo que se deduce que un 80 por ciento de la varianza experimental sería debida a la verdadera variabilidad entre la población potencial de alumnos y el resto es debido a la variabilidad introducida por los sujetos concretos que han sido tomados para la investigación.

2.3. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CONCEPCIONES EN LA MUESTRA DE COMPARACION

2.3.1. DESCRIPCION DE LA MUESTRA

Como se expuso en la sección 1.4.5, la presente investigación consta de dos partes diferenciadas. La primera de ellas es un estudio de concepciones iniciales sobre la asociación estadística, en una muestra de alumnos, que se realiza con un doble fin.

En primer lugar, para cumplir los dos primeros objetivos descritos en la sección 1.4.2. Por otra parte, las investigaciones previas sobre la asociación estadística no se han centrado en la identificación explícita de tipologías de concepciones sobre este concepto, y el tipo de tarea empleado en las mismas ha sido muy limitado, por tanto, el estudio que presentamos en esta sección constituye, en sí mismo, una aportación original.

Además, la comparación de las concepciones iniciales de los alumnos que participan en el experimento de enseñanza con las de una muestra más amplia de estudiantes permitirá aumentar la validez de la segunda parte de nuestro trabajo y las posibilidades de generalización de sus resultados.

Las preguntas que nos hemos planteado son las siguientes:

1. ¿Cómo leen e interpretan los alumnos los datos de las tablas y los puntos de la nube de puntos?
2. ¿Estos alumnos son capaces de dar un juicio adecuado sobre la asociación entre dos variables estadísticas?
3. ¿Se observa la influencia de teorías previas sobre su juicio de asociación?
4. ¿Qué estrategias utilizan para estudiar la asociación?

La lectura e interpretación de los datos, la respuesta dada al tipo de asociación, el procedimiento empleado (en el que hemos destacado algunos aspectos que consideramos de interés particular) son elementos significativos de la comprensión del enunciado y resolución del problema. La caracterización de este sistema de respuestas de los alumnos, así como del peso relativo de las teorías previas sobre los datos, nos permitirá caracterizar las concepciones previas sobre la asociación estadística.

Los datos de esta muestra de comparación se recogieron en el curso 1.991/92, mediante el cuestionario que se presenta en el anexo 2.1.2, obtenido al revisar el empleado con la muestra piloto. Para ello se mejoró la redacción y se suprimió la cuestión que pedía estimar la intensidad del coeficiente de correlación o de asociación.

Los 213 alumnos a los que se les pidió cumplimentar el cuestionario de recogida de datos eran estudiantes del Curso de Orientación Universitaria, donde 124 (58.2 por ciento) pertenecían al COU dirigido a Ciencias y 89 (41.8 por ciento) al COU orientado a Letras, pertenecientes a tres Institutos de Bachillerato, dos de la ciudad de Jaén y el otro de Mancha Real (Jaén). En esta muestra hay 113 (53.1 por ciento) alumnos y 100 (46.9 por ciento) alumnas.

Aunque los estudios de Estadística son obligatorios actualmente en séptimo de E.G.B. y en primero y tercero de B.U.P., sólo 34 alumnos (16.0 por

ciento) declaran haber estudiado Estadística en cursos anteriores y 179 (84.0 por ciento) no lo han hecho. En la tabla 2.3.1.1 se muestran los cursos donde los estudiantes indican haber estudiado Estadística. Los que señalan haberlo hecho en COU, deben ser repetidores, pues en ninguno de los cursos de la muestra habían comenzado a trabajar los temas de Estadística preceptivos en algunas opciones de COU.

Tabla 2.3.1.1 **Frecuencia de alumnos que han estudiado Estadística en cursos anteriores**

Curso	Frecuencia	Porcentaje
7 EGB	3	1.4
8 EGB	2	.9
1 BUP	11	5.2
2 BUP	4	1.9
3 BUP	2	.9
COU	5	2.3
BUP y COU	1	.5
Varios de los anteriores	6	2.8
No ha estudiado	179	84.0
<hr/>		
Total	213	100.0

A la pregunta sobre si han estudiado los conceptos de dependencia funcional y aleatoria, 3 alumnos (1.4 por ciento) responden que si, 204 (95.9 por ciento) contestan que no lo han estudiado y 6 (2.8 por ciento) no contestan.

En cuanto a proponer un ejemplo de dependencia funcional y otro de dependencia aleatoria, sólo un alumno (0.5 por ciento) escribe bien ambos ejemplos, 3 (1.4 por ciento) escriben un ejemplo correcto de dependencia funcional y otro ejemplo incorrecto de dependencia aleatoria, 8 alumnos (3.8 por ciento) escriben mal ambos ejemplos y 201 alumnos (94.4 por ciento) no responde a esta pregunta. Como conclusión, podemos considerar que, el estudio que realizamos respecto a la asociación estadística es una evaluación de las concepciones iniciales, previas a la instrucción, de los alumnos participantes.

2.3.2. INTERPRETACION DE TABLAS Y GRAFICOS

Los objetivos perseguidos en este apartado son similares a los de la muestra piloto.

Tabla 2.3.2.1 **Frecuencia y porcentaje de respuestas en la lectura de frecuencias absolutas dobles en tablas 2x2**

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcto	198	93.0
Incorrecto	15	7.0
<hr/>		
Total	213	100.0

En la tabla 2.3.2.1 se muestra la lectura directa de las frecuencias dobles de una casilla en las tablas 2x2. Siendo un poco inferior el porcentaje de respuestas incorrectas que en la muestra piloto, aunque en líneas generales son similares y podemos concluir que es muy fácil para estos alumnos leer las tablas de contingencia 2x2.

En la tabla 2.3.2.2, se muestran las lecturas correctas e incorrectas de las frecuencias marginales absolutas, como se puede observar son prácticamente iguales a las de la muestra piloto. Se puede concluir que estos alumnos leen correctamente las frecuencias marginales.

Tabla 2.3.2.2 Frecuencia y porcentaje de respuestas en la lectura de las frecuencias absolutas marginales en tablas 2x2

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcto	208	97.7
Incorrecto	5	2.3
Total	213	100.0

En la tabla 2.3.2.3 se muestra el cálculo de una frecuencia relativa marginal (en la tabla se expresa en porcentajes). Al primer golpe de vista, observamos que destaca el valor 60 (correcto), el valor 150 (que es la frecuencia absoluta) y la gran dispersión de las respuestas, como ocurrió en la muestra piloto. Por tanto, se remite a los comentarios hechos allí. A continuación se comentan los errores de interés. Un alumno calcula $(90/250) \times 100$, es decir, la frecuencia relativa de los que fuman y padecen trastornos bronquiales respecto al total de la muestra, errando el cálculo. Algo similar les ha ocurrido a otros dos, que han dado como respuesta los valores 30 y 33.

Tabla 2.3.2.3 Frecuencia y porcentaje de respuestas en el cálculo de una frecuencia relativa marginal

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	60	126
	75	10
	150	34
Otras	33	15.5
Blanco	10	4.7
Total	213	100.0

Un alumno responde 277, obtiene la respuesta de $(250/90) \times 100$, es decir, invierte los términos de la frecuencia relativa doble. Por el contexto se puede deducir que los que responden 75 estiman la proporción 150 de 250 como $3/4$ sin realizar ningún tipo de cálculo. Las demás respuestas son debidas a errores en los cálculos, o bien, responden con un número sin especificar como lo han obtenido.

Tabla 2.3.2.4 Frecuencia y porcentaje de respuestas en el cálculo de una frecuencia relativa condicional

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
25	8	3.8
30	7	3.3
40	59	27.7
Correcta	60	52.6
Otras	19	8.9
Blanco	8	3.8
	-----	-----
Total	213	100.0

En la tabla 2.3.2.4 se muestra el cálculo de una frecuencia relativa condicionada. También en este caso los resultados son similares a la muestra piloto, por lo que los comentarios hechos allí se pueden aplicar aquí. Se destaca la gran dispersión en las respuestas. Los que responden 25 obtienen la respuesta de $150/60 = 2.5$ y concluyen que es el 25%. De los que responden 30 unos razonan así: el 60% son fumadores, luego el 30% no padecen trastornos bronquiales; otros parece ser que restan 60 de 90. Otros alumnos obtienen como respuesta 36 calculando $(90/250) \times 100$. Uno responde 62, habiendo calculado $250/40 = 62\%$. Los que responden 66 lo obtienen de $(100/150) \times 100$. El que responde 100 toma el total de los que no padecen trastornos bronquiales. El que responde 4.16 ha calculado $250/60 = 4.16$.

El resto no especifica los cálculos realizados o son respuestas obtenidas a causa de un error de cálculo.

En resumen, los resultados obtenidos en la muestra de comparación son similares a los de la prueba piloto. Las frecuencias de las tablas de contingencia las leen los alumnos satisfactoriamente; el cálculo de frecuencias relativas marginales y condicionales da un porcentaje de respuestas correctas algo superior al 50 por ciento. 59 alumnos (27.7 por ciento) han realizado correctamente las cuatro cuestiones anteriores, lo que parece dar cierta superioridad a la muestra de comparación respecto a la muestra piloto, aunque sigue apareciendo una gran dificultad en la interpretación de frecuencias en una tabla de contingencia. Aunque los niveles de comprensión de gráficos de Curcio (1989) están referidos a los distintos gráficos estadísticos utilizados en la literatura, si hacemos una transposición de esos niveles a las tablas, tenemos que las dos primeras preguntas planteadas a estos alumnos serían del primer nivel de comprensión: lectura de datos. Sin embargo, las dos últimas, relativas a cálculos de proporción y porcentajes, pertenece-rían al segundo nivel de comprensión: lectura entre los datos. Esto nos ofrece una explicación de la diferencia de respuestas correctas entre las dos primeras preguntas y las dos últimas.

Interpretación de la nube de puntos

Para cumplimentar este apartado se estudian las dos primeras cuestiones del ítem I.

En la tabla 2.3.2.5 se dan las frecuencias de respuestas obtenidas en la lectura de la ordenada dada la abscisa. El 86.4 por ciento responden adecuadamente a esta cuestión; si tomamos como válidas las respuestas 10 y 12, por su cercanía en la nube de puntos con la respuesta correcta 11, el porcentaje de

respuestas correctas sobrepasa el 90 por ciento.

Tabla 2.3.2.5 Frecuencia y porcentaje de respuestas en la lectura de la ordenada dada la abscisa en la nube de puntos

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcto	10	3.3
	11	86.4
	12	1.4
	Otras	7.0
	Blanco	1.9
-----		-----
Total	213	100.0

En la tabla 2.3.2.6. se dan las frecuencias de la lectura de la abscisa dada la ordenada, donde se puede observar que el 85 por ciento de los alumnos, si se consideran las respuestas aisladas 16 ó 20 como que el alumno ha creído suficiente dar una sola respuesta, se puede concluir que sobre el 90 por ciento de las respuestas son correctas en esta cuestión.

Tabla 2.3.2.6 Frecuencia y porcentaje de respuestas en la lectura de la abscisa dada la ordenada en la nube de puntos

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
el 16 y el 20 (correcta)	181	85.0
el 16	3	1.4
el 20	3	1.4
Otros	20	9.4
No contesta	6	2.8
Total	213	100.0

Resumiendo, podemos decir, que estas dos cuestiones pertenecen al primer nivel de comprensión de gráficos según Curcio (1989) y que se puede concluir que algo menos del 90 por ciento de estos alumnos leen los puntos de la nube correctamente, porcentaje similar a las dos primeras cuestiones planteadas a los alumnos en tablas de contingencia, que también pertenecen al mismo nivel de comprensión. Sin embargo, los porcentajes de respuestas correctas son superiores a los de los cálculos de porcentajes y proporciones obtenidos para tablas de contingencia, por lo que se puede deducir, una mayor facilidad en la interpretación, en este caso, que en el de la tabla de contingencia.

2.3.3. JUICIOS DE ASOCIACION

Juicios de asociación en items individuales

En la tabla 2.3.3.1 se muestran las frecuencias del tipo de dependencia detectado en la tabla 2x2 por los alumnos de la muestra de comparación. Los resultados son similares a los de la muestra piloto, aunque, como en el apartado anterior, ligeramente superiores, siendo en esta ocasión 8 puntos

superior en el ítem D y alrededor de 3 puntos en los ítems E y F.

Tabla 2.3.3.1 Frecuencia y porcentaje de respuestas sobre el tipo de asociación en tablas 2x2

Item	Directa	Inversa	Independencia	No contesta
D	118 (55.4)	1 (0.5)	*84 (39.4)	10 (4.7)
E	25 (11.7)	*108 (50.7)	65 (30.5)	15 (7.0)
F	*194 (91.1)	3 (1.4)	9 (4.2)	7 (3.3)

* (solución correcta)

Se puede observar que muy pocos alumnos consideran la dependencia inversa en los ítems D y F. Por el contrario, la dependencia directa aparece con porcentaje apreciable en las respuestas fallidas de los ítems D y E. Cuando la dependencia es inversa los alumnos de respuesta errónea se decantan por la independencia en mayor porcentaje que por la dependencia directa. Jenkins y Ward (1965), en tareas presentadas a los sujetos en un contexto causal, observan que existe falta de simetría entre las causas y los efectos. Si existen más casos en que dándose la causa, no se presenta el efecto, los sujetos concluirán que la causa y el efecto no se relacionan, esto es, la independencia. Cuando existe independencia las respuestas erróneas se decantan por la dependencia directa. Todo esto nos lleva a pensar que algunos alumnos de la muestra no contemplan la dependencia inversa; para ellos sólo existe dependencia directa o independencia; estos alumnos presentan la concepción unidireccional de la asociación que ya se ha discutido en la sección 2.2.

Otro hecho notable es la diferencia en la dificultad que se aprecia en los tres ítems. En los dos primeros casos, el contexto puede sugerir al alumno una relación entre las variables diferente a la que se presenta en los datos, especialmente en el ítem D. Como señala Crocker (1981), detectar la interpretación entre los acontecimientos o valorar las contingencias ambientales es algo más que un problema matemático. Es una tarea en que se ejercita nuestro conocimiento previo del fenómeno y en el cual influye poderosamente el contexto de la información que estamos empleando.

En el ítem D es preciso, además, un correcto empleo del razonamiento proporcional. Este ítem se puede ver también como un problema de comparación de dos probabilidades en la que el número de casos favorables y desfavorables en los términos de comparación es proporcional. Para Inhelder y Piaget (1955) corresponde al nivel IIIb de razonamiento probabilístico y es la tarea más difícil dentro de las de comparación de probabilidades.

En la tabla 2.3.3.2 se ofrecen los resultados de las respuestas de los alumnos al tipo de dependencia en los ítems G y H. En primer lugar, se puede destacar la similitud de los resultados de esta tabla con la de la muestra piloto, sobre todo si tenemos en cuenta sólo los alumnos que han respondido. El porcentaje de respuestas correctas es prácticamente el mismo, el porcentaje de errores es algo mayor en la muestra de comparación. Sin embargo, en el ítem H el porcentaje de respuestas correctas en la muestra de comparación es 9 puntos superior, por otra parte son similares si se tiene en cuenta sólo los alumnos que han respondido (86.6 por ciento para la muestra piloto y 84.8 para la muestra de comparación). También aquí es elevado el porcentaje de no respuestas.

Tabla 2.3.3.2 Frecuencia y porcentaje de respuestas sobre el tipo de asociación en tablas rxc

Item	Asociación	Independencia	No contesta
G	*186 (87.3)	19 (8.9)	8 (3.8)
H	23 (10.8)	*129 (60.6)	61 (28.6)

* (solución correcta)

En la tabla 2.3.3.3 se dan los resultados de las respuestas de los alumnos al tipo de dependencia en la nube de puntos. Respecto a la muestra piloto los resultados son similares, sobre todo si tenemos en cuenta sólo los alumnos que han respondido, por ejemplo en el ítem K tenemos 68.1 % para la muestra de comparación y 67.5 % para la muestra piloto, algo similar ocurre en los que declaran asociación inversa en el ítem J, salvo en la columna "Independencia" en el ítem I que aunque se tomen sólo los alumnos que han respondido la diferencia excede los 14 puntos, aunque se debe tener presente que, en nuestro entorno cultural, el contexto futbolístico del ítem I es más familiar a los varones que a las hembras y no olvidemos que la muestra piloto el 92 por ciento son mujeres mientras en la muestra de comparación, sólo lo son el 47% y, por tanto los resultados de la primera son inferiores; en cuanto al ítem K, se debe apreciar que el porcentaje de no respuestas es muy superior en la muestra piloto.

Tabla 2.3.3.3 Frecuencia y porcentaje de respuestas sobre el tipo de dependencia en nube de puntos

Item	Directa	Inversa	Independencia	No contesta
I	8 (3.8)	24 (11.3)	*177 (83.1)	4 (1.9)
J	11 (5.2)	*182 (85.4)	19 (8.9)	1 (0.5)
K	*46 (21.6)	18 (8.5)	137 (64.3)	12 (5.6)

* (solución correcta)

Si comparamos las tablas 2.2.3.4 y 2.3.3.4, se observa, al primer golpe de vista grandes diferencias entre la muestra piloto y la muestra de comparación para los ítems L y M. Sin embargo, si sólo tenemos en cuenta los alumnos que han respondido, se tiene que en la muestra piloto en el ítem L el 92.1 por ciento declaran asociación, mientras que en la muestra de comparación lo hacen el 89.9. Y en el ítem M el 83.9 responde asociación en la muestra piloto frente al 78.1 de la muestra de comparación. Por tanto, las respuestas son similares en los ítems L y M para las muestras piloto y de comparación.

Tabla 2.3.3.4 Frecuencia y porcentaje de respuestas sobre el tipo de dependencia en comparación de muestras

Ítem	Asociación	Independenc.	No contesta
L	*178 (83.6)	20 (9.4)	15 (7.0)
M	*157 (73.7)	44 (20.7)	12 (5.6)

* (solución correcta)

Como resumen de este apartado podemos concluir que en las tablas de contingencia los resultados en la muestra de comparación son similares a los de la muestra piloto, sobre todo si se tiene en cuenta sólo las respuestas y no el tamaño de la muestra. Sólo en el ítem D existe una diferencia de unos 8 puntos en las respuestas correctas. Igual ocurre en la nube de puntos en las que se obtienen resultados similares salvo en el ítem I, debido probablemente a la diferencia de proporciones en la variable sexo y su influencia en la visión del contexto de la Liga de Fútbol. En la comparación de muestras los porcentajes de respuestas correctas son similares en ambas muestras, con alto porcentaje de respuestas correctas.

Análisis conjunto de la exactitud en los juicios de asociación

Puesto que la respuesta de cada alumno particular sobre la existencia o no existencia de asociación entre las variables dependerá de sus concepciones, cabe esperar una relación entre las diferentes respuestas del mismo alumno. Puesto que, en total, se han propuesto 10 ítems, un estudio de las correlaciones o de otro coeficiente de asociación entre la respuesta a pares de ítems sería difícilmente interpretable, debido al problema de las comparaciones múltiples (White, 1980). Se precisa la aplicación de un método de análisis multivariante que dé cuenta del conjunto de interrelaciones entre las variables de un modo sintético.

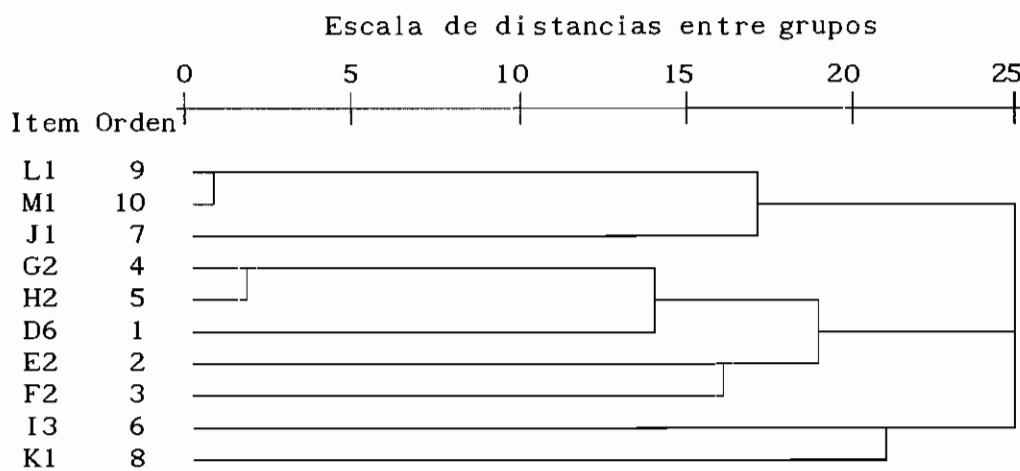
Como paso preliminar, hemos comenzado efectuando un análisis "cluster" (o jerárquico) (Celeux y cols., 1989) de las variables dicotómicas que se obtienen cuando en cada uno de los juicios de asociación se puntúa como 1 la respuesta correcta y como 0 la respuesta incorrecta. Ya que en este tipo de variables es aplicable como coeficiente de asociación el coeficiente de correlación de Pearson, que coincide con el coeficiente Φ para este tipo de tablas, se ha empleado este coeficiente como medida de similaridad entre las variables. En la figura 2.3.3.1 se presenta el dendograma obtenido con el programa SPSS con el método de la distancia promedio (Lerman, 1981).

En primer lugar hay que hacer notar el pequeño tamaño de los coeficientes de correlación obtenidos entre las variables (variando los cuadrados de estos coeficientes entre 0.253 y 0.0431), lo que indica que nos hallamos ante un fenómeno de tipo multidimensional. Aunque, debido al tamaño relativamente amplio de la muestra, muchos de estos coeficientes han resultado estadísticamente significativos, desde el punto de vista pragmático resultan prácticamente inútiles para predecir la respuesta de un alumno en un ítem, conocida la respuesta en otro ítem diferente. No existe, pues, un rasgo único que pudiéramos denominar "capacidad en los juicios de asociación".

Ello es, sin duda, debido a la falta de correspondencia que hemos señalado repetidamente entre la estrategia seguida y el juicio obtenido. En

algunos de los ítems, especialmente cuando la asociación es fuerte y no hay teorías en contra, la asociación es fácilmente percibida, independientemente de la estrategia, por lo que estos ítems han resultado fáciles para la mayor parte de los alumnos.

Figura 2.3.3.1 Análisis cluster de las respuestas en los juicios de asociación



En caso de dificultad (asociación débil; teorías previas en contra de los datos o tabla de contingencia de dimensión mayor que 2x2) es preciso una serie de capacidades conjuntas en el alumno para resolver el problema, por lo que, dependiendo del alumno concreto, se ha obtenido o no éxito en el juicio expresado. Además, como señalan Tversky y Kahneman (1982a), la correlación y causalidad suelen identificarse por lo que, cuando se pide a un estudiante un juicio sobre la covariación entre variables, éste puede interpretar la pregunta como una referida a la existencia de causa y efecto. Tanto en el caso de que se interprete la pregunta como referida a causalidad o simplemente a covariación el impacto de la experiencia de los sujetos puede interferir las estimaciones de la correlación (Nisbett y Ross, 1980). Estos casos constituyen información más vivencial y pueden crear reacciones afectivas fuertes ante la información (Crocker, 1981).

Reconociendo el hecho de que la asociación débil entre las respuestas a los ítems convierte el juicio de asociación en una tarea multidimensional y compleja, pasamos a interpretar los tres grupos o "clusters" que se aprecian en el dendograma.

Primer grupo

Integra las variables L1 y M1 relativas a la comparación de variables numéricas en muestras y a bastante mayor distancia la J1, es decir, la nube de puntos en un caso en que la relación de dependencia ha sido bastante intensa y el alumno la detecta fácilmente mediante la forma de la nube.

Segundo grupo

Está formado a su vez por dos grupos que incluyen, en su conjunto, el total de los ítems relativos a tablas de contingencia:

- las variables G2 y H2 (tablas de contingencia de dimensión superior a 2x2) unidas a una distancia mucho mayor con la D6 (tabla 2x2, caso de independencia)
- las otras dos tablas de contingencia (E2 y F2), unidas a una distancia bastante grande. Hay que tener en cuenta que el hecho de que la tabla E mostrase dependencia de tipo inverso no fue reconocido por algunos alumnos, debido a su concepción de la asociación.

Tercer grupo:

Integra las dos restantes nubes de puntos: I3 y K1, aunque a bastante distancia. En la nube K1, el hecho de que la asociación fuese debida a la concordancia hizo que muchos alumnos considerasen las variables como independientes. En el ítem I existe independencia entre las variables.

En consecuencia, los tres grupos de preguntas que aparecen claramente diferenciados podemos interpretarlos como debidos a tres tipos diferentes de capacidad necesitada para resolver cada una de las tres categorías de problemas:

La solución de los problemas de asociación en tablas de contingencia no puede hacerse mediante la comparación directa de los valores de las variables. En estos casos no es posible expresar una ecuación del tipo $Y = f(X)$ que relacione la variable dependiente Y con la variable independiente X, ni siquiera en términos de promedio. Debido al carácter cualitativo de las dos variables implicadas, es preciso trabajar directamente con frecuencias. Las comparaciones deben hacerse en términos de las distribuciones condicionales de frecuencias de una variable, en función de la otra.

Dentro de las tablas de contingencia, aparece una diferenciación clara entre tablas 2x2 y mayores. En estas últimas, veremos en el análisis de estrategias que, en general, se precisa una estrategia más elaborada para resolver el problema que, en el primer caso, puede ser resuelto con una estrategia no totalmente correcta. En las tablas 2x2 es posible también considerar el signo de la asociación que no tiene sentido en tablas de dimensión superior a menos que las variables sean ordinales.

Tanto en el caso de las nubes de puntos, como en la comparación de muestras, disponemos de la posibilidad de comparación directa de los valores numéricos de la variable dependiente en función de la variable independiente. En el caso particular de la nube de puntos, mediante técnicas de regresión podríamos incluso ajustar una ecuación $Y = f(X)$, que exprese el valor medio de Y en función de X y sería una extensión natural de la idea de dependencia funcional que los alumnos de este nivel ya han adquirido. Aunque los alumnos no conozcan la idea de regresión, pueden intuitivamente deducir la posibilidad de sustituir la nube de puntos por una recta en caso de correlación lineal moderada o fuerte.

Esta comparación numérica es mucho más fácil en el ítem J que aparece relacionado (aunque a una distancia grande) con los problemas de comparación de muestras. En estos dos problemas, los alumnos no poseen una representación gráfica que les permita apreciar visualmente la existencia de la asociación. Pero, al contrario que en el caso de las tablas de contingencia, pueden comparar los valores numéricos de la variable dependiente como función de la independiente. Esta comparación, no obstante, debe hacerse caso a caso y, posteriormente estudiar la frecuencia de casos que confirman o niegan la

existencia de asociación. Similarmente, en el ítem J1 pueden utilizar el crecimiento o decrecimiento de la nube para establecer la comparación numérica.

Análisis factorial de respuestas en los juicios de asociación

Aunque el análisis efectuado apoya nuestras hipótesis previas sobre la complejidad de la tarea de emitir un juicio de asociación, creemos de interés profundizar en lo posible en este estudio global de las diez tareas. Por ello se ha efectuado un análisis factorial. (Escofier y Pagés, 1988). La extracción inicial de factores se ha realizado con el método del factor principal (Cuadras, 1991) y como método de rotación se ha empleado la rotación varimax y el paquete estadístico BMDP (Dixon, 1990). Puesto que tenemos 10 variables y 213 sujetos, creemos que se cumple sobradamente el requisito, en cuanto al tamaño de muestra para aplicar el método (Thorndike, 1989). Respecto al resto de condiciones, Cuadras (1991) señala que, admitida la hipótesis de que las variables sean combinación lineal de unos supuestos valores latentes o factores y, excluidas algunas tipos de variables cualitativas "*cualquier otra matriz de asociaciones entre variables cuantitativas o cualitativas, con la condición de ser definida positiva sirve para extraer un análisis factorial*" (pg. 103), aunque señala más adelante que es preciso que las variables tengan una razonable unidad experimental, como ocurre en nuestro caso.

Tabla 2.3.3.5 Autovalores y comunidades obtenidos en el Análisis Factorial

Variable	Comunalidad	Factor	Autovalor	Porcentaje de varianza	% varianza acumulado
D6	.52928	1	1.68828	16.9	16.9
E2	.65924	2	1.27656	12.8	29.6
F2	.65310	3	1.15154	11.5	41.2
G2	.65948	4	1.06427	10.6	51.8
H2	.46009	5	1.02437	10.2	62.1
I3	.54413				
J1	.53643				
K1	.76092				
L1	.72373				
M1	.67863				

En la tabla 2.3.3.5 se presentan los autovalores y comunidades obtenidos. De la estructura de los autovalores, puede de nuevo observarse el hecho de multidimensionalidad del juicio de asociación: Ninguno de los factores destaca por el porcentaje de inercia respecto a los demás y no se logra reducir la dimensión del espacio vectorial subyacente. Hay cinco factores con inercia superior a la unidad, que pasamos a interpretar. Pero la importancia relativa de los mismos es muy parecida y el conjunto de los cinco sólo explica un 62% de la varianza. Además cada ítem presenta un porcentaje apreciable de varianza no explicada por el conjunto de factores, lo que indica su fuerte especificidad. Este hecho, a nuestro juicio, confirma los resultados de los diferentes trabajos psicológicos sobre juicios de asociación en tablas de contingencia y los extiende al caso de tareas más complejas. El juicio de asociación no viene determinado por una variable de tarea única; las diferentes variables interaccionan provocando en el sujeto, tanto un cambio de estrategia, como un cambio en el juicio proporcionado.

En la tabla 2.3.3.6 presentamos la matriz factorial obtenida tras la rotación varimax, en la que hemos suprimido, para una mejor interpretación, los coeficientes factoriales de magnitud pequeña.

Tabla 2.3.3.6 Matriz factorial rotada por el método varimax

VARIABLE	FACTOR 1	FACTOR 2	FACTOR 3	FACTOR 4	FACTOR 5
D6	.69014				
E2					.80831
F2	.56512		-.42876		.36397
G2	.50840			-.55696	
H2	.53138		.37402		
I3			.69078		
J1		.36823	.54935		
K1				.83021	
L1		.80612			
M1		.68755			-.37770

Factor 1: Asociación entre variables como variación de las frecuencias relativas condicionales.

Agrupa todas las tablas de contingencia, excepto la tabla E y, de este modo, confirma los resultados que hemos comentado respecto a la diferenciación de las tablas de contingencia en el análisis "cluster". Por ello, el primer factor expresa la diferencia del tipo de habilidad requerida en los juicios de asociación en tablas por el hecho de tener que trabajar con las frecuencias de la tabla, ya que no es posible emplear valores numéricos para intentar relacionar las variables. La tabla del ítem E aparece ligada a la del F en el quinto factor, que comentaremos posteriormente. En estos ítems es preciso concebir la asociación estadística como la variación de las frecuencias relativas condicionales de una de las variables en función de la otra.

Factor 2: Asociación entre variables como variación del valor numérico de una de ellas en función de la otra variable.

Coincide con otro de los clusters identificados, por lo que refuerza el análisis anterior. En el ítem J la intensidad de la asociación y la pendiente acusada de la nube de puntos permite apreciar visualmente el decrecimiento de la gráfica. En el ítem L se produce un decrecimiento de la variable de antes a después del tratamiento en todas las mujeres de la muestra excepto en 2 casos. En el ítem M, aunque no es posible comparar caso a caso, puede notarse una diferencia de la cantidad media de azúcar en varones y en hembras. En estos tres casos (y sólo en ellos) se observa claramente como el valor numérico de la variable dependiente varía en función del valor de la variable independiente. No es una dependencia funcional en el sentido matemático del término, pero

extiende esta idea.

Factor 3: Signo de la asociación cuando no hay teorías en contra.

Oppone el ítem F, que tiene una dependencia directa fuerte, frente a los ítems H, I (independencia) y J (dependencia inversa fuerte). En ninguno de los casos el contexto de los ítems sugiere una asociación diferente a la presentada en los datos. En los ítems D, E, K la teoría está en contra de los datos. En los ítems L y M no tiene sentido considerar el signo de la asociación. En el ítem G, en el que la teoría previa está de acuerdo a los datos, pero la intensidad de la asociación es moderada, se obtuvo un pequeño peso (0.16) en este factor, que se ha suprimido por su tamaño. Concluimos en consecuencia que este factor representaría el signo de la asociación, que será tenido en cuenta al producir un juicio, diferenciando la asociación de tipo directo frente a la independencia o dependencia inversa, en el caso de que las teorías previas no contradigan los datos y halla una intensidad fuerte en la asociación.

Factor 4: Concordancia o causalidad cuando la correlación es moderada.

Aparecen con signos opuestos dos ítems en que la intensidad de la asociación es moderada, diferenciándose por el tipo de relación entre las variables a la que es atribuible la asociación. En el ítem G (número de horas y éxito en un examen) el alumno puede atribuir a la variable independiente un papel de causa y a la dependiente el de efecto, pues su experiencia le dice que, en general, un mayor número de horas de estudio aumenta la probabilidad de éxito en un examen. Aunque la correlación sea moderada, al darse la coincidencia entre correlación y causalidad en este contexto el alumno produce un juicio positivo de asociación.

Por el contrario, en el caso de los jueces no hay una relación de causa-efecto. Por principio, las puntuaciones de los jueces son "independientes" una de otra. Sin embargo, en el contexto de la asociación estadística, hemos atribuido implícitamente a una de las dos variables el papel de "variable independiente" y a la otra la de "variable dependiente". Aparece, en primer lugar, una dificultad semántica derivada del hecho de que las palabras que empleamos en el lenguaje matemático pueden tener un sentido distinto en la vida cotidiana. Aunque la pregunta se hace evitando la palabra dependencia en este caso, puede ocurrir que el alumno asocie el término "relación" empleado en la pregunta con la idea de dependencia y ello provoque la confusión mostrada.

Por otro lado, la asociación que aparece en este ítem no es debida a una relación causa-efecto, ni a una interdependencia entre las variables. La razón es que la objetividad de los jueces implica que ambas puntuaciones son función de una tercera variable, que es los méritos relativos de los concursantes y ello produce la asociación observada.

Factor 5: Asociación como comparación de muestras independientes.

En este factor aparecen agrupados, aunque con signo opuesto, las dos tablas de contingencia 2×2 y el último ítem que se refiere a la comparación de muestras independientes. En los tres casos se trata de comparar dos muestras independientes y existe asociación.

Aunque los ítems D y H se refieren a la comparación de muestras independientes, no aparece asociación entre ellos. Por otro lado, en el ítem G la variable independiente, número de horas dedicadas al estudio, está dividida en tres categorías de modo arbitrario, pero esta división no corresponde a una

categorización natural de esta variable, que es cuantitativa. El ítem L se refiere a la comparación de dos variables distintas en una sola muestra. De este modo, interpretamos este factor como correspondiente a una concepción de la asociación entre una variable cualquiera y otra dicotómica como la existencia de diferencias en las frecuencias o valores de la variable en ambas muestras. Este resultado confirma lo expuesto en Batanero y cols. (1991b).

En resumen, el análisis realizado ha puesto de manifiesto la complejidad de la estructura de los juicios de asociación, identificando cinco factores que corresponden a aspectos diferenciados del significado de la asociación estadística. Estos aspectos serán complementados con los resultados del análisis de las estrategias.

2.3.4. EXPLICITACION DE TEORIAS PREVIAS

En la tabla 2.3.4.1 se puede observar de nuevo la similitud de los resultados en la muestra piloto (tabla 2.2.4.1) y en la muestra de comparación. Se han detectado más teorías previas en el ítem I relativo a la Liga de fútbol. Ya hemos dicho más arriba que en esta muestra hay más varones que hembras y en nuestro ambiente socio-cultural el mundo del fútbol se vive con más intensidad en el público masculino. Se puede observar también que en todos los ítems se han puesto de manifiesto las teorías previas.

Tabla 2.3.4.1 Frecuencia de alumnos que explicitan teorías previas en sus argumentos

Item	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
D	Fumar/bronquios	50	23.5
E	Dieta/trastornos	11	5.2
F	Vida sedent/alergia	5	2.3
G	Aprob/suspender examen	22	10.3
H	Lateralidad ojos/manos	1	0.5
I	Clasf. Liga/empates	82	38.5
J	Proteínas/natalidad	30	14.1
K	Juicio de jueces	35	16.4
L	Presión sang/tratamiento	6	2.8
M	Nivel de azúcar/sexo	9	4.2

No obstante, el peso que juegan estas teorías ha sido muy diferente, en función de si la contingencia presentada en los datos tiene el mismo sentido que estas creencias. Es notable en este sentido el fenómeno de correlación ilusoria (Chapman y Chapman, 1969) en el ítem D, en el que el 55.4 por ciento de los alumnos declaran la existencia de asociación a pesar de que se trata de un caso de independencia y el caso del ítem K en que habiendo asociación debida a la concordancia, los alumnos, por el peso de sus teorías, explicitadas o no, creen en la independencia entre las variables. Este hecho es digno de ser tenido en cuenta por los profesores, ya que las investigaciones en Psicología mantienen que tales creencias no se modifican aún cuando las experiencias reales las falsen (Pérez Echeverría, 1990).

Para Tversky y Kahneman (1982b) la correlación ilusoria es un ejemplo más de los sesgos producidos por el heurístico de la accesibilidad. Ello impediría que los sujetos empleasen los datos que contradicen sus creencias, por la fuerza del vínculo asociativo que se forma por los ejemplos que la confirman.

2.3.5. ESTRATEGIAS EN LOS JUICIOS DE ASOCIACION

2.3.5.1. Tablas de contingencia: Niveles de elaboración de las estrategias

Niveles de elaboración de estrategias en tablas 2x2

En este apartado se sigue un estudio paralelo al realizado en 2.2.5, referido a la muestra piloto que se completa, además, con la comparación entre nuestros resultados y los obtenidos en las investigaciones anteriores a la nuestra sobre el concepto de asociación. Se ha considerado conveniente realizar esta comparación, en este lugar, debido al tamaño restringido de la muestra piloto que, aunque suficiente para el propósito de prueba del cuestionario y del método de análisis, la hace insuficiente para la obtención de conclusiones al respecto. En primer lugar se han clasificado los procedimientos de resolución utilizados por los alumnos en las tablas 2x2 y descritos en los anexos 2.2.1 y 2.2.2, según las casillas utilizadas y el modo en que se usa la información contenida en ellas, atendiendo al criterio que se describe en 2.2.5 para la muestra piloto de la siguiente manera:

Utiliza una sola casilla:

- Casilla a** [procedimientos: 1, 12, 40, 46, 54, 56, 63, 64]
- Casilla b** [procedimiento: 2]
- Casilla c** [procedimientos: 3, 33, 34, 53]
- Casilla d** [procedimiento: 4]

Como se indicaba en el capítulo 1, la asociación no implica necesariamente causación, pero la detección de la asociación es una de las reglas de inferencia en el razonamiento causal (Pozo, 1987). Puesto que en los problemas presentados en las tablas de contingencia se diferencia entre variable independiente y dependiente, conviene diferenciar el significado que las casillas de la tabla pueden tener para el alumno si interpreta la pregunta en términos causales.

"En un análisis de atribución causal la casilla a corresponde a los casos en que la causa es necesaria y suficiente para producir un efecto dado. La casilla b violaría la suficiencia de la causa, mientras que la casilla c indicaría que la causa no es necesaria. Por último la casilla d correspondería a los casos negativos que indican la necesidad y suficiencia de la causa" (Pérez Echeverría, 1990, pág. 78)

Además de la estrategia consistente en emplear la casilla a considerada en gran número de investigaciones, como las de Inhelder y Piaget (1955), Smedlund (1963), Beyth y Maron (1982), Yates y Curley (1985), hemos hallado otras consistentes en utilizar sólo una de las tres casillas restantes, generalmente la de máxima frecuencia. Todas ellas se pueden equiparar al nivel de dificultad I de los que propone Pérez Echeverría (1990). Nisbett y Ross (1980) indican para explicar el uso frecuente de esta estrategia que los sujetos tienden a no emplear toda la información disponible.

Utiliza dos casillas:

Casillas a y b [procedimientos: 6, 14, 18, 71]. Consiste en comparar la presencia o ausencia del efecto cuando se da la causa; es decir, implicaría buscar la condición de Hume de conjunción constante. Ha sido descrita por Inhelder y Piaget (1955). Shaklee y Tucker (1980) y Shaklee y Mims (1982) creen que los sujetos que usan este procedimiento están empleando los casos

que retienen más fácilmente en la memoria.

Casillas a y c [procedimientos: 7, 22, 24, 25, 55, 57, 65]. Comparan la presencia o ausencia de la causa cuando se da el efecto; esto es, consideran la necesidad de la causa o lo que es lo mismo, emplean el método de diferencias de Stuart Mill. Ha sido descrita por Inhelder y Piaget (1955) y Arkes y Harkness (1983).

Casillas a y d [procedimientos: 5, 23]. Según Inhelder y Piaget (1955) la suma de los valores de estas dos celdas son los casos favorables a la asociación directa.

Casillas b y c [procedimientos: 50, 58]. Son los casos desfavorables a la asociación directa, es decir, favorables a la asociación inversa.

Casillas b y d [procedimientos: 29, 67]

Casillas c y d [procedimientos: 8, 30, 31, 44]. Descrita por Inhelder y Piaget (1955). Manteniendo el estado ausente del efecto, se comparan los estados presente y ausente de la causa.

En este apartado se agrupan, no sólo las estrategias [a - b] y [a - c] consideradas por Pérez Echeverría (1990) como de nivel II, sino todas las que emplean relaciones, bien aditivas o bien multiplicativas entre sólo dos casillas de la tabla. Estas estrategias consisten en la utilización de una sola distribución condicional de frecuencias, excepto las que consisten en usar las diagonales [a, d] y [b, c].

Conviene resaltar que todos los alumnos que utilizan las estrategias de los niveles I y II emplean sólo una parte de la distribución conjunta de la variable para justificar su juicio de asociación. Por ello podemos englobarlos en la concepción localista de la asociación descrita en la sección 2.2. Si la asociación prevista se confirma en ciertos valores aislados de la variable, ello es suficiente para considerar la existencia de la misma. Para estos sujetos no sería necesaria la información concerniente al consenso (Pozo, 1987).

Asimismo, los alumnos que emplean sólo la casilla b lo hacen manifestando una concepción determinista de la asociación, argumentando que dicha celda debiera tener frecuencia uno para que existiese asociación.

Utiliza tres casillas: Casillas a, b, c [procedimiento: 73]. Esta estrategia constituye el tercer nivel de Pérez Echeverría (1990).

Utiliza las cuatro casillas: Se ha dividido en dos grupos: Procedimientos aditivos y multiplicativos.

Procedimientos aditivos: [procedimientos: 9, 10, 11, 15, 16, 17, 27, 45, 66, 68, 70, 75, 80, 82]. Son aquellos en los que los alumnos comparan aditivamente las frecuencias absolutas de las cuatro celdas, dos a dos; también cuando comparan frecuencias absolutas condicionales con su marginal correspondiente y fueron descritas por Inhelder y Piaget (1955). Es el nivel IV de Pérez Echeverría (1990). También son equivalentes a la llamada en la literatura, estrategia $\delta D = [(a+d) - (b+c)]$ o su equivalente matemático $[(a-c) - (b-d)]$, (Shaklee y Tucker, 1980; Arkes y Harkness, 1983; Allan y Jenkins, 1983).

Procedimientos multiplicativos: [procedimientos: 13, 19, 20, 21, 26, 28,

41, 48, 59, 60, 61, 72, 74, 76, 77, 83]. Se utilizan cuando se comparan las cuatro casillas de un modo multiplicativo o bien las probabilidades condicionadas de los valores de una variable a la presencia o ausencia de otra. Es el nivel V de Pérez Echeverría (1990) y equivalente a la llamada en la literatura estrategia $\delta P = [a/(a+b) - c/(c+d)]$, (Jenkins y Ward, 1965).

Otras: [procedimientos: 32, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 47, 49, 51, 52, 62, 69, 78, 79, 81]. Son aquellos procedimientos que no pertenecen a ninguna clase de las anteriores.

De acuerdo con esta clasificación se ha obtenido la tabla 2.3.5.1.1 relativa a los ítems D, E y F.

Tabla 2.3.5.1.1 Frecuencia y porcentaje de estrategias empleadas en las tablas 2x2, clasificadas por el número de casillas

Casillas utilizadas	Item		
	D	E	F
Utiliza una sola casilla			
La casilla a	23 (10.8)	3 (1.4)	19 (8.9)
La casilla b	6 (2.8)	3 (1.4)	
La casilla c		20 (9.4)	1 (0.5)
La casilla d			2 (0.9)
Utiliza dos casillas			
Las casillas a y b	21 (9.9)	8 (3.7)	7 (3.3)
Las casillas a y c	37 (17.4)	13 (6.1)	24 (11.3)
Las casillas a y d	3 (1.4)	2 (1.0)	14 (6.6)
Las casillas b y c	1 (0.5)	6 (2.8)	1 (0.5)
Las casillas b y d		1 (0.5)	
Las casillas c y d		10 (4.7)	4 (1.9)
Utiliza tres casillas			
Las casillas a, b y c	1 (0.5)		
Utiliza las 4 casillas			
Proced. aditivos	15 (7.0)	74 (34.7)	70 (32.9)
Proced. multipl.	45 (21.1)	51 (23.9)	45 (21.1)
Otras	56 (26.3)	18 (8.5)	23 (10.8)
No contesta	5 (2.3)	4 (1.9)	3 (1.4)

En el uso de una sola casilla destaca la a en los ítems D y F, siendo en ambos la de máxima frecuencia. La casilla c destaca en el ítem E que también es la de máxima frecuencia. La estrategia consistente en emplear la casilla a es considerada por Inhelder y Piaget (1955) como característica de los sujetos de la etapa IIIa, aunque Smedlund (1963) y Jenkins y Ward (1965) la encuentran en una gran proporción de sujetos adultos. También Nisbett y Ross (1980) indican que en algunas investigaciones más de la mitad de los sujetos emplean esta casilla. Sin embargo, destacamos que en nuestra muestra la han utilizado los sujetos sólo cuando era la de máxima frecuencia y en caso de que otra tenga máxima frecuencia es utilizada esta nueva celda. Las casillas b y d en solitario son poco utilizadas. Hemos obtenido un porcentaje de uso de una sola casilla, que oscila entre el 10.3 (ítem F) y el 13.6 (ítem D) por ciento,

mayor que el obtenido por Pérez Echeverría (1990) (3.7 por ciento), aunque nuestra muestra es de alumnos de C.O.U., mientras que la de ella era de alumnos de cuarto y quinto de Psicología.

El uso de dos casillas oscila desde el 18.8 por ciento, en el ítem E, hasta el 29.1 en el ítem D. Destacan el uso de la primera fila (casillas **a**, **b**) o la primera columna (casillas **a**, **c**). Al utilizar una fila o una columna se suele comparar la celda de máxima frecuencia con una adyacente (**a**, **c** en los tres ítems; **c**, **d** en el ítem E). También se suelen utilizar las dos casillas de máxima frecuencia (**a**, **d** en el ítem F, o bien las **b**, **c** en el ítem E). El uso de estas celdas es la estrategia más frecuente en la investigación de Adi y cols. (1977) quienes emplean dos tareas, una de ellas, como en la presente investigación, puede ser interpretada en un contexto causal.

Cuando los alumnos utilizan cuatro casillas, la casilla **d**, normativamente equivalente a la **a**, no es percibida de esta manera, sobre todo cuando su frecuencia es la menor y existe independencia. Este es el caso del ítem D, por lo que da un porcentaje muy bajo de uso de cuatro casillas (28.2 por ciento, frente al 58.7 y 54.0 de los ítems E y F). En estos ítems la celda **a** no es mayor que la **b** y la **c** y el alumno no tiene necesidad de utilizar todas las casillas. Cuando la frecuencia de la casilla **d**, es alta, el alumno la ve con más peso y la utiliza bien en relación a otra o utilizando las cuatro casillas.

Nuestros resultados coinciden con los trabajos de Shaklee y Mins (1981), Shaklee y Tucker (1980) y Pérez Echeverría (1990) en el hecho de que la mayor parte de los sujetos ha empleado cuatro casillas en el establecimiento de un juicio de asociación en los ítems E y F.

En el uso de cuatro casillas, un tercio del total de alumnos utilizan procedimientos aditivos en los ítems E y F, al contrario que en los trabajos de Allans y Jenkins (1980) en que los sujetos emplean diferencia de probabilidades como técnica para realizar un juicio de correlación. Sin embargo, en el ítem, D esta proporción decrece considerablemente.

Los que utilizan procedimientos multiplicativos, oscilan entre el 21.1 por ciento y el 23.9 por ciento, con porcentajes muy similares en los tres ítems. Estos porcentajes son superiores a los encontrados por Pérez Echeverría (1990) que oscilan entre el 11.1 y el 13.8 por ciento.

En el apartado otros destaca el ítem D por la influencia de las teorías previas de los alumnos sobre el contexto. En los ítems E y F, al ser menor el influjo de las teorías previas ha descendido este porcentaje.

El porcentaje de no respuestas es muy bajo.

Niveles de elaboración de estrategias en tablas 2x3

En los anexos 2.2.1 y 2.2.2 se describen los procedimientos utilizados por los alumnos en la resolución del ítem G, con los que se obtuvo la tabla A.2.2.2.4. Como se puede observar, dicha tabla no es operativa, y se decidió agrupar estos procedimientos simples en grupos homogéneos que denotan una estrategia similar, con el fin de estudiar las concepciones que tienen los alumnos sobre la asociación estadística en este tipo de tablas. La primera forma que se adoptó fue agruparlos según las casillas que se habían utilizado en la resolución del problema planteado y la manera en que se integra dicha información. De este modo se puede definir una clasificación de las estrate-

gias, según su nivel de elaboración, de forma similar al que efectúa Pérez Echeverría (1990) para las tablas 2x2, obteniendo la siguiente clasificación y la tabla 2.3.5.1.2

Utiliza una casilla

- 1 La casilla a [Procedimiento: 52]
- 2 La casilla c [Procedimientos: 16, 19, 32]
- 3 La casilla f [Procedimiento: 31]

El resto de casillas no aparece de manera individual. Consideramos que esta estrategia es equivalente al nivel I definido por Pérez Echeverría (1990) en las tablas de contingencia 2x2.

Utiliza dos casillas

- 4 Las casillas a y c [Procedimientos: 29, 37, 44, 45, 54, 1]
- 5 Las casillas a y d [Procedimientos: 40, 47]
- 6 Las casillas b y c [Procedimiento: 36]
- 7 Las casillas c y d [Procedimiento: 43]
- 8 Las casillas c y f [Procedimientos: 18, 23, 24 38, 42, 59]
- 9 Las casillas d y f [Procedimientos: 17, 61]

Utiliza tres casillas

- 10 Las casillas a, b y c [Procedimientos: 5, 14, 25, 27, 33, 46, 50, 51]
- 11 Las casillas a, e y f [Procedimiento: 57]
- 12 Las casillas b, c y d [Procedimiento: 26]
- 13 Las casillas c, e y f [Procedimientos: 58]
- 14 Las casillas d, e y f [Procedimientos: 3, 28, 30]

Consideramos que el uso de dos y tres casillas es equivalente al nivel II definido por Pérez Echeverría (1990) en las tablas de contingencia 2x2, ya que a lo más se emplea una sola distribución condicional. Al igual que en la tabla 2x2 consideramos que el empleo de este tipo de estrategias es un indicador de un concepción localista de la asociación.

Utiliza cuatro casillas

- 15 Las casillas a, c, d, y f [Procedimientos: 1, 4, 15]
- 16 Las casillas b, c, e, y f [Procedimientos: 13, 22, 41]

Equivalente al nivel III definido por Pérez Echeverría (1990) en las tablas de contingencia 2x2, puesto que emplea más de una distribución condicional, aunque no llega a usar todas las frecuencias.

Utiliza las seis casillas.

Procedimientos aditivos: [Procedimientos: 2, 7, 10, 20, 53, 55, 56].

Procedimientos multiplicativos: [Procedimientos: 9, 21, 34, 48]

Equivalente al nivel IV y V definido por Pérez Echeverría (1990) en las tablas de contingencia 2x2, diferenciándose estos dos niveles por el uso de procedimientos aditivos o multiplicativos.

Utiliza las frecuencias marginales. [Procedimientos: 12, 35, 39, 49, 60]

Otras. [Procedimientos: 6, 8, 11]

Si se compara la tabla 2.3.5.1.2 con su correspondiente en la muestra piloto, tabla 2.2.5.1.6, no se aprecian grandes diferencias, de manera global, salvo en los casos de 3 y 4 casillas. La utilización de una sola casilla es bastante menor que en la tabla 2x2, de lo que deducimos que este primer nivel

de elaboración de estrategias no ha sido suficiente para que el alumno encuentre una solución que le satisfaga al resolver el problema. De este modo, se confirma lo indicado por Scholz (1991) respecto a que la estrategia adoptada por un mismo sujeto, en los problemas de asociación puede variar en función de la estructura del problema. Por ello vemos que los niveles de elaboración de estrategias definidos por Pérez Echeverría (1990) no han de ser entendidos como niveles de razonamiento de los sujetos, ya que, en nuestro caso, un número importante de alumnos que emplean el nivel I por considerarlo suficiente para resolver un problema de tabla 2x2 ha cambiado a una estrategia de nivel superior al pasar a un tipo de tabla de dimensión mayor.

Tabla 2.3.5.1.2 Frecuencias y porcentaje de estrategias empleadas en la tabla 2x3 (ítem G) clasificadas por el número de casillas

Casillas utilizadas	Frecuencia	Porcentaje
Utiliza una casilla		
La casilla a	2	(0.9)
La casilla c	3	(1.4)
La casilla f	1	(0.5)
Utiliza dos casillas		
Las casillas a y c	10	(4.7)
Las casillas a y d	6	(2.8)
Las casillas b y c	2	(0.9)
Las casillas c y d	7	(3.3)
Las casillas c y f	5	(2.3)
Las casillas d y f	1	(0.5)
Utiliza tres casillas		
Las casillas a, b y c	51	(23.9)
Las casillas a, e y f	1	(0.5)
Las casillas b, c y d	2	(0.9)
Las casillas c, e y f	1	(0.5)
Las casillas d, e y f	14	(6.6)
Utiliza cuatro casillas		
Las casillas a, c, d, y f	1	(0.5)
Las casillas b, c, e, y f	1	(0.5)
Utiliza las seis casillas		
Procedimientos aditivos	66	(31.0)
Procedimientos multiplicat.	12	(5.6)
U. freq. marginales	7	(3.3)
Otras	14	(6.6)
No responde	6	(2.8)

Sin embargo, el uso de estrategias del nivel II, prácticamente se ha duplicado en la tabla 2x3 respecto a la tabla 2x2. El uso del nivel III de Pérez Echeverría (1990) es insignificante, tanto en la tabla 2x3, como en la tabla 2x2. El nivel IV es similar en ambas tablas, excepto el ítem D. El nivel V ha disminuido en la tabla 2x3 considerablemente respecto a la tabla 2x2. Por tanto, en este caso la mayor frecuencia de alumnos se concentra en el nivel II, que consiste en el empleo de una fila o columna de la tabla.

Dos casillas se utilizan por un 9.8 por ciento en la muestra piloto y un 14.0 por ciento en la muestra de comparación. Hay una diferencia mayor en la utilización de tres casillas (19.6 por ciento) en la muestra piloto, frente a

32.4 por ciento en la muestra de comparación. Seis casillas son utilizadas por el 41.2 por ciento en la primera muestra y el 36.6 por ciento en la segunda.

Cuando el alumno utiliza sólo dos casillas, tiende a que una de ellas sea la de máxima frecuencia, es decir la c. Hay una ligera excepción, cuando utiliza las casillas a y d, o sea, las de la primera columna. Las tres cuartas partes de los alumnos que utilizan tres casillas, lo hacen con las de la primera fila y sólo uno de cada cuatro alumnos utiliza la segunda fila. El uso de cuatro casillas es insignificante.

Las seis casillas son utilizadas por un tercio de los alumnos. Un reducido número (7 alumnos), utilizan las frecuencias marginales.

Niveles de elaboración de estrategias en tablas 3x3

Los procedimientos utilizados por los alumnos en este ítem se describen en los anexos 2.2.1 y 2.2.2. Primero se ha hecho una clasificación de los mismos, en niveles de estrategias según el número de casillas utilizado y la forma en que se integra la información, obteniéndose la tabla 2.3.5.1.3 construida con las siguientes categorías:

Utiliza tres casillas. [Procedimientos: 5, 10, 11, 15]

Utiliza cuatro casillas. [Procedimientos: 14, 17]

Utiliza seis casillas. [Procedimientos: 9, 16]

Utiliza nueve casillas. [Procedimientos: 2, 4, 7, 13, 18]

Procedimientos aditivos: [Procedimientos: 2, 4]

Procedimientos multiplicativos: [Procedimientos: 7, 13, 18]

Otras. [Procedimientos: 6, 19, 99]

Tabla 2.3.5.1.3 Frecuencia de estrategias en el ítem H según número de casillas empleadas

Casillas utilizadas	Frecuencia	Porcentaje
Utiliza 3 casillas	28	13.2
Utiliza 4 casillas	4	1.9
Utiliza 6 casillas	18	8.5
Utiliza 9 casillas		
Proced. aditivos	58	27.2
Proced. multiplicat.	19	8.9
Otras	37	17.4
No contesta	49	23.0
-----		-----
TOTAL	213	100.0

Al comparar con los niveles de Pérez Echeverría (1990), se obtiene la siguiente correspondencia: La utilización de tres casillas se puede equiparar al nivel II, por corresponder a una sola distribución condicional, que es indicador de una concepción localista de la asociación. El uso de 4 o seis casillas es equiparable al nivel III, porque se emplea más de una distribución condicional, aunque no todas. Cuando se utilizan las 9 casillas de manera aditiva se equipararía al nivel IV y si es con procedimiento multiplicativo al nivel V.

Al comparar estos niveles con los análisis realizados en las tablas 2x2 y

2x3, y teniendo en cuenta que en este caso el porcentaje de no respuestas es superior, se pueden extraer las siguientes conclusiones: El nivel I desaparece en la tabla 3x3 y el nivel II, disminuye el porcentaje de uso, lo que corrobora el comentario realizado en las tablas 2x3 de que los alumnos, conforme aumenta la dimensión de la tabla y en consecuencia el número de datos, tienden a utilizar estrategias más elaboradas. El nivel III es utilizado en esta tabla en un porcentaje más bajo que en los anteriores. El nivel IV se mantiene en un porcentaje similar, sin embargo, el nivel V, que es el más complejo, es ligeramente superior en la tabla 3x3, lo que también indica la necesidad de buscar estrategias más elaboradas.

Si comparamos la tabla 2.3.5.1.3 con su homóloga de la muestra piloto (tabla 2.2.5.1.9), en líneas generales son similares. Se observan ligeras diferencias como las siguientes: no hay alumnos que utilicen dos casillas en la muestra de comparación, como ha habido uno en la muestra piloto; 4 casillas se utiliza en un mínimo porcentaje en la muestra de comparación y no se utiliza en la muestra piloto; la utilización de 9 casillas es superior en la muestra de comparación.

En la utilización de 3 casillas destaca la estrategia 5, comparar las frecuencias absolutas de una fila y la 11 comparar las frecuencias absolutas de una columna, donde la primera es más frecuente. La utilización de cuatro casillas es insignificante. Cuando se utilizan 6 casillas destaca la estrategia 9, compara las frecuencias absolutas de dos filas, frente a la 16 que lo hace comparando dos columnas. Cuando se utilizan 9 casillas destacan las estrategias 4 y 7 que comparan las frecuencias absolutas y relativas por filas respectivamente.

Clasificación de estrategias en las tablas de contingencia según los conceptos matemáticos usados implícitamente

Como ya se ha indicado, para Vergnaud (1990) una aproximación didáctica a la formación de los conceptos matemáticos conduce a considerarlos como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. Por ello, para este autor, el propósito esencial, para un análisis cognitivo de las tareas y conductas de los estudiantes, es identificar los teoremas en acto".

Por tanto, se han clasificado las estrategias utilizadas por los alumnos en los problemas de asociación en tablas de contingencia, atendiendo a su corrección desde el punto de vista de los conceptos matemáticos puestos en juego implícita o explícitamente en las cuestiones planteadas, esto es, los conceptos y teoremas en acto utilizados. Ellos nos proporcionan indicadores a partir de los cuales inferir las concepciones de los alumnos acerca de la asociación. En la tabla 2.3.5.1.2 se contemplan tres categorías, atendiendo a su grado de corrección, que son: correctas, parcialmente correctas e incorrectas, divididas a su vez en estrategias, según los diversos teoremas en acto y/o errores conceptuales identificados. La explicación de su contenido se da a continuación, indicando en cada una de ellas, entre paréntesis, el código que la representa en los gráficos obtenidos en el análisis de correspondencias.

Estrategias correctas

1. *Compara dos o más distribuciones de frecuencias relativas condicionales* (se codifica como VDFRC). Procedimientos: [19, 21, 26, 74] en las tablas 2x2; [9, 28, 34, 41] en la tabla 2x3 y [7, 13] en la tabla 3x3, descritos en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.

Los alumnos que emplean esta estrategia usan implícitamente la idea de dependencia de una variable Y respecto a otra X como variación de las frecuencias relativas condicionales $h(y_j | x_i)$ al variar el valor de x_i .

Dentro de este grupo, distinguimos dos casos y según se utilicen las distribuciones condicionales $h(y_j | x_i)$ variando x_i o bien las distribuciones condicionales $h(x_i | y_j)$ variando y_j . En este último caso, se emplea una propiedad condicional que es que la dependencia estadística de Y respecto a X implica también la de X respecto a Y .

2. *Compara una frecuencia relativa de cada distribución condicional con la marginal correspondiente* (se codifica como FRCFRM). Procedimientos: [20, 28, 59, 61, 72] en las tablas 2x2 y [29, 36, 46] en la tabla 2x3, descritos en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.

En este grupo se incluyen los alumnos que implícitamente utilizan la propiedad de que en caso de que una variable Y no dependa estadísticamente de otra X , al condicionar la distribución de Y por un valor x_i , no varía la distribución original de la variable Y o distribución marginal. Análoga interpretación tiene el caso en que se intercambien los papeles de las filas y las columnas.

Estrategias parcialmente correctas

3. *Compara posibilidades o razón de posibilidades* (se codifica como POSIB). Procedimientos: [9, 10, 48, 60] en las tablas 2x2; [1, 2, 10, 13, 15, 21, 22, 40, 48] en la tabla 2x3 y [14, 17, 18] en la tabla 3x3, descritos en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.

Aunque no llega a cuantificar ni comparar las probabilidades condicionales $P(y_j | x_i)$ para un valor j fijo y diferentes valores de x_i , el alumno utiliza implícitamente o calcula la razón de posibilidades de aparición o no aparición del valor y_j cuando ocurre x_i o lo que es equivalente:

$$\Omega = \frac{P(y_j | x_i)}{P(\bar{y}_j | x_i)}$$

A partir de este cociente puede deducirse unívocamente, tanto la probabilidad $P(y_j | x_i)$, como la de su contrario $P(\bar{y}_j | x_i)$ y deducirse diferentes medidas de asociación como por ejemplo "razón de productos cruzados" o razón α que Liebetrau (1983) expresa así:

$$\alpha = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a/c}{b/d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

En el caso de estos alumnos, no han llegado a calcular el coeficiente α , pero si, a veces, a formar el numerador y denominador del mismo y a compararlos entre sí cualitativa o aditivamente.

Vemos que las estrategias 1 y 2 corresponden a un mismo tipo de concepción sobre la asociación en tablas de contingencia, que sería la que corresponde a concebir la existencia de la asociación entre variables cualitativas

como una correspondencia:

$$\begin{aligned} X \times Y &\longrightarrow [0, 1] \\ x_i, y_j &\longrightarrow h(y_j | x_i) \end{aligned}$$

tal que, fijado uno de los valores x_i o y_j se obtiene una aplicación no constante, pues en el caso de producirse ésta, las variables serían independientes. Esta es la concepción correcta, desde el punto de vista del nivel de enseñanza impartido, esto es, desde la relación institucional presentada al alumno al comienzo de la enseñanza del tema. En consecuencia, estos alumnos manifiestan unas concepciones intuitivas respecto a la asociación entre variables cualitativas que coinciden con las que se les espera enseñar.

La estrategia 3 sólo difiere de estas anteriores en el hecho de que el alumno no llega a cuantificar las frecuencias relativas. Lo mismo ocurrirá en las estrategias 4, 5 y 6 que describimos a continuación. Estos alumnos concibirían la asociación como una correspondencia entre los pares de valores (x_i, y_j) y las frecuencias, pero al realizar la comparación en términos de frecuencias absolutas, no tienen una base común de comparación; como ocurre en el caso de comparar fracciones sin reducir a común denominador. Vemos, en consecuencia, que estos alumnos tienen una concepción correcta de la asociación, pero presentan dificultades en el razonamiento proporcional.

4. *Compara dos o más distribuciones de frecuencias absolutas condicionadas con la marginal correspondiente* (se codifica como VDFAC). Procedimientos: [15, 17] en las tablas 2x2; [5, 7, 20, 42, 50, 54] en la tabla 2x3 y [2, 4, 9, 16] en la tabla 3x3, descritos en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.

Esta estrategia lleva implícita la idea de dependencia como la variación de las frecuencias condicionadas de una variable respecto a la otra. Sin embargo, el alumno no llega a calcular las frecuencias relativas, realizando comparaciones bien cualitativas o aditivas entre las frecuencias condicionales y la marginal, por lo que no llega a cuantificar la diferencia de probabilidades de valores de una variable en función de otra.

5. *Compara una frecuencia absoluta de cada distribución condicionada con la marginal correspondiente* (se codifica como FACFAM). Procedimientos: [11, 27, 58, 70] en las tablas 2x2, descritos en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.

Similar a la anterior, aunque sólo se compara una de las frecuencias en cada distribución condicional. Lleva implícito la idea de que es suficiente la variación de la frecuencia condicional de un sólo valor de Y al variar X para la dependencia. No llega, sin embargo, a calcular las frecuencias relativas.

6. *Compara o suma las diagonales* (se codifica como DIAGONAL). Procedimientos: [50, 66, 68, 75, 77, 80] en las tablas 2x2; [4, 43] en la tabla 2x3 y [15] en la tabla 3x3, descritos en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.

En esta categoría se incluyen los que comparan de alguna manera los casos favorables a la asociación a y d con los desfavorables b y c, [66 y 75] (Inhelder y Piaget, 1955; Shaklee y Tucker, 1980). También se ha incluido los que utilizan sólo las casillas b y c. En este caso, al utilizar sólo los casos favorables (casillas a y d) o los desfavorables (casillas b y c), en realidad implícitamente se está comparando con los otros dos, con lo que si las frecuencias marginales son iguales, la estrategia es correcta. Esta estrategia fue considerada correcta por Inhelder y Piaget (1955), sin embargo Jenkins

y Ward (1965) señalan que sólo produce respuestas adecuadas cuando los valores marginales de la tabla de contingencia en filas o en columnas son iguales.

Estrategias incorrectas

7. *Utiliza una sola casilla* (se codifica como UNACEL). Procedimientos: [1, 2, 3, 4, 12, 33, 34, 40, 46, 53, 54, 56, 63, 64] en las tablas 2x2 y [16, 31, 32, 52] en la tabla 2x3, descritos en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.

Es equivalente al nivel I de Pérez Echeverría (1990) e incorrecta, porque no utiliza la información de las otras casillas. El sujeto no percibe el problema como de comparación de probabilidades.

8. *Utilizar una única distribución condicional* (se codifica como UNADC). Procedimientos: [6, 7, 8, 14, 18, 24, 25, 44, 65, 67] en las tablas 2x2; [3, 5, 14, 18, 23, 24, 25, 30, 33, 37, 38, 44, 47, 49, 51, 59, 61] en la tabla 2x3 y [3, 5, 8, 10, 11] en la tabla 3x3, descritos en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.

Se pueden considerar tres casos:

- a) Comparar las frecuencias de una sola distribución condicional.

El uso de esta estrategia lleva consigo la creencia de que comparar las dos frecuencias absolutas de una distribución condicional es suficiente para encontrar la existencia o ausencia de asociación. Su incorrección es debida a ignorar la otras frecuencias condicionadas.

- b) Comparar las frecuencias absolutas de una sola distribución condicional con la marginal correspondiente.

En esta estrategia se compara como en la anterior, pero además la comparación se extiende al total marginal. El alumno cree que esto es suficiente para detectar la asociación. No se llegan a calcular frecuencias relativas y se emplea una sola distribución.

- c) Comparar las frecuencias relativas de una sola distribución condicionada.

Similar a la anterior, pero mejorada; en lugar de comparar las frecuencias absolutas entre sí y con el total marginal, se comparan las frecuencias relativas de una sola distribución marginal. No es correcta, al no tener en cuenta la otra distribución condicionada.

9. *Utiliza frecuencias relativas dobles respecto al total de la muestra* (se codifica como FRDOBLE). Procedimientos: [16, 22, 23, 29, 30, 31, 35, 36, 41, 45, 55, 57, 76] en las tablas 2x2 y [45, 60] en la tabla 2x3, descritos en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.

En esta estrategia parece ser que los alumnos buscan la probabilidad de ocurrencia de cada casilla, en lugar de la razón existente entre las mismas. En caso de comparar las cuatro frecuencias **a, b, c, d** con el total o de usar las cuatro frecuencias relativas dobles, se está empleando una idea de similaridad, en lugar de la idea de asociación, ya que estaría relacionado con el empleo implícito del índice de similaridad de Russel y Rao (Celeux y cols. 1989) que se define:

$$D(x_1, x_1) = \frac{a}{a + b + c + d}$$

Las estrategias 7, 8 y 9 corresponden a una concepción localista de la asociación, pues el alumno no utiliza toda la información disponible.

10. Utiliza diversos tipos de frecuencias (se codifica como MARGINAL). Procedimientos: [32, 42, 47, 49, 62, 71, 79, 81] en las tablas 2x2; [12, 19, 27, 35, 39] en la tabla 2x3, descritos en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.

En este apartado se ha incluido el uso de los tipos de frecuencias, que no se pueden clasificar en los apartados anteriores, como comparar las frecuencias marginales o el uso de una de las frecuencias marginales.

11. Otro tipo de estrategias (se codifica como OTRAS). Procedimientos: [13, 37, 43, 51, 52, 69, 73, 78, 82] en las tablas 2x2; [11, 26, 53, 55, 56, 57, 58] en la tabla 2x3 y [1, 19, 99] en la tabla 3x3, descritos en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.

En este apartado se han incluido las respuestas que no se pueden clasificar en los apartados anteriores, como plantear un sistema de ecuaciones o responder sin especificar como se ha obtenido la respuesta.

Cabe destacar el procedimiento 78 de las tablas 2x2, que consiste en restar una cantidad constante a una fila o columna, para luego comparar con la otra. Esta forma de actuar está emparentada con la búsqueda de proporcionalidad por procedimientos aditivos en lugar de multiplicativos.

12. No contesta o respuesta confusa (se codifica como NORESP). Procedimientos: [0, 38, 39] en las tablas 2x2; [0, 6, 8] en la tabla 2x3 y [0, 6] en la tabla 3x3, descritos en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.

En la tabla 2.3.5.1.4 se dan las frecuencias de aparición de cada una de las anteriores estrategias. Se puede observar que las estrategias correctas (1, 2) aparecen en los cuatro primeros ítems con un porcentaje similar, alrededor del 20 por ciento. En el ítem H el porcentaje decrece, pero se debe tener en cuenta que la estrategia 2 no se puede utilizar en este ítem. Si se considera que en este ítem se ha dado el máximo de no respuestas, el porcentaje de uso de estrategias correctas más el de las parcialmente correctas es similar al resto de los ítems; mientras que la estrategia 1 tiene porcentaje similar en el ítem H que en el resto de ítems. El ítem F tiene un bajo porcentaje de uso de la estrategia 1, puede ser debido a la alta frecuencia que tienen las casillas a y d, que incide en que los alumnos utilicen otro tipo de estrategia, por ejemplo la 2 que tiene mayor porcentaje de uso en este ítem que en el resto.

Las estrategias parcialmente correctas tienen un porcentaje de uso próximo al 40 por ciento en los ítems E, F, G y H. En el ítem D, que solo llega al 10.7 por ciento, probablemente debido a que al tener la casilla a máxima frecuencia y coincidir con las teorías previas (el 55.4 de los alumnos declaran dependencia directa), el alumno cree suficiente utilizar una o dos casillas para justificar la dependencia, lo que da lugar a un tipo de estrategia incorrecta.

Por tanto, prácticamente la mitad de los alumnos utilizan un estrategia incorrecta en el ítem D. En los ítems E, F y G, aproximadamente el 30 por ciento de los alumnos han utilizado una estrategia incorrecta. En el ítem H se han utilizado estrategias incorrectas en menor porcentaje (13.2 por ciento),

debido a que hay un mayor número de no respuestas.

Tabla 2.3.5.1.4 Frecuencia y porcentaje de estrategias en tablas de contingencia según conceptos matemáticos implícitos.

Estrategia	Item D	Item E	Item F	Item G	Item H
1	8(3.8)	16(7.5)	2(0.9)	20(9.4)	18(8.4)
2	33(15.5)	27(12.6)	35(16.4)	21(9.9)	
3	13(6.1)	39(18.3)	34(16.0)	62(29.1)	5(2.3)
4	3(1.4)	19(8.9)	21(9.8)	15(7.0)	76(35.6)
5	2(0.9)	19(8.9)	17(8.0)		
6	5(2.3)	11(5.2)	18(8.4)	7(3.3)	4(1.9)
7	29(13.6)	26(12.2)	22(10.3)	6(2.8)	
8	56(26.3)	28(13.2)	30(14.1)	47(22.1)	24(11.3)
9	1(0.5)	6(2.8)	7(3.3)	2(0.9)	
10	8(3.8)		1(0.5)	6(2.8)	
11	13(6.1)	2(0.9)	3(1.4)	7(3.3)	4(1.9)
12	42(19.7)	20(9.8)	23(10.8)	20(9.4)	82(38.5)

Analisis de correspondencias de estrategias empleadas en los juicios de asociación en tablas de contingencia

Uno de los objetivos perseguidos en esta investigación es la realización de un estudio global de las estrategias empleadas por los alumnos en la obtención de juicios de asociación a partir de tablas de contingencia, tanto de tamaño 2x2, como de mayor dimensión. Con este objetivo, en el instrumento de recogida de datos se incluyeron una tabla 2x3 y otra 3x3, además de tres tablas 2x2 correspondientes a los casos de independencia, dependencia directa e inversa.

Como ya se ha descrito, hemos efectuado una doble clasificación de las estrategias empleadas por los alumnos en la solución de estos problemas: Por un lado, se han estudiado los niveles de elaboración de estrategia, de acuerdo con los procedimientos y resultados de diversas investigaciones en el campo de la psicología y comparado nuestros resultados con los de dichas investigaciones. Por otro, se ha procedido a clasificar las estrategias, de acuerdo con los conceptos matemáticos y teoremas en acto implícitos en el uso de las mismas, en el caso de estrategias correctas y parcialmente correctas y de acuerdo con distintos tipos de error conceptual, en el caso de estrategias incorrectas.

El estudio estaría incompleto si no finalizásemos con el análisis del posible efecto de las variables de tarea incluidas en estos ítems sobre las

estrategias mencionadas. En opinión de Vergnaud (1990), parte del significado de los objetos matemáticos depende de las situaciones en que se aplican, por la estrecha relación existente entre los mismos y las situaciones en que se emplean. Este hecho también ha sido resaltado por Steimbring (1990) para el caso de los conceptos estadísticos y, ya que las principales variables de tarea de nuestro estudio son características del contenido matemático, cabe esperar que al variar éstas se provoque un cambio en la conducta resolutora de los alumnos.

Puesto que el enfoque metodológico de la investigación ha sido cualitativo y multivariante, creemos que la técnica más adecuada para el análisis de estas estrategias es el análisis de correspondencias (Escofier y Pagés, 1988; Cuadras, 1991). Su objetivo es el de servir de instrumento en el estudio de los sistemas de interrelaciones complejas entre variables y en la determinación de la estructura de tales sistemas (Cornejo, 1988). El conjunto de estrategias empleadas por un grupo de alumnos en un conjunto de problemas de asociación puede ser, sin duda, considerado uno de tales sistemas, ya que la investigación psicológica ha descrito la variabilidad de tales estrategias, no sólo intrapersonalmente, sino en el mismo sujeto, en función de las variables de tarea (Scholz, 1991).

Generalmente, en estos estudios se analiza el porcentaje de respuestas correctas o de un tipo dado de estrategia, en función de las variables de tarea, es decir, se trata cada una de las respuestas como una única variable dependiente. Consideramos de interés el estudio del conjunto de interrelaciones entre los diferentes tipos de estrategias y de éstas con los problemas específicos propuestos y con las variables de tarea de los mismos. De este modo, hemos aplicado el análisis de correspondencias, utilizando el paquete estadístico BMDP (Dixon y cols. 1990) a la tabla de datos 2.3.5.1.4.

Como variables suplementarias se han introducido seis filas adicionales, que representan mediante 1 ó cero para cada uno de los ítems si el ítem en cuestión presenta o no presenta un valor dado en cada una de las dos variables de tarea: relación teoría - datos y tipo de asociación, obteniéndose la tabla 2.3.5.1.5

Tabla 2.3.5.1.5 Variables suplementarias

Característica del ítem	Código	Situación presentada en el ítem				
		Fumar	Dieta	Alergia	Examen	Visión
Relación teoría-datos:						
Teoría a favor	(TFAVOR)	0	1	0	1	0
Teoría en contra	(TCONTRA)	1	0	0	0	0
No hay teoría	(NTEORIA)	0	0	1	0	1
Tipo dependencia:						
Directa	(DIRECTA)	0	0	1	1	0
Inversa	(INVERSA)	0	1	0	0	0
Independencia	(INDEP)	1	0	0	0	1

En el análisis de correspondencias se ha obtenido un valor Chi-cuadrado significativo (ver figura 2.3.5.1.1), que indica la dependencia entre ítems y tipos de estrategias en la tabla 2.3.5.1.4. Al ser la mínima frecuencia esperada en dicha tabla igual a 3 y el 16.6 % de frecuencias esperadas menores

que cinco, se cumplen los requisitos de aplicabilidad de este procedimiento. Puesto que no se alcanza el tope del 20 % de frecuencias esperadas pequeñas y el valor Chi cuadrado es muy significativo, se ha preferido no agrupar más las filas, puesto que, conceptualmente, los diversos tipos de categorías son diferentes y el perfil de las dos filas de menor frecuencia es diferenciado. Al observar la descomposición de la inercia total encontramos que el primer factor explica el 59.6% del total de la inercia, por lo que se trata de un fenómeno casi unidimensional. Entre los dos primeros factores explican el 81.3 % de la inercia, como se observa en los resultados obtenidos, por lo que se restringe la interpretación a estos dos factores.

INERCIA TOTAL = SUMA DE AUTOVALORES = 0.4519				
EJE	AUTO- VALOR	% DE INERCIA	% ACUM.	HISTOGRAMA
1	0.269	59.6	59.6	*****
2	0.098	21.7	81.3	*****
3	0.074	16.3	97.5	*****
4	0.011	2.5	100.0	*

CHI - CUADRADO CON 44 GL = 481.284
NIVEL DE SIGNIFICACION = 0.000

Figura 2.3.5.1.1

El rango de variación de la calidad de la representación de filas y columnas ha variado entre 1 y 0.707 que es muy alta e implica la valoración de la categorización que se ha hecho, como medio de describir la estructura de las estrategias en los juicios de asociación en tablas de contingencia.

Interpretación del primer factor: dimensionalidad de la tabla.

A continuación se interpretan los dos primeros factores a partir de las tablas 2.3.5.1.6, 2.3.5.1.7, 2.3.5.1.8 y las figuras 2.3.5.1.2 y 2.3.5.1.3.

Este factor que explica el 59.6 por ciento de la inercia opone claramente el ítem VISION ($x = -1.035$, $r = 0.998$) al resto de los ítems que tienen coordenadas positivas. Las correlaciones y coordenadas de estos ítems con el eje son pequeñas, ordenándose en el eje los ítems del modo siguiente: ALERGIA (2x2, dependencia directa; $x = 0.312$, $r = 0.390$), DIETA (2x2, dependencia inversa; $x = 0.296$, $r = 0.395$), FUMAR (2x2, independencia; $x = 0.217$, $r = 0.123$), EXAMEN (2x3, asociación; $x = 0.210$, $r = 0.133$).

Los ítems se han ordenado por dimensionalidad y, dentro de los de menor dimensión, por dificultad relativa. En consecuencia, el factor opone las estrategias más empleadas en tablas de pequeña dimensión frente a la tabla 3x3. En el primer grupo, y con coordenadas y correlaciones positivas, se incluyen todas las estrategias excepto la no respuesta (NORESP; $x = -0.602$, $r = 0.899$), la comparación por pares de valores equivalentes de todas las varias distribuciones de frecuencias condicionales absolutas (VDFAC; $x = -0.901$, $r = 0.905$) o relativas (VDFRC), esta con unos pesos mucho más pequeños, debido a que, en general es una estrategia muy poco empleada. Como señalan Nisbett y Ross (1980), los sujetos generalmente no emplean por si mismos las estrategias normativas, que son bastante sofisticadas, en los juicios de asociación, a menos que hayan recibido una instrucción específica el respecto.

Tabla 2.3.5.1.6 Resultados del análisis de correspondencias (filas)

FILA	MASA	QLT	INR	EJE 1		EJE 2	
				FACT	COR2	FACT	COR2
1 VDFRC	0.060	0.707	0.017	-0.221	0.175	0.077	0.021
2 FRCFRM	0.109	0.981	0.032	0.506	0.870	0.005	0.000
3 POSIB	0.144	0.998	0.062	0.413	0.393	-0.086	0.017
4 VDFAC	0.126	0.998	0.113	-0.901	0.905	-0.282	0.089
5 FACFAM	0.036	0.984	0.045	0.576	0.262	-0.904	0.647
6 DIAGONAL	0.042	0.831	0.014	0.312	0.303	-0.405	0.511
7 UNACEL	0.078	0.950	0.037	0.513	0.550	-0.018	0.001
8 UNADC	0.174	0.998	0.019	0.154	0.215	0.295	0.783
9 FRDOBLE	0.015	0.992	0.011	0.554	0.404	-0.662	0.578
10 MARGINAL	0.014	0.990	0.018	0.425	0.145	1.025	0.844
11 OTRAS	0.027	0.998	0.013	0.111	0.027	0.653	0.910
12 NORESP	0.176	1.000	0.071	-0.602	0.899	0.113	0.032

Tabla 2.3.5.1.7 Resultados del análisis de correspondencias (Columnas)

				EJE 1		EJE 2	
COLUMNA	MASA	QLT	INR	FACTOR COR2		FACTOR	COR2
1 FUMAR	0.200	0.999	0.076	0.217	0.123	0.477	0.594
2 DIETAM	0.200	0.869	0.044	0.296	0.395	-0.324	0.474
3 ALERGIA	0.200	0.899	0.050	0.312	0.390	-0.327	0.427
4 EXAMEN	0.200	0.997	0.067	0.210	0.133	0.220	0.145
5 VISION	0.200	1.000	0.215	-1.035	0.998	-0.046	0.002

En consecuencia, el porcentaje de inercia explicado por este factor, así como el peso que la tabla 3x3 tiene en el mismo, nos señalan que, en general, las estrategias intuitivamente empleadas en los juicios de asociación con tablas 2x2 tienden a ser modificadas al pasar a una dimensión superior, lo que se confirma analizando la tabla de porcentajes de estrategias en cada uno de los ítems. El sujeto resuelve con éxito las tareas de tablas 2x2, en algunos casos, empleando estrategias no normativas e incluso es capaz de hallar y emplear una estrategia correcta por sí mismo (alrededor de un 20 por ciento de casos en nuestra muestra). Sin embargo este porcentaje ha bajado a un 8.4 por ciento de casos en la tabla 3x3, en la que estos sujetos no han sido capaces de generalizar dicha estrategia correcta, aunque si han sido capaces de extenderla a la tabla 2x3, puesto que sólo tiene dos filas. El porcentaje mucho mayor de no respuestas en la tabla 3x3 es un hecho que también indica la mayor dificultad de este ítem.

Tabla 2.3.5.1.8 Resultados del análisis de correspondencias
(Filas suplementarias)

		EJE 1		EJE 2	
FILAS	QLT	FACTOR	COR2	FACTOR	COR2
1 TFAVOR	0.709	0.487	0.158	-0.166	0.018
2 TCONTRA	0.990	0.418	0.044	1.524	0.581
3 NTEORIA	0.616	-0.696	0.323	-0.596	0.237
4 DIRECTA	0.460	0.503	0.169	-0.170	0.019
5 INVERSA	0.349	0.570	0.081	-1.035	0.268
6 INDEP	0.994	-0.788	0.414	0.688	0.315

QLT = Calidad de representación
FACTOR = Coordenada con el factor (x)
COR2 = Coeficiente de correlación con el factor (r)

Las dos únicas modalidades de las variables de tarea que tiene una correlación moderada con este eje es la independencia (INDEP; $x = -0.788$, $r = 0.414$) y la no existencia de teorías (NTEORIA; $x = -0.696$, $r = 0.323$), ambas con coordenada negativa. Ello indica una pequeña influencia de estos valores sobre el hecho de la falta de respuesta y de la disminución de las estrategias más sofisticadas de comparación de varias distribuciones condicionales por pares de valores. Ello se explica porque en el caso de independencia, al ser proporcionales dichas distribuciones de frecuencia, nos encontramos con un caso de mayor dificultad en la comparación de probabilidades, que según Inhelder y Piaget (1955) sólo se resuelve en el periodo III b de las operaciones formales.

Interpretación del segundo factor : "correlación ilusoria" en tablas 2x2

Este factor, con un peso mucho menor (21.7% de la varianza), separa en dos grupos las tabla de contingencia 2x2, oponiendo el caso de independencia (FUMAR; $x = 0.477$, $r = 0.594$) a los otros dos casos, (DIETA; $x = -0.324$, $r = 0.474$ y ALERGIA; $x = -0.327$, $r = 0.427$). Ello nos indica una diferenciación de estrategias en el caso de la independencia frente al caso de la dependencia tanto directa como inversa, para la tabla 2x2.

Al observar la separación producida entre las estrategias, observamos que en la parte positiva del eje, asociada a la tabla 2x2, caso de independencia, aparecen estrategias incorrectas, como el empleo de frecuencias marginales (MARGINAL; $x = 1.025$, $r = 0.844$), el apartado de otras (OTRAS; $x = 0.653$, $r = 0.910$), el empleo de una sola distribución condicional (UNADC; $x = 0.295$, $r = 0.783$). Por el contrario, en la parte negativa del eje aparecen estrategias parcialmente correctas: la comparación de una frecuencia absoluta condicional de cada distribución con la marginal correspondiente (FACFAM; $x = -0.904$, $r = 0.647$); la comparación de diagonales (DIAGONAL; $x = -0.405$, $r = 0.511$). El uso de frecuencias relativas dobles (FRDOBLE; $x = -0.662$, $r = 0.578$), aunque incorrecta tiene poco peso al haber sido empleada sólo un 1.5% de casos.

En resumen, las estrategias incorrectas o parcialmente correctas no han sido empleadas indistintamente en las tablas 2x2, sino que ha habido un mayor peso de estrategias incorrectas frente a las parcialmente correctas en el caso de independencia. En particular, el empleo de una sola distribución condicional ha estado ligado al caso de independencia.

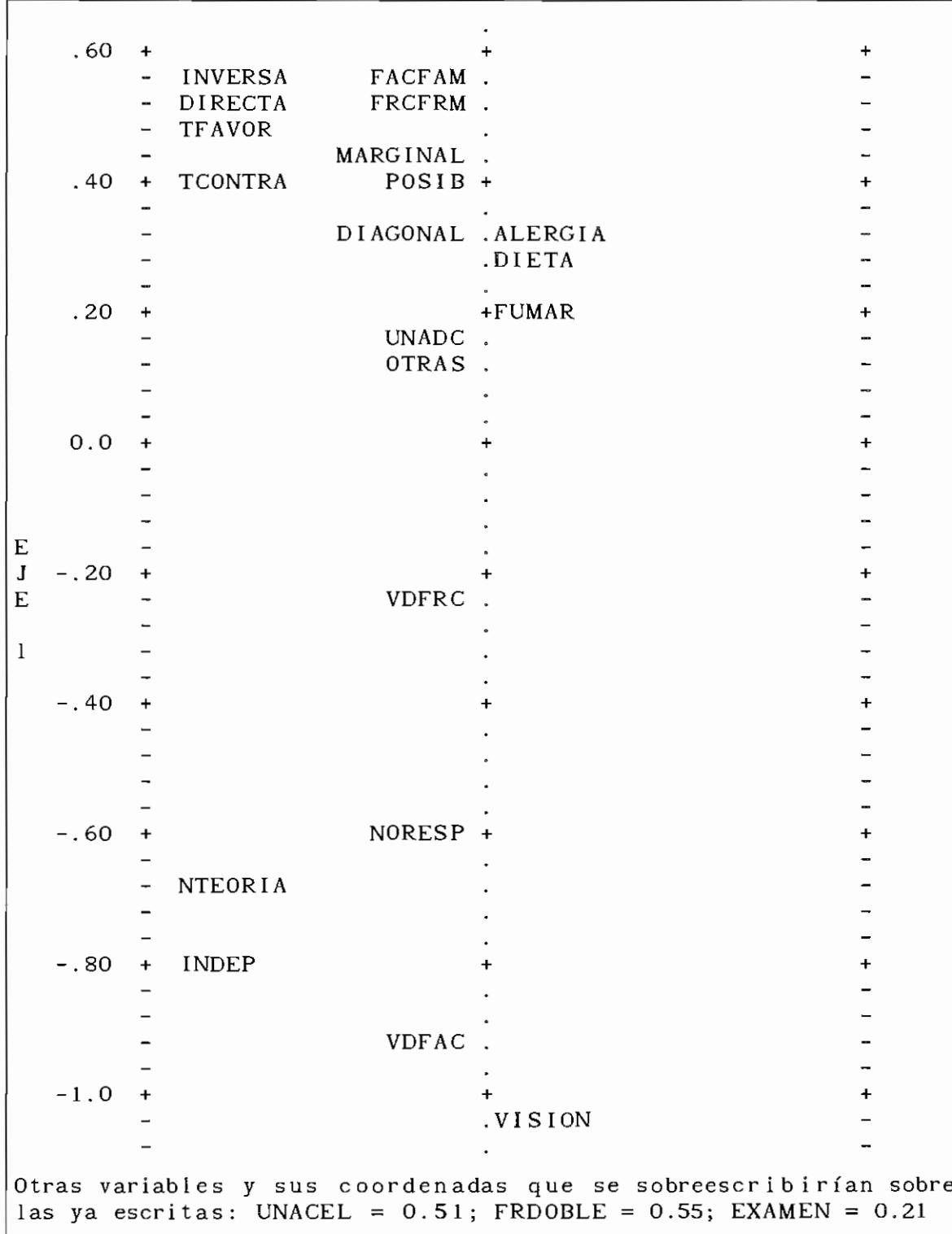


Figura 2.3.5.1.2.-Representación gráfica del primer eje

Al estudiar las variables suplementarias, además del peso de la independencia (INDEP; $x = 0.688$, $r = 0.315$) que no es muy grande, se suma en el mismo sentido el de la teoría en contra de la contingencia expresada en los datos (TCONTRA; $x = 1.524$, $r = 0.581$), con mayor intensidad. Interpretamos este hecho como indicativo de que el cambio de estrategias que hemos señalado en los dos tipos de tablas 2x2 ha sido debido al efecto conjunto de la independencia empírica en la tabla presentada, que implica la necesidad de comparación de probabilidades en caso proporcional, y el hecho de que las teorías

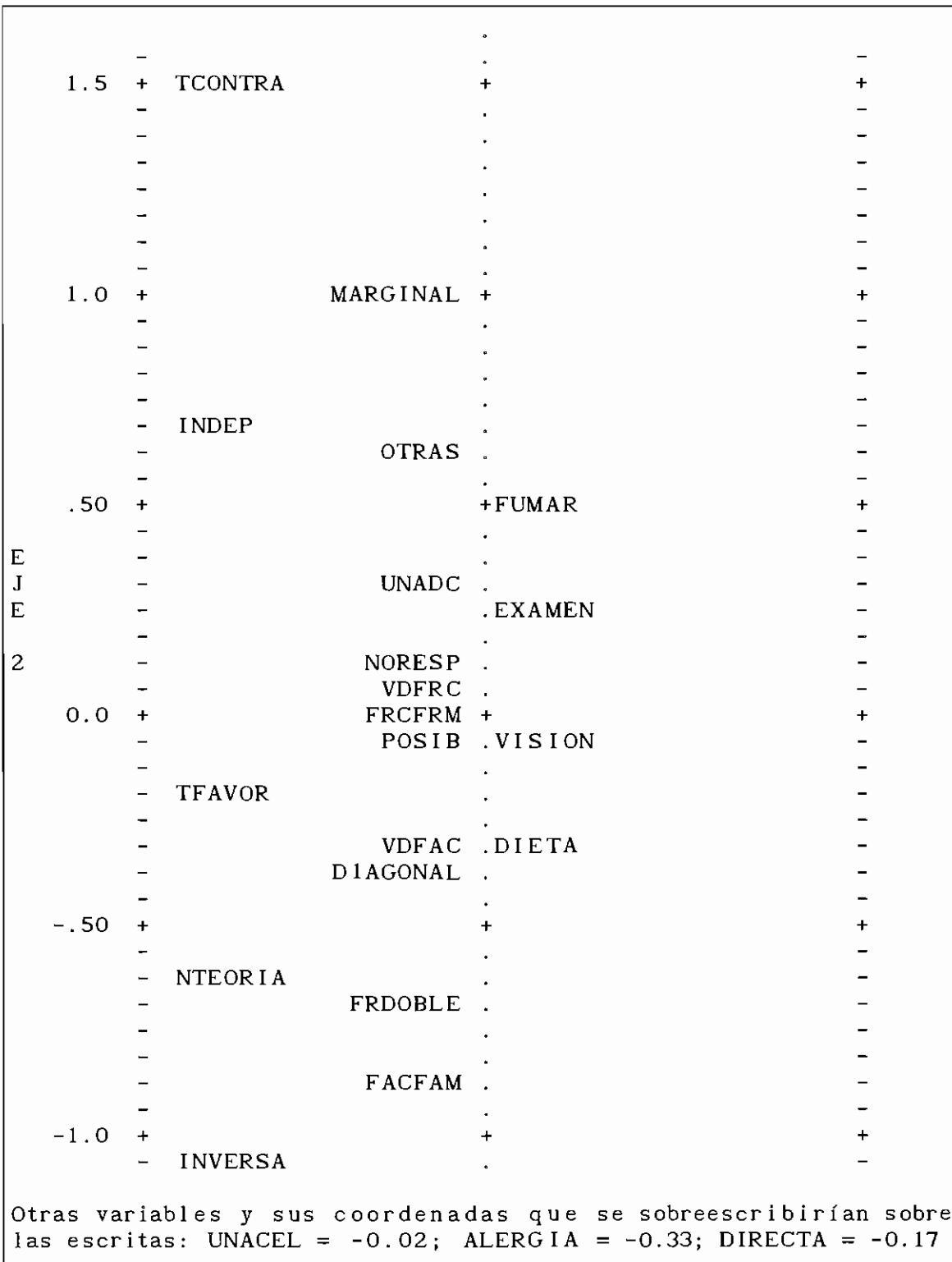


Figura 2.3.5.1.3.-Representación gráfica del segundo eje

previas de los alumnos en la tabla dada es contraria a la independencia empírica de los datos. Esto es, los alumnos de la muestra, ante una expectativa de asociación no confirmada por los datos proporcionados, han cambiado de estrategia, habiéndose producido un mayor peso de las estrategias erróneas, en un intento de confirmación de una "correlación ilusoria" (Chapman y Chapman, 1969).

2.3.5.2. Estrategias empleadas por los alumnos en los juicios de asociación en las nubes de puntos

Cuando se ha invitado a los alumnos de nuestro estudio a dar un juicio de asociación sobre una situación planteada en un contexto de nube de puntos o diagrama de dispersión, se observa en los procedimientos de resolución organizaciones invariantes de la conducta para un mismo tipo de situación. El análisis de los mismos revela elementos conceptuales subyacentes, esto es, conceptos y teoremas en acto (Vergnuad, 1982). De la misma manera que se hizo en la muestra piloto se ha procedido a la clasificación de las estrategias empleadas por los alumnos a responder a cuestiones de interpretación de un diagrama de dispersión. Las categorías de respuestas se describen con detalle en los anexos 2.2.1 y 2.2.2. Se ha realizado posteriormente un agrupamiento, atendiendo a los conceptos matemáticos puestos en juego de manera implícita o explícita agrupándose también en tres categorías: correctas, parcialmente correctas e incorrectas, como se muestra en la tabla 2.3.5.2.1. A continuación se comentan los resultados, comparándolos con otros obtenidos en diversas investigaciones.

Si comparamos la tabla 2.3.5.2.1 con su homóloga 2.2.5.2.1 de la muestra piloto, se puede observar que el porcentaje de no respuestas es substancialmente menor en la muestra de comparación, salvo en el ítem K que tiene un porcentaje importante de no respuestas. Los porcentajes de estrategias correctas, parcialmente correctas e incorrectas en los ítems I y K son similares, invirtiéndose los términos en el ítem J, debido a su fuerte dependencia.

Tabla 2.3.5.2.1 Frecuencia y porcentaje de estrategias empleadas para los juicios de correlación en nube de puntos

Estrategias	Item I	Item J	Item K
CORRECTAS:			
1 Compara globalmente	16 (7.5)	3 (1.4)	28 (13.1)
2 Emplea el crecimiento	2 (0.9)	1 (0.5)	4 (1.9)
3 Usa el decrecimiento	4 (1.9)	131 (61.5)	1 (0.5)
4 Función constante	9 (4.2)	2 (0.9)	3 (1.4)
PARCIALMENTE CORRECTAS:			
5 Interpreta pares	49 (23.0)	27 (12.7)	4 (1.9)
14 Espera valores similares			21 (9.9)
16 Comp. nube estándar			3 (1.4)
INCORRECTAS:			
6 Pares mal interpret.	4 (1.9)	3 (1.4)	25 (11.7)
7 Aplicación biyectiva	1 (0.5)	1 (0.5)	1 (0.5)
8 Teorías previas	22 (10.3)	15 (7.0)	6 (2.8)
9 Otras variables	68 (31.9)	1 (0.5)	
10 Uniformidad gráfica	14 (6.6)	1 (0.5)	21 (9.9)
11 No existe regla	1 (0.5)		
13 No causalidad			50 (23.5)
15 Subconjunto dominio	2 (0.9)	3 (1.4)	1 (0.5)
99 Otras	6 (2.8)	4 (1.9)	4 (1.9)
12 Argumento confuso	5 (2.3)	3 (1.4)	1 (0.5)
No contesta	10 (4.7)	18 (8.5)	40 (18.8)

En las estrategias correctas del ítem I destacan la comparación global de los puntos de la nube y el argumentar un crecimiento nulo. En las parcialmente correctas sólo se ha utilizado la estrategia 5, que consiste en emplear pares de valores concretos bien interpretados. Aunque la interpretación hecha de los pares de puntos es correcta, los alumnos que la emplean manifiestan una concepción localista de la asociación. Nisbett y cols. (1982) indican que una de las fuentes de influencia en el proceso de atribución causal es la información relativa al consenso. Esta información indica hasta qué punto la respuesta obtenida para un caso particular en un grupo es relativamente rara, o bien esta respuesta es la típica en la mayor parte de los casos del grupo; la obtención de un juicio de asociación precisa información sobre la globalidad de los datos.

Kahneman y Tversky (1973) han demostrado que, al contrario de lo que cabría esperar, los sujetos no consideran la importancia de la tasa global de ocurrencia (base rates) del caso o casos en cuestión en una población o grupo, en el momento de efectuar una predicción sobre la relación entre dos variables, esto es, ignoran la información relativa al consenso. Consideramos que los alumnos que utilizan para su juicio pares de puntos aislados, tanto interpretados correctamente como incorrectamente, pueden ser englobados en la categoría de sujetos descritos por Kahneman y Tversky (1973). En consecuencia, al realizar un juicio sobre la asociación entre variables en una nube de puntos, algunos sujetos se fijan en casos particulares, olvidando la tasa relativa de ocurrencia respecto al global de los datos, lo que les lleva en ocasiones a valorar inadecuadamente el tipo de asociación entre las variables.

En el uso de estrategias incorrectas destaca, en primer lugar, la influencia de teorías previas. Según Tversky y Kahneman (1982), en un juicio sobre asociación o sobre causalidad se investigan probabilidades condicionales $P(X|D)$ de un suceso X , en base de cierta evidencia o dato D . Desde el punto de vista psicológico, se distinguen varios tipos de relaciones, que pueden ser percibidas por el sujeto respecto a esta probabilidad. Si D se percibe como la causa de que ocurra X , se dice que D es el dato causal. Si X es percibido como causa de D , se dice que D es el dato diagnóstico. En el caso de que ni D ni X se perciban como causas, sino como consecuencias de otro factor diremos que D es un dato indicativo de X . Finalmente, si aparece que ni D ni X están relacionados en forma alguna, se considera que D es un dato incidental.

En un tratamiento normativo de la probabilidad condicional, no es preciso efectuar una distinción entre los tipos anteriores de relaciones entre D y X , ni tampoco en un juicio estricto de asociación, ya que, como se razonó en la sección 1.4.4 puede existir asociación, aún sin darse una causalidad estricta. Un ejemplo de esta situación es el ítem K, que se refiere a la concordancia entre puntuaciones. Sin embargo, estas diferencias pueden ser importantes desde el punto de vista psicológico. Puesto que, a nivel intuitivo, un juicio de asociación puede ser interpretado por el sujeto como un juicio sobre causalidad, consideramos que la teoría expuesta por Tversky y Kahneman (1982) explica estas clases de respuestas. Los sujetos no atribuyen un papel simétrico en la relación de ambas variables, sino que utilizan sus expectativas sobre el tipo de relación existente entre las mismas, manifestando en ocasiones una concepción causalista de la asociación.

Otro argumento usado con frecuencia es que la presencia de otras variables que influyen sobre la que es considerada como dependiente origina la creencia de falta de asociación de ésta con la independiente. Esta estrategia obedece de nuevo a la interpretación de la pregunta en términos de causalidad. El sujeto emplearía incorrectamente el principio de discriminabilidad de

Kelley (otras causas son seguidas por el efecto), olvidando el principio de consistencia (la causa es seguida por el efecto), Pozo (1987). Estos sujetos aplicarían el esquema de las causas múltiples suficientes ya que, al haber distintas causas que pueden influir sobre la variable, se minimiza el papel que juega cada una de ellas por separado.

También ha destacado la creencia de que, para que exista dependencia, la nube de puntos debe ser uniforme, es decir, la relación existente entre las variables no debe tener excepciones. Observamos aquí la concepción determinista de la asociación entre variables. Por ello, si la pregunta se interpreta en términos de causalidad, estos sujetos buscarían una causa necesaria y suficiente, es decir, la causa va seguida siempre del efecto sin que éste se produzca en ausencia de aquella (Pozo, 1987).

En el ítem J, entre las estrategias correctas, destaca el decrecimiento de la función, debido a la alta intensidad de la asociación y a la concentración de los puntos sobre una línea curva. En las parcialmente correctas, sólo se ha utilizado la estrategia 5 que consiste en citar pares de valores concretos bien interpretados y entre las incorrectas destaca el uso de teorías previas.

En el ítem K, en las estrategias correctas, destaca la comparación global, donde el alumno estima las puntuaciones otorgadas por cada juez de manera general, comparando después. En las parcialmente correctas la número 14, donde el alumno espera que los valores de las puntuaciones otorgadas por ambos jueces sean similares, manifestando una concepción determinista de la asociación. Para ellos, la dependencia es funcional o no existe; también es de subrayar la comparación con una nube de puntos estándar, por el alto significado teórico que contiene, aunque el porcentaje de aparición sea pequeño. En las estrategias incorrectas destaca la número 6, en la que el alumno cita pares concretos mal interpretados. Esto se produce cuando el alumno no admite más que la dependencia funcional y cita estos pares a modo de "contraejemplo". También destaca cuando el alumno espera uniformidad en la gráfica (estrategia 10), emparentada con la anterior, ya que para él, si la gráfica no es uniforme no existe dependencia, sólo admite la dependencia funcional. Por último, se destaca la estrategia 13, en la que el alumno declara que no existe nexo causal entre las variables y, por tanto, no puede existir dependencia entre ellas, debido a que no admite la correlación debida a la concordancia, (Barbancho, 1973), observándose aquí una concepción causalista de la asociación.

Para Tversky y Kahneman (1982) es más fácil detectar una asociación cuando se da una relación de tipo causal y se pide una predicción de la aparición del efecto, dada la causa, ya que las inferencias causales (probabilidades a priori) son más sencillas que las inferencias diagnósticas (probabilidades a posteriori), o indicativas (probabilidades dobles). Esta teoría podría explicar la mayor dificultad del ítem K, ya que la relación entre las variables no sería de tipo causal sino indicativa, en la terminología de Tversky y Kahneman (1982). El que los alumnos puedan dar un significado causal a la relación entre las variables también se da en el ítem J, en el cual la intensidad de la asociación ha hecho que la mayor parte de los alumnos la reconozcan.

Se puede concluir, en consecuencia, que el tipo de relación entre las variables (relación causal, diagnóstica, indicativa o incidental) por sí sola no ha sido suficientemente explicativa en nuestro estudio del comportamiento de los alumnos, sino que ha habido una interrelación importante con la intensidad de la asociación en los datos y las teorías previas de los alumnos.

Análisis de correspondencias de las estrategias empleadas en las nubes de puntos

Al igual que en las tablas de contingencia, se ha realizado un análisis de correspondencias de la tabla que cruza las diversas estrategias en cada uno de los tres ítems (Tabla 2.3.5.2.1). Con objeto de asegurar la aplicabilidad del estadístico Chi cuadrado, se han agrupado las siguientes estrategias:

- las 2, 3 y 4 en una cuyo encabezamiento es "crecimiento", entendiendo que el alumno emplea al crecimiento positivo nulo o negativo de la nube de puntos (se han incluido en el código CRECIM).
- los casos "espera valores similares en ambas coordenadas" y "compara con la nube estándar", porque ambos se refieren a la comparación con un tipo de función lineal conocida y tienen la misma distribución de frecuencias condicionales (se han incluido en el código STANDAR).
- las respuestas confusas con las no respuesta, en cuanto que el alumno no ha sabido expresar claramente un argumento (se han incluido en el código NOARG).
- el encabezado "otras" se incluyen las estrategias de baja frecuencia: aplicación biyectiva, no existe reglas y otras.

El resto de los códigos tiene el siguiente significado:

CGLOBAL: Estrategia 1 en la tabla 2.3.5.1.1 = Comparación global de la relación existente entre las variables.

PUNTOSB: Estrategia 5 en la tabla 2.3.5.1.1 = Interpretación correcta de puntos aislados.

PUNTOSM: Estrategia 6 en la tabla 2.3.5.1.1 = Interpretación incorrecta de puntos aislados

TEORIAS: Estrategia 8 en la tabla 2.3.5.1.1 = Juicio basado en las teorías previas, sin tener en cuenta los datos del problema.

OTRASVA: Estrategia 9 en la tabla 2.3.5.1.1 = No admisión de la asociación debido a la existencia de otras variables independientes.

UNIFORM: Estrategia 10 en la tabla 2.3.5.1.1 = Esperan la uniformidad en la nube de puntos, esto es, no admitir la dispersión.

CAUSAL: Estrategia 13 en la tabla 2.3.5.1.1 = Argumentar que no existe relación entre las variables porque no existe influencia de tipo causal de una sobre otra.

En las tablas 2.3.5.2.2, 2.3.5.2.3 y en las figuras 2.3.5.2.1 y 2.3.5.2.2 se muestran los resultados del análisis de correspondencias.

Como se deduce del análisis de los autovalores ($\lambda_1 = 0.543$ con 58 por ciento de inercia y $\lambda_2 = 0.393$ con 42 por ciento de inercia), aparecen dos factores de importancia similar, por lo que, a pesar de tratarse sólo de tres ítems, nos encontramos ante un fenómeno no unidimensional. La estrategia seguida no es uniforme en la resolución de los problemas de asociación en nubes de puntos. El valor Chi cuadrado es significativo ($\chi^2 = 0.595$, $P = 0.000$) y se cumplen los requisitos de aplicación, al no tener la tabla de datos ninguna frecuencia esperada menor que 5. En la tabla 2.3.5.2.2 se muestran los resultados obtenidos para las filas y en la tabla 2.3.5.2.3 para las columnas. Puede observarse en ellas la alta calidad de representación, que

confirma la pertinencia de la categorización de las estrategias.

Tabla 2.3.5.2.2 Resultados del análisis de correspondencias (filas)

				EJE 1		EJE 2	
FILA	MASA	QLT	INR	FACTOR	COR2	FACTOR	COR2
CGLOBAL	0.074	1.000	0.031	0.618	0.909	0.195	0.091
CRECIM	0.247	1.000	0.296	-0.793	0.524	-0.756	0.476
PUNTOSB	0.126	1.000	0.060	-0.506	0.537	0.470	0.463
STANDAR	0.038	1.000	0.075	1.368	0.942	-0.338	0.058
PUNTOSM	0.050	1.000	0.045	0.927	0.960	-0.190	0.040
TEORIAS	0.068	1.000	0.014	-0.355	0.598	0.291	0.402
OTRASVA	0.108	1.000	0.208	-0.404	0.085	1.323	0.915
UNIFORM	0.057	1.000	0.027	0.617	0.806	0.302	0.194
CAUSAL	0.079	1.000	0.156	1.368	0.942	-0.338	0.058
OTRAS	0.033	1.000	0.002	-0.172	0.534	0.160	0.466
NOARG	0.121	1.000	0.022	0.383	0.795	-0.195	0.205

Tabla 2.3.5.2.3 Resultados del análisis de correspondencias (columnas)

				EJE 1		EJE 2	
COLUMNA	MASA	QLT	1NR	FACTOR	COR2	FACTOR	COR2
FUTBOL	0.333	1.000	0.270	-0.291	0.105	0.851	0.895
TASA	0.332	1.000	0.311	-0.725	0.561	-0.641	0.439
JUECES	0.335	1.000	0.355	1.008	0.958	-0.212	0.042

Primer factor: Atribución de causalidad frente a concordancia

Este factor que explica el 54.3 por ciento de la inercia, separa el ítem JUECES ($x = 1.008$, $r = 0.958$) referido a asociación en contexto de concordancia frente a los otros dos ítems: TASA ($x = -0.725$, $r = 0.561$) y FUTBOL ($x = -0.291$, $r = 0.105$) en los que es posible atribuir una interpretación de la dependencia en términos de causalidad. La resolución de los problemas de asociación en las nubes de puntos hace explicitar estrategias diferentes según la posible interpretación de la dependencia, esto es del tipo de relación entre las variables en el sentido de Barbancho (1973), atribuible a la concepción causalista o no causalista de la asociación.

Respecto a las estrategias opone la comparación con una nube estándar o búsqueda de igualdad en las dos coordenadas (STANDAR; $x = 1.368$; $r = 0.942$, estos valores, y los que siguen en este párrafo, se encuentran en la tabla

2.3.5.2.2.) y la argumentación de que no existe una relación de tipo causal (CAUSAL; $x = 1.368$; $r = 0.942$); el empleo de puntos mal interpretados (PUNTOSM; $x = 0.927$, $r = 0.960$) y la expectativa de uniformidad de la gráfica (UNIFORM; $x = 0.617$, $r = 0.806$) al uso de puntos bien interpretados (PUNTOSB; $x = -0.506$, $r = 0.537$), el crecimiento (CRECIM; $x = -0.793$, $r = 0.524$) o el apoyo en teorías previas (TEORIAS; $x = -0.355$, $r = 0.598$).

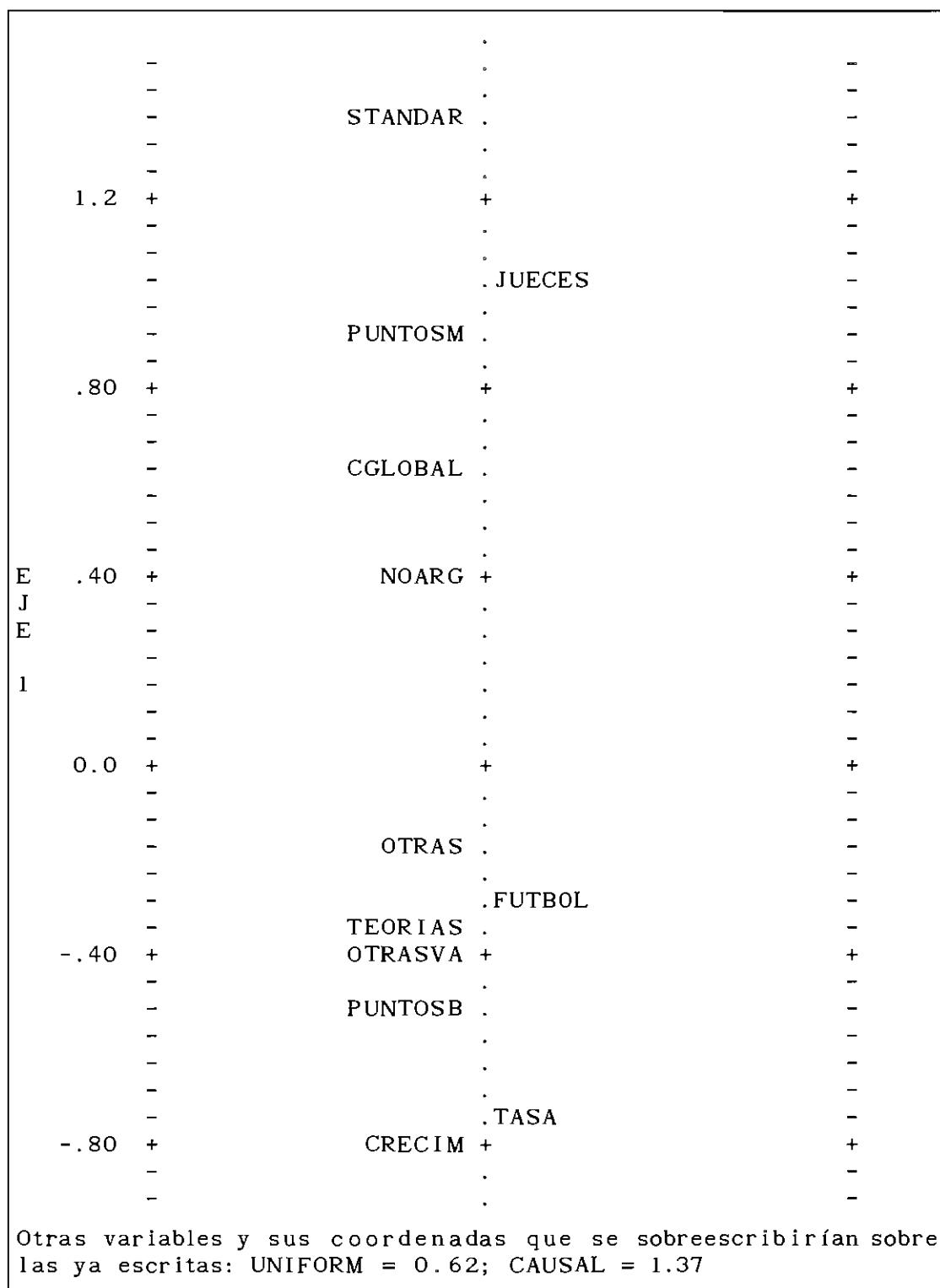


Figura 2.3.5.2.1.-Representación gráfica del primer eje.

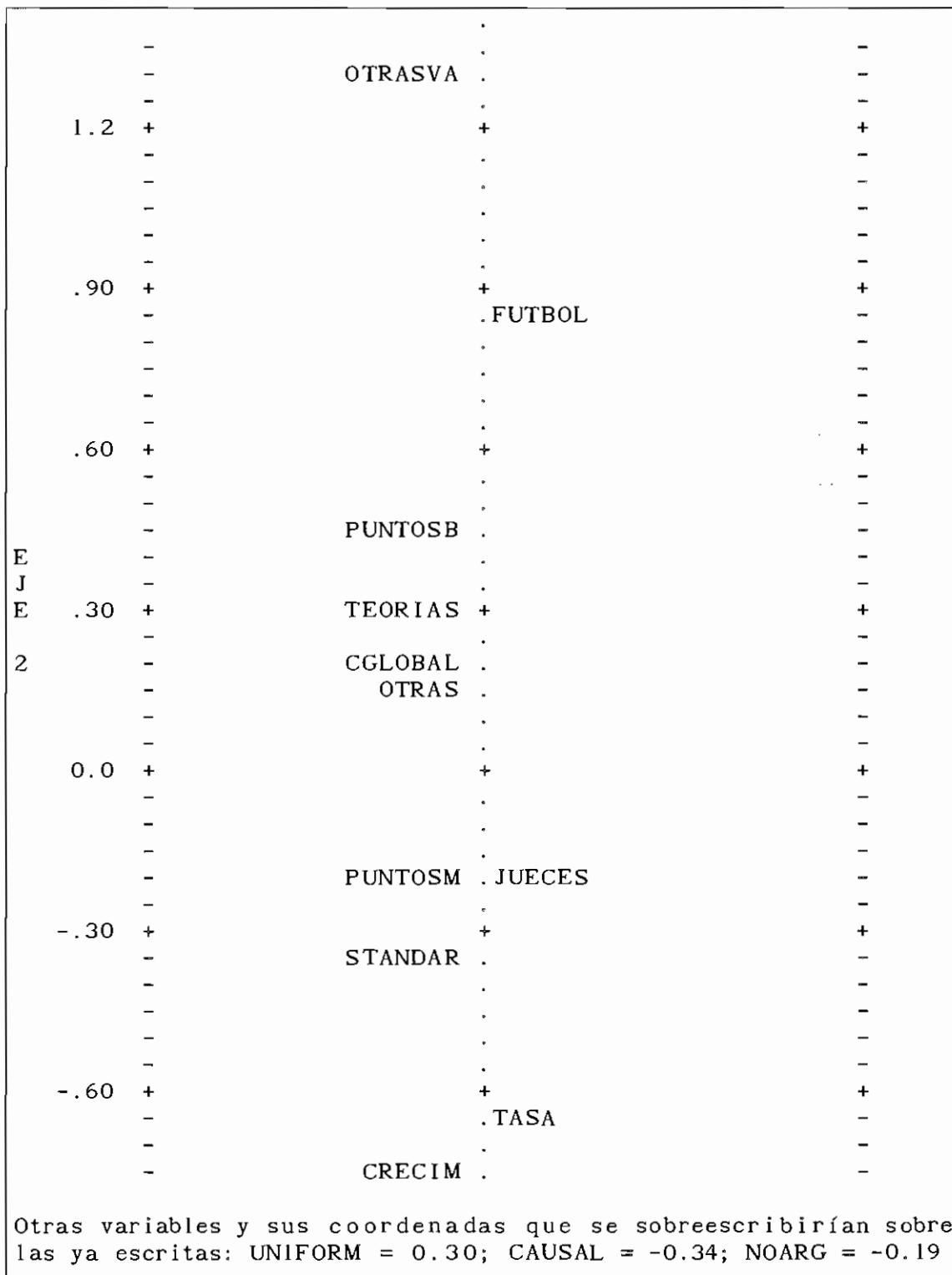


Figura 2.3.5.2.2.-Representación gráfica del segundo eje.

De este modo, observamos, por un lado que la falta de apreciación de la asociación existente en el caso de concordancia, que ya había sido señalada se apoya en consideraciones sobre la no existencia de una relación de causalidad entre las variables o bien en la no coincidencia de las puntuaciones de ambos jueces. Una parte de estos alumnos está identificando la asociación con la causalidad, aunque otra parte admitiría la concordancia, en el caso de una coincidencia exacta de las calificaciones de ambos jueces, esto es, esperaría un tipo funcional y no aleatorio de concordancia, manifestando una concepción

determinista de la asociación. Otras estrategias asociadas a este ítem son la comparación global cualitativa o la interpretación errónea de puntos aislados.

Por oposición, los alumnos han empleado preferentemente la estrategia del estudio del crecimiento de la función (CRECIM; $x = -0.793$, $r = 0.524$), o la interpretación adecuada de puntos aislados (PUNTOSB; $x = -0.506$, $r = 0.537$) como estrategias correctas en los casos en que han considerado que sería posible atribuir un valor causal (ítem FUTBOL) o al menos predictivo (ítem TASAS) a la variable independiente. Vemos que en estos ítems, incluso con una concepción localista de la asociación se ha podido llegar a una solución adecuada. Como estrategias incorrectas en estos casos han predominado la justificación de teorías previas (TEORIAS; $x = -0.355$, $r = 0.598$), también de tipo causal o la consideración de que otras variables implican la no relación de dependencia en el ítem dado (OTRASVA; $x = -0.404$, $r = 0.085$), relacionada de nuevo con la idea de causalidad.

Segundo factor: Independencia frente a dependencia

Otro factor de importancia semejante al primero, puesto que explica el 42.0 por ciento de la inercia es el que separa el ítem correspondiente a la independencia estadística (FUTBOL; $x = 0.851$, $r = 0.895$) de los otros dos ($x = -0.641$, $r = 0.439$) para TASAS y ($x = -0.212$, $r = 0.042$) para JUECES. En consecuencia, además del tipo de relación entre las variables, en el sentido de Barbancho (1973), la estrategia cambia en el caso de hallarnos ante la independencia empírica de los datos. Este hecho fue observado en las tablas de contingencia.

Sólo tres estrategias tienen a la vez una coordenada y una correlación fuerte con el eje en este caso: La primera es la justificación de que la independencia se debe a la existencia de otras variables (OTRASVA; $x = 1.323$, $r = 0.915$) que, de nuevo, confirma el hecho de que los alumnos consideran que una relación entre variables de tipo causal debe admitir una sola causa posible, ya comentada con anterioridad.

Otra estrategia asociada al caso de independencia es la justificación apoyada en la interpretación correcta de puntos (PUNTOSB; $x = 0.470$, $r = 0.463$). El empleo de teorías previas (TEORIAS; $x = 0.291$, $r = 0.402$) y el esperar uniformidad en la gráfica (UNIFORM; $x = 0.302$, $r = 0.194$) y otras estrategias (OTRAS; $x = 0.160$, $r = 0.466$) han tenido también una pequeña influencia en el caso de la independencia confirmándose así lo observado en las tablas de contingencia de un mayor peso de las estrategias incorrectas en este caso.

Por el contrario, como estrategia asociada principalmente a las nubes de punto en que existe asociación en las variables se presenta el crecimiento de la gráfica (CRECIM; $x = -0.756$, $r = 0.476$), por ser ésta una propiedad de la nube que es tanto más acusada cuanto mayor es la intensidad de la asociación.

2.3.5.3. Estrategias empleadas por los alumnos en los juicios sobre asociación en la comparación de muestras

Los diferentes procedimientos utilizados por los alumnos que se recogen en los anexos 2.2.1 y 2.2.2 se han clasificado, de acuerdo con su contenido matemático puesto en juego, bien explícita o implícitamente en estrategias: correctas, parcialmente correctas e incorrectas, obteniéndose la tabla 2.3.5.3.1.

Tabla 2.3.5.3.1 Frecuencia y porcentaje de estrategias empleadas por los alumnos en la comparación de muestras

Estrategias	Item L	Item M
CORRECTAS:		
1 Compara las medias	2 (0.9)	26 (12.2)
2 Compara los totales	1 (0.5)	35 (16.4)
3 Compara porcentajes	37 (17.4)	1 (0.5)
4 Halla dif. y compara %	4 (1.9)	
5 Compara distribuciones		31 (14.6)
18 Comp. distr. completas		3 (1.4)
PARCIALMENTE CORRECTAS:		
6 Compara caso a caso	73 (34.3)	3 (1.4)
7 Marca casos excepcionales	63 (29.6)	
8 Halla la diferencia	2 (0.9)	
9 Halla dif. y marca casos ex.	4 (1.9)	
10 Comparación global		64 (30.0)
INCORRECTAS:		
12 Espera valores similares	3 (1.4)	1 (0.5)
13 Compara máximos		6 (2.8)
14 Señal. casos no excep.	1 (0.5)	
15 Comp. medias sin cero		1 (0.5)
16 Expone teorías previas	1 (0.5)	8 (3.8)
17 Compara recorridos		3 (1.4)
19 Valora coincidencias	1 (0.5)	3 (1.4)
20 Realiza una proporción	1 (0.5)	
21 Usa suma como porcentajes		2 (0.9)
22 Suma difer. absolutas	1 (0.5)	
99 Otras	4 (1.9)	8 (3.8)
No contesta	15 (7.0)	18 (8.5)

Al comparar la tabla 2.3.5.3.1 con su homóloga de la muestra piloto, tabla 2.2.5.3.1, salta a la vista el porcentaje muy superior de no respuestas en la muestra piloto, debido posiblemente a que en la misma el tiempo resultó escaso para algunos alumnos. Tanto en la muestra piloto como en la de comparación, el porcentaje de no respuestas es mayor en las muestras independientes que en las relacionadas. Teniendo en cuenta la diferencia de no respuestas y que en la muestra de comparación hay mayor número de estrategias, los porcentajes de utilización de las estrategias son similares en la muestra piloto y en la muestra de comparación.

Otro aspecto a destacar en la tabla 2.3.5.3.1 es que existen estrategias propias de las muestras relacionadas como las 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 y otras para las muestras independientes como 1, 2, 5, 10, 13, 16, 17, 19, 21, lo que nos lleva a pensar que, aunque los alumnos no han trabajado formalmente los conceptos de muestras independientes y relacionadas, si las distinguen al actuar sobre ellas intentando detectar si existe o no asociación entre sus valores.

Igual que ocurrió con la muestra piloto, el mayor porcentaje de estrategias correctas se utilizan en las muestras independientes (ítem M) 20.7 por ciento frente al 44.1 por ciento; las estrategias parcialmente correctas en las muestras relacionadas (ítem L) 66.7 por ciento frente a 31.4 por ciento;

en las estrategia incorrectas, aunque es bajo el porcentaje en ambas, en las muestras independientes 5.8 por ciento frente a 15.1 por ciento.

Las estrategias más empleadas en muestras relacionadas han sido las siguientes:

- El 87.4 por ciento de los alumnos que han respondido al ítem L, han comparado los dos datos ofrecidos de cada sujeto y, dependiendo del grado de elaboración de las respuestas, se han obtenido las estrategias 7, 6 y 3 de la tabla 2.3.5.3.1. Si, al comparar, expresa los casos que no siguen la norma, se obtiene la estrategia 7, donde se manifiesta de nuevo la concepto determinista de la asociación, ya que no espera excepciones en la regla. Si se comparan los casos y se realiza un recuento de las mujeres que les aumenta y de las que les disminuye la presión sanguínea, pasando el recuento obtenido a porcentajes, se asigna la estrategia 3. Esta estrategia es un recuento de casos favorables y desfavorables en porcentajes, lo que en realidad es una comparación de probabilidades, habiendo transformado el problema dado en uno de tabla de contingencia 2x2. Cuando los alumnos actúan de igual modo, pero sin calcular los porcentajes, se ha asignado la estrategia 6, tabla 2.3.5.3.1.
- En las estrategias 4, 8 y 9 también han comparado los casos correspondientes en las dos muestras, pero, en este caso, han hallado las diferencias del valor numérico de la variable dependiente. Se puede concluir que, en las muestras independientes, los alumnos comparan los valores correspondientes en más del 90 por ciento de los casos y que, una vez hecha la comparación, la estrategia tiene varios grados de elaboración.

En el caso de muestras independientes las estrategias más empleadas han sido:

- La comparación de las medias de cada una de las muestras (12.2 por ciento de los alumnos). Estos alumnos estarían entre los que consideran la media como un valor representativo de los datos (Pollatsek y cols., 1981; Mevarech, 1983). Leon y Zawojewski, (1991) llevan a cabo una investigación donde seleccionan cuatro propiedades de la media: A) La media está comprendida entre los valores extremos; B) La suma de las desviaciones es cero; F) Al calcular la media, si el valor cero está presente, debe ser tenido en cuenta; G) El valor de la media es representativo para el conjunto de datos del que se ha extraído dicha media. Concluyen que las propiedades F y G son más difíciles de comprender que las A y B. Nuestros alumnos de la muestra de comparación, que han utilizado la media, han empleado la propiedad G de Leon y Zawojewski, (1991), por lo que mostrarían un conocimiento relacional de la media (Skemp, 1978; Pollatsek y cols., 1981) que consiste en disponer de esquemas apropiados o estructuras conceptuales suficientes para resolver una amplia gama de problemas donde se precise el concepto.
- Comparar los totales: Los alumnos que comparan los totales (16.4 por ciento), estarían en un nivel similar al de los que comparan las medias, ya que la suma de los datos es un valor típico del conjunto de datos (Pollatsek y cols., 1981) y, para obtener la media a partir de él, sólo se precisa dividir por el número de datos.
- Comparar las distribuciones: Cuando se comparan dos muestras, una de las preguntas que con mayor frecuencia se plantea el investigador es si dichas muestras provienen o no de la misma población. Esto es lo que, intuitivamente, han hecho estos estudiantes cuando comparan distribuciones (estrategias 5 y 18, tabla 2.3.5.3.1) que ha sido una de las estrategias correctas más

utilizadas en la comparación de muestras independientes (16 por ciento de los alumnos).

- Comparar globalmente los datos: Cuando el alumno compara globalmente los datos (estrategia 10, tabla 2.3.5.3.1), está aceptando implícitamente que todos los datos son relevantes. Decidir qué datos son relevantes para realizar un juicio de asociación es un paso importante para emitir dicho juicio, (Crocker, 1981). Esta estrategia se ha utilizado en un 30 por ciento de los casos en la comparación de muestras independientes.

Entre las estrategias incorrectas se han encontrado las siguientes:

- Los alumnos que esperan valores similares en ambas muestras o valoran coincidencias reflejan una concepción determinista de la asociación.
- Los que utilizan los máximos ven este estadístico apropiado para emitir el juicio y manifiestan una concepción localista de la asociación, probablemente influenciado por otras medidas antropométricas como la talla o el peso cuyo máximo suele ser mayor en los varones que en las hembras.
- El que compara las medias sin tener en cuenta el cero no aplica la propiedad F) estudiada por Leon y Zawojewski, (1991) y expuesta más arriba.
- Al no ser un contexto que el alumno lo conozca con algún grado de profundidad, el uso de teorías previas ha sido escaso.

En ambos tipos de muestras se han encontrado alumnos que esperan valores similares en cada una de las muestras, esto es, la dependencia funcional, manifestando una concepción determinista de la asociación.

2.3.6. OTROS ASPECTOS ESTUDIADOS

Unión de los puntos con una línea en la nube de puntos

Vimos en la muestra piloto como algunos alumnos tienden a unir los puntos con una línea recta para estudiar la relación existente entre las variables, por tanto, hemos incluido esta cuestión en el presente estudio. En la tabla 2.3.6.1 se dan los resultados. Como se puede observar, los alumnos que unen los puntos con un línea oscilan entre el 6 y el 11.7 del total de alumnos. Estos porcentajes son algo inferiores a los encontrados por Ruiz Higueras (1991), que encontró un 17 por ciento en un estudio sobre la dependencia funcional. Como se ha razonado en la muestra piloto consideramos que el hecho de unir entre sí los puntos de la nube es una práctica indicativa de una concepción determinista de la asociación en los alumnos que la emplean. Esta práctica es un paso previo al reconocimiento de una función conocida por los alumnos, a partir de la gráfica obtenida.

Tabla 2.3.6.1 Frecuencia de alumnos que unen los puntos con una línea

Item	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
I	Clasf. Liga/empates	25	11.7
J	Proteínas/natalidad	22	10.3
K	Juicio de jueces	13	6.1

Simplificación de las tablas 2x3 y 3x3

Otro aspecto a tener en cuenta en el estudio que estamos realizando, es observar si, cuando el alumno se enfrenta con tareas de realización de juicios de asociación entre variables en tablas de contingencia con dimensión mayor a 2x2, utiliza la estrategia de simplificarlas y reducirlas a otras más sencillas. Al analizar esta conducta en la muestra piloto se argumentó que podía considerarse como indicadora de una concepción causalista en los alumnos que la ponen en práctica.

Tabla 2.3.6.2 Frecuencia de alumnos que intentan reducir la tabla

Ítem	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
G	Aprob/suspender examen	28	13.1
H	Lateralidad ojos/manos	10	4.7

Por ello, se ha incluido esta variable en el ítem G (tabla 2x3) y en el ítem H (tabla 3x3), obteniéndose los resultados que se contemplan en la tabla 2.3.6.2. Como se puede observar, los alumnos tienden a reducir la tabla 2x3 más que en la 3x3. Estos porcentajes son algo inferiores a los dados en la tabla 2.2.6.2 correspondiente a la muestra piloto.

Empleo de porcentajes

El uso de porcentajes o proporciones es requisito imprescindible para utilizar una estrategia correcta en el estudio de la asociación entre dos variables en una tabla de contingencia. En la tabla 2.3.6.3 se estudia esta cuestión. Si la comparamos con su homóloga 2.2.6.3 relativa a la muestra piloto, se observa que ha aumentado el porcentaje en todos los ítems, excepto en el D.

Tabla 2.3.6.3 Frecuencia de alumnos que emplean porcentajes

Ítem	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
D	Fumar/bronquios	59	27.7
E	Dieta/trastornos	65	30.5
F	Vida sedent/alergia	59	27.7
G	Aprob/suspender examen	45	21.1
H	Lateralidad ojos/manos	25	11.7

El uso de proporciones o porcentajes en la resolución de problemas de asociación en tablas de contingencia no es abundante en la muestra de comparación. Se han utilizado más en las tablas 2x2 y, dentro de éstas, en el ítem E, donde la dependencia es inversa y la casilla a no es la de mayor frecuencia, como ocurre en el ítem D y F, por tanto, el alumno se ve "forzado" a utilizar porcentajes. En la tabla 2x3 se utilizan menos y aún menos en la

3x3. Por tanto parece ser que conforme aumenta la tabla de dimensiones, se utilizan menos los porcentajes. También parece que se utilizan poco cuando coinciden las teorías previas y la relación ofrecida en los datos presentados, confirmándose de nuevo los resultados obtenidos en el análisis de correspondencias.

Empleo de frecuencias marginales

Las frecuencias marginales son un dato importante para utilizar una estrategia correcta al estudiar la relación de dependencia entre las variables en una tabla de contingencia. En la tabla 2.3.6.4, si la comparamos con su homóloga 2.2.6.4 relativa a la muestra piloto, los porcentajes son un poco más pequeños, pero se mantienen en el mismo orden y proporción, por tanto el comentario hecho allí también es válido aquí, mostrándose de nuevo la dificultad que muestran algunos alumnos en el razonamiento proporcional.

Tabla 2.3.6.4 Frecuencia de alumnos que emplean frecuencias marginales

Item	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
E	Dieta/trastornos	120	56.3
F	Vida sedent/alergia	127	59.6
H	Lateralidad ojos/manos	51	23.9

2.4. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO DE CONCEPCIONES INICIALES

En la Sección 1.4.2. se indicó que uno de los objetivos de nuestra investigación era el estudio de las concepciones previas de los alumnos sobre la asociación estadística, utilizando una muestra representativa de problemas referidos a juicios de asociación. Este estudio se ha abordado en este capítulo, a partir de las estrategias y juicios de asociación y otras variables dependientes. Las principales conclusiones obtenidas son las siguientes:

Juicios de asociación.

No hay unidimensionalidad en los juicios, por lo que no puede afirmarse que exista un rasgo único que pueda definirse como capacidad de realizar un juicio de asociación. Tanto el análisis "cluster" como el análisis factorial ponen de manifiesto la existencia de una pluralidad de factores que influyen en el juicio dado. En estos factores se identifica la influencia de las diversas variables de tarea incluidas en los ítems: tipo de tarea (tabla de contingencia, nube de puntos o comparación de muestras); signo de la asociación; teorías en contra; intensidad de la asociación; tipo de relación entre las variables (concordancia o causalidad). De este modo se confirman nuestras hipótesis previas sobre la influencia de estas variables, así como los resultados de otras investigaciones sobre el tema. Como indica Vergnaud (1990), *"una situación dada o un simbolismo particular no evoca en un individuo todos los esquemas disponibles. Cuando se dice que tal palabra tiene tal sentido se envía de hecho a subconjuntos de esquemas, operando así una restricción en el conjunto de esquemas posibles"*.

Teniendo en cuenta este hecho y el gran número de variables de tarea que hemos descrito en los juicios de asociación, pasamos a describir las conclusiones obtenidas respecto a las estrategias y concepciones identificadas en estos juicios, que tienen en consecuencia un carácter local, restringido a la tipología de ítems que hemos empleado.

Estrategias en los juicios de asociación.

En la sección 2.3.5. se presenta una clasificación de las estrategias empleadas en los juicios de asociación desde el punto de vista de los conceptos y teoremas en acto del sujeto (Vergnaud, 1982; 1990), que constituye una aportación original respecto a las clasificaciones anteriores empleadas en los estudios psicológicos. Por un lado, en las tareas de nubes de puntos y comparación de muestras no hemos hallado estudios previos de clasificación de estrategias, por lo que nuestro trabajo abre una primera línea de aportaciones en este sentido. Por otro, para las tablas de contingencia, nuestra clasificación interpreta en términos matemáticos los resultados de otras investigacio-

nes y los extiende a las tablas de dimensión superior a 2x2.

En el análisis realizado se han confirmado las dos primeras hipótesis expuestas en la sección 1.4.5. Pero, además, una proporción importante de alumnos emplean estrategias correctas o parcialmente correctas, lo que indica unas concepciones intuitivas correctas o parcialmente correctas sobre la asociación, hecho que es importante tener en cuenta en la futura enseñanza del tema. Estas estrategias dependen del tipo de tarea pudiendo señalar, entre las correctas o parcialmente correctas las siguientes, que se analizan con mayor detalle en las secciones 2.2.5 y 2.3.5:

- Comparación de distribuciones de frecuencias relativas condicionales, entre sí o con las distribuciones marginales, bien en su totalidad o parcialmente, en tablas de contingencia.
- Comparación de distribuciones de frecuencias absolutas condicionales, entre sí o con las distribuciones marginales, bien en su totalidad o parcialmente, en tablas de contingencia.
- Comparación de posibilidades o razón de posibilidades a favor y en contra de un valor de la variable dependiente, para los diversos valores de la variable independiente en tablas de contingencia.
- Empleo del crecimiento o decrecimiento en la nube de puntos.
- Comparación de totales o medias en las muestras independientes o bien comparación de la distribución de frecuencias relativas para los mismos valores de la variable.
- Emparejamiento de los dos valores de la variable correspondientes a cada caso en las muestras relacionadas y formación a partir de la diferencia de una distribución única, cuyas frecuencias, valores o estadísticos se usan para decidir la dependencia.

Entre las estrategias incorrectas señalamos las siguientes, descritas y analizadas en las secciones 2.2.5 y 2.3.5:

- Empleo de una sola celda o de una sola distribución condicional en tablas de contingencia.
- Basar el juicio de asociación en las teorías previas sobre la misma entre las variables, sin tener en cuenta los datos presentados.
- Empleo de estrategias aditivas en la comparación de probabilidades en tablas de contingencia.
- Interpretación incorrecta de puntos aislados que favorecen un cierto tipo de asociación en la nube de puntos.
- Comparar la nube de puntos con un cierto patrón estándar o no admitir la dispersión en la gráfica.
- Emparejar indebidamente los casos que ocupan el mismo orden en el conjunto de datos en las muestras independientes y estudiar la diferencia de valores en estos casos como si se tratase de muestras relacionadas.

Además, en la sección 2.3.5, se ha realizado una comparación de las

estrategias empleadas en cada una de las tres categorías de problemas (tabla de contingencia, nube de puntos y comparación de muestras) empleando, en los dos primeros casos el análisis de correspondencias. De esta comparación se pone de manifiesto la influencia de las diversas variables de tarea sobre las estrategias de resolución de los alumnos, incluso dentro de una misma subcategoría del problema.

En las tablas de contingencia se detectan claramente dos factores. El primero de ellos señala la diferenciación de estrategias al pasar de la tabla 2x2 a otra de dimensión superior, en la que ha sido necesaria una estrategia más elaborada para la correcta resolución del problema. El segundo señala la influencia de la correlación ilusoria que provoca un mayor número de estrategias incorrectas en las tabla 2x2.

En las nubes de puntos, el análisis de correspondencias, efectuado en la sección 2.3.5.2, arroja dos factores de importancia similar. El primero de ellos indica la diferenciación de estrategias producida en el caso en que un ítem no pueda ser interpretado en contexto causal, indicando claramente que una parte de los alumnos están interpretando la relación entre las variables como una relación de dependencia causal entre las mismas. El segundo apunta de nuevo a la idea de correlación ilusoria, al separar las estrategias empleadas en caso de independencia de aquellas que se utilizan para la dependencia directa e inversa, asociándose al primer caso un mayor porcentaje de estrategias incorrectas.

Concepciones identificadas sobre la asociación estadística

Del análisis realizado, tanto en la sección 2.2 como en la 2.3, de las prácticas explicitadas por los alumnos en la solución de los problemas propuestos (juicios proporcionados; estrategias y demás variables) se han identificado las siguientes concepciones incorrectas sobre la asociación estadística que hemos denominado: causalista, determinista, unidireccional, localista y algebraica. A continuación se describen las características de estas concepciones.

Concepción causalista

Hay alumnos que sólo consideran la dependencia entre variables si puede atribuirse a la existencia de una relación de tipo causal entre las mismas. Esto se ha hecho notar en especial en el ítem K, en el cual la asociación se debe a la concordancia entre las variables y no a la influencia directa, de tipo causal, de una sobre otra. Los alumnos que manifiestan esta concepción argumentan que no existe relación entre las variables debido a que el valor de una de ellas no ejerce una influencia sobre la otra.

En otros casos, como el ítem I, la existencia de otras variables que influyan sobre la que el alumno toma como dependiente es vista como falta de asociación entre las variables. Se manifiesta aquí tanto una concepción causalista extrema, que implica el desechar otras posibles causas que produzcan un mismo efecto, como la concepción determinista que describimos a continuación. El sujeto emplearía incorrectamente el principio de discriminabilidad de Kelley (otras causas son seguidas por el efecto) olvidando el principio de la consistencia (la causa es seguida por el efecto) (Pozo, 1987).

Asimismo, se manifiesta esta estrategia en el análisis de correspondencias de las estrategias empleadas en las nubes de puntos o diagrama de

dispersión, realizado en la sección 2.3.5.2, que produce una diferenciación de las mismas (primer factor; 54.3% de la inercia) en función de si el ítem puede o no ser interpretado en términos de relación causa-efecto.

Finalmente, el hecho de que un número importante de alumnos, tanto en la muestra piloto como en la de comparación reduzcan a una tabla 2x2 la de dimensión superior (sección 2.3.6) lo podemos interpretar como un indicador de esta concepción, ya que la tabla 2x2 es más fácil de interpretar en términos de causalidad.

Concepción determinista

Algunos alumnos no admiten excepciones a la relación existente entre las variables, esperando una correspondencia que a cada valor de la variable independiente asigne un sólo valor de la dependiente, esto es, una relación de tipo determinista o funcional. Esta concepción se manifiesta en la forma siguiente:

- En las tablas de contingencia 2x2, algunos alumnos argumentan que una de las celdas b y c, o ambas, de la tabla debieran tener frecuencia cero. En caso de que esto no ocurra, consideran que ello es debido a que no existe asociación entre las variables, esto es, no consideran que pueda hablarse de dependencia entre variables si a un valor de una de ellas puede corresponder más de un valor de la otra.
- En las nubes de puntos, alumnos que comparan globalmente la gráfica, basan sin embargo el juicio en ejemplos concretos que no cumplen el tipo de relación esperado, no admitiendo la dispersión en la nube de puntos.
- Otras veces (ejemplos aislados de alumnos) se exige incluso la existencia de una expresión algebraica que ligue las variables, para las nubes de punto. Este caso es aún más restringido, dentro de la concepción determinista o funcional de la asociación, puesto que hay funciones no expresables algebraicamente.
- En la comparación de muestras relacionadas, algunos alumnos esperan que la variación de la variable dependiente sea del mismo signo o incluso de la misma magnitud en todos los casos.
- Asimismo, el hecho de que un número importante de alumnos unen los puntos en el diagrama de dispersión (sección 2.3.6) antes de dar su juicio, creemos que es indicativo de la existencia de esta concepción, ya que el trazado aproximado de una gráfica, a partir de la unión de los puntos de la nube es interpretado por diversos autores como Ruiz Higueras (1991) como indicativo de una estrategia de determinación de una función a partir de su gráfica.

Concepción unidireccional

A veces no se admite la asociación de tipo inverso, teniéndose en cuenta la intensidad, pero no el signo de la asociación, e incluso llegando a considerar la dependencia inversa como independencia. En particular, este fenómeno se observa en el ítem E, en el que, en el estudio de estrategias realizado en la sección 2.2.5. se muestra cómo un número importante de sujetos coinciden en manifestar que no existe dependencia, manifestando, por tanto, este tipo de concepción.

Asimismo, en el juicio de asociación emitido respecto a este ítem, tanto en la muestra piloto, como en la de comparación, se observa un importante número de alumnos que han declarado la independencia, frente a los que lo han hecho en el ítem F correspondiente a dependencia directa. Esporádicamente se manifiesta también en otros ítems:

- En el ítem D un alumno de la muestra piloto, que ha empleado una sola distribución condicional deduce la independencia, que es la solución correcta, pero usando este argumento que es incorrecto (sección 2.2.5).
- En el ítem J no se detecta la concepción unidireccional de la asociación, porque la fuerte intensidad de asociación hace que el decrecimiento del diagrama de dispersión sea muy acusado, lo que ha sido detectado por los alumnos. Debido a esta intensidad, la correspondencia en este caso es prácticamente una aplicación (salvo para un valor x), por lo que los alumnos que manifiestan una concepción determinista han dado una solución correcta en este caso. Observamos así que la concepción unidireccional de la asociación, que es un aspecto local de las concepciones de los alumnos, al igual que el resto de las concepciones descritas, es aplicado en un segundo término por los alumnos de la muestra. En el caso de una relación intensa entre las variables en el cual la concepción determinista pueda ser aplicada con éxito, no se aplica el aspecto de unidireccionalidad. Observamos aquí la inconsistencia señalada por Scholz (1987) en el comportamiento de los alumnos al resolver los problemas de asociación. La estrategia seguida y el juicio obtenido cambian en función de las variables del problema y una única variable por sí sola no determina totalmente el comportamiento de los alumnos.

Concepción localista

Con frecuencia los alumnos basan su juicio en el estudio de casos aislados. Si en ellos se confirma un cierto tipo de asociación, la adoptan como juicio. En el caso de las tablas de contingencia, un número importante de sujetos no consideran el problema como de comparación de probabilidades, teniendo sólo en cuenta los casos que confirman la asociación o bien una sola distribución condicional e incluso sólo la celda de máxima frecuencia.

En los diagramas de dispersión se seleccionan puntos que favorecen un cierto tipo de asociación, tomándolos como argumento del tipo de juicio dado, sin tener en cuenta la representatividad de los mismos respecto al resto de los puntos, esto es, sin considerar la información relativa al consenso (Pozo, 1987). Todos estos casos pueden también ser englobados en la teoría de Kahneman y Tversky (1973) que indica que los sujetos no consideran la importancia de la tasa global de ocurrencia de un caso o casos en una población o grupo al efectuar una predicción sobre la relación entre variables.

Algunos alumnos basan su juicio sobre la asociación en muestras relacionadas estudiando sólo algunos pares de valores en el conjunto de datos.

Concepción algebraica

En casos muy contados los alumnos suponen que es preciso la existencia de una "regla" (expresión algebraica que liga las variables). Este es un caso que puede incluirse en la concepción determinista de la asociación, pero se ha destacado debido a que Ruiz Higueras (1991) también lo ha descrito para el

caso de dependencia funcional entre las variables.

Otras dificultades y errores

Algunos alumnos basan su juicio en sus teorías sobre el contexto, en lugar de en los datos presentados, a pesar de que en las instrucciones se les indicó claramente que el problema se refería sólo a la información presentada y no a otros casos. Este fenómeno coincide con los resultados señalados por diversos investigadores, que se han comentado en las secciones 1.3; 2.2.5; y 2.3.5.

Esta dificultad se presenta especialmente cuando el alumno hace una interpretación causal de la tarea, esto es, entre aquellos que manifiestan una concepción causalista de la asociación. Incluso aparece esta interpretación en las nubes de puntos en las que, a pesar de que la pregunta esté planteada en términos simétricos, el alumno no asigna un papel simétrico a las variables.

También se ha observado la falta de razonamiento proporcional, lo que ha llevado a dificultades en la ejecución de la estrategia elegida. Incluso en el caso de razonamiento proporcional correcto, algunos alumnos muestran dificultad en la resolución del caso de independencia en la tabla 2x2, mostrando un razonamiento correspondiente al estadio IIIa descrito por Inhelder y Piaget (1955) para la comparación de probabilidades. Esta dificultad se pone también de manifiesto por el porcentaje, relativamente reducido de alumnos que usan porcentajes o frecuencias marginales en la solución de los problemas propuestos.

Finalmente, se han observado errores en la lectura e interpretación de tablas e interpretación incorrecta de las representaciones gráficas en el diagrama de dispersión, que, en ocasiones, han dificultado el finalizar una estrategia elegida, aunque ésta fuese inicialmente correcta.

CAPITULO 3:

EVOLUCION DE CONCEPCIONES COMO CONSECUENCIA DE UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA BASADO EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS CON ORDENADOR

INTRODUCCION

En este capítulo se aborda el estudio del efecto de un experimento de enseñanza, basado en el uso de ordenadores, sobre las concepciones referidas a la asociación estadística de un grupo de alumnos, estudiantes de Magisterio.

En la terminología de Cook y Campbell (1979) se puede describir el experimento de enseñanza que hemos efectuado como un cuasi-experimento, ya que la muestra ha tenido un carácter intencional. En la clasificación que realizan estos autores se trataría de un diseño de grupo único con pretest y postest, ya que se han evaluado los conocimientos de los alumnos participantes al principio y fin de la experiencia.

Estos autores señalan las limitaciones, en cuanto a la realización de inferencias de tipo causal, que posee esta clase de diseño, debido a los posibles riesgos de que el tratamiento al que se atribuye la causa pueda estar confundido con otros factores de historia, maduración o selección de la muestra.

Conscientes de estas limitaciones hemos tratado de controlar, en lo posible, estos riesgos. Con este objetivo se procedió, en primer lugar, a estudiar las concepciones iniciales sobre la asociación estadística en una muestra más amplia, que se ha descrito en el capítulo 2. Asimismo, en la sección 3.2 se describe con detalle la enseñanza efectuada con objeto de conseguir la comparabilidad del presente estudio con otros similares (Goetz y Lecompte, 1988). En la sección 3.1 se describen las concepciones iniciales de los alumnos de la muestra experimental y se comparan con los resultados del

capítulo 2, con objeto de controlar los riesgos de selección no aleatoria de la muestra.

El contenido del resto del capítulo es el siguiente:

En la sección 3.3 se estudian las concepciones finales de los alumnos participantes, empleando un instrumento paralelo al usado en el pretest. Ello permite estudiar la evolución experimentada en las mismas a partir de los juicios de asociación, estrategias empleadas, así como, en el resto de las variables que se han usado como indicadores empíricos de las concepciones de los alumnos.

Puesto que la enseñanza se ha basado en el empleo del ordenador, el estudio de las concepciones finales de los alumnos se complementa con el análisis de las respuestas a una prueba de resolución de problemas usando el ordenador, que se describe en la sección 3.4. Este análisis se corresponde también con uno de los objetivos de la investigación consistente en realizar un estudio comparativo de las estrategias de los mismos sujetos en la resolución de problemas de asociación con y sin ordenador.

La comparación del pretest y del postest en los alumnos experimentales proporciona información sobre el cambio de sus concepciones, pero no del proceso mediante el cual se realiza el mismo. Con objeto de apreciar este proceso y de mostrar la complejidad que supone el aprendizaje y el significado de un concepto, tan simple en apariencia, como el de asociación, en la sección 3.5, se describe la observación realizada sobre una pareja de alumnos.

3.1. DESCRIPCION DE LA MUESTRA EXPERIMENTAL Y ESTUDIO DE CONCEPCIONES PREVIAS

3.1.1. DESCRIPCION DE LA MUESTRA EXPERIMENTAL

El grupo experimental estuvo formado por 22 alumnos de tercer curso de la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de E.G.B. de Jaén, de los cuales había 9 varones y 13 hembras. La cumplimentación del pretest tuvo lugar al principio del segundo cuatrimestre del curso escolar 1.991/92. De los 22 alumnos, uno no cumplimentó el pretest y dos el postest, por tanto, el tamaño de la muestra que vamos a estudiar está constituido por 21 alumnos, cuando se examina el pretest, por 20 cuando se estudia el postest y por 19 cuando el estudio se hace conjunto sobre el pretest y postest.

A pesar de que la enseñanza de la Estadística es obligatoria en séptimo de E. G. B., en primero y tercero de B.U.P. y en algunas opciones de C.O.U., 17 de estos alumnos no habían estudiado Estadística previamente, 4 si lo habían hecho y uno no cumplimentó el pretest. De los 4 que declararon haber estudiado Estadística, uno lo hizo en primero de B.U.P., otro en segundo de B.U.P., otro en C.O.U. y el último en los Estudios de Magisterio. A la pregunta sobre si habían estudiado la diferencia entre dependencia funcional y aleatoria, 3 alumnos responden que sí y 18 que no. Cuando se les pide proponer un ejemplo de dependencia funcional y otro de dependencia aleatoria, 18 alumnos no contestan, 1 propone los dos ejemplos correctamente y 2 escriben ejemplos inadecuados. Se puede considerar, en consecuencia, la enseñanza experimental como la primera introducción que estos alumnos tienen del tema de

asociación.

En cuanto al contenido de la prueba se realizó un estudio paralelo al de la muestra de comparación con objeto de poder situar a los alumnos participantes en la enseñanza en un contexto más amplio, al comparar sus concepciones iniciales con las de un grupo de mayor tamaño.

Pasamos, a continuación, a presentar los resultados de la aplicación de la prueba al grupo experimental descrito.

3.1.2. INTERPRETACION DE TABLAS DE CONTINGENCIA Y GRAFICOS

Interpretación de tablas de contingencia

En la tabla 3.1.2.1 se da la frecuencia y porcentaje de alumnos que leen correctamente las frecuencias absolutas en la tabla de contingencia. Los resultados son similares a los de las muestras piloto y comparación, por lo que podemos considerar que nuestros alumnos tienen un nivel semejante a aquellos en este aspecto.

Tabla 3.1.2.1 **Frecuencia y porcentaje de las respuestas en la lectura de frecuencias absolutas dobles en tablas 2x2**

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	20	95.2
Incorrecta	1	4.8
Total	21	100.0

En la tabla 3.1.2.2 se muestra la frecuencia de respuestas en la pregunta sobre lectura directa e interpretación de las frecuencias absolutas marginales. Esta tarea no es difícil para estos alumnos, ya que todos la han realizado correctamente.

Tabla 3.1.2.2 **Frecuencia y porcentaje de respuestas en la lectura de las frecuencias absolutas marginales en tablas 2x2**

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Incorrecta	0	0.0
Correcta	21	100.0
Total	21	100.0

Las respuestas obtenidas en el cálculo de una frecuencia relativa marginal se dan en la tabla 3.1.2.3, similar a sus homólogas en las muestras piloto y comparación, destacando como en éstas las respuestas 60 y 150.

Tabla 3.1.2.3 Frecuencia y porcentaje de respuestas en el cálculo de una frecuencia relativa marginal

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta		
60	14	66.6
61	1	4.8
65	1	4.8
150	2	9.5
166	2	9.5
En blanco	1	4.8
	-----	-----
Total	21	100.0

Las respuestas obtenidas en el cálculo de la frecuencia relativa condicional se da en la tabla 3.1.2.4, en ella destacan los valores 40 y 60, como en las muestras piloto y comparación. Los alumnos que responden 40 confunden el condicional y el condicionado en la frecuencia relativa condicional (Falk, 1986).

Tabla 3.1.2.4 Frecuencia y porcentaje de respuestas en el cálculo de una frecuencia relativa condicional

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
24	1	4.8
30	1	4.8
40	5	23.8
Correcta		
60	11	52.4
150	2	9.5
250	1	4.8
	-----	-----
Total	21	100.0

En resumen, como ha ocurrido en las muestras piloto y de comparación, no es difícil para estos alumnos leer las tablas de contingencia, sin embargo, tiene mayor dificultad el cálculo de frecuencias relativas condicionadas y marginales. Podemos considerar que nuestros alumnos poseen un nivel similar de conocimientos en la interpretación de tablas a la muestras anteriores.

Interpretación de la nube de puntos o diagrama de dispersión

Para estudiar este apartado se toman las dos primeras cuestiones del ítem 1, cuyos resultados se ofrecen en las tablas 3.1.2.5 y 3.1.2.6, donde se puede observar que los resultados obtenidos son algo superiores a los obtenidos en las muestras piloto y de comparación.

Tabla 3.1.2.5 Frecuencia y porcentaje de respuestas en la lectura de la ordenada dada la abscisa en la nube de puntos

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
3	1	4.8
Correcta 11	20	95.2
Total	21	100.0

Tabla 3.1.2.6 Frecuencia y porcentaje de respuestas de la lectura de la abscisa dada la ordenada en la nube de puntos

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
el 16 y el 20	20	95.2
Otros	1	4.8
Total	21	100.0

En resumen, algo más del 90 por ciento de los alumnos interpretan correctamente los puntos del diagrama de dispersión presentado.

3.1.3. JUICIOS DE ASOCIACION Y EXPLICITACION DE TEORIAS PREVIAS

Tipos de asociación en tablas de contingencia

En la tabla 3.1.3.1 se estudia cómo detectan los alumnos de esta muestra el tipo de asociación que existe entre las parejas de variables que se presentan en una tabla de contingencia 2x2; se puede observar que los resultados son muy similares a los de las muestras piloto y comparación. Destacamos de nuevo la atribución por trece alumnos de dependencia directa en el ítem D debido bien a falta de razonamiento proporcional (9 casos) o bien por mantener sus teorías previas frente a las contingencias presentadas en la tabla (4 casos). En el ítem E 9 alumnos creen que existe independencia, indicando una concepción unidireccional de la asociación en este tipo de tablas.

Tabla 3.1.3.1 Frecuencia y porcentaje de Tipo de dependencia en tablas 2x2

Item	Directa	Inversa	Independencia	No contesta
D	13 (61.9)		* 8 (38.1)	
E	2 (9.5)	*10 (47.6)	9 (42.9)	
F	*20 (95.2)			1 (4.8)
* (solución correcta)				

En la tabla 3.1.3.2 se ofrece el tipo de dependencia en las tablas rxc. En el ítem G los resultados son muy similares a las muestras piloto y de comparación. En el ítem H, se tiene aquí menos índice de no respuestas y un porcentaje similar de respuestas correctas respecto a la muestra piloto. Respecto a la muestra de comparación los índices de no respuestas son similares, pero en las respuestas correctas e incorrectas tiene 10 puntos a su favor la muestra de comparación.

Tabla 3.1.3.2 Frecuencia y porcentaje de Tipo de dependencia en tablas rxc

Item	Asociación	Independencia	No contesta
G	*19 (90.5)	1 (4.8)	1 (4.8)
H	5 (23.8)	*11 (52.4)	5 (23.8)

* (solución correcta)

En la tabla 3.1.3.3 se ofrece el tipo de dependencia en nube de puntos. En el ítem I (Clasificación en la Liga y partidos empataos), donde el porcentaje de respuestas correctas es superior al de las muestras piloto y comparación. En el ítem J los resultados son similares a ambas muestras. En el ítem K son sensiblemente inferiores a la muestra de comparación, debido a que los porcentajes de respuestas que consideran independientes estas variables son superiores en esta muestra que en las dos anteriores, mostrando estos alumnos una concepción causalista de la asociación, ya que argumentan la falta de influencia causal de una variable sobre la otra.

Tabla 3.1.3.3 Frecuencia y porcentaje de Tipo de dependencia en nube de puntos

Item	Directa	Inversa	Independencia	No contesta
I		1 (4.8)	*20 (95.2)	
J	2 (9.5)	*17 (80.6)	2 (9.5)	
K	* 2 (9.5)	1 (4.8)	17 (80.6)	1 (4.8)

* (solución correcta)

Tabla 3.1.3.4 Frecuencia y porcentaje de Tipo de dependencia en comparación de muestras

Item	Asociación	Independencia	No contesta
L	*18 (85.7)	3 (14.3)	
M	*13 (61.9)	7 (33.3)	1 (4.8)

* (solución correcta)

En la tabla 3.1.3.4 se dan los resultados de las respuestas sobre el tipo de dependencia de los ítems L y M. En el ítem L son mejores que en la muestra piloto y similares a la muestra de comparación. En el ítem M son algo mejores que en la muestra piloto y un poco inferiores que en la muestra de comparación.

En resumen, podemos afirmar que los resultados encontrados en la muestra experimental sobre la apreciación de la asociación entre variables son similares a los encontrados en la muestra piloto y en la muestra de comparación.

En la tabla 3.1.3.5, se dan las frecuencias y porcentajes con que estos alumnos explicitan teorías previas en la respuesta a los diferentes ítems. Como en las muestras piloto y comparación destacan los ítems D e I, si bien el ítem D con menos porcentaje y el I con más. Los demás ítems se mantienen con porcentajes similares.

Tabla 3.1.3.5 Frecuencia de alumnos que explicitan teorías previas en sus argumentos

Ítem	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
D	Fumar/bronquios	4	19.0
E	Dieta/trastornos	1	4.8
F	Vida sedent/alergia	1	4.8
G	Aprob/suspender examen	2	9.5
H	Lateralidad ojos/manos	1	4.8
I	Clasf. Liga/empates	9	42.7
J	Proteínas/natalidad	2	9.5
K	Juicio de jueces	3	14.3
L	Presión sang/tratamiento	1	4.8
M	Nivel de azucar/sexo	2	9.5

3.1.4. ESTRATEGIAS EN LOS JUICIOS DE ASOCIACION

Niveles de elaboración de estrategias en tablas 2x2

Al igual que en las muestras anteriores, los procedimientos utilizados por los alumnos en la resolución de los problemas planteados en los ítems D, E y F se codificaron según se describe en los anexos 2.2.1 y 2.2.2. Dichos procedimientos se clasificaron con los criterios seguidos para la muestra de comparación que se describen en el capítulo 2, con el fin de estudiar las concepciones que tienen los alumnos sobre la asociación estadística en este tipo de tablas, primero atendiendo al número de casillas, con lo que se obtuvo la tabla 3.1.4.1.

En general se puede observar que los resultados son muy similares a los de la muestra de comparación, tabla 2.3.5.1.1. Cuando se utiliza una sola casilla, es la de mayor frecuencia; así se ha utilizado la casilla a en los ítems D y F y la casilla c en el ítem E. El empleo de una sola casilla es un indicador de la concepción localista sobre la asociación, porque se basa el juicio sobre la misma, es decir, sólo en una parte de los datos.

Tabla 3.1.4.1 Frecuencia y porcentaje de estrategias empleadas en las tablas 2x2, clasificadas por el número de casillas

Casillas utilizadas	Ítem		
	D	E	F
Utiliza una sola casilla			
La casilla a	1 (4.8)		
La casilla c		1 (4.8)	1 (4.8)
Utiliza dos casillas			
Las casillas a y b	2 (9.5)		
Las casillas a y c	4 (19.0)	1 (4.8)	
Las casillas a y d			2 (9.5)
Las casillas c y d		1 (4.8)	
Utiliza las 4 casillas			
Proced. aditivos	6 (28.6)	10 (47.6)	10 (47.6)
Proced. multipli.	6 (28.6)	6 (28.6)	7 (33.3)
Otras	1 (4.8)	2 (9.5)	
No contesta	1 (4.8)		1 (9.1)

En el uso de dos casillas, las que destacaban en la muestra de comparación, siguen destacando aquí. En general, el uso de sólo dos casillas es indicativo de la concepción localista de la asociación, pues los alumnos basan su juicio sólo en una parte del conjunto de datos. Los alumnos de la muestra experimental no utilizan tres casillas; en la muestra de comparación el uso de este número de casillas es insignificante (0.5 por ciento). En el uso de cuatro casillas hay una ligera superioridad de la muestra experimental sobre la de comparación, tanto en los procedimientos aditivos como en los multiplicativos. En la categoría "Otras", se observa una ligera superioridad en la muestra de comparación.

Los niveles de elaboración de estrategias de Pérez Echeverría (1990) utilizados son los siguientes: Un alumno (el 4.8 por ciento) utiliza estrategias del primer nivel en los tres ítems; estrategias del segundo nivel son utilizadas por 6 alumnos (28.6 por ciento) en el ítem D, por 2 alumnos (9.5 por ciento) en los ítems E y F; no hay alumnos del tercer nivel en ninguno de los ítems; 6 alumnos (28.6 por ciento) en el ítem D, utilizan estrategias del IV nivel y 10 alumnos (47.6 por ciento) en los ítems E y F; por último, 6 alumnos (28.6 por ciento) utilizan estrategias del quinto nivel en los ítems D, E y 7 estudiantes en el ítem F.

Niveles de elaboración de estrategias en tablas 2x3

En la tabla 3.1.4.2 se puede observar que en el ítem G ningún alumno utiliza una sola casilla y el porcentaje de uso de una casilla es muy bajo en las muestras piloto y comparación. El porcentaje de uso de dos casillas es ligeramente inferior a las de las muestras anteriores. El porcentaje de uso de tres casillas es similar al de la muestra de comparación. Todos estos casos son indicativos de la existencia de una concepción localista de la asociación, pues el juicio se basa en una parte de los datos, no considerándose la

información relativa al consenso. El uso de seis casillas, en procedimientos aditivos, es algo superior que en las muestras anteriores. Se puede concluir que las tres muestras son similares según el número de casillas utilizadas en las tablas 2x3.

Tabla 3.1.4.2 Frecuencias y porcentaje de estrategias empleadas en la tabla 2x3 (item G) clasificadas por el número de casillas

Casillas utilizadas	Frecuencia	Porcentaje
Utiliza dos casillas		
Las casillas c y f	1	(4.8)
Utiliza tres casillas		
Las casillas a, b y c	5	(23.9)
Las casillas d, e y f	2	(9.5)
Utiliza las seis casillas		
Procedimientos aditivos	11	(52.4)
Procedimientos multiplicat.	1	(4.8)
No responde	1	(4.8)

Si consideramos la adaptación de los niveles de Pérez Echeverría (1990) que se ha realizado en la sección 2.3.5 para las tablas 2x3, podemos decir que ocho alumnos (38.1 por ciento) utilizan estrategias del nivel II; once alumnos (52.4 por ciento) del nivel IV y del nivel V un alumno (4.8 por ciento).

Niveles de elaboración de estrategias en tablas 3x3

En primer lugar se ha hecho una clasificación de las mismas, según el número de casillas utilizado, obteniéndose la tabla 3.1.4.3 cuyas categorías son las mismas que se han utilizado en la muestra de comparación y se exponen en la sección 2.3.5.

Tabla 3.1.4.3 Frecuencia de estrategias en el item H según número de casillas empleadas

Casillas usadas	Frecuencia	Porcentaje
Utiliza 3 casillas	3	14.3
Utiliza 4 casillas	2	9.5
Utiliza 6 casillas	4	19.1
Utiliza 9 casillas		
Proc. aditivos	5	23.1
Proc. multiplic.	1	4.8
No se sabe	3	14.3
No contesta	3	14.3
-----		-----
Total	21	100.0

Si comparamos la tabla 3.1.4.3 con su homóloga de la muestra de comparación (tabla 2.3.5.1.3), se puede observar que en el empleo de 4, 6 y 9

casillas hay ligeras diferencias, no muy acusadas, con lo que podemos concluir que son similares estas muestras en este aspecto. Todos los alumnos que emplean 3, 4 ó 6 casillas manifiestan una concepción localista de la asociación, siguiendo nuestra terminología.

Si consideramos la adaptación de los niveles de Pérez Echeverría (1990) que se ha realizado en la sección 2.3.5 para las tablas 3x3 podemos decir que tres alumnos (13.2 por ciento) utilizan estrategias del nivel II; seis alumnos (28.6 por ciento) del nivel III; del nivel IV cinco alumnos (23.8 por ciento) y del nivel V un alumno (4.8 por ciento).

Clasificación de estrategias en las tablas de contingencia según los conceptos matemáticos usados implícitamente

Las estrategias que aparecen en la tabla 3.1.4.4, clasificadas según conceptos y teoremas en acto implícitos (Vergnaud, 1982, 1990), se explican con detalle en la sección 2.3.5, a continuación y a modo de recordatorio se da un listado de las mismas.

Tabla 3.1.4.4 Frecuencia y porcentaje de estrategias según conceptos matemáticos implícitos.

Estrategia	Item D	Item E	Item F	Item G	Item H
1	2(9.5)	3(14.3)	2(9.5)	2(9.5)	1(4.8)
2	3(14.3)	1(4.8)	3(14.3)	2(9.5)	
3	5(23.8)	10(47.6)	8(38.1)	8(38.1)	2(9.5)
4	1(4.8)	1(4.8)	1(4.8)	1(4.8)	9(42.8)
5	1(4.8)		3(14.3)		
6			2(9.5)		
7	1(4.8)	1(4.8)	1(4.8)		
8	6(28.6)	2(9.5)		5(23.8)	3(14.3)
9		1(4.8)		2(9.5)	
12	2(9.5)	2(9.5)	1(4.8)	1(4.8)	6(28.6)

Estrategias correctas:

1. *Compara dos o más distribuciones de frecuencias relativas condicionales.*
2. *Compara una frecuencia relativa de cada distribución condicional con la marginal correspondiente.*

Estrategias parcialmente correctas:

3. *Compara posibilidades o razón de posibilidades.*
4. *Compara dos o más distribuciones de frecuencias absolutas condicionadas con la marginal correspondiente.*

5. *Compara una frecuencia absoluta de cada distribución condicionada con la marginal correspondiente.*
6. *Compara o suma las diagonales.*

Estrategias incorrectas

7. *Utiliza una sola casilla.*
8. *Utilizar una única distribución condicional.*
9. *Utiliza frecuencias relativas dobles respecto al total de la muestra.*
10. *Utiliza diversos tipos de frecuencias.*
11. *Otro tipo de estrategias.*
12. *No contesta o respuesta confusa.*

Si comparamos la tabla 3.1.4.4 con su homóloga 2.3.5.1.4 de la muestra de comparación respecto, a las estrategias utilizadas en cada ítems de las tablas 2x2, podemos extraer las siguientes conclusiones:

- a) En el ítem D el porcentaje de estrategias correctas es similar (19.3 en la muestra de comparación frente a 23.8 en la muestra experimental). El uso de estrategias parcialmente correctas es superior en la muestra experimental (10.7 por ciento para la muestra de comparación frente al 33.3 por ciento para la muestra experimental). En consecuencia, el uso de estrategias incorrectas es superior en la muestra de comparación (70.0) respecto a la muestra experimental (42.9), debido a que ha habido mayor porcentaje de la estrategia 7 y de la 12 en la muestra de comparación.
- b) El uso de estrategias correctas en el ítem E ha sido similar en las muestras de comparación (20.1 por ciento) y en la experimental (19.0 por ciento). Sin embargo, los alumnos de la muestra de comparación han utilizado en menor proporción las estrategias parcialmente correctas que los de la muestra experimental, 41.3 y 52.4 por ciento, respectivamente, debido a que los alumnos de la muestra experimental han utilizado en mayor proporción la estrategia 3; esta relación se invierte en el uso de las estrategias incorrectas, 38.9 por ciento para la muestra de comparación frente al 28.6 por ciento para la muestra experimental, debido a que los alumnos de la muestra de comparación utilizan en mayor proporción las estrategias 7 y 8.
- c) El uso de estrategias correctas en el ítem F es ligeramente inferior en la muestra de comparación (17.3 por ciento) que en la muestra experimental (23.8 por ciento). También se usan en porcentaje inferior las estrategias parcialmente correctas en la muestra de comparación (42.2 por ciento) que en la muestra experimental (66.6 por ciento), debido a que la estrategia 3 se ha utilizado un gran porcentaje de veces en la muestra experimental. En consecuencia, el porcentaje de uso de estrategias incorrectas es muy superior en la muestra de comparación (40.4 por ciento) respecto a la muestra experimental (9.5 por ciento). De ello se deduce que los alumnos han sido capaces de reconocer la dependencia directa en la tabla dada.
- d) En el ítem G los porcentajes de uso de cualquier tipo de estrategia son muy similares en ambas muestras, así para las estrategias correctas el porcentaje de uso es 19.3 y 19.0 para las muestras de comparación y experimental respectivamente. Para las parcialmente correctas 39.4 y 42.9. Por último, para las incorrectas el 41.3 y 38.1 por ciento para las muestras de comparación y experimental, respectivamente.
- e) El porcentaje de uso de estrategias correctas en el ítem H es reducido con respecto a los otros ítems, pero similar en las muestras de comparación (8.4) y experimental (4.8). En cuanto a las estrategias parcialmente

correctas la proporción de uso es ligeramente inferior en la muestra de comparación (39.8 por ciento) que en la muestra experimental (52.4 por ciento). En consecuencia, el uso de estrategias incorrectas es ligeramente superior en la muestra de comparación (57.7 por ciento) que en la muestra experimental (42.9 por ciento). Ha habido un número importante de no respuestas.

En los alumnos que comparan posibilidades (estrategia 3 en la tabla 3.1.4.4, la más utilizada en los cuatro primeros ítems) se manifiesta un cálculo aditivo de las proporciones en lugar de multiplicativo (Orton, 1988). En efecto, al comparar las frecuencias absolutas de las casillas de la tabla en lugar de comparar las razones entre ellas, están utilizando un concepto aditivo de la proporcionalidad en lugar de multiplicativo, manifestando dificultades en el razonamiento proporcional. Lo mismo ocurre con los que comparan dos o más distribuciones de frecuencias absolutas condicionadas con la marginal correspondiente (estrategia 4 de la tabla 3.1.4.4).

Los alumnos que utilizan una sola casilla (estrategia 7 de la tabla 3.1.4.4) para determinar la asociación siempre usan la de máxima frecuencia por lo que se puede decir que tienen una concepción localista de la asociación, buscan la casilla de máxima frecuencia y según sea esta casilla deciden la asociación entre las variables.

Los alumnos que utilizan una sola distribución condicional (estrategia 8 de la tabla 3.1.4.4) tienen también una concepción localista de la asociación, pues observando como varía una variable dentro de una parte del recorrido de la otra deciden la asociación.

Estrategias empleadas por los alumnos en los juicios de asociación en las nubes de puntos

En los anexos 2.2.1 y 2.2.2 se describen con detalle las estrategias empleadas por los alumnos en estos problemas. Se ha realizado un agrupamiento, atendiendo al grado de corrección de los conceptos matemáticos puestos en juego de manera implícita o explícita, según se expone en el apartado correspondiente de la sección 2.3.5, obteniéndose la tabla 3.1.4.5.

En esta tabla se puede observar que en el ítem 1 los alumnos de la muestra experimental utilizan las estrategias correctas y parcialmente correctas en un porcentaje un poco más elevado que los alumnos de la muestra de comparación. En el ítem J, los alumnos de la muestra de comparación utilizan las estrategias correctas en un porcentaje algo superior a los de la muestra experimental, sin embargo, en las parcialmente correctas se invierte, utilizándolas en mayor porcentaje los alumnos de la muestra experimental. En el ítem K, el porcentaje de los alumnos que no han respondido es apreciable en la muestra de comparación. No obstante, los de la muestra experimental han respondido todos; un tercio de los alumnos de la muestra experimental han utilizado una estrategia correcta, aunque en la muestra de comparación se alcanza el tercio entre las estrategias correctas y parcialmente correctas. También se puede observar que la mayoría de las estrategias que se presentan con una frecuencia de uso relevante en la muestra de comparación también tienen una frecuencia relevante en la muestra experimental.

Los alumnos que citan pares de valores, tanto bien como mal interpretados o utilizan un subconjunto del dominio (estrategias 5, 6 y 15 de la tabla 3.1.4.5) manifiestan una concepción localista de la asociación, ya que eligen unos pocos pares de valores y declaran la asociación que manifiestan estos

pares.

Tabla 3.1.4.5 Frecuencia y porcentaje de estrategias empleadas para los juicios de correlación en nube de puntos

Estrategias	Item I	Item J	Item K
CORRECTAS:			
1 Compara globalmente	1 (4.8)	1 (4.8)	4 (19.1)
2 Emplea crecimiento		2 (9.5)	2 (9.5)
3 Emplea decrecimiento	1 (4.8)	7 (33.3)	
4 Función constante	3 (14.3)		1 (4.8)
PARCIALMENTE CORRECTA:			
5 Interpreta pares	8 (38.1)	5 (23.8)	
14 Espera valores simi		1 (4.8)	
INCORRECTAS:			
6 Pares mal interpret.			4 (19.1)
7 Aplicación biyectiva		2 (9.5)	
8 Teorías previas	3 (14.3)	1 (4.8)	
9 Otras variables	4 (19.1)		
10 Uniformidad gráfica	1 (4.8)		2 (9.5)
11 No existe regla			1 (4.8)
13 No causalidad			7 (33.3)
15 Subconjunto dominio		1 (4.8)	
No contesta		1 (4.8)	

Los alumnos que argumentan la necesidad de existencia de una aplicación biyectiva, (estrategia 7 de la tabla 3.1.4.5) manifiestan una concepción determinista de la asociación, pues no la admiten cuando observan desviaciones de tipo aleatorio. Lo mismo ocurre en el caso de esperar que la gráfica debe ser uniforme (estrategia 10) o de argumentar que no existe relación entre las variables porque no hay una expresión algebraica que las relacione entre sí.

Los alumnos que argumentan teorías previas (estrategia 8 de la tabla 3.1.4.5) basan su juicio sobre la asociación en sus creencias sobre el tipo de relación entre las variables, sin tener en cuenta los datos presentados. En general estos alumnos han hecho una interpretación en términos de relación causa - efecto entre las variables, otorgándoles un papel asimétrico, aunque la pregunta se les planteó en términos simétricos.

Los alumnos que argumentan la existencia de otras variables (estrategia 9 de la tabla 3.1.4.5) manifiestan una concepción causalista extrema de la asociación, ya que no admiten más que una causa para un determinado efecto.

Los alumnos que manifiestan no causalidad (estrategia 13 de la tabla 3.1.4.5) no admiten la concordancia Barbancho (1973), es decir no admiten la existencia de asociación si no perciben una relación de causa-efecto, manifestando así mismo una concepción causalista de la asociación.

Estrategias empleadas por los alumnos en los juicios sobre asociación en la comparación de muestras

Las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos en estos ítems se

han clasificado, de acuerdo con su contenido matemático en, correctos, parcialmente correctos e incorrectos, como se ha expuesto en la sección 2.3.5. En el recuento de frecuencias se obtuvo la tabla 3.1.4.6 para los ítems L y M, en la que se han clasificado las estrategias atendiendo al grado de corrección que contiene respecto al contenido matemático puesto en juego, bien de manera explícita o implícita.

Tabla 3.1.4.6 Frecuencia y porcentaje de estrategias empleadas por los alumnos en la comparación de muestras

Frecuencia y porcentaje de estrategias empleadas por los alumnos en la comparación de muestras		
Estrategias	Ítem L	Ítem M
CORRECTAS:		
1 Compara las medias		2 (9.5)
2 Compara los totales		3 (14.3)
3 Compara porcentajes	6 (28.6)	
5 Compara distribuciones		5 (23.8)
18 Comp. distr, completa		1 (4.8)
PARCIALMENTE CORRECTAS:		
6 Compara caso a caso	8 (38.1)	
7 Marca casos excepcionales	7 (33.3)	
10 Comparación global		7 (33.3)
INCORRECTAS:		
13 Compara máximos		1 (4.8)
16 Expone teorías previas		1 (4.8)
No contesta		1 (4.8)

Al comparar esta tabla con su homóloga de la muestra de comparación (tabla 2.3.5.3.1), se puede observar que son similares. En las estrategias correctas destacan en ambas muestras la 3 en el ítem L y la 1, 2 y 5 en el ítem M. Cuando se utilizan estrategias parcialmente correctas destacan en ambas muestras la 6 y 7 en el ítem L y la 10 en el ítem M. En el caso de estrategias incorrectas destacan la 13 y la 16 en el ítem M en ambas muestras.

En primer lugar, se puede afirmar que estos alumnos, sin conocer la existencia de los dos tipos de muestras, relacionadas e independientes, diferencian claramente las estrategias utilizadas en las mismas.

En las estrategias correctas, se puede concluir que el alumno ha buscado en su bagaje de conocimientos matemáticos y ha elegido el aparato matemático que ha creído más adecuado para responder a la pregunta planteada en el ítem. Cuando el alumno ha utilizado un instrumento matemático, que para nosotros no es totalmente adecuado, lo hemos clasificado como estrategias parcialmente correctas e incorrectas y, a partir de ellas, deducimos las concepciones no adecuadas que tienen sobre la asociación en este tipo de problemas.

Los alumnos que comparan los datos ofrecidos caso a caso y que, además, señalan casos excepcionales (estrategia 7 de la tabla 3.1.4.6) decimos que tienen una concepción determinista de la dependencia entre muestras. Para ellos sólo existirá dependencia si estudiados los casos uno a uno, se observan diferencias apreciables, no admitiendo excepciones a esta regla. Asimismo, un

alumno basa su juicio, en el ítem M, en sus teorías previas sobre el contexto.

3.1.5. OTROS ASPECTOS ESTUDIADOS

Unión de los puntos con una línea en el diagrama de dispersión

En la tabla 3.1.5.1 se dan las frecuencias y porcentajes de los alumnos que unen los puntos con una línea en el diagrama de dispersión o nube de puntos en la muestra experimental. Si comparamos esta tabla con su homóloga de la muestra de comparación (tabla 2.3.6.1) se puede observar que los porcentajes de utilización son similares en los ítems I y K. En el ítem J los alumnos de la muestra de comparación unen los puntos con una línea en mayor porcentaje. Todos estos alumnos intentan trazar una gráfica aproximada, para, a partir de ella, deducir una relación funcional entre las variables, por lo que consideramos que manifiestan una concepción determinista de la asociación.

Tabla 3.1.5.1 Frecuencia de alumnos que unen los puntos con una línea

Item	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
I	Clasf. Liga/empates	3	14.3
J	Proteínas/natalidad	5	23.8
K	Juicio de jueces	1	4.8

Simplificación de las tablas 2x3 y 3x3

Si comparamos la tabla 3.1.5.2 con su correspondiente de la muestra de comparación (tabla 2.3.6.2), se puede observar que, mientras ningún alumno de la muestra experimental ha intentado reducir la tabla 2x3 a una más sencilla, el 13.1 por ciento de la muestra de comparación, si lo ha hecho. Mientras que, en la muestra de comparación el 4.7 de los alumnos ha intentado simplificar la tabla 3x3, el 28.6 por ciento de la muestra experimental lo ha hecho. Los alumnos de esta muestra han sentido más necesidad de simplificar en la tabla 3x3. Como en la muestra de comparación interpretamos este hecho como indicativo de una concepción determinista de la asociación, pues la tabla 2x2 es más fácilmente interpretable en términos de causalidad que la 3x3.

Tabla 3.1.5.2 Frecuencia de alumnos que intentan reducir la tabla

Item	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
G	Aprob/suspender examen	0	0.0
H	Lateralidad ojos/manos	6	28.6

Empleo de porcentajes

Si comparamos la tabla 3.1.5.3 con su homóloga de la muestra de comparación (tabla 2.3.6.3), se puede observar que salvo en el ítem F, los porcenta-

jes de uso de porcentajes es prácticamente el mismo. En el ítem F el 27.7 de los alumnos utilizan porcentajes en la muestra de comparación, mientras que los usa el 40.9 de la muestra experimental. El reducido empleo de porcentajes es un indicador de la dificultad en el razonamiento proporcional de los alumnos de la muestra.

Tabla 3.1.5.3 Frecuencia de alumnos que emplean porcentajes

Item	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
D	Fumar/bronquios	6	28.6
E	Dieta/trastornos	8	38.1
F	Vida sedent/alergia	9	42.9
G	Aprob/suspender examen	5	23.8
H	Lateralidad ojos/manos	2	9.5

Empleo de frecuencias marginales

Si comparamos los porcentajes de uso de las frecuencias marginales de la tabla 3.1.5.4 con los de su homóloga de la muestra de comparación (tabla 2.3.6.4), se aprecia que son prácticamente los mismos en los ítems donde se debían calcular.

Tabla 3.1.5.4 Frecuencia de alumnos que emplean frecuencias marginales

Item	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
E	Dieta/trastornos	12	57.1
F	Vida sedent/alergia	11	52.4
H	Lateralidad ojos/manos	5	23.8

De acuerdo con el análisis de las tablas de la muestras de comparación y de la muestra experimental, podemos concluir que en los alumnos de la muestra experimental se presentan concepciones similares a los de la muestra de comparación. Por tanto, aunque nuestra muestra experimental sea reducida (21 alumnos) la homogeneidad de concepciones respecto a las otras muestras hace que las conclusiones obtenidas en el experimento de enseñanza tenga una mayor generalizabilidad.

3.2. DESCRIPCION DEL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

3.2.1. CRITERIOS SEGUIDOS EN LA PLANIFICACION DE LA INSTRUCCION

Como se ha señalado, la enseñanza efectuada corresponde a la introducción de la Estadística en los primeros cursos universitarios. Diferentes autores como Kempthorne (1980) y Garfield (1981) señalan la problemática referida al diseño de estos cursos, que suelen ser considerados aburridos y faltos de interés para unos estudiantes que, en general, presentan una preparación matemática deficiente y una falta de motivación sobre los contenidos, fracasando, frecuentemente, el objetivo propuesto en la enseñanza: *"incluso los buenos estudiantes terminan el curso estándar de Estadística sin saber como analizar datos. Si se les pide que realicen un test de la t para dos muestras, la mayor parte de los estudiantes sabrá hacerlo. Si se le pide que analicen un conjunto de datos, la mayoría se sentirán perdidos"* (Tanner y Wardrop, 1992, p. 122).

Entre los métodos ensayados con objeto de mejorar este problema se encuentran la enseñanza basada en el empleo de ordenador (Garfield, 1981; Estepa, 1990; Gandhi y cols. 1991; Weldon y Tham, 1991; Nakamura, 1991) y el enfoque orientado hacia la resolución de problemas. En este último caso, el énfasis se coloca en presentar al alumno problemas de la vida real que deben resolver y que sirvan de motivación a la introducción de los conceptos. *"¿Cómo hacer el aprendizaje de la Estadística Aplicada más interesante, más asequible? Creemos que un modo es capitalizar la fascinación del estudiante, no por la Estadística en sí misma, sino por los problemas sustantivos que la Estadística puede tratar"* (Willett y Singer, 1992, pg. 83). Los informes de estas experiencias, (Kempthorne, 1980; Estepa, 1990; Gandhi y cols. 1991; Weldon y Tham, 1991), señalan que, en general, esta orientación aumenta el interés de los alumnos hacia el aprendizaje. Una investigación más detallada sobre la evolución de las concepciones y capacidades de los alumnos es, sin embargo, necesaria y es el objeto del presente estudio, cuya enseñanza incorpora los dos enfoques señalados.

Giménez (1991), en su investigación sobre la enseñanza de las fracciones, en la que también realiza un experimento de enseñanza, señala, entre otros, los siguientes aspectos que es preciso tener en cuenta en la elaboración del currículo:

- A quién va dirigido, lo que incluye no sólo el nivel educativo sino los aspectos sociológicos. En nuestro caso, aunque el curso podría haberse adaptado a otro tipo de alumnos en los primeros años universitarios, hay que destacar que la muestra ha estado constituida por futuros profesores.
- La valoración epistemológica del investigador sobre el concepto dado, desde el punto de vista matemático, psicológico y fenomenológico. Esta valoración se ha puesto de manifiesto en el estudio realizado en el Capítulo I.
- Los principios sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas; en este caso sobre la enseñanza de la Estadística. Todos estos aspectos incidirán en la propuesta presentada, por lo que haremos unas breves consideraciones sobre los aspectos primero y tercero que no han sido discutidos con anterioridad.

Formación estadística de los futuros profesores

El curso va dirigido a futuros profesores de E. G. B. de la Especialidad de Ciencias, quienes posiblemente deban enseñar a su vez Estadística, ya que los nuevos diseños curriculares (Real Decreto 1006/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria, BOE 26-6-1991) incorporan contenidos estadísticos en la Educación Primaria.

Numerosos autores, como, por ejemplo, Fischbein (1990) y Holmes y Rouncefield (1990), han señalado la dificultad que supone la preparación de estos futuros profesores, por las concepciones que tienen sobre la Estadística y su enseñanza. Aunque este aspecto no está directamente relacionado con nuestra investigación, ha sido preciso tenerlo en cuenta en la planificación de la enseñanza.

Esta dificultad surge por la evolución que va experimentando la Estadística que la aleja, cada vez más, de la "Matemática Pura". Actualmente la Estadística se considera una "ciencia de los datos" estrechamente relacionada no sólo con la Matemática sino también con las Ciencias de la Computación. Tukey (1962) fue el que propuso el desafío de colocar los datos como el corazón de la Estadística.

Biehler (1990) señala, además, la diferenciación de niveles de actividad estadística existente entre la práctica del análisis de datos y la construcción, optimización y comparación de nuevos útiles para la práctica estadística, característicos de la Estadística Teórica. En ambos niveles, práctico y disciplinar, la revolución informática ha proporcionado un cambio espectacular. *"La enseñanza de la Estadística debiera en este aspecto reflejar la práctica estadística en la cual cálculo y representación gráfica están casi automatizados"* (Moore, 1992, p. 21). Aunque muchos futuros profesores han obtenido conocimientos en Estadística teórica, sólo una minoría de futuros profesores de Estadística en los niveles no universitarios, tienen experiencia práctica en el uso de paquetes de análisis de datos. Debido a la estrecha relación entre la computación estadística y la Estadística Aplicada, (Biehler, 1990), el uso de ordenadores en el aprendizaje se dirige más bien a especialidades no matemáticas y es raro que los futuros profesores surjan de estas especialidades.

Por otro lado, estos futuros profesores tendrán que enseñar la Estadística en estrecha ligazón con la Matemática. Steimbring (1990) indica que hoy es inimaginable enseñar Estadística fuera de la clase de Matemáticas, lo que ha hecho aparecer la Estadística como componente secundario de la misma. Los profesores suelen adaptar su visión sobre la Estadística y el modo en que ha de ser enseñada a los métodos de solución, patrones de razonamiento y modo de organización del resto de los contenidos matemáticos. Una enseñanza como la que proponemos, basada en el estudio de casos reales y en la resolución de problemas, tiene como objetivo adicional cambiar este tipo de concepciones y proporcionar modelos para la integración de la Estadística en el currículo matemático tradicional. Además pretende ofrecer al profesor el metaconocimiento estadístico o conocimiento acerca del conocimiento estadístico, que incluye las perspectivas histórica, cultural y epistemológica de la Estadística y su relación con otros dominios de la ciencia y la cultura (Biehler, 1990).

Principios sobre la enseñanza de la Estadística

La incompatibilidad aparente entre la Estocástica y la Matemática escolar tradicional se debe al hecho de su estructura compleja sistémica, que no puede ser captada en secuencia lineal sino de modo holístico, (Steimbring, 1990). Los conceptos elementales muestran una interrelación entre componentes matemáticos y aspectos concretos de las situaciones en que se aplican. Así, la "esperanza de vida" resulta de ligar la frecuencia relativa, aspectos relativos a las fracciones y operaciones numéricas con la edad, población observada, modo de vida, etc... La Estadística es, por naturaleza, interdisciplinaria y multidisciplinaria. Es interdisciplinaria en la manera que los mismos conceptos y técnicas se usan para profundizar dentro de la cuantificación de problemas, a través de muchas disciplinas. Es multidisciplinaria en la manera que muchas disciplinas proporcionan problemas que beneficiarían la profundización en el uso y desarrollo de la Estadística. (Holmes, 1980).

La Estadística es difícil de enseñar porque no sólo debemos presentar los diferentes modelos y fórmulas o ilustrar sus aplicaciones. Debemos profundizar en cuestiones más amplias, consistentes en la manera de obtener conocimiento a partir de los datos. Ello conduce a la necesidad de efectuar juicios de valor sobre si los modelos son apropiados o, al menos, aproximadamente apropiados y a reflexionar sobre ideas controvertidas como el azar o, en nuestro caso, la causalidad. Los requerimientos matemáticos de la Estocástica elemental no causan problemas, sino los aspectos más complejos de interpretación, aplicación y modelización, porque contrastan con el modo de trabajo en otras ramas de la Matemática. Por ejemplo, los juegos y simulaciones o el aspecto gráfico-visual, que permite ilustrar las relaciones estadísticas son modos de trabajo específicos que, con frecuencia se rechazan por considerarse matemáticamente inexactos (Steimbring, 1990).

Como consecuencia, la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística es un tema de importancia significativa para los profesionales de la misma, como se aprecia en las Actas de los tres ICOTS (Congresos internacionales sobre la enseñanza de la Estadística) que han tenido lugar hasta hoy. Muchos autores se han preocupado de la enseñanza de la Estadística en sentido general como por ejemplo: Hawkins y cols. (1992), Oosthuizen (1991) o Burnill (1991), quien ofrece los diez principios sobre la enseñanza de la Estadística que a continuación se resumen:

- (i) La actitud y comportamiento del alumno debe ser activo y no pasivo, proponiéndole preguntas sobre su entorno que puedan responderse de forma cuantitativa.
- (ii) El énfasis del trabajo en Estadística se debe poner en el análisis de los datos y la comunicación de las conclusiones obtenidas y no simplemente en la corrección de las respuestas.
- (iii) Se deben proporcionar diferentes formas de resolución y admitir diversas soluciones de los problemas planteados, dando a los estudiantes oportunidad de discutirlas, evaluarlas y reflexionar sobre las mismas.
- (iv) Siempre que sea posible, los datos deben ser reales y del entorno experiencial del alumno.
- (v) La exploración y la experimentación de tablas de frecuencias y las técnicas gráficas simples precederán a los algoritmos y las fórmulas.

- (vi) Se utilizarán buenos ejemplos para construir la intuición, en lugar de paradojas probabilísticas y estadísticas engañosas.
- (vii) Los proyectos deben ser parte integral del trabajo en Estadística.
- (viii) La Estadística es el vehículo ideal para conectar las matemáticas con las otras áreas del currículum.
- (ix) Se deben utilizar las nuevas tecnologías para facilitar el análisis y la interpretación de los datos.
- (x) La evaluación de los alumnos se efectuará mediante diferentes instrumentos como: informes, proyectos, observaciones, tests propuestos a los estudiantes, así como métodos tradicionales.

En este proyecto se han empleado también, además de los principios anteriores, las siguientes ideas de Biehler (1990) para facilitar la integración del empleo de los gráficos con el resto de procedimientos estadísticos:

- Los gráficos se emplean en modo exploratorio para desarrollar nuevo conocimiento y descubrir hechos sobre los datos.
- Los gráficos se emplean como diagramas relacionales para hacer accesibles las relaciones latentes en los datos.
- Los gráficos tienen carácter de modelo; definen una perspectiva de los datos; pueden ser más o menos adecuados a unos datos que a otros.
- Se fomenta el uso de representaciones múltiples.

Finalmente, se ha integrado la perspectiva multivariante que se adquiere mediante la exploración de bases de datos con ayuda del software interactivo. Usando herramientas simples, como resúmenes numéricos, gráficos de la caja, nubes de puntos y diagramas de barras, junto con la potencia del software que permite la selección de subconjuntos de datos o la adición de nuevas variables (Biehler, 1990).

3.2.2. OBJETIVOS, CONTENIDOS, METODOLOGIA Y TEMPORALIZACION DEL PROGRAMA DE ENSEÑANZA

Puesto que la evolución de las concepciones de los alumnos participantes y los procedimientos de resolución de las actividades propuestas dependen de los conocimientos que se han transmitido en la enseñanza, pasamos, a discutir los objetivos, contenidos, metodología y temporalización de la enseñanza realizada.

Al tratarse de un curso completo de Estadística Descriptiva, la exposición realizada se refiere al total del curso, en el que se encuentra incluido un tema de asociación. Los materiales que han sido confeccionados para su utilización en esta experiencia: colecciones de programas, desarrollo teórico del tema, ficheros de datos y actividades para las clases prácticas se describen en los anexos 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4

Como se ha indicado, la muestra elegida para efectuar la experimentación, que se describe en la Sección 3.1.1, ha estado formada por futuros profesores. Consideramos, no obstante, que la propuesta de enseñanza podría ser válida, con ligeras modificaciones, para otros estudiantes universitarios de especialidades tales como Psicología, Pedagogía, Biología, Farmacia, etc, o bien para el Curso de Orientación Universitaria, donde se prevee la introducción de este

tema en los nuevos diseños curriculares. La elección de los contenidos, su secuenciación y las actividades de aprendizaje se han adecuado al tiempo disponible (siete semanas dentro del programa de la asignatura Estadística Aplicada a la Educación que se imparte en la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de E.G.B., en el segundo cuatrimestre del segundo año de formación) y a los conocimientos previos de los alumnos.

Finalmente, conviene señalar que la propuesta que hemos diseñado no constituye pues, en sí misma, el fin de la investigación, sino un medio para llevarla a cabo y es una primera aproximación al problema de la enseñanza de la Estadística Descriptiva basada en el uso de ordenador en niveles de enseñanza similares al empleado en el estudio.

Objetivos

Como objetivos generales de la enseñanza realizada se pueden adoptar los del School Council Project que se transcriben a continuación:

1. *Los alumnos llegarán a comprender y a apreciar el papel de la Estadística en la sociedad. Esto es, conocerán los muchos y variados campos en los cuales las ideas estadísticas se usan, incluyendo el lugar del pensamiento estadístico en otras áreas académicas.*
2. *Los alumnos llegarán a comprender y a apreciar el ámbito de la Estadística. Esto es, conocerán la clase de preguntas que un uso inteligente de la Estadística puede responder, comprendiendo el poder y limitaciones del pensamiento estadístico. (Holmes, 1980, pág. 27)*

Para el propósito de este trabajo estos objetivos generales se desglosan en tres grandes grupos: Los propios del aprendizaje de la Estadística Descriptiva, los basados en nuestra hipótesis de que el ordenador facilita el aprendizaje de la Estadística, al liberar al alumno de la tarea de cálculo y poder dedicar este tiempo a los aspectos interpretativos y los que tienen como fin la formación de los alumnos como futuros profesores.

Entre los primeros, además de los tradicionales en un curso de esta materia, incluimos los siguientes:

- 1) Elaborar el cuestionario de una encuesta con el fin de estudiar las características de una población, eligiendo para ello las variables pertinentes, definiendo las categorías de las mismas y redactando adecuadamente las preguntas del cuestionario.
- 2) Seleccionar una muestra representativa de una población y realizar la recogida de datos en la misma.
- 3) Adquirir manejo suficiente en el proceso de codificación, grabación y depuración de los datos en un paquete elemental de programas estadísticos.
- 4) Realizar el tratamiento estadístico de los datos de la encuesta empleando un conjunto de programas de cálculo y la interpretación de los mismos.
- 5) Aprender a elaborar los gráficos de la caja y curva empírica de distribución y reconocer las ventajas que nos ofrecen en el análisis de un conjunto de datos.

- 6) Lograr competencia para comparar (señalando semejanzas y diferencias) dos tablas de frecuencias de la misma variable en grupos distintos (p. e. "edad" en grupos de personas distintos).
- 7) Reconocer y utilizar las posibilidades que propicia un enfoque exploratorio en el análisis de un conjunto de datos (Tukey, 1977).

En cuanto al segundo grupo de objetivos incluimos los siguientes:

- 8) Desarrollar la capacidad de formular problemas sobre los ficheros de datos dados o con otros posibles de elaboración propia.
- 9) Aumentar el tiempo real de trabajo personal dedicado a la interpretación y análisis de los conjuntos de datos y el número de ejemplos de los conceptos impartidos.
- 10) Analizar distintos conjuntos de datos reales para mostrar diferentes campos de aplicación de la Estadística.
- 11) Iniciar al alumno en el uso de herramientas (ordenador y paquete estadístico), útiles en su futura vida profesional.
- 12) Aprovechar la capacidad motivadora que produce el ordenador en los alumnos para lograr su interés por el aprendizaje de la Estadística.

En el tercer grupo se incluyen los siguientes:

- 13) Proporcionar al futuro profesor, a través de la reflexión y debate en clase un metaconocimiento sobre la Estadística que incluya una visión de ésta en conexión con la Matemática y las Ciencias de la Computación y una perspectiva histórica, filosófica y didáctica.
- 14) Mostrar al futuro profesor la utilidad de la Estadística en las diversas ramas de la ciencia y técnica, así como su relación con otras áreas curriculares.
- 15) Presentarle modelos concretos de acción en el aula, mediante el método de proyectos y el trabajo en equipo en el laboratorio y en el aula.

Por último haremos mención especial al tema de investigación de la presente tesis: la asociación estadística. Los objetivos específicos marcados han sido los siguientes:

- 16) Mediante ejemplos concretos y su representación gráfica, el alumno diferenciará los conceptos de dependencia funcional y aleatoriedad. Asimismo, diferenciará la correlación de la causalidad.
- 17) Dadas las frecuencias absolutas dobles en una tabla de contingencia, el alumno será capaz de calcular las frecuencias relativas dobles, las frecuencias marginales absolutas y relativas, las frecuencias condicionales absolutas y relativas.
- 18) El alumno será capaz de entender y utilizar la simbología de una tabla de contingencia general.
- 19) El alumno conocerá y será capaz de aplicar el criterio de independencia y sus propiedades en las tablas de contingencia.

- 20) El alumno será capaz de distinguir, cuándo en una tabla de contingencia dada existe independencia total, asociación perfecta o asociación parcial entre las variables de la tabla dada y, en su caso, el tipo de dependencia.
- 21) Mediante ejemplos concretos, el alumno adquirirá los conceptos de regresión y correlación.
- 22) Mediante el método de mínimos cuadrados y la obtención de las ecuaciones normales, el alumno será capaz de calcular la recta de regresión e interpretarla.
- 23) El alumno será capaz de calcular el coeficiente de correlación lineal de Pearson e interpretar su magnitud y signo.
- 24) Calculado el coeficiente de correlación y la varianza residual, el alumno será capaz de obtener la varianza debida al azar y la explicada por la regresión.

Contenidos

Podemos subdividir el contenido matemático de la enseñanza efectuada en cinco bloques diferenciados:

Bloque 1: *Estadística y ordenadores.*

Bloque 2: *Recopilación y preparación de los datos para el análisis estadístico.*

Bloque 3: *Distribuciones de frecuencias. Gráficos.*

Bloque 4: *Características de una distribución de frecuencias.*

Bloque 5: *Variables estadísticas bidimensionales: Tablas de contingencia.*

A continuación se presenta, de forma resumida, los contenidos de cada uno de estos bloques. Se señala con un asterisco (*) los conceptos y actividades nuevos, respecto a un programa convencional de Estadística.

Bloque 1: Introducción: Estadística y ordenadores

Conceptos y técnicas:

- Experimento aleatorio. Estadística y sus ramas.
- Aplicaciones de la Estadística en el mundo biológico, físico, social y político
- * - Papel de los ordenadores en la práctica y enseñanza de la Estadística.
- * - El software estadístico. Ejemplos de paquetes estadísticos.

Recursos: Batanero y cols (1988).

- Secciones 1.1, 1.2 y 1.3

Actividades:

- Exploración inicial de un paquete estadístico. Presentación del paquete PRODEST.

Bloque 2: Recopilación y preparación de los datos para el análisis

estadístico

Conceptos y técnicas:

- Población, unidad estadística, muestra y censo. Muestreo aleatorio.
- Escalas de medida: escala nominal, ordinal, de intervalo y de razón.
- Variable estadística. Características estadísticas y modalidades
- Variable nominal, discreta y continua.
- * - Codificación: campos y registros.
- * - Diseño de una hoja de codificación.

Recursos: Batanero y cols (1988).

- Secciones 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 (solo un ejemplo).

Actividades:

- Planteamiento de una encuesta sencilla.
- Discusión y redacción del cuestionario.
- Discusión de los tipos de variables y escalas de medida.
- * - Diseño de la hoja de codificación.
- * - Elaboración de un listado de la población a muestrear. Estudio de su estructura. Selección de una muestra representativa.
- * - Recogida de datos.
- * - Codificación.
- * - Grabación.
- * - Depuración.

Bloque 3: Distribuciones de frecuencias. Gráficos

Conceptos y técnicas:

- Frecuencia absoluta, relativa, porcentaje, proporción. Distribución de frecuencias. Tablas de frecuencias para variables cualitativas.
- Diagrama de barras; gráfico de sectores.
- Frecuencia acumulada, diagrama de frecuencias acumuladas. Tablas de frecuencias para variables cuantitativas discretas.
- Variables agrupadas, intervalos de clase, marca de clase, máximo, mínimo, recorrido, extremos de clase. Criterios de selección de intervalos.
- Histogramas y polígonos de frecuencias. Polígono acumulativo de frecuencias.
- Efecto de agrupamiento.

Recursos: Batanero y cols (1988).

- Secciones 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6.

Actividades:

- Problemas clásicos.
- * - Prácticas con ordenador 1, 2 (Anexo 3.3).

Bloque 4: Características de una distribución de frecuencias

Conceptos y técnicas:

- Características de tendencia central, de dispersión y de forma.
- La media. Propiedades. Cálculo. Interpretación.
- La moda. Propiedades. Cálculo. Interpretación.
- Estadísticos de orden: Mediana, cuartiles, percentiles, rangos de percentiles. Propiedades, cálculo e interpretación.
- * - Gráfico de la caja.

- * - Curva empírica de distribución.
- Características de dispersión: varianza, desviación típica, recorrido, desviación media, coeficiente de variación.
- Características de forma: Asimetría, coeficientes de asimetría y curtosis.
- Corrección de continuidad.

Recursos: Batanero y cols (1988).

- Secciones 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7.

Actividades:

- Problemas clásicos.
- * - Prácticas con ordenador 3 y 4 (Anexo 3.3).

Bloque 5: Variables estadísticas bidimensionales: Tablas de contingencia. Asociación estadística. Correlación y regresión

Conceptos y técnicas:

- Presentación inicial. Variable estadística bidimensional y sus tipos
- Dependencia funcional y dependencia aleatoria.
- Variables independiente y dependiente en una relación de dependencia.
- Tablas de contingencia. Elaboración e interpretación. Frecuencias absolutas y relativas. Caso especial de la tabla 2x2. Tablas rxc.
- Distribuciones marginales y condicionales. Diversos tipos de frecuencias y relación entre las mismas. Medias y varianzas marginales y condicionales.
- Análisis de tablas de contingencia. Dependencia funcional, aleatoria e independencia. Propiedades de las frecuencias absolutas y relativas condicionales en caso de independencia. Casos de asociación parcial y perfecta.
- Variables numéricas. Nube de puntos. Forma y dispersión.
- Los problemas de regresión y correlación. Diferencia entre correlación, asociación y causalidad.
- Dependencia directa, inversa e independencia en variables cuantitativas.
- Covarianza. Coeficiente de correlación. Determinación de la asociación a partir de la covarianza y del coeficiente de correlación.
- Rectas de regresión de Y sobre X y de X sobre Y. Interpretación y cálculo. Criterio de mínimos cuadrados. Relación entre la covarianza y el coeficiente de correlación y la pendiente de la recta de regresión.
- Descomposición de la varianza. Varianza residual. Varianza debida a la regresión.

Recursos: Batanero y cols (1988).

- Secciones 12.1, 12.2, 12.3, 13.1, 13.2, 13.4.

Además se proporcionó al alumno el tema sobre asociación estadística que se presenta en el anexo 3.2.

Actividades:

- Problemas clásicos.
- * - Prácticas con ordenador 5 y 6 (Anexo 3.3).

Aunque, aparentemente, al conservarse los contenidos de un programa convencional de Estadística, pudiese parecer que el cambio sobre los mismos se reduce a introducir nuevos temas, sin embargo, se producen unas diferencias en

la forma de trabajar dichos contenidos. Estas diferencias son las siguientes:

- La realización de los cálculos en los ejercicios de aplicación se efectúa de forma automática. Los datos se depuran previamente, por lo que el alumno está seguro de no cometer errores, mientras que, incluso usando calculadora, no se puede tener esa seguridad.
- A partir del tercer bloque, en la mayor parte de los libros de mayor difusión con contenidos de Estadística Descriptiva, los datos se dan tabulados por lo que en el cálculo de estadísticos siempre existe un error de agrupamiento para las variables continuas, error que no se produce al efectuar los cálculos con ordenador. Esto también produce la necesidad de enseñar al alumno, en el enfoque convencional, algoritmos especiales de cálculo abreviado, innecesarios con el ordenador.
- Además, para algunos estadísticos particulares como la mediana, moda, percentiles y rangos de percentiles es preciso enseñar al alumno métodos aproximados cuando las variables están agrupadas, siendo, por tanto, diferente el procedimiento de cálculo para variables agrupadas o no agrupadas. El ordenador siempre efectúa el cálculo exacto, tratando los valores de cada variable dato a dato.
- Por último, mientras que en los ejercicios realizados a mano las colecciones de datos presentadas contemplan una o dos variables, generalmente, los conjuntos de datos tratados con ordenador presentan un número mayor de variables de tipo diferente referidas a las mismas unidades estadísticas. Esto permite comparar una misma variable con otras diferentes, constituyendo una primera aproximación al análisis multivariante y la introducción al muestreo, al poder seleccionar y comparar diferentes partes del fichero.

Metodología

La enseñanza de la Estadística no se debe basar en la realización de cálculos y el aprendizaje de definiciones y tampoco debe ignorar la importancia fundamental del fondo intuitivo que proporcionan las situaciones problemáticas basadas en casos reales. *"Si se automatizan los, a menudo prohibitivos, cálculos requeridos en los procedimientos estadísticos, la instrucción puede ofrecer experiencia con datos reales y enfatizar el razonamiento sobre los mismos"* (Moore, 1992, pg. 21)

Como indica Holmes (1980), para enseñar Estadística a partir de situaciones problemáticas, basadas en aplicaciones tomadas de las diferentes partes del currículum de interés para el alumno, se necesitarán diferentes conceptos y técnicas en diferentes niveles de comprensión, por lo que se debe realizar una enseñanza cíclica y en espiral, eligiendo adecuadamente las situaciones a proponer. Para el tema de asociación se han comenzado a resolver problemas relacionados con la misma a partir de la primera clase práctica y los problemas han sido minuciosamente seleccionados como se expone en la sección 3.2.4.

Según Holmes (1980), la enseñanza de los conceptos y técnicas estadísticas se deben basar en los siguientes principios:

- Los conceptos y técnicas serán desarrollados en contextos prácticos.
- Las técnicas no serán necesariamente desarrolladas al completo en el primer momento que surjan.

- Una completa justificación teórica de todos los tópicos tratados no es ni necesaria ni deseable. Algunos ítems serían solamente tratados en problemas particulares, otros conceptos se cubrirían solamente a través de experimentos y no serían justificados teóricamente.

Siguiendo estos principios, se pueden clasificar las clases desarrolladas en dos tipos, unas en aula tradicional que llamaremos clases teóricas y otras realizadas con ordenadores a las que denominaremos clases prácticas.

En las clases teóricas, el desarrollo de cada uno de los bloques temáticos se ha basado en el planteamiento previo de una situación problemática de análisis de datos, de la que surja la necesidad de introducir los diferentes conceptos de dicho bloque. Por tanto, las clases teóricas han sido desarrolladas de la siguiente forma: Una vez propuesta a los alumnos la situación de análisis de datos, se pide a los estudiantes posibles sugerencias de solución; discutidas estas soluciones se completan con la exposición, por parte del profesor, de los contenidos a tratar en esa sesión, quedando, de este modo, los contenidos explicitados y la clase motivada por la situación propuesta. La introducción de este tipo de clases teóricas aúna los principios del aprendizaje por descubrimiento reforzado en las clases prácticas y el aprendizaje significativo.

"Una buena enseñanza expositiva puede garantizar que el nuevo conocimiento quede ligado a ideas relevantes ya existentes y puede, además, que este procedimiento fuese no sólo más económico (en términos del tiempo invertido) que el del descubrimiento, sino más eficaz en términos de la calidad y amplitud del aprendizaje". ... "El aprendizaje por descubrimiento resultaría necesario con niños muy pequeños y, en esa etapa de la vida, habría que otorgar más importancia a estimular la formación de conceptos que a enseñar como adquirirlos. Pero, una vez aprendida una estructura rica del conocimiento, el modo más eficaz de proceder sería el de la exposición" (Orton, 1988, pág. 184)

Tras estas clases teóricas, se propusieron al alumno unos ejercicios de refuerzo para realizar fuera de clase, que contenían todos los aspectos del tema, con el fin de que el estudiante, de forma individualizada, aplicara todos los contenidos estadísticos tratados, al menos una vez, realizando los cálculos a mano o con calculadora. De esta forma, una vez superadas las tareas de calcular, realizar gráficos, confeccionar tablas, etc..., se pasaba a las clases prácticas.

En estas sesiones, los estudiantes, trabajando por parejas con el ordenador en el aula de informática, se enfrentaron a la resolución de una serie de problemas, planteados a partir de colecciones de datos reales. Para comprender mejor la actividad desarrollada es preciso analizar la naturaleza específica de un problema estadístico. *"Mientras que los problemas matemáticos frecuentemente tienen una solución analítica clara, los problemas estadísticos prácticos no y pocos libros de Estadística guían en el método de hallar buenas soluciones -aunque no óptimas- a problemas casi siempre mal definidos"* (Chatfield, 1988, pág. 8).

En general *"la posibilidad de solución de un problema particular varía desde tener una solución completa a ser prácticamente irresoluble. Los métodos estadísticos son herramientas que resuelven problemas cuando no es posible una solución analítica completa, pero puede dárseles una solución parcial o aproximada"* (Yang y Robinson, (1986), pág 1)

El marco analítico de la actividad desarrollada por los alumnos en estas sesiones se ha tomado del modelo de Chevarney y cols. (1977) para la resolución de problemas estadísticos que se describe e implementa en Garfield (1981). Este modelo visualiza el proceso de resolución de un problema estadístico en tres niveles:

- a) **Comprensión del problema:** Incluye la comprensión del enunciado, la identificación del tipo de problema; de los términos estadísticos implicados en el enunciado y la solución y el reconocimiento de los datos conocidos y desconocidos.
- b) **Planificación y ejecución:** Consiste en la selección de una de las técnicas estadísticas aplicables al problema entre las disponibles; el uso correcto de la técnica apropiada y la obtención de la solución.
- c) **Evaluación e interpretación:** Incluye la comprobación de la plausibilidad de la solución y la interpretación de la misma en términos estadísticos y en términos del contexto del problema.

Las clases prácticas comenzaron con una breve explicación del funcionamiento del programa que ese día había que aplicar (unos 5 minutos). A continuación se conectaban los ordenadores, se repartía la ficha de la práctica correspondiente a esa sesión (las 6 fichas de prácticas conteniendo los objetivos y problemas propuestos en cada práctica, se adjuntan en el anexo 3.3) y los alumnos comenzarán a resolver los problemas propuestos. Cuando no entendían algún aspecto de los problemas o del funcionamiento del programa le preguntaban al profesor, o a otros compañeros, discutiéndose colectivamente las posibles formas de resolver los problemas al final de cada sesión, esto es, finalizándose con una fase de institucionalización.

Todos los problemas propuestos en las sesiones prácticas han sido elegidos cuidadosamente, a partir de un diseño previo. Este diseño ha incluido la clasificación de los problemas, la determinación de las variables de tarea de los mismos y la asignación de valores a estas variables de modo que, por un lado, se presente al alumno una muestra representativa de problemas de asociación estadística y, por otro, se produzca una progresión en la dificultad de los problemas y en la introducción de los nuevos conceptos. Por la importancia que este diseño tiene, para conseguir que la actividad de resolución de los problemas actúe como vehículo en el aprendizaje, hemos considerado conveniente efectuar una descripción detallada del mismo en la sección 3.2.4.

Otro tipo de actividad a realizar por los alumnos, ha sido la recolección de un conjunto de datos propio. Para ello, se sugirió realizar una encuesta a los compañeros de Escuela para conocer las características físicas del alumnado. En clase se discutió la redacción de las preguntas a formular que fueron seleccionadas previamente entre las propuestas por los alumnos.

La recogida de datos se efectuó por los alumnos, en grupos de dos, entrevistando un número comprendido entre 5 y 10 de los primeros estudiantes que encontraron al entrar en un aula determinada. El número entre 5 y 10 se fijó "a priori" en razón del número de alumnos de cada aula. Cada grupo de alumnos grabó en el ordenador los datos que obtuvo. Al fichero de datos obtenido se le llamó MEDIDAS. El protocolo de recogida de datos y la codificación del fichero obtenido junto con su estructura y algunos datos se muestran en el anexo 3.1.

Temporalización

En conjunto la enseñanza del contenido, que hemos descrito, se ha llevado a cabo en 20 sesiones de una hora de duración de las cuales ocho se dedicaron al trabajo en equipo en el laboratorio de Estadística. A continuación presentamos la temporalización detallada de estas sesiones.

DISTRIBUCION TEMPORAL

N. ORDEN	ACTIVIDAD
1	<ul style="list-style-type: none">- Presentación de la asignatura.- Propuesta de realización de la encuesta a los estudiantes y debate colectivo para seleccionar un tema de interés. Como tarea para casa se pide pensar las posibles preguntas.
2	<ul style="list-style-type: none">- Bloque 1: Introducción: Estadística y ordenadores.- Experimento aleatorio. Estadística y sus ramas.- Aplicaciones de la Estadística en el mundo biológico, físico, social y político.- Papel de los ordenadores en la práctica y enseñanza de la Estadística. El software estadístico.- Ejercicio: Selección y redacción de las preguntas a formular en la encuesta a partir de las propuestas traídas a clase por los alumnos. Como tarea pendiente queda la confección del cuestionario definitivo.
3	<ul style="list-style-type: none">- Bloque 2: Recopilación y preparación de los datos para el análisis estadístico.- Población, unidad estadística y muestra.- Escalas de medida.- Variable estadística. Variable discreta y continua.- Codificación: campos y registros. Diseño de una hoja de codificación.- Ejercicio: Debatir la codificación de la encuesta y codificar la encuesta.
4	<ul style="list-style-type: none">- Ejercicio fuera de clase: Recoger los datos de la encuesta.- Descripción del paquete PRODEST.- Práctica: Grabación y depuración de los datos.
5	<ul style="list-style-type: none">- Bloque 3: Distribuciones de frecuencias. Gráficos.- El enfoque exploratorio en el análisis de datos.- Variables estadísticas cualitativas y cuantitativas.- Tablas de frecuencias de variables estadísticas cualitativas.- Diagrama de barras y gráfico de sectores.- Realización de un problema donde se utilicen los conceptos estadísticos tratados.
6	<ul style="list-style-type: none">- Variables cuantitativas. Frecuencias acumuladas.- Variables agrupadas: Intervalos de clase.- Histogramas y polígonos de frecuencias.- Realización de un problema donde se utilice los conceptos estadísticos tratados.- Dos ejercicios para realizar fuera de clase.

N. ORDEN	ACTIVIDAD
7	- Práctica 1: Programa CONTAJE. (Primera sesión).
8	- Práctica 1: Programa CONTAJE. (Segunda sesión).
9	- Práctica 2: Programa HISTO. (Primera sesión).
10	- Práctica 2: Programa HISTO. (Segunda sesión).
11	- Bloque 4: Características de una distribución de frecuencias. - Características de una distribución de frecuencias. - Características de posición central: La media y la moda. - Propiedades. - Estadísticos de orden: La mediana. Propiedades. - Realización de ejercicios que tratan los conceptos impartidos.
12	- Percentiles. Cuartiles. Deciles. - Gráfico de la caja. - Curva empírica de distribución. - Características de dispersión: Desviación media. Varianza. Desviación típica. - Momentos. - Ejercicios.
13	- Características de forma. - Simetría y asimetría. Coeficiente de asimetría. - Coeficiente de curtosis. - Corrección de continuidad. - Ejercicios.
14	- Práctica 3 : Programa MEDIANA.
15	- Práctica 4: Programa ESTADIS.
16	- Bloque 5: Variables estadísticas bidimensionales: Tablas de contingencia. - Dependencia funcional y dependencia aleatoria entre variables. - Los conceptos de correlación y regresión. Correlación y causalidad. - Variables estadísticas bidimensionales. - Tablas de contingencia. Casos 2x2 y rxc. Elaboración e interpretación - Ejercicios.
17	- Distribuciones marginales y condicionadas. Diversos tipos de frecuencias y relación entre ellos - Dependencia e independencia en una tabla de contingencia. - Propiedades de las frecuencias relativas en caso de independencia. - Caso de variables cuantitativas. Interpretación de la nube de puntos. - Ejercicios.

N. ORDEN	ACTIVIDAD
18	<ul style="list-style-type: none"> - Recta de regresión. Interpretación y cálculo. - Covarianza y coeficiente de correlación lineal. Interpretación. - Determinación de la asociación a partir de la covarianza y el coeficiente de correlación. - Descomposición de la varianza. Interpretación. - Ejercicios.
19	- Práctica 5: Programa TABLAS.
20	- Práctica 6: Programa REGRESION.

Se han dedicado en total 5 sesiones específicas de una hora de duración al tema de asociación: tres teóricas y dos prácticas. A estas sesiones hay que añadir las seis sesiones prácticas restantes en las que el alumno ha resuelto problemas referidos a la asociación estadística, como se pone de manifiesto en la sección 3.2.4.

3.2.3. DESCRIPCION DEL MATERIAL DE ENSEÑANZA

El conocimiento de una materia adquirido por el alumno durante el periodo de aprendizaje viene condicionado el material de enseñanza. Se hace, pues, necesaria una descripción precisa del mismo para poder comprender el proceso de aprendizaje de los alumnos.

En nuestro caso el material de enseñanza incluye, además del texto citado en la sección anterior (Batanero y cols (1988)), y de las prácticas que figuran en el anexo 3.3, el paquete de programas PRODEST y los ficheros de datos a emplear. Todos estos materiales fueron elaborados dentro de un proyecto de investigación sobre empleo del ordenador en la enseñanza de la Estadística, que se inició en 1987 y ha sido revisado sucesivamente por los autores, entre los que me incluyo, hasta llegar a la versión empleada en esta investigación. En particular, el tema referido a la asociación estadística, empleado en esta experiencia, se incluye en el anexo 3.2. Cada alumno participante recibió una copia del texto, junto con la programación de la asignatura, el primer día de clase, con objeto de fomentar la lectura del mismo, previa a las sesiones de enseñanza.

Libro de texto empleado

Al elaborar el citado texto se estudiaron diversas posibilidades de integración de los contenidos tradicionales y ejercicios de análisis de datos, a partir de las dos opciones planteadas en libros de texto de Estadística a nivel universitario que hacían uso del ordenador como recurso didáctico.

Una primera opción, seguida en alguno de estos libros, es basar la enseñanza de la Estadística con ordenador en la programación por parte del alumno de algunos de los algoritmos de cálculo, que son descritos o bien listados en textos. Regier y Mohapatra (1982), Tennant-Smith (1985), Engel (1991) o Tanis (1991), entre otros, siguen este enfoque.

La segunda es utilizar un paquete de cálculo y presentar en el texto colecciones de datos para analizar con el mismo. El estudio de los ficheros de datos se va realizando a lo largo del curso, según se introducen los conceptos

y va sirviendo de ejemplos de los mismos. Este es el enfoque seguido en Afifi (1979) y Bisquerra (1988) utilizando los paquetes BMDP y SPSS, o bien el de Galmacci y Pannone (1991) con el sistema experto SUSAM, o bien el de Brandwein y Rosenberg (1991) que utilizan el paquete didáctico LEARNSTAT de Lotus 1-2-3 y el propuesto por nosotros mismos. El nivel excesivamente elevado de los libros de texto, centrados en la inferencia y orientados a investigadores, o bien la escritura en lengua inglesa de los programas de ordenador, hizo necesaria la preparación de nuestro propio material de enseñanza.

Programas de cálculo estadístico

Una primera pregunta que debe plantearse el investigador al realizar una experiencia de informática educativa es si utilizar un paquete profesional o preparar su propia colección de programas.

En la primera alternativa se tiene la ventaja de un menor costo en tiempo y esfuerzo. Pero, puede ocurrir que no encuentre fácilmente las opciones deseadas entre las existentes. Por otro lado, en nuestro caso, se daba la dificultad añadida del idioma inglés en que están escritos la mayor parte de estos logiciales.

Por este motivo se optó por construir un software propio. Aunque esto conlleva una menor calidad en gráficos y programas de gestión de ficheros, se consideró preferible disponer de un recurso completamente adaptado a la enseñanza. De esta forma, durante el año 1988 se puso a punto un paquete al que se dio el nombre de PRODEST (PROgramas Didácticos de ESTadística) que se describe en Godino y cols (1988). Para la elaboración de esta colección de programas se ha partido del estudio de colecciones de programas estadísticos descritos en Van Tassel (1980) y de los algoritmos numéricos descritos en los libros de Cooke y cols (1982) y Kennedy and Gentle (1980). En la parte gráfica se han incluido algunos de los gráficos que se describen en Chambers y cols (1983). Posteriormente, el paquete PRODEST ha sido revisado varias veces hasta llegar a la versión actual.

Los programas usados en esta experiencia han sido las opciones 1, 2, 5, 6, 7, 8, 10 y 11 que se describen en Godino y cols. (1988).

Ficheros de datos

Una de las principales posibilidades del estudio de la Estadística basada en el uso de ordenadores es la de analizar conjuntos de datos reales. La primera pregunta que surge respecto a este tema es, ¿dónde recabar esos conjuntos de datos reales? Como se preguntan Jullien y Nin (1989) pág. 37: "*¿En qué dominio de la realidad deben elegirse los conjuntos de datos? Este dominio debe presentar diversas propiedades: Ha de ser relativamente familiar al alumno y suficientemente rico para que haga surgir preguntas.*"

Willett y Singer (1992) indican que no todos los conjuntos de datos son vehículos igualmente efectivos para la enseñanza de la Estadística Aplicada. Un conjunto de datos óptimo debe tener las siguientes características:

- Proporcionarse en forma de listado; esto es, dar todos los datos originales, en lugar de ofrecer sólo los resúmenes numéricos, como pudiera ser la lista de valores medios o la matriz de correlaciones de las variables.
- Autenticidad: Debe tratarse de medidas reales tomadas de una muestra real de casos.

- Información sobre el contexto: Cada conjunto de datos debe estar acompañado de suficiente información sobre el contexto y sobre los objetivos planteados en la investigación donde se recogieron estos datos.
- Posibilidad de hacer sobre ellos análisis múltiples: De este modo los alumnos descubrirán que las cuestiones de investigación pueden ser contestadas de diferente manera. Asimismo se puede enfatizar el hecho de que no todos los análisis sobre el mismo conjunto de datos han de ser coincidentes, propiciando el razonamiento crítico sobre el proceso de análisis de datos. Los análisis consecutivos sobre los mismos datos permiten también una jerarquía de cuestiones, donde las más complejas son sugeridas en los primeros análisis.
- Por último, los datos deben ser interesantes y relevantes a los alumnos, permitirles un aprendizaje sustantivo y si es posible referirse a temas de actualidad o controvertidos.

Los conjuntos de datos empleados en la enseñanza de la Estadística pueden ser obtenidos por los propios alumnos, o bien ser proporcionados por el profesor sobre aplicaciones en áreas del interés de los alumnos. En nuestro caso, hemos utilizado estos dos tipos de ficheros. Una manera de involucrar a los alumnos en el trabajo estadístico es proponerles recoger datos de algún tema de su interés. El tema en concreto se discutirá con los alumnos; entonces, generalmente, surge la necesidad de realizar una encuesta. Se discutirá con los estudiantes para llegar a un acuerdo sobre la redacción, relevancia, importancia y claridad de los items a incluir en el cuestionario. La cantidad de datos recogidos y los valores de los datos serán significativos y manejables para los alumnos. Anteriormente a la realización de la encuesta los estudiantes discutirán cómo se debe recoger, organizar y analizar la información. Trabajando de esta manera los alumnos pueden apreciar el trabajo de un encuestador. (Holmes, 1980)

Con este fin, los alumnos recogieron sus propios datos y construyeron el fichero MEDIDAS que tiene 78 registro y corresponde a una encuesta que los alumnos participantes en esta investigación realizaron a los compañeros de su centro sobre medidas antropométricas, muy adecuadas para el estudio de la asociación entre variables. Este fichero incluye datos sobre: Sexo, altura, envergadura, número de calzado, longitud del palmo, perímetro del cuello, peso y si el individuo practica o no deporte. Los alumnos también codificaron, grabaron y depuraron los datos recogidos.

En cuanto a los ficheros del segundo tipo, los proporcionados por el profesor en aplicaciones de áreas del interés del alumno, se han utilizado los siguientes:

Fichero ALUMNOS: Contiene información correspondiente a una encuesta realizada a los alumnos de Estadística en cursos anteriores. Las variables contenidas son: número de alumno, grupo, sexo, condición de fumador, color de pelo, número de hermanos, peso, talla, edad y pesetas que lleva en el bolsillo.

Fichero MFF20: Contiene información correspondiente a una investigación llevada a cabo para estudiar la relación entre el carácter impulsivo y reflexivo de una muestra de niños y los errores en exactitud lectora. La información almacenada es la siguiente: número del alumno, grupo al que pertenece, sexo, tipo (impulsivo reflexivo, normal), tiempo de latencia

(obtenido en la aplicación del test MFF-20), errores en sílabas, palabras y comprensión lectora.

Fichero NEURONAS: Este conjunto de datos constituye una muestra de 135 neuronas de una especie de roedores de las 3000 estudiadas en una investigación. La finalidad de dicho trabajo es obtener estimaciones del valor medio de las dimensiones de las distintas partes de las neuronas y determinar si existe alguna diferencia significativa entre los valores medios según la localización de las mismas. Se ha simplificado la estructura de la aplicación, suprimiendo algunas variables controladas. Los datos que mostramos representan medidas de la superficie, núcleo, nucléolo y heterocromatina de las citadas neuronas. Se han considerado diversas localizaciones de las células en el cerebro: dorsal y ventral.

Fichero TONO: La operación de implante de lente intraocular, a pesar de sus grandes ventajas, se encuentra en la actualidad controvertida. Uno de los problemas que suele presentar consiste en el aumento de la tensión ocular del enfermo en los días posteriores a la operación. Con objeto de comprobar que la tensión ocular en estos enfermos se mantiene prácticamente constante, o incluso inferior, a la previa a la operación se realizó una prueba sobre 137 enfermos operados de cataratas cuyos datos se incluyen en esta aplicación.

Fichero TESTP: Los registros del archivo TESTP contienen datos relativos a los resultados de aplicar un test de evaluación de intuiciones probabilísticas primarias a niños del Ciclo Superior de E.G.B. aplicado en tres colegios de Jaén. La finalidad del trabajo es doble:

- a) Por una parte, conocer los errores y sesgos sobre intuición del azar y la estimación de las probabilidades de sucesos sencillos, existentes en los niños de nuestro entorno sociocultural, así como relacionar dichos errores con las variables sexo, nivel y aptitud matemática. Se obtienen del test varias puntuaciones: puntuación combinatoria, verbal, probabilística y nivel probabilístico.
- b) Comparar los resultados de nuestra muestra piloto con las puntuaciones alcanzadas por niños ingleses en una investigación semejante.

La codificación y los primeros y últimos registros de estos ficheros se muestran en el anexo 3.1.

3.2.4. ANALISIS TEORICO DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LAS SESIONES PRACTICAS DE TRABAJO CON EL ORDENADOR

Introducción

Como se ha señalado en la sección 1.2, Stanic y Kilpatrick (1989) indican que la resolución de problemas ha sido utilizada en el currículum matemático, entre otros usos, para la justificación de los contenidos a impartir, estimular la motivación del alumno, proporcionar un vehículo para la transmisión de conocimientos, el reforzamiento del aprendizaje mediante la ejercitación. En Godino y cols. (1991) se muestra la importancia que tiene el empleo de ordenadores para el logro de cada uno de estos fines en el campo de la Estadística y se realiza un estudio teórico de las variables de tarea en los problemas estadísticos para ser resueltos con ayuda del ordenador. En esta sección utilizaremos el trabajo de Godino y cols. (1991) para analizar los problemas propuestos de los alumnos en las secciones de práctica con el ordenador.

Los problemas a proponer a los alumnos se pueden clasificar en cinco tipos, (Butts, 1980): ejercicios de reconocimiento, ejercicios algorítmicos, problemas de aplicación, problemas de búsqueda y situaciones problemáticas. Los tres primeros tipos corresponden a las actividades que se realizan a mano o con calculadora en la enseñanza tradicional de la Estadística. En nuestro caso, cada fichero de datos proporcionado al alumno permite plantear una situación problemática de análisis de datos, de las que se han obtenido una serie de problemas de aplicación, en el sentido de que el alumno debe integrar la información recibida en el enunciado y resolverlo con los métodos y técnicas aprendidas usando el ordenador. También se han propuesto problemas de búsqueda, como por ejemplo, los que hemos llamado de confirmar o rechazar teorías, puesto que el alumno debe elegir la mejor de entre un conjunto de estrategias de resolución posibles.

De modo general, podemos clasificar las actividades que se han propuesto a los alumnos para ser realizadas con el ordenador, en las tres modalidades que se describen a continuación:

- a) **Descubrimiento, a través de la experimentación y simulación, de algunas propiedades matemáticas** de las distribuciones o sus estadísticos, como sería, por ejemplo, la convergencia del polígono de frecuencias a la función de densidad al aumentar el número de casos y subdividir los intervalos o la robustez de la mediana frente a los valores atípicos. Este tipo de actividad reforzaría el papel de la resolución de problemas como vehículo para el aprendizaje de conceptos y propiedades matemáticas. Las actividades prácticas que se muestran en el anexo 3.3 que pueden englobarse en esta categoría son: 2.3, 2.6, 3.3, 4.3, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 y 6.9.
- b) **Planteamiento de cuestiones sobre un conjunto de datos por el propio alumno.** Con frecuencia, el uso de técnicas estadísticas, en el trabajo profesional precisa la colaboración de personas de distinta formación con estadísticos profesionales. Estas personas consideran al estadístico como un experto en resolución de problemas y exigen de él más de lo que corresponde a su trabajo. *"Debe conocer lo suficiente de otras disciplinas para apreciar sus problemas. Debe saber expresarlos en términos estadísticos y lo más importante, comunicarlas en forma comprensible; en definitiva*

ha de ser experto en el oficio estadístico y aprendiz de muchos otros" (Barnett, 1988, pg. 305).

Una de las principales dificultades que se plantea al estadístico en el análisis de los datos proporcionado por un usuario, es que, con frecuencia, la persona que ha recogido las observaciones, no sabe qué es lo que puede obtener de las mismas, (Batanero y cols. 1992b). Speed (1988) cree que estas dificultades se deben a no haber prestado atención suficiente al contexto del problema ya que los resultados estadísticos sólo tienen sentido para el que plantea las preguntas (Chatfield, 1988). Interesa, por tanto, proponer a los alumnos que formulen cuestiones relativas a un fichero dado para incrementar su capacidad de interrogación significativa y resoluble sobre un conjunto de datos y destacar la relación de los datos con su contexto, esto es, plantear el problema del significado e interpretación de los datos, (Biehler, 1990). Las actividades prácticas que se muestran en el anexo 3.3 que pueden englobarse en esta categoría son: 1.9, 2.9, 3.6, 4.7, 5.9, y 6.10.

- c) **Resolución de problemas de análisis de datos.** Tukey (1977) asemeja la actividad de análisis de datos al trabajo de detective. Esta actividad debe ser interactiva, experimental, abierta y flexible, caracterizada por la multiplicidad e incertidumbre de los resultados (Biehler, 1990). La capacidad de análisis de datos no sólo puede ser considerada como habilidad que es necesaria en muchas profesiones, y que justifica en gran parte la enseñanza de los conceptos estadísticos. (Schuyten, 1991). También puede verse como arte, ya que hay muchos niveles en esta capacidad. Aquí más que en ningún otro tipo de problema serían aplicables las palabras de Schoenfeld (1979) sobre la resolución de problemas: el conocimiento de conceptos, reglas heurísticas, propiedades algorítmicas y teoremas matemáticos no son suficientes para resolver el problema. Es necesario saberlos escoger, aplicar y adaptar a cada situación. Además, el trabajo con ficheros de datos reales es una fuente de motivación para el estudiante. En esta categoría pueden incluirse el resto de problemas propuestos en las prácticas y que se presentan en el anexo 3.3.

Variables de tarea en los problemas de análisis de datos

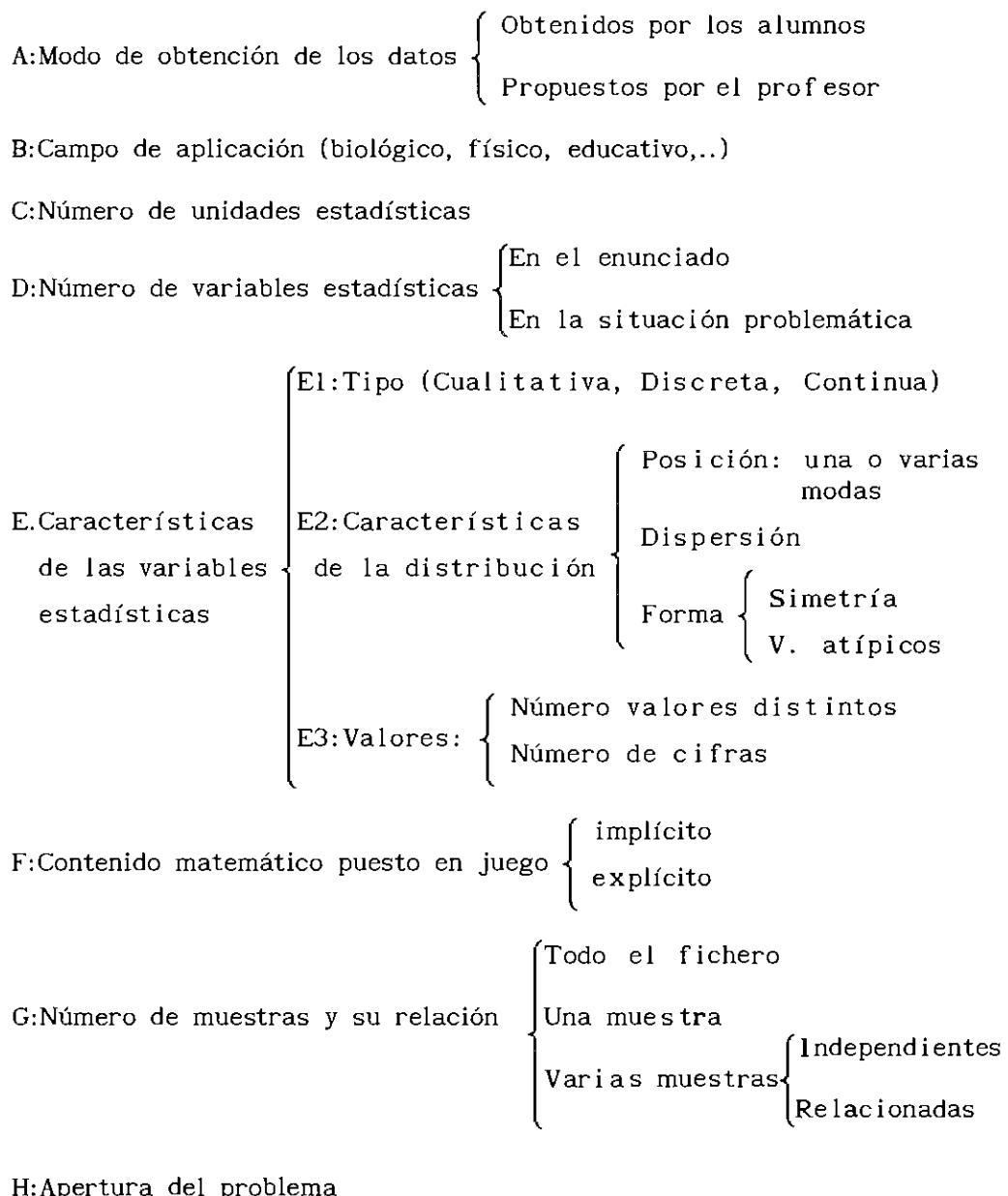
De entre la clasificación de las variables de los problemas dada por Kilpatrick (1978) mostramos en la figura 3.2.4.1 las **variables de tarea** que Godino y cols. (1991) consideran pertinentes en los problemas de análisis de datos. A continuación describimos estas variables y los valores dados a las mismas en nuestra investigación.

A: Modo de obtención de los ficheros de datos

Como se ha señalado en la sección 3.2.3, una primera distinción que podemos hacer es el modo en que son obtenidos estos ficheros, que pueden ser recogidos **por los propios alumnos**, o bien ser proporcionados por el profesor.

En el anexo 3.1 se muestran las variables incluidas en los ficheros empleados en la enseñanza que han sido descritas en la sección 3.2.3. Asimismo, se presenta una clasificación de las variables estadísticas de este fichero según las características de las mismas que discutiremos en el apartado siguiente.

Figura 3.2.4.1 Variables de tarea en los problemas de análisis de datos



B: Campo de aplicación

Una segunda variable es el campo de aplicación (educativo, biológico, geográfico, etc.) que sirve de contexto concreto para los problemas. En nuestro caso los campos de aplicación han sido: biológico, psicológico, médico y educativo.

C: Número total de unidades estadísticas

En el caso de un número pequeño de registros es posible que, por inspección visual, el alumno obtenga una primera idea de las características

de las variables estadísticas, por lo que puede saber, a priori, el tipo de análisis más adecuado para una pregunta planteada. Esto no es posible con un número elevado de registros, por lo que en este caso crece la probabilidad de que el alumno deba modificar su estrategia inicial de análisis, a la vista de que los resultados le muestren ciertas características inesperadas de las variables. El número de casos en los ficheros empleados en esta experiencia ha oscilado entre 50 y 250.

D: Número de variables estadísticas incluidas, tanto en el enunciado del problema como en el fichero. Ambas afectan a la complejidad de la situación de análisis, ya que el número de comparaciones de pares de variables (estudios de asociación) o de selección de partes del fichero de datos (estudio de distribuciones condicionales) crece con el cuadrado de este número. El número de variables en los ficheros empleados en esta experiencia ha oscilado entre 5 y 10.

Un segundo grupo de variables viene dado por las **características de las variables estadísticas (E)** incluidas en el fichero, comprendiendo:

E1: Tipo de variable estadística: cualitativa (y dentro de ella ser o no dicotómica), discreta y continua, puesto que los distintos tipos de variables requieren distintos procedimientos estadísticos.

E2:Características de la distribución de frecuencias, en particular son de gran importancia: los valores centrales, dispersión y forma, existencia de valores atípicos (outliers) y el número de los mismos.

Tanto el tipo de variable como las características de su distribución afectarán al procedimiento estadístico (gráficos, medidas de tendencia central y dispersión, medidas de asociación, etc.) que pueda elegir el alumno para resolver el problema. La existencia de todas las variantes de dichas características supone una gran diversificación del tipo de problemas que podemos proponer a los alumnos, especialmente cuando se realiza un estudio conjunto de dos variables.

Al liberar al alumno de los cálculos, podemos dedicar más tiempo a la presentación de casos variados y a su discusión. La parte gráfica permite apreciar fácilmente aspectos que de otro modo pasarían inadvertidos. Esta puede ser una de las mayores aportaciones de la resolución de problemas con el ordenador a la enseñanza de conceptos estadísticos.

E3: Valores de las variables

En el caso de variables en que sea preciso el agrupamiento en intervalos de clase hay que considerar los siguientes factores: el número total de cifras, la existencia o no de parte decimal y el número de cifras decimales. El número total de valores diferentes va a influir en la toma de decisiones como la elección de los extremos y amplitud de los intervalos o el número de cifras en el gráfico del tronco, que afectarán a la precisión de los resultados. En la tabla 3.2.4.1 se presenta una clasificación de las variables de los ficheros utilizados en las clases prácticas por el tipo de variable y práctica en que se utilizaron.

F: Contenido matemático puesto en juego

Dentro de esta categoría habría que estudiar toda la gama tradicional de variables de contenido matemático y matizar el modo en que quedan afectadas estas variables por la disponibilidad de ordenadores.

Tabla 3.2.4.1 Clasificación de las variables de los ficheros utilizados en las clases prácticas por tipo y práctica en que se utilizan

Fichero	Variable	Tipo de variable						Práctica en que fue utilizada		
		cualitativa	discreta	continua	discreta/agrupar	simétrica	asimétrica	Estudio Global	Comparación dos más grupos	Variable de selección
ALUMNOS (encuesta en clase) censo	grupo	x								
	sexo	x						1		
	fuma	x						1	1	
	color pelo	x					x	1	4	
	n. hermanos		x		x	x		2	2, 4	
	peso kg.		x		x	x			2, 4	
	altura cm.		x		x	x		2		
	edad meses		x		x	x		4	3, 4	4
MFF20 niños impulsivos reflexivos aprendizaj (muestra)	pesetas		x		x	x				
	grupo	x								1
	sexo	x								1
	tipo	x							1	1
	reflexivos		x		x			3		
	tiempo laten		x		x		x		6	
	aprendizaj		x		x	x	x	1	1, 6	1
NEURONAS t. neurona localizac. (muestra)	e. sílabas	x								
	e. palabras	x								
	e. comprens.	x					x		1, 6	
	zona	x								2
	t. celular		x		x	x		2	2, 6	
TONO tensión ocular (muestra)	s. nucleo		x		x	x		2	2, 6	
	s. nucleolo		x		x	x			6	
	s. heterocr.		x		x	x			6	
	edad		x		x	x		3	6	3
TEST P. aptitud probabil. (muestra)	t. previa			x	x	x			3	
	t. alta			x	x	x			6	
	t. mes			x	x	x			3, 6	
	colegio	x						5		
	sexo	x						5		4
	curso		x					5		4, 5
	ap. matem		x			x		4, 5		
MEDIDAS medidas antropomé- tricas (muestra)	p. combina.	x			x	x		5		
	p. verbal	x			x	x				
	p. probabi.		x		x	x		4		4
	n. prlistico	x			x	x		5		4
	sexo	x							5	
	altura		x		x				6	
MEDIDAS medidas antropomé- tricas (muestra)	envergadura		x		x	x			6	
	n. calzado		x		x	x			5, 6	
	long. palmo		x		x	x			5, 6	
	per. cuello		x		x	x			6	
	peso	x		x	x	x			6	
	p. deporte	x							5	

Hay que destacar que en algunas actividades de análisis de datos es posible anticipar de modo implícito conceptos que serán tratados posteriormente a nivel formal, sirviendo de este modo como ejemplos y motivación previa de dichos conceptos. En especial las ideas de asociación y muestreo se pueden emplear implícitamente antes de haber estudiado conceptos como los de distribuciones marginales y condicionadas y sus estadísticos, moda y estadísticos de orden.

G: Número de muestras y relación entre ellas

Uno de los niveles de complejidad del problema de análisis de datos está condicionado por el hecho de que el estudio se realice en todo el fichero, en una sola muestra del mismo, en dos o más muestras independientes o en dos o más muestras relacionadas. De este modo obtenemos las siguientes categorías.

Análisis de una sola variable (o análisis conjunto de varias variables) **con la totalidad de los datos del fichero**, como en el problema siguiente, correspondiente a la práctica 6.

PROBLEMA 6.4:

Compara las variables "NUMERO DE CALZADO" con "PESO" y "NUMERO DE CALZADO" con "ALTURA".

- a) ¿Existe relación en alguno de los dos casos? ¿Dónde es mayor? ¿Por qué?
- b) En general, ¿cree que las personas de este conjunto de datos son gordas o delgadas? Razona la respuesta.

Los conocimientos conceptuales y procedimentales "puestos en juego" en este problema son los siguientes:

- Interpretación de un enunciado verbal y traducción del mismo, de modo que pueda ser contestado mediante un cálculo o gráfico estadístico.
- Capacidad para elegir un programa que proporcione dichos resultados.
- Capacidad para manejar este programa, respondiendo con datos adecuados a las diferentes preguntas del mismo e interpreta adecuadamente sus resultados.

Análisis de una sola variable (o análisis conjunto de varias variables) **en una muestra** obtenida del fichero de datos, como en el siguiente ejemplo, correspondiente a la práctica 1.

PROBLEMA 1.5:

¿Dónde hay mayor número de errores en comprensión lectora, en los niños que han tenido menos de 3 errores en palabras o en los que han tenido 3 o más errores en palabras?

Además de las actividades que hemos enumerado para el caso anterior, el alumno debe identificar la variable y el rango de variación de la misma que han de servir de criterio para seleccionar el subconjunto de registros del fichero dado. Debe adquirir también la habilidad de manejar la opción de selección de variables por medio del software disponible.

Comparación de una variable (o del estudio conjunto de varias variables) **en muestras independientes** obtenidas a partir del fichero, como en el problema que presentamos a continuación, correspondiente a la práctica 1.

PROBLEMA 1.3:

¿Cuál es la proporción de fumadores en la clase? ¿Es la misma entre varones y hembras?

En este apartado incluimos aquellas cuestiones en que se pide al alumno que compare un determinado gráfico o parámetro de una cierta distribución en dos o más muestras independientes. Esta categoría de ejercicios se produce por aplicación reiterada de la anterior, por lo que entran en juego los conceptos y destrezas que hemos descrito para dicho caso. Pero, además, ha de realizarse una actividad de comparación de dichas distribuciones, lo que implica una primera idea de la asociación entre dos variables.

Comparación de muestras relacionadas, es decir comparación de las distribuciones o estadísticos de diferentes variables en el fichero completo. A continuación se da un ejemplo correspondiente a la práctica 3.

PROBLEMA 3.4:

Según ciertas opiniones la operación de lente intraocular aumenta la tonometría. Compara la mediana y cuartiles de la tonometría previa con la del al mes de operado. Di tu opinión sobre el asunto.

Este tipo de problema implica la repetición de un mismo proceso de cálculo con diferentes variables en el fichero completo, y no hay, por tanto, proceso de selección. Corresponde al estudio de las diferencias entre muestras relacionadas, que es también equivalente al de asociación entre una variable incluida en el conjunto de datos y otra cualitativa implícita.

Una clasificación de las actividades prácticas realizadas por los alumnos en esta investigación por su contenido matemático y número de variables y muestras se da en la tabla 3.2.4.2

F: Apertura del problema:

En los ejemplos mostrados, se deduce también una gran gama de variabilidad en la apertura de los problemas: en general, puede haber varios métodos de solución e incluso varias posibles soluciones correctas para los problemas planteados. En particular, un tipo de problema interesante es proponer a los alumnos, entre varias soluciones posibles a un problema dado, elegir la más adecuada. Por ejemplo, decidir cuál es la medida de valor central más representativa de una cierta característica, o, como en el caso siguiente, correspondiente a la práctica 2.1 del anexo 3.3, en que la solución es en cierto grado subjetiva:

PROBLEMA 2.1:

Construye varios histogramas de frecuencia para la variable "SUPERFICIE CELULAR". En función de los resultados, ¿cuál es la amplitud de intervalo más adecuada?

Otros problemas de este tipo han sido: 2.2, 2.3, 2.6, 2.8, 3.3, 3.5, 4.3, 6.2, 6.4

Tabla 3.2.4.2 Clasificación de las actividades prácticas por contenido matemático y número de variables y muestras

Contenido matemático	(Muestras independientes). Una sola var. en varias muestras(*)	(Muestras relacionadas) Dos o más variables en una muestra.	Una variable y una muestra
1.-Dist. de freq.			
-absolutas			1.1, 1.2
-relativas % y proporción	1.3, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 2.2 2.7		1.3, 1.4,
-acumuladas			1.2, 1.4, 3.1
2.-Gráficos			
-frecuencias	1.3, 1.6, 2.1, 2.3, 2.5		1.2, 1.4, 2.2
-acumuladas	2.4		
-caja	3.3, 3.5		3.1
3.-Características			
-valor central: media, M_e , M_o	1.2, 3.3, 3.5, 4.1, 4.3, 4.4, 4.6	3.4 4.1	1.4, 3.2
-orden: perc, rag	2.4, 2.7, 2.8 3.3, 3.5, 4.3	3.4	2.4, 3.1, 3.2
-dispersión absoluta y rela.	4.1, 4.3 4.1, 4.6	4.1 4.1	
-forma	3.3, 4.6	4.2	3.1, 4.5
-valor atípico	3.5		3.2
4.-Asoc. y corr.			
-tabla conting.	5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8		
-f. marginales	5.1, 5.2, 5.3,		
-f. condicional	5.4, 5.5, 5.6, 5.8,		
-nube de puntos		6.1, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 6.8, 6.9	
-recta regres. y pendiente		6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.9	
-coeficiente de correlación		6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9	
(*) Cuando comparamos una variable en varias muestras, en realidad manejamos distribuciones condicionadas. Se entiende que las frecuencias, estadísticos, etc, se refiere a las distribuciones condicionadas.			

Variables específicas en los problemas de asociación

En los apartados anteriores se describen las variables de tarea en los problemas de análisis de datos empleando ordenador. Estas variables son también válidas para los problemas de asociación. Aunque en la programación de la enseñanza no se ha incluido la comparación de muestras, en las prácticas se han comparado muestras de forma implícita, por lo que la variable G es pertinente en este estudio. Además se considera de especial importancia en la presente investigación las variables siguientes, unas discutidas en esta sección y otras en la sección 2.1

- V0. Tipo de problema (con las categorías: tabla de contingencia 2x2; tabla de contingencia rxc; nube de puntos y comparación de muestras).
- V1. Tipo de dependencia (con las categorías: nula, cuando no existe dependencia; directa, cuando la dependencia es directa e inversa, cuando la dependencia entre las variables es inversa).
- V2. Intensidad de la dependencia, se toma el coeficiente de correlación de Pearson para nube de puntos, para las tablas de contingencia 2x2 el coeficiente PHI y para las tablas de contingencia rxc el coeficiente V de Cramer.
- V3. Se diferencia la variable dependiente de la variable independiente (con las categorías: si cuando existe diferencia y no en caso contrario)
- V4. Tamaño de los números (se toma la frecuencia absoluta menor y mayor que aparezca en la tabla de contingencia del problema).
- V5. Contexto familiar (con las categorías: si, si el contexto es familiar al alumno y no en caso contrario)
- V6. ¿Concuerdan los datos con las teorías previas? (Con las categorías: si cuando concuerdan y no en caso contrario)
- V7. ¿Se dan las distribuciones marginales de frecuencias absolutas en las tablas de contingencia? (con las categorías: si cuando se dan y no en caso contrario).
- V8. Tipo de covariación (con las categorías: unilateral, interdependencia, dependencia indirecta, concordancia y covariación casual, tomadas de Barbancho (1973)).
- V9. Número de puntos (se toma el número de registros del fichero que se utilizarán en la resolución del problema, que originaran un número de puntos igual en la nube o bien el número total de casos en las tablas de contingencia y en la comparación de muestras).
- V10. Tipo de muestras (con las categorías: independientes y relacionadas, según sean las muestras, sólo se ha utilizado en los problemas de comparación de muestras).

En las tablas 3.2.4.3-A, 3.2.4.3-B, 3.2.4.3-C, 3.2.4.3-D y 3.2.4.3-E se presentan los valores asignados a cada una de estas variables en las prácticas específicas sobre asociación estadística.

Tabla 3.2.4.3-A Variables de tarea en los problemas de asociación propuestos en las clases prácticas

Variable		Práctica							
		1.3	1.5	1.6	1.7	1.8a	1.8b	2.2	2.5
TIPO DE PROBLEMA	2 x 2	X							
	r x c			X	X				
	NUBE								
	PUNTOS								
COMPARAC. MUESTRAS			X			X	X	X	X
TIPO DE DEPENDENCIA	NULA	X		X					
	DIRECTA		X			Hay dif.	Hay dif.	Hay dif.	Hay dif.
	INVERSA				X				
TAMANO DE LOS NUMEROS		9	0	5	4	6	3	0	17
		20	14	14	14	21	29	50	67
CONCORD. DATOS T. PREV.	SI	X		No hay teor	No hay teor	X	X	No hay teor	No hay teor
	NO		X						
INTENSIDAD		0.07	0.43	.034	0.22	0.12	0.42	0.25	0.12
TIPO DE COVARIACION	UNILATERAL		X	X			X		
	INTERDEPENDENCIA								
	DEPENDENCIA INDIRECTA	X						X	X
	CONCORDANCIA								
	COVARIACION CASUAL				X	X			
NUMERO DE CASOS		60	58	58	58	58	58	135	135
TIPO DE MUESTRA	INDEPENDIENTES	X	X	X	X	X	X	X	X
	RELACIONADAS								
CONTEXTO	SI	X							
FAMILIAR	NO		X	X	X	X	X	X	X
SE DIFERENCIA LA VAR. DEPEND. DE LA INDEP.	SI	X	X	X	X	X	X	X	X
	NO								

Tabla 3.2.4.3-B Variables de tarea en los problemas de asociación propuestos en las clases prácticas

Variable		Práctica							
		2.7	2.8	3.4	3.5	4.1a	4.1b	4.4	4.6
TIPO DE PROBLEMA	2 x 2								
	r x c							X	X
	NUBE								
	PUNTOS								
COMPARAC. MUESTRAS		X	X	X	X	X	X		
TIPO DE DEPEND- ENCIA	NULA		No hay dif.						X
	DIRECTA	Hay dif.				Hay dif.	Hay dif.	X	
	INVERSA			X	X				
TAMAÑO DE LOS NUMEROS	I	1	0	0	0	0	0	0	5
	15	14	20	31	12	17	39	61	
CONCORD. DATOS T. PREV.	SI	X	X	No hay teor	X	X	No hay teor		No hay teor
	NO							X	
INTENSIDAD		0.64	0.0	0.78	0.43	0.79	0.64	0.22	0.05
TIPO DE COVA- RIACION	UNILATERAL	X	X	X	X	X	X		X
	INTERDE- PENDENCIA								X
	DEPENDENCIA INDIRECTA								
	CONCORDANCIA								
	COVARIACION CASUAL								
NUMERO DE CASOS		60	60	50	60	60	60	250	250
TIPO DE MUESTRA	INDEPEN- DIENTES	X	X		X	X	X	X	X
	RELACIO- NADAS			X					
CONTEXTO FAMILIAR	SI	X	X		X	X	X	X	
	NO			X					X
SE DIFE- RENCIA LA VAR. DEPEND. DE LA INDEP.	SI	X	X	X	X	X	X		X
	NO								X

Tabla 3.2.4.3-C Variables de tarea en los problemas de asociación propuestos en las clases prácticas

Variable		Práctica							
		5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8
TIPO DE PROBLEMA	2 x 2				X				
	r x c	X	X			X	X	X	X
	NUBE								
	PUNTOS								
COMPARAC. MUESTRAS				X					
TIPO DE DEPENDENCIA	NULA					X			X
	DIRECTA	Hay dep.	Hay dep.	Hay dep.	X		X	X	
	INVERSA								
TAMANO DE LOS NUMEROS		3	0	0	25	2	3	0	1
		34	30	25	100	32	46	29	19
CONCORD. DATOS	SI	X	X	X		X			X
	NO				X		X	X	
INTENSIDAD		0.51	0.85	0.58	0.33	0.11	0.18	0.19	0.11
TIPO DE COVARIACION	UNILATERAL		X						X
	INTERDEPENDENCIA					X			
	DEPENDENCIA INDIRECTA	X			X				
	CONCORDANCIA						X	X	
	COVARIACION CASUAL			X					
NUMERO DE CASOS		78	78	78	250	250	250	250	250
TIPO DE MUESTRA	INDEPENDIENTES	X	X	X	X	X		X	X
	RELACIONADAS						X		
CONTEXTO	SI	X	X	X	X	X			
FAMILIAR	NO						X	X	X
SE DIFERENCIA LA VAR. DE LA DEP. INDEP.	SI	X	X	X	X			X	X
	NO					X	X		

Tabla 3.2.4.3-D Variables de tarea en los problemas de asociación propuestos en las clases prácticas

Variable		Práctica						
		6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7
TIPO DE PROBLEMA	2 x 2							
	r x c							
	NUBE	X	X	X	X	X	X	X
	PUNTOS							
COMPARAC. MUESTRAS								
TIPO DE DEPENDENCIA	NULA							
	DIRECTA	X	X	X	X			
	INVERSA					X	X	X
TAMAÑO DE LOS NUMEROS								
CONCORD. DATOS T. PREV.	SI	X	X	X	X	No hay teor	No hay teor	No hay teor
	NO							
INTENSIDAD		0.86	0.55	0.61	0.86	-.92	-.78	-.83
TIPO DE COVARIACION	UNILATERAL				X	X	X	X
	INTERDEPENDENCIA	X						
	DEPENDENCIA INDIRECTA		X	X				
	CONCORDANCIA							
	COVARIACION CASUAL							
NUMERO DE CASOS		78	78	78	78	50	50	50
TIPO DE MUESTRA	INDEPENDIENTES							
	RELACIONADAS	X	X	X		X		
CONTEXTO FAMILIAR	SI	X	X	X	X			
	NO					X	X	X
SE DIFERENCIA LA VAR. DE LA INDEP.	SI	X				X	X	X
	NO		X	X				

Tabla 3.2.4.3-E Variables de tarea en los problemas de asociación propuestos en las clases prácticas

Variable		Práctica				
		6.8a	6.8b	6.8c	6.9a	6.9b
TIPO DE PROBLEMA	2 x 2					
	r x c					
	NUBE	X	X	X	X	X
	PUNTOS					
	COMPARAC. MUESTRAS					
TIPO DE DEPENDENCIA	NULA					X
	DIRECTA	X	X	X	X	
	INVERSA					
TAMANO DE LOS NUMEROS						
CONCORD. DATOS T. PREV.	SI	No hay teor	No hay teor	No hay teor	X	No hay teor
	NO					
INTENSIDAD		0.62	0.72	0.59	0.87	0.02
TIPO DE COVARIACION	UNILATERAL					
	INTERDEPENDENCIA				X	X
	DEPENDENCIA INDIRECTA	X	X	X		
	CONCORDANCIA					
	COVARIACION CASUAL					
NUMERO DE CASOS		58	58	58	135	135
TIPO DE MUESTRA	INDEPENDIENTES					
	RELACIONADAS	X	X	X	X	X
CONTEXTO FAMILIAR	SI					
	NO	X	X	X	X	X
SE DIFERENCIA LA VAR. DEPEND. DE LA INDEP.	SI					
	NO	X	X	X	X	X

3.3. CONCEPCIONES FINALES DE LOS ALUMNOS PARTICIPANTES EN LA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA Y EVOLUCIÓN DE LAS MISMAS

Con el fin de poder estudiar los posibles cambios en las concepciones de los alumnos sobre la noción de asociación, se aplicó una versión paralela de la prueba al finalizar el curso. Esta prueba usada como postest fue descrita con detalle en la sección 2.1.3 y se incluye en el anexo 2.1.3. Fue cumplimentada por 20 de los 22 alumnos de la muestra experimental, por lo que los porcentajes que se dan a continuación se refieren sólo a estos alumnos.

Se ha preferido emplear instrumentos diferentes en el pretest y postest, con objeto de minimizar el riesgo de aprendizaje de la prueba, que pudiera influir sobre la validez interna de las conclusiones (Cook y Campbell, 1979). Los resultados se presentan en las siguientes secciones.

3.3.1. INTERPRETACION DE TABLAS DE CONTINGENCIA Y GRAFICOS

Interpretación de tablas de contingencia

Todos los alumnos menos uno pueden leer las frecuencias absolutas dobles de una tabla de contingencia (tabla 3.3.1.1). El alumno que ha dado la respuesta incorrecta ha respondido 15 que es la frecuencia absoluta marginal. Es un alumno distinto al que erró la pregunta en el pretest por lo que el error no es sistemático.

Tabla 3.3.1.1 Frecuencia y porcentaje de respuestas en la lectura de frecuencias absolutas dobles en tablas 2x2

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	19	95.0
Incorrecta	1	5.0
Total	20	100.0

Tabla 3.3.1.2 Frecuencia y porcentaje de respuestas en la lectura de las frecuencias absolutas marginales en tablas 2x2

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Incorrecta	0	0.0
Correcta	20	100.0
Total	20	100.0

Observando la tabla 3.3.1.2 se puede afirmar que todos los alumnos leen correctamente las frecuencias marginales, igual que ocurre en la tabla correspondiente en las concepciones previas, (tabla 3.1.2.2)

El 75.0 por ciento de los alumnos dan la respuesta correcta en el cálculo de una frecuencia relativa marginal (tabla 3.3.1.3), habiendo aumentado el porcentaje respecto al pretest que fue del 66.6 por ciento, (tabla 3.1.2.3). El que responde 9 toma la frecuencia de los que fuman y presentan trastornos. El que responde 130, lo obtiene de sumar los porcentaje de la casilla a respecto al total de la primera fila y de la casilla c respecto al total de la segunda fila. Los dos que responden 177, lo obtienen de 16/9, calculando la relación entre los que no fuman y los que fuman, dentro de los que padecen trastornos bronquiales. Los cinco alumnos que fallan esta respuesta también lo hicieron en el pretest por lo que siguen manifestando el uso inadecuado del término "proporción" después de la enseñanza y una dificultad en la interpretación de la tabla de contingencia.

Tabla 3.3.1.3 Frecuencia y porcentaje de respuestas en el cálculo de una frecuencia relativa marginal

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	9	1
	64	15
	130	1
	177	2
	357	1
-----		-----
Total	20	100.0

El cálculo de una frecuencia relativa condicional sigue siendo difícil, pues sólo el 50.0 por ciento de los alumnos dan una solución correcta, siendo este porcentaje similar al pretest (tabla 3.1.2.4). De los diez alumnos que fallan la pregunta, siete lo hicieron en el pretest, por lo que siguen persistiendo errores en el cálculo de una frecuencia relativa condicional después de la enseñanza. Los que responden 36, (15 por ciento), obtienen la respuesta de $(9/25) \times 100$, es decir, calculan el porcentaje de los que padecen trastornos bronquiales y fuman, dando signo de confusión entre frecuencia relativa doble y frecuencia relativa condicional. Los que responden 56 calculan $(9/16) \times 100$, es decir invierten los términos de la pregunta y calculan el porcentaje de los que no padecen trastornos bronquiales entre los

Tabla 3.3.1.4 Frecuencia y porcentaje de respuestas en el cálculo de una frecuencia relativa condicional

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	2	1
	36	3
	56	6
	90	10

Total	20	100.0

que fuman, mostrando la confusión entre el condicional y el condicionado en una probabilidad condicional. Este hecho, que ha aparecido con frecuencia en las muestras anteriores, ha sido señalado por Falk (1986).

En resumen en la lectura de las frecuencias absolutas, tanto dobles como marginales no se ha observado variación del pretest al postest, debido al gran porcentaje de respuestas correctas en el pretest. En el cálculo de una frecuencia relativa marginal se observa un ligero aumento de respuestas correctas en el postest. El cálculo de una frecuencia relativa condicional no se ha visto mejorado en el postest, permaneciendo aproximadamente igual el porcentaje de respuestas correctas debido a la confusión entre condicional y condicionado, en esta frecuencia relativa, que no ha sido mejorada con la instrucción.

Interpretación de la nube de puntos

En la tabla 3.3.1.5 se observa que el 60.0 por ciento de los alumnos han leído correctamente la ordenada, dada la abscisa en la nube de puntos. Si se toma como válidas las respuestas 12 y 14, por su cercanía a la correcta en el diagrama de dispersión mostrado, se tiene que el 85 por ciento de los alumnos han respondido satisfactoriamente. Pero aún hay dos alumnos que fallan esta pregunta habiéndolo hecho bien en el pretest (tabla 3.1.2.5).

Tabla 3.3.1.5 Frecuencia y porcentaje de respuestas en la lectura de la ordenada dada la abscisa en la nube de puntos

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
2	1	5.0
Correcta 11	12	60.0
12	4	20.0
14	1	5.0
17	1	5.0
28	1	5.0
-----		-----
Total	20	100.0

Tabla 3.3.1.6 Frecuencia y porcentaje de respuestas en la lectura de la abscisa dada la ordenada en la nube de puntos

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	15	75.0
Otras	5	25.0
-----		-----
Total	20	100.0

En la tabla 3.3.1.6 se observa que el 75 por ciento de los alumnos han dado una respuesta correcta (14) a la lectura de la abscisa dada la ordenada, en el diagrama de dispersión; las cinco respuestas incorrectas han sido 17, 18 y 19 que, por su disposición en la nube de puntos, son fácilmente confundibles

con la respuesta correcta (14). Con esta salvedad, al comparar esta tabla con su homóloga del pretest, se observa la similitud de las respuestas.

En resumen, tanto en el pretest como en el postest los porcentajes de respuestas correctas son elevados, pero se observa que ha decrecido algo en el postest.

3.3.2. JUICIOS DE ASOCIACION Y EXPLICITACION DE TEORIAS PREVIAS

Juicios de asociación

En la tabla 3.3.2.1 se dan los resultados a las respuestas sobre el tipo de dependencia en tablas 2x2. En el ítem D se da la circunstancia, ya comentada, de que algunos alumnos sólo admiten la dependencia directa o la independencia, no admitiendo la dependencia inversa, es decir, mostrando aparentemente una concepción unidireccional, lo que explicaría el reducido número de respuestas correctas. En este ítem D se da además la circunstancia de que los datos van en contra de las teorías previas y la correlación es moderada (-0.44). Todo ello hace que no se encuentre mejora apreciable en la detección de dependencia inversa.

Sin embargo, en el ítem E en el que también se presenta una asociación inversa fuerte y con datos que concuerdan con las teorías previas, la dependencia es detectada, incluso aunque se ha cambiado la disposición de las columnas y ésta sugiere una dependencia directa. Por tanto, se puede concluir, que ha habido una mejora notable en la detección de la asociación inversa en caso de ser intensa y no contradecir las teorías previas. En consecuencia, creemos que una parte de los alumnos ha superado la concepción unidireccional de la asociación, ya que al comparar los ítems E del pretest y postest se pasa de 9 alumnos que presentan esta concepción a 2 en el postest. En el caso del ítem D son las teorías previas las que han prevalecido y no una concepción unidireccional en la asociación estadística, ya que estos mismos alumnos han detectado la asociación inversa en el ítem E del postest.

En el ítem F, que corresponde al caso de independencia, el porcentaje de respuestas correctas es elevado, mostrándose una evolución muy favorable respecto a los resultados del pretest (tabla 3.1.3.1). Comparado con el ítem D del pretest, se observa también una mejora en el razonamiento proporcional de los alumnos, propiciado en la mayor parte de los casos por la utilización de una estrategia más elaborada y por el hecho de que el nuevo ítem no contradice sus expectativas.

Tabla 3.3.2.1 Frecuencia y porcentaje de respuestas sobre el tipo de asociación en tablas 2x2

Ítem	Directa	Inversa	Independencia
D		* 1 (5.0)	19 (95.0)
E		*18 (90.0)	2 (10.0)
F	1 (5.0)		*19 (95.0)

* (solución correcta)

En la tabla 3.3.2.2 se da el tipo de dependencia en tablas rxc, en las

que se observa de nuevo la influencia de las teorías previas del alumno sobre el juicio de asociación. Al ser muy pequeña la dependencia en el ítem G, deberían haber declarado independencia. Sin embargo, como en este caso la independencia choca con las teorías previas de los alumnos, ha decrecido el número de respuestas correctas respecto al pretest (tabla 3.1.3.2), produciéndose el fenómeno de correlación ilusoria (Champman y Champman, 1969).

Tabla 3.3.2.2 Frecuencia y porcentaje de respuestas sobre el tipo de asociación en tablas rxc

Item	Asociación	Independencia	No contesta
G	12 (60.0)	* 7 (35.0)	1 (5.0)
H	*19 (95.0)		1 (5.0)

* (solución correcta)

Hay mayor número de respuestas correctas en el ítem H, a pesar de que por, su dimensión, es el de mayor dificultad; al haber mejorado el razonamiento proporcional de los alumnos, así como sus estrategias, todos los alumnos la responden correctamente y, por tanto, el porcentaje de respuesta correctas es mayor que en el pretest (tabla 3.1.3.2).

En la tabla 3.3.2.3, referida a la asociación en nubes de puntos, destaca el ítem K, al que sólo ha dado respuesta correcta un alumno, debido a que la asociación no es muy fuerte, y el contexto no puede ser interpretado en términos de relación causa-efecto, ya que la puntuación de uno de los jueces no puede influir en la del otro. Por este motivo, la mayoría de los alumnos se han decantado por la independencia igual que ocurrió en el pretest, (tabla 3.1.3.3). En consecuencia, la concepción causalista sobre la asociación no ha sido cambiada como efecto de la instrucción.

Tabla 3.3.2.3 Frecuencia y porcentaje de respuestas sobre el tipo de dependencia en nube de puntos

Item	Directa	Inversa	Independencia
I	8 (40.0)	*11 (50.0)	1 (5.0)
J	1 (5.0)		*19 (95.0)
K	* 1 (5.0)	1 (5.0)	18 (90.0)

* (solución correcta)

Es cierto que las relaciones y diferencias entre correlación y causalidad fueron presentadas al alumno en el desarrollo teórico del tema, pero tal estudio ha sido insuficiente. Como señala Vergnaud (1982, pg. 33): "el problema de la enseñanza no se resuelve con definiciones, por muy buenas que sean. Las concepciones de los estudiantes sólo pueden cambiar al entrar en conflicto con situaciones que no pueden ser resueltas con las mismas. Es esencial que el profesor ayude al estudiante a acomodar sus creencias y procedimientos".

El ítem I da un índice bajo de respuestas correctas (50%); ello ha sido causado por que los 8 alumnos que han creído que la asociación es directa han invertido la relación de orden de la variable dependiente. Toman como mejor puesto en la clasificación el número más bajo, porque éste es el sentido que se da ordinariamente a la mejor clasificación. Razonan del modo siguiente: "a mayor número de partidos ganados menor número en la clasificación y, por tanto, mejor puesto en la clasificación de la Liga, luego la relación es directa". Asociados a esta interpretación están los hechos de que, para ellos, **subir** 4 puestos (por ejemplo pasar del noveno al quinto lugar) en la clasificación es **descender** 4 y viceversa (González y cols., 1990). Por este motivo consideramos como correcta esta respuesta, debido a la confusión semántica implícita en el contexto. Por ello, consideramos que ha habido una mejora notable respecto al pretest, tanto en este ítem como en el J, en el que la independencia es claramente detectada.

En la tabla 3.3.2.4 se corrobora que el alumno detecta asociación en la comparación de muestras aunque las diferencias entre los datos sean pequeñas, y se resiste a declarar la independencia, ya que se rechaza la independencia cuando hay una mínima variación en los datos. Esto es lo ocurrido en el ítem L. Aunque la mayoría de los alumnos ha considerado la independencia, hay un gran porcentaje de estudiantes que piensa que existe asociación, lo que provoca un menor porcentaje de respuestas correctas respecto al pretest. Sin embargo, en el ítem M, la totalidad de alumnos identifica la asociación, mejorando claramente los resultados del pretest (tabla 3.1.3.4).

Tabla 3.3.2.4 Frecuencia y porcentaje de respuestas sobre el tipo de dependencia en comparación de muestras

Ítem	Asociación	Independencia	No contesta
L	9 (45.0)	*10 (50.0)	1 (5.0)
M	*20 (100.0)		

* (solución correcta)

En resumen, se observa una mejora en el razonamiento proporcional de los alumnos y un aumento del número de los que reconocen la independencia entre las variables. La mayor parte de los alumnos han identificado la dependencia directa y también la inversa, si el contexto del problema no contradice sus expectativas previas. No obstante, sigue existiendo un fuerte peso de estas teorías sobre el tipo de juicio emitido y se mantiene en la mayoría de los alumnos la concepción causalista de la asociación.

Explicitación de teorías previas

La explicitación de teorías previas es nula, salvo en aquellos contextos donde están presentes de manera más intensa, pero, aún en estos casos, es escasa. En el contexto de la Liga de Fútbol, es donde se siguen manifestando con más intensidad. También afloran las teorías previas (ítem K) cuando los alumnos rechazan la concordancia (Barbancho, 1973) debido a la concepción causalista de la asociación. Sin embargo, como hemos visto, es notable la influencia sobre los juicios emitidos, por lo que, aunque los alumnos no

explicitan sus teorías previas, las siguen empleando implícitamente.

Tabla 3.3.2.5 Frecuencia de alumnos que explicitan teorías previas en sus argumentos

Ítem	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
D	Fumar/bronquios	0	0.0
E	Dieta/trastornos	0	0.0
F	Vida sedent/alergia	0	0.0
G	Aprob/suspender examen	1	5.0
H	Lateralidad ojos/manos	0	0.0
I	Clasf. Liga/empates	5	25.0
J	Proteínas/natalidad	0	0.0
K	Juicio de jueces	4	20.0
L	Presión sang/tratamiento	0	0.0
M	Nivel de azucar/sexo	0	0.0

3.3.3. ESTRATEGIAS EN LOS JUICIOS DE ASOCIACION

Niveles de elaboración de estrategias en tablas 2x2

En la tabla 3.3.3.1 se presentan los procedimientos utilizados por los alumnos según el número de casillas, de acuerdo con la clasificación ya comentada en las muestras anteriores. Si estudiamos estos procedimientos de resolución atendiendo a la clasificación de Pérez Echeverría (1990), se puede observar que, mientras, en el pretest, los procedimientos del primer y segundo nivel los utilizaron el 20.6 por ciento de los alumnos, los del cuarto nivel el 41.3 por ciento y los del quinto nivel 30.2 por ciento, en el postest, estos porcentajes son: 15.0, 30.0 y 46.7 por ciento, con lo que se observa un desplazamiento del nivel de elaboración de estrategias hacia los niveles superiores y una mejora en el uso de procedimientos multiplicativos respecto al pretest. Ello supone también una disminución del número de alumnos que manifiesta la concepción localista de la asociación, ya que el porcentaje de ellos ha pasado de variar entre el 14.3% y el 33% a hacerlo entre un 5% y un 25%.

En el ítem D se observa que el primer nivel lo utiliza un solo alumno, el segundo nivel 4 alumnos, el cuarto nivel 7 alumnos y el quinto nivel 5 alumnos. Al comparar estos niveles con el ítem E del pretest, correspondiente también a la dependencia inversa se observa una ligera disminución en los procedimientos aditivos con cuatro casillas (dos casos) que han pasado a emplear las casillas a y b, debido a que la asociación presentada en este ítem choca fuertemente con las teorías previas de los alumnos.

En el ítem E cuya relación es inversa, se puede observar que el hecho de haber intercambiado las columnas no ha influido en el uso de procedimientos del cuarto y quinto nivel, manteniéndose en proporciones similares respecto del pretest, (ítem E).

En el ítem F, se observa una notable mejora en la utilización de procedimientos multiplicativos al compararlo con el ítem D del pretest, debido a que, en la instrucción, se define la independencia como constancia de las

distribuciones de frecuencias relativas condicionales al variar el valor de la variable que actúa como condición y, los alumnos han detectado la independencia en este ítem utilizando procedimientos correctos.

Tabla 3.3.3.1 **Frecuencia y porcentaje de estrategias empleadas en las tablas 2x2, clasificadas por el número de casillas**

Casillas utilizadas	Item		
	D	E	F
Utiliza una sola casilla			
La casilla a		1 (5.0)	
La casilla b	1 (5.0)		
Utiliza dos casillas			
Las casillas a y b		1 (5.0)	
Las casillas a y c	3 (15.0)		
Las casillas b y c	1 (5.0)	1 (5.0)	1 (5.0)
Utiliza las 4 casillas			
Proced. aditivos	7 (35.0)	8 (40.0)	3 (15.0)
Proced. multiplicativos	5 (25.0)	7 (35.0)	16 (80.0)
Otras	3 (15.0)	2 (10.0)	

Niveles de elaboración de estrategias en tablas 2x3

En la tabla 3.3.3.2 se presentan las estrategias empleadas por los alumnos en la tabla 2x3, atendiendo al número de casillas, del mismo modo que se ha hecho en las muestras anteriores. Se puede observar que ningún alumno usa una o dos casillas y sólo 4 alumnos han utilizado 3 casillas, por los que se aprecia una mejora notable en la concepción localista de la asociación. El resto de alumnos ha utilizado las seis casillas.

Tabla 3.3.3.2 **Frecuencias y porcentaje de estrategias empleadas en la tabla 2x3 (ítem G) clasificadas por el número de casillas**

Casillas utilizadas	Frecuencia	Porcentaje
Utiliza tres casillas		
Las casillas a, b y c	3	15.0
Las casillas d, e y f	1	5.0
Utiliza las seis casillas		
Procedimientos aditivos	8	40.0
Procedimientos multiplicativos	7	35.0
No responde	1	5.0

Si se compara la tabla 3.3.3.2 con su homóloga del pretest (tabla 3.1.4.2) se observa también que la utilización de las seis casillas ha aumentado en el postest (75 por ciento) frente al pretest (57.1 por ciento),

aumentando considerablemente el uso de procedimientos multiplicativos (en general más elaborados) en el postest. Ha habido, pues un desplazamiento general de los niveles de estrategias hacia niveles superiores en este ítem.

Niveles de elaboración de estrategias en tablas 3x3

En la tabla 3.3.3.3 se presentan las estrategias de los alumnos en la tabla 3x3, clasificadas por el número de casillas empleadas, donde se puede observar que la mayoría de los alumnos han usado 6 o 9 casillas y que ha aumentado el número de alumnos que emplean procedimientos multiplicativos. Si comparamos esta tabla con su homóloga del pretest (tabla 3.1.4.3), se puede observar que ha habido un desplazamiento hacia los niveles superiores de elaboración de estrategias.

Tabla 3.3.3.3 **Frecuencia de estrategias en el ítem H según número de casillas empleadas**

Casillas utilizadas	Frecuencia	Porcentaje
Utiliza 3 casillas	3	15.0
Utiliza 6 casillas	8	40.0
Utiliza 9 casillas		
Procedimientos aditivos	2	10.0
Procedimientos multiplicat.	5	25.0
No se sabe	1	5.0
No contesta	1	5.0
<hr/>		
Total	20	100.0

Clasificación de estrategias en las tablas de contingencia según los conceptos matemáticos usados implícitamente

En la tabla 3.3.3.4 se dan las frecuencias y porcentajes de las estrategias utilizadas por los alumnos en los ítems D, E, F, G y H, relativos a las tablas de contingencia en el postest, clasificados según los conceptos y teoremas matemáticos empleados implícitamente en los mismos, que se han descrito en la sección 2.3.5.

Al comparar tabla 3.3.3.4 con la tabla 3.1.4.4 correspondiente al pretest, en la muestra experimental, se observa que ha aumentado el porcentaje de estrategias correctas (pasando de 18.1% a 35%), se ha mantenido el porcentaje de respuestas parcialmente correctas y ha disminuido el de incorrectas (pasando del 21.0% al 12%); asimismo ha disminuido el porcentaje de no respuestas (del 11.4% al 5%). Especialmente notable en todos los ítems es el aumento de la estrategia 1, consistente en la comparación de todas las distribuciones de frecuencias relativas condicionales de la tabla. La menor dispersión de estrategias en el postest es indicativa de que el alumno dispone ahora de un repertorio reconocible de esquemas para tratar este tipo de situaciones de un modo relativamente rápido. Esto es, según Vergnaud (1990), indicativo de que el alumno reconoce las situaciones y las comprende, en definitiva de que ha habido un aprendizaje.

Respecto a las concepciones incorrectas puestas de manifiesto por el empleo de estrategias incorrectas, hay que observar una disminución general,

en cada uno de los ítems, de las estrategias 7 y 8 correspondientes al empleo de una sola celda o una sola distribución condicional, y la desaparición de la estrategia 9 (utilización de frecuencias dobles), todas ellas indicativas de la concepción localista de la asociación que ha sido mejorada como consecuencia de la enseñanza recibida.

Tabla 3.3.3.4 Frecuencia y porcentaje de estrategias según conceptos matemáticos implícitos.

Estrategia	Item D	Item E	Item F	Item G	Item H
1	2(10.0)	3(15.0)	8(40.0)	7(35.0)	5(25.0)
2	1(5.0)	1(5.0)	7(35.0)	1(5.0)	
3	8(40.0)	7(35.0)	3(15.0)	8(40.0)	
4	1(5.0)	3(15.0)	1(5.0)	1(5.0)	10(50.0)
5		1(5.0)			
6	1(5.0)	1(5.0)			3(15.0)
7	1(5.0)	1(5.0)			
8	3(15.0)	1(5.0)	1(5.0)	2(10.0)	
10	1(5.0)	1(5.0)			
11					1(5.0)
12	2(10.0)	1(5.0)		1(5.0)	1(5.0)

Evolución global de las estrategias en tablas de contingencia entre pretest y postest

En los apartados anteriores hemos analizado globalmente la evolución de las estrategias en el conjunto de alumnos de la muestra experimental. Puesto que el tamaño de la muestra es reducido, se consideró conveniente estudiar, adicionalmente, la evolución individual de las estrategias en cada uno de los alumnos. Para ello, se comparó el procedimiento seguido por cada uno de ellos en los ítems paralelos en el pretest y el postest, información que se incluye en el anexo 3.4.

Con objeto de introducir una medida objetiva de la evolución lograda que se desprende de la información contenida en dicho anexo 3.4, hemos realizado una clasificación de los diferentes alumnos participantes según el grado de corrección matemática de la estrategia empleada en los ítems comparables en el pretest y postest. En la tabla 3.3.3.5 se muestra esta clasificación para los ítems correspondientes al caso de independencia en la tabla 2x2. Hemos asignado un código numérico a cada alumno, para poder apreciar la evolución experimentada por cada uno de los sujetos en los distintos ítems. Este código es el mismo que se emplea en el anexo 3.4, para describir con detalle los procedimientos empleados por el alumno en cada par de ítems homólogos del

pretest y postest. Puede observarse como la mayoría de los alumnos ha evolucionado favorablemente respecto a la estrategia empleada en este ítem. No se observa en ningún caso el paso de una estrategia correcta a otra parcialmente correcta o incorrecta.

Tabla 3.3.3.5 Clasificación de los alumnos según la corrección de la estrategia empleada en la tabla 2x2 (caso de independencia) en pretest y postest

Pretest: Item D	Postest: Item E		
	Incorrecta	Parc. correcta	Correcta
Incorrecta	7	14	3, 4, 5, 9, 15 19
Parcialmente correcta		1, 13, 21	2, 6, 10, 22
Correcta			8, 12, 16, 20

Al estudiar las estrategias empleadas por los alumnos en los ítems E del pretest y D del postest correspondiendo ambos a dependencia inversa moderada, tabla 3.3.3.6, se puede observar dos grupos diferenciados de alumnos. Un primer grupo (alumnos 3, 9, 4, 7, 1, 10, 13, 14, 22, 21) mantiene o mejoran la estrategia empleada en el pretest. El resto, que es aproximadamente la mitad, empeora la estrategia respecto a la empleada en el pretest. Ello, unido al hecho del escaso número de alumnos que ha detectado la asociación inversa en este ítem del postest (y al número aceptable de alumnos que detectaron la asociación correcta en el pretest, donde no había teorías previas), nos lleva a apreciar la fuerza del efecto de las teorías previas en la resolución de problemas correlacionales. No sólo la enseñanza recibida ha sido insuficiente para la resolución correcta de este problema, sino, al igual que conjeturábamos en el análisis de correspondencias realizado sobre la muestra de comparación, estas teorías han tenido una influencia sobre el tipo de estrategia empleada.

Tabla 3.3.3.6 Clasificación de los alumnos según la corrección de la estrategia empleada en la tabla 2x2 (dependencia inversa moderada) en pretest y postest

Pretest: Item E	Postest: Item D		
	Incorrecta	Parc. correcta	Correcta
Incorrecta	3	4, 9	7
Parcialmente correcta	2, 6, 15, 19 20	1, 10, 13, 14, 22	21
Correcta	12, 19	5, 8, 16	

En la tabla 3.3.3.7 se compara la evolución del uso de estrategias entre una dependencia inversa moderada en el pretest y una dependencia inversa más intensa en el postest. Tanto en el pretest como en el postest no hay teorías

previas fuertes. Si comparamos con la tabla 3.3.3.6 se puede observar una ligera mejoría en este caso en el uso de estrategias, debida a la mayor intensidad existente en el postest, pero aún existen alumnos que no mejoran la estrategia después de la enseñanza. Por tanto, podemos concluir que la dependencia inversa ofrece mayor dificultad de la esperada y un grupo de alumnos sigue manteniendo una concepción unidireccional de la asociación en este tipo de tarea.

Tabla 3.3.3.7 Clasificación de los alumnos según la corrección de la estrategia empleada en la tabla 2x2 (dependencia inversa moderada y fuerte) en pretest y postest

Pretest: ítem E	Postest: ítem E		
	Incorrecta	Parc. correcta	Correcta
Incorrecta		4, 7, 9	3
Parcialmente correcta	6, 19, 20, 21	1, 10, 13, 14, 15, 22	2
Correcta		5, 12, 16	8

En la tabla 3.3.3.8 se presenta una clasificación de los alumnos según el grado de corrección de las estrategias empleadas en el pretest y postest en la tabla de contingencia 2x3 (ítem G). Se puede observar que todos los alumnos excepto el 4 y el 20 conservan o mejoran el grado de corrección de la estrategia empleada, por lo que se deduce una evolución favorable de las estrategias para este tipo de problema.

Tabla 3.3.3.8 Clasificación de los alumnos según la corrección de la estrategia empleada en la tabla 2x3 en pretest y postest

Pretest: ítem G	Postest: ítem G		
	Incorrecta	Parc. correcta	Correcta
Incorrecta	3	1, 7, 9, 10, 14	6, 12
Parcialmente correcta	4	13, 19, 21, 22	2, 5
Correcta		20	8, 15, 16

En la tabla 3.3.3.9 se presenta una clasificación de los alumnos según el grado de corrección de las estrategias empleadas en el pretest y postest en la tabla de contingencia 3x3. Tan sólo los alumnos 1, 6 y 7 han empeorado su estrategia inicial. El resto conserva o mejora la estrategia empleada en el pretest, de lo que se deduce una clara mejoría de las estrategias empleadas en este tipo de problema. Se observa aquí un claro efecto de la enseñanza recibida, ya que las estrategias intuitivas de los alumnos en el pretest, correctas en muchas ocasiones en la tabla 2x2 no eran extendidas al caso general de la tabla de contingencia, lo que se logra ahora en un mayor número

de alumnos.

Tabla 3.3.3.9 Clasificación de los alumnos según la corrección de la estrategia empleada en la tabla 3x3 en pretest y postest

Pretest: ítem H	Postest: ítem H		
	Incorrecta	Parc. correcta	Correcta
Incorrecta	4	3, 8, 9, 10, 15, 19, 20	12
Parcialmente correcta	1, 6, 7	14, 21, 22	2, 5, 13
Correcta			16

Estrategias empleadas por los alumnos en los juicios de asociación en las nubes de puntos

En la tabla 3.3.3.10. se presentan las estrategias empleadas por los alumnos de la muestra experimental en los juicios de asociación en nubes de puntos, atendiendo al grado de corrección de los conceptos matemáticos puestos en juego de manera implícita o explícita, obteniéndose tres categorías: correctas, parcialmente correctas e incorrectas, según la clasificación hecha en la sección 2.3.5.

Tabla 3.3.3.10 Frecuencia y porcentaje de estrategias empleadas para los juicios de correlación en nube de puntos

Estrategias	Item I	Item J	Item K
CORRECTAS:			
1 Compara globalmente		2 (10.0)	1 (5.0)
2 Emplea crecimiento	3 (15.0)		1 (5.0)
3 Emplea decrecimiento	11 (50.0)	3 (15.0)	
4 Función constante		14 (70.0)	1 (5.0)
PARCIALMENTE CORRECTA:			
5 Interpreta pares	3 (15.0)	1 (5.0)	
14 Espera valores simi			1 (5.0)
16 Comp. nube estándar			6 (30.0)
INCORRECTAS:			
6 Pares mal interpret.			2 (10.0)
8 Teorías previas	2 (10.0)		1 (5.0)
9 Otras variables	1 (5.0)		
13 Independencia			7 (35.0)

Se puede observar que la mayoría de los alumnos emplean una estrategia correcta o parcialmente correcta en los ítems I y J habiendo aumentado considerablemente los porcentajes de estos tipos de estrategias. Es notable también el gran número de alumnos que en el ítem J emplea el argumento de constancia en la gráfica para argumentar la independencia. Consideramos que

este hecho es indicativo de una superación de la concepción determinista de la asociación, ya que, mientras que una función constante sería interpretada como indicativa de una relación funcional entre las variables, en el caso de la dependencia estadística debe ser interpretada como ausencia de relación.

Los que utilizan la estrategia correcta 2 en el ítem I y obtienen un tipo de dependencia directa (incorrecta), lo argumentan así: *"porque por lo general el que ha ganado más partidos la posición es de los primeros. Es una gráfica ascendente a más partidos ganados mayor posición"*. Han invertido la relación de orden, entendiendo por mejor clasificado, mayor puesto (González y cols., 1990). Igual ha ocurrido con los que siguen la estrategia 3 y dan un tipo de relación directa. Los que utilizan las estrategias 9 y 10 llegan a un tipo de dependencia incorrecto argumentando teorías previas y la influencia de otras variables. En este caso, como se ha argumentado se manifiesta una concepción causalista extrema de la asociación. Si comparamos esta tabla con su correspondiente en el pretest (tabla 3.1.4.5, ítem J -dependencia inversa, como en este caso-), se puede observar que aunque el porcentaje de estrategias correctas ha crecido, el porcentaje correspondiente al tipo de asociación correcto ha decrecido, hecho motivado por dos razones:

- a) Los puntos de la nube se ven más separados en el postest que en el pretest, aunque el coeficiente de correlación lineal sea mayor en el postest, debido a que tanto en el pretest como en el postest el ajuste lineal no es el más adecuado.
- b) La inversión de la relación de orden comentada más arriba.

En el ítem K, sin embargo es notable el número de alumnos que continúa empleando estrategias incorrectas. En particular los 7 alumnos que empleaban el argumento de no causalidad, lo siguen utilizando, por lo que la enseñanza recibida no les ha ayudado a superar su concepción causalista de la asociación. Aparece también una nueva estrategia consistente en comparar con una nube estándar, generalmente una nube lineal y con poca dispersión, seguida por un 30% de los alumnos, quienes han empleado este argumento para justificar su concepción causalista de la asociación. El alumno que usa la estrategia 1, al comparar globalmente, concluye que *"a valores altos medianos y bajos de un juez le corresponden valores altos medianos y bajos del otro"*. El que utiliza la estrategia 2 argumenta que *"las puntuaciones altas del juez x se corresponden con puntuaciones altas del juez y viceversa"*, por lo que llega a un tipo de dependencia directo. Con el resto de estrategias llegan los alumnos a independencia que es incorrecto.

Tabla 3.3.3.11 Clasificación de los alumnos según la corrección de la estrategia empleada en la nube de puntos (ítems I, J) en pretest y postest

Pretest: ítem I	Postest: ítem J		
	Incorrecta	Parc. correcta	Correcta
Incorrecta		6	5, 13, 16, 19 20, 21, 22
Parcialmente correcta			1, 2, 7, 10, 12, 14, 15
Correcta			3, 4, 8, 9

En la tabla 3.3.3.11 se presenta una clasificación de los alumnos según el grado de corrección de las estrategias empleadas en el pretest y en el postest en la nube de puntos, cuando existe dependencia inversa ítems J e I respectivamente; se puede observar que todos los alumnos han mejorado en el tipo de estrategia utilizada, por tanto hay una clara mejoría.

En la tabla 3.3.3.12 se clasifican a los alumnos según el tipo de estrategia empleado en la nube de puntos cuando existe independencia (ítems J e I del postest y pretest, respectivamente). En ella se puede observar que a excepción de los alumnos 13, 20 y 14, el resto han mantenido o mejorado su estrategia, por lo que se puede concluir que ha existido una clara mejoría en el postest respecto al pretest. En el ítem J todos los alumnos, excepto uno, han obtenido un tipo de dependencia correcto. El que emplea la estrategia correcta 3, llega a un tipo de dependencia incorrecto, dando un argumento de dependencia inversa, *"a mayor consumo de proteínas menor tasa de natalidad"* (probablemente es una teoría previa que tiene sobre el contexto), y declarando el tipo de dependencia directo.

Tabla 3.3.3.12 Clasificación de los alumnos según la corrección de la estrategia empleada en la nube de puntos (ítems J, I) en pretest y postest

Pretest: ítem J	Postest: ítem I		
	Incorrecta	Parc. correcta	Correcta
Incorrecta	21	6	8, 19, 22
Parcialmente correcta		15	1, 2, 3
Correcta	13, 20	14	4, 5, 7, 9, 10 12, 16

Tabla 3.3.3.13 Clasificación de los alumnos según la corrección de la estrategia empleada en la nube de puntos (ítem K) en pretest y postest

Pretest: ítem K	Postest: ítem K		
	Incorrecta	Parc. correcta	Correcta
incorrecta	4, 6, 8, 13, 16, 21	12, 14, 19, 20, 22	7, 10
Parcialmente correcta			
Correcta	1, 3, 9, 15	2, 5	

En la tabla 3.3.3.13 se clasifican los alumnos según la estrategia empleada en la nube de puntos cuando existe independencia (ítem K en pretest y postest), donde se puede observar que los alumnos han mantenido o mejorado su estrategia salvo los alumnos 1, 3, 9, 15, 2, y 5 que en su mayoría han utilizado las estrategias de comparación con una nube de puntos estándar o han declarado la independencia de las variables. Por tanto, se puede concluir que ha existido mejora en la estrategia; no así en la superación de la concepción

causalista de la asociación.

Estrategias empleadas por los alumnos en los juicios sobre asociación en la comparación de muestras

En la tabla 3.3.3.14 se presentan las estrategias empleadas por los alumnos en la comparación de muestras según los conceptos matemáticos empleados implícitamente. Se puede observar que las estrategias son distintas según las muestras estén relacionadas (ítem L) o sean independientes (ítem M). La mayoría de los alumnos han utilizado estrategias correctas o parcialmente correctas, destacando las primeras en el ítem M y las segundas en el L. Si comparamos la tabla con su homóloga del pretest (tabla 3.1.4.6), se puede observar que son similares en la utilización de estrategias correctas y parcialmente correctas en ambos ítems. No ha habido una mejora notable en las estrategias empleadas en este tipo de juicio como consecuencia de la instrucción.

Tabla 3.3.3.14 Frecuencia y porcentaje de estrategias empleadas por los alumnos en la comparación de muestras

Estrategias	Ítem L	Ítem M
CORRECTAS:		
1 Compara las medias		5 (25.0)
2 Compara los totales		1 (5.0)
3 Compara porcentajes	6 (30.0)	
5 Compara distribuciones		3 (15.0)
18 Comp. distr, complet.		1 (5.0)
PARCIALMENTE CORRECTAS:		
6 Compara caso a caso	9 (45.0)	
7 Marca casos excepcionales	1 (5.0)	
8 Halla la diferencia	1 (5.0)	
10 Comparación global		5 (25.0)
INCORRECTAS:		
17 Compara el recorrido		4 (20.0)
99 Otras	3 (15.0)	1 (5.0)

En el caso del ítem L, los que han utilizado la estrategia 3, consistente en comparar los porcentajes de casos en que sube o baja la presión, indican que existe dependencia de la presión sanguínea respecto al tratamiento porque en 6 casos aumenta la presión sanguínea y en 4 disminuye. Para estos alumnos debería existir el mismo número de casos en que aumentase o disminuyese la presión para considerar la independencia de las variables.

Los que siguen la estrategia 6, consistente en comparar caso a caso, dan un tipo de relación incorrecto, argumentando que la presión sanguínea baja en unos casos y en otros sube; en consecuencia nunca se mantiene, de lo que deducen que el tratamiento ha tenido efecto. Estos alumnos manifiestan una concepción localista de la asociación, porque juzgan ésta para los casos aislados, teniendo en cuenta el efecto de la variable en cada uno de los casos y no el efecto total.

El que usa la estrategia 7, consistente en comparar caso a caso y señalar

los casos excepcionales, argumenta para razonar la dependencia que hay más veces en las que ha subido la presión sanguínea. De los 3 alumnos que emplean otras estrategias, uno de ellos argumenta que no se puede saber el tipo de relación, porque no hay datos de personas que no hayan tomado el tratamiento. Se ve aquí la influencia de la instrucción, al creer necesarios los casos negativos, como en las tablas de contingencia 2x2; en general el hecho de que sigan apareciendo estrategias incorrectas en este ítem, es explicable, porque en la instrucción no se ha estudiado explícitamente técnicas de comparación de dos muestras, aunque a nivel intuitivo se ha empleado este tipo de problema, como se ha descrito en la sección 2.2.

En la tabla 3.3.3.15 se clasifican los alumnos que han realizado tanto el pretest como el postest en función del tipo de estrategia utilizado en cada caso. Se puede observar que salvo los alumnos 3, 6, 7, 8, 13 y 16 el resto han mantenido o mejorado su estrategia.

Tabla 3.3.3.15 Clasificación de los alumnos según la corrección de la estrategia empleada en la comparación de muestras relacionadas ítem L en pretest y postest

Pretest: ítem L	Postest ítem L		
	Incorrecta	Parc. correcta	Correcta
Incorrecta			
Parcialmente correcta	3, 6, 7	9, 10, 14, 15, 19, 20 22	1, 5, 12, 21
Correcta		8, 13, 16	2, 4

En la tabla 3.3.3.16 se clasifican los alumnos que ha realizado tanto el pretest como el postest en función de la estrategia empleada en cada caso en muestras independientes, ítem M. Se puede observar que salvo los alumnos 1, 3, 20, 22, 2 y 4, el resto conserva o ha evolucionado favorablemente respecto a la estrategia empleada en este ítem, por lo que se puede una clara mejoría.

Tabla 3.3.3.16 Clasificación de los alumnos según la corrección de la estrategia empleada en la comparación de muestras independientes ítem M en pretest y postest

Pretest: ítem M	Postest: ítem M		
	Incorrecta	Parc. correcta	Correcta
Incorrecta	15	7	12
Parcialmente correcta	1	9, 14	10, 16, 21
Correcta	3, 20, 22	2, 4	5, 6, 8, 13, 19

Como resumen y para poder dar un índice cuantitativo de la evolución

global de las estrategias empleadas en ítems paralelos en el pretest y en el postest se ha preparado la tabla 3.3.3.17. En ella se ha atribuido a cada uno de los alumnos una puntuación en cada uno de los ítems que indique la evolución de la estrategia. Esta puntuación oscila de -3 a +3 del siguiente modo:

Tabla 3.3.3.17 Evolución de los procedimientos utilizados

Pretest Postest	D F	E D	E E	G G	H H	I I	J I	K K	L L	M M	Total alumno
Alumno 1	+1	0	+1	+2	0	+2	+2	-3	+2	-2	+5
2	+2	-2	+2	+2	+2	+2	+2	-2	0	-2	+6
3	+3	+1	+3	0	+2	0	+2	-3	-3	-3	+2
4	+3	+2	+2	-2	0	0	0	0	-2	-2	+1
5	+3	-2	-2	+2	+2	+3	0	-2	0	0	+4
6	+2	-2	-2	+3	-2	+2	+2	0	-2	+1	+2
7	-1	+3	+2	+2	-2	+2	0	+3	-2	+2	+9
8	0	-2	0	+1	+2	0	+3	0	-2	0	+2
9	+3	+2	+2	+2	+2	0	0	-3	0	0	+8
10	+2	0	0	+2	+2	+2	0	+3	0	+2	+13
12	0	-3	-2	+3	+3	+2	0	+2	+2	+3	+10
13	+1	+1	+1	0	+2	+3	-3	0	-2	0	+3
14	+2	0	0	+2	-1	+2	-2	+2	0	0	+5
15	+3	-2	+1	0	+2	+2	0	-3	0	+1	+4
16	0	-2	-2	0	0	+3	0	0	-2	+2	-1
19	+3	-2	-2	+1	+2	+3	+3	+2	0	0	+10
20	0	-2	-2	-2	+2	+3	-3	+2	0	-3	-5
21	-1	+2	-2	0	0	+3	0	0	+2	+2	+6
22	+2	0	0	0	0	+3	+3	+2	0	-3	+7
Total	+28	-8	0	+18	+18	+37	+9	0	-9	-2	+91

Se asigna una puntuación +1 si el alumno continua con la misma categoría (correcta, parcialmente correcta o incorrecta) de estrategia, aunque el procedimiento haya sido menos elaborado (respectivamente más elaborado). Por

ejemplo el alumno 1, del ítem D del pretest y F del postest (véase anexo 3.4) emplea en una tabla de contingencia 2x2 en el pretest, la comparación de las dos frecuencias condicionales absolutas y en el postest, además compara con la marginal correspondiente. Aunque las dos estrategias se han clasificado como parcialmente correctas, se puede observar que en el postest la estrategia es más elaborada, al tener en cuenta la distribución marginal.

Se ha asignado una puntuación de +2 cuando el alumno ha pasado de una categoría de estrategia a otra inmediatamente inferior o superior. Por ejemplo, si ha utilizado una estrategia parcialmente correcta en el pretest se asigna +2 si el alumno ha seguido una estrategia correcta en el postest y -2 si ha usado una estrategia incorrecta en el postest.

Se ha asignado una puntuación de +3 cuando el alumno ha pasado de una categoría de estrategia a otra dos niveles inferior o superior. Por ejemplo, si un alumno ha utilizado una estrategia correcta en el pretest y una incorrecta en el postest se le asigna -3. Si un alumno ha empleado una estrategia incorrecta en el pretest y una estrategia correcta en el postest se le asigna +3.

Si un alumno ha seguido una categoría de estrategia igual en el pretest que en postest y dentro de esta categoría un procedimiento similar en ambas pruebas, pretest y postest, se le asigna una puntuación cero. Por ejemplo, si un alumno ha empleado en una estrategia incorrecta en tablas 2x2, v. g. usar las frecuencias absolutas de una fila en el pretest y en el postest vuelve a comparar las frecuencias absolutas de una fila se le asigna una puntuación de cero (alumno 1 en el ítem E del pretest y D del postest, anexo 3.4).

En consecuencia, de la tabla 3.3.3.17 se puede observar una mejora global en cuanto al grado de elaboración de las estrategias, dado por la puntuación total positiva (91). Individualmente se da una variación de puntuación que oscila desde -5 (alumno 20) a +13 (alumno 10). En total 2 de los alumnos han obtenido una puntuación negativa (alumnos 16 y 20) y el resto positiva, lo que muestra la desigualdad lógica en el proceso de aprendizaje, que globalmente ha sido satisfactorio, ya que la media global es positiva ascendiendo a $91/19 \cong +4.8$.

Al comparar las puntuaciones parciales en las parejas de ítems homólogos se observa que oscila desde -9 a +37. Los ítems con puntuaciones negativas son los que han resultado con menor mejora global ED, LL y MM; también hay dos ítems con puntuación cero el EE y el KK. Los de dependencia inversa moderada en ambas pruebas ED, muestra una puntuación negativa alta, porque el influjo de las teorías previas en el postest es más fuerte que en el pretest. Cuando las teorías previas no existen la puntuación se reduce a cero, en el caso de la dependencia inversa en tablas de contingencia (ítems EE) que, como hemos visto, es el tipo de dependencia que más cuesta detectar y, por tanto, el alumno busca estrategias que le muestren la dependencia directa o independencia. El otro caso corresponde a la concordancia y dependencia directa no muy fuerte (KK). En este caso el alumno está convencido de la independencia y descuida la corrección de la estrategia utilizada. Por último, en la comparación de muestras (LL y MM), que es un contenido que no se ha estudiado explícitamente en la instrucción; y en el que además la variación no ha sido muy grande, por tanto, puede considerarse dentro de la propia oscilación aleatoria.

Aunque, en las clases prácticas, se ha trabajado implícitamente la comparación de muestras, al no haberse realizado una enseñanza explícita del tema, los alumnos no han mejorado en sus estrategias. Aunque "la definición

pragmática de un concepto hace referencia al conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades y el conjunto de esquemas puestos en juego por los sujetos en estas situaciones, sin embargo, la acción operatoria no lo es todo en la conceptualización. No se debate la verdad o falsedad de un enunciado sin la ayuda de palabras, símbolos y signos. El uso de significantes explícitos es indispensable en la conceptualización (Vergnaud, 1990, pg. 145).

3.3.4. OTROS ASPECTOS ESTUDIADOS

Los alumnos unen los puntos con una línea en la nube de puntos

En la tabla 3.3.4.1 se dan los alumnos que han unido los puntos con una línea, como se puede observar es insignificante. Comparando esta tabla con su homóloga del pretest (tabla 3.1.5.1) se puede observar que los porcentajes se reducen a más de la mitad. Creemos que esto es indicativo de la superación de la concepción determinista de la asociación, aunque aún haya alumnos que la manifiesten.

Tabla 3.3.4.1 Frecuencia de alumnos que unen los puntos con una línea

Item	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
I	Clasf. Liga/empates	1	5.0
J	Proteínas/natalidad	2	10.0
K	Juicio de jueces	1	5.0

Intentan simplificar las tablas 2x3 y 3x3

En la tabla 3.3.4.2 se dan los alumnos que intentan simplificar la tablas de contingencia rxc, donde es de destacar que ningún alumno intenta reducir la tabla 2x3 y un número considerable de alumnos, 7, el 35 por ciento si lo intentan en la tabla 3x3. Comparando esta tabla con la correspondiente en el pretest (tabla 3.1.5.2) se puede observar que el porcentaje ha aumentado en el ítem H. Como hemos señalado creemos que esta estrategia indica una concepción causalista de la asociación. Por ello de nuevo obtenemos una confirmación de que esta concepción no se ha visto mejorada por la enseñanza.

Tabla 3.3.4.2 Frecuencia de alumnos que intentan reducir la tabla

Item	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
G	Aprob/suspender examen	0	0.0
H	Lateralidad ojos/manos	7	35.0

Empleo de porcentajes

En la tabla 3.3.4.3 se presenta la frecuencia de los alumnos que han

empleado porcentajes en la resolución de los juicios de asociación en las tablas de contingencia: Destaca el ítem F, (con el 70 por ciento de los alumnos que han realizado el postest), que corresponde a la independencia entre las variables. En los ítems D, E y G tienen un uso similar de porcentajes, sin embargo, se utilizan menos en las tablas 3x3 (ítem H). Comparando esta tabla con su homóloga del pretest (tabla 3.1.5.3) se puede observar que el uso de porcentajes aumenta en todos los ítems en el postest, de lo que se deduce una mejora en el razonamiento proporcional de los alumnos.

Tabla 3.3.4.3 Frecuencia de alumnos que emplean porcentajes

Item	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
D	Fumar/trastornos bronq.	8	40.0
E	Dieta/trastornos digest.	9	45.0
F	Vida sedentaria/alergia	14	70.0
G	Horas est./aprobar o s.	9	45.0
H	Lateralidad ojos/manos	5	25.0

Empleo de frecuencias marginales

En la tabla 3.3.4.4 se da el empleo de las frecuencias marginales, donde se puede observar que más de la mitad de los alumnos las emplean. Comparando esta tabla con la correspondiente del pretest (tabla 3.1.5.4) se puede observar que ha aumentado el empleo de las frecuencias marginales, excepto en el ítem referido a la dependencia inversa no muy fuerte. Ello es un nuevo indicador de mejora en el razonamiento proporcional.

Tabla 3.3.4.4 Frecuencia de alumnos que calculan frecuencias marginales

Item	Situación	Número de alumnos	Porcentaje
D	Fumar/trastornos	9	45.0
E	Dieta/trastornos digest.	13	65.0
H	Lateralidad ojos/manos	10	50.0

3.4. CONCEPCIONES Y ESTRATEGIAS MANIFESTADAS EN SITUACIONES DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE ASOCIAACION USANDO ORDENADORES

3.4.1. DESCRIPCION DEL INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE DATOS SOBRE RESOLUCION DE PROBLEMAS CON ORDENADOR

En la sección 1.3 se describieron los pasos necesarios, según Crocker (1981), para realizar un juicio sobre la asociación entre variables. Dentro de estos pasos y, una vez recogidos los datos pertinentes a las variables que se desea relacionar, es preciso realizar un resumen de los mismos, con objeto de estimar las frecuencias de casos, en las diferentes combinaciones de categorías de las dos variables analizadas.

Habitualmente, en las investigaciones sobre juicios de asociación se emplean dos tipos de tareas: presentar la información ya resumida en forma de tabla de contingencia o bien, presentar los pares de valores correspondientes a cada unidad estadística, en forma secuencial

En la sección 1.4.2 se analizó la diferencia que, sobre los problemas referidos a juicios de asociación, supone el presentar al alumno los datos sobre las variables a estudiar incluidos en un conjunto de datos más amplio, sobre el cual el alumno puede trabajar empleando una colección de paquetes estadísticos. Se conjeturó que, ante este nuevo tipo de problema, cabía la posibilidad de que el alumno emplease diversas estrategias para la integración de la información y, éstas influyesen en las estrategias empleadas posteriormente para emitir su juicio. Como medio de alcanzar el tercer objetivo propuesto en nuestra investigación, al final del periodo dedicado a la enseñanza, los alumnos de la muestra experimental realizaron una prueba de resolución de este tipo de problemas con ordenador cuyo contenido íntegro se incluye en el anexo 3.5. Dicha prueba utilizaba un fichero de datos reales, tomados de las clases de Educación Física del octavo nivel de E.G.B., de un Colegio Público de un pueblo de la provincia de Jaén, cedidos al investigador por el profesor de dicha materia. El fichero constaba de 48 registros de datos, conteniendo cada registro los datos correspondientes a un sólo alumno en cada una de las variables cuyas características se muestran en la tabla 3.4.1.1

Al comienzo de la prueba se ofreció al alumno una descripción del fichero de datos y una breve explicación de las variables que comprende. También se les indicó el disco en que está grabado el fichero y el nombre del mismo. Todos estos extremos pudieron ser comprobados por el alumno, puesto que, al comenzar su trabajo, e indicar, al paquete estadístico PRODEST, el disco donde está grabado el fichero y el nombre del mismo, el paquete ofrece las variables y el número de código correspondiente.

Los alumnos realizaron la prueba individualmente trabajando cada uno con un ordenador. Cada uno de ellos recibió un ejemplar del cuestionario, que se muestra en el anexo 3.5, en el que figuraban la descripción de los datos, las preguntas a responder y espacio para recoger sus respuestas razonadas sobre las mismas. La interacción del alumno con el ordenador fue recogida individualmente para cada uno de los alumnos participantes. La duración del examen fue de 2 horas y treinta minutos.

Tabla 3.4.1.1 Características de las variables utilizadas en el fichero de datos de la prueba final con ordenador

Nombre de la variable	Características
Número de alumno	Cuantitativa, discreta.
Sexo	Cualitativa, dicotómica.
¿Practica deporte?	Cualitativa, dicotómica.
Número de pulsaciones en reposo	Discreta, necesita agrupar, simétrica.
Número de pulsaciones después de 30 flexiones	Igual que la anterior.
Tiempo en recorrer 30 m (septiembre)	Igual que la anterior.
Tiempo en recorrer 30 m (diciembre)	Igual que la anterior.
Peso en kgs.	Continua, asimétrica con valores atípicos, mezcla de dos poblaciones.
Talla en cm.	Igual que la anterior.
Edad en años	Discreta, pocos valores, asimétrica sin valores atípicos.

Análisis de los problemas propuestos

El instrumento de recogida de datos se diferencia del utilizado como pretest en tres características: Todos los problemas planteados se presentan en el contexto de un conjunto de datos reales sobre niños de una clase de Educación Física de octavo de E.G.B. En segundo lugar, la información no se presenta estructurada en tablas como en el pretest, sino que se le ofrece al alumno grabada en disco y en un listado que se adjunta a la hoja de examen. Por último, el alumno dispone de un ordenador y un programa estadístico, con el que poder ensayar la forma de resolución más adecuada, y decidir el método de resolución y la respuesta que crea más idónea.

Puesto que este examen formaba parte de la evaluación académica del curso, incluía además de los problemas de asociación estadística, otros referidos a las medidas de tendencia central y de dispersión. Además la última pregunta estaba dedicada a que el alumno plantee nuevas cuestiones acerca del fichero. Sin embargo, como el propósito de esta investigación se refiere sólo a la asociación estadística, los resultados que presentamos se restringen a este tipo de problemas.

El cuestionario empleado cubre los diversos tipos de problemas de asociación contemplados en esta investigación: tablas 2x2 (problema 1); tablas rxc (problema 4); nube de puntos (problema 5); comparación de muestras

independientes (problema 2) y comparación de muestras relacionadas (problema 3). A continuación se describen los cinco problemas del mismo sobre la asociación estadística.

Problema 1. Razona si en este conjunto de datos el practicar o no deporte depende del sexo.

Se trata de un estudio de relación entre variables cualitativas dicotómicas que se pueden tomar como independientes. Por tanto, podría resolverse de las siguientes maneras:

- ▶ Con el programa CONTAJE: Obtención de tablas de frecuencias separando chicos de chicas y comparando después las frecuencias relativas, los gráficos de barras o sectores o la moda de las distribuciones.
- ▶ Con el programa TABLAS: Obteniendo la tabla de contingencia y comparando las distribuciones condicionales, o bien las frecuencias relativas condicionales con la marginal correspondiente.
- ▶ Con el programa REGRESIO: Las variables son cualitativas, pero al ser dicotómicas y tomar cada una sólo dos valores (1,2) se puede utilizar el coeficiente de correlación para ver la asociación que existe entre ellas.
- ▶ Por el mismo motivo anterior se podría utilizar el programa ESTADIS y comparar las medias o medianas.

Problema 2. ¿Depende en estos alumnos el número de pulsaciones después de 30 flexiones de si practica o no deporte?

Estudio de asociación entre una variable cuantitativa discreta y otra dicotómica. Tiene las siguientes soluciones:

- ▶ Seleccionando por los valores de la variable "practica deporte" y comparando los gráficos (agrupados o no con los programas HISTO o CONTAJE) y las características de las dos distribuciones resultantes, con el programa ESTADIS podremos discutir si hay asociación entre las dos variables.
- ▶ Realizando una tabla de contingencia y observando las frecuencias condicionadas con el programa TABLAS.
- ▶ Calculando el coeficiente de correlación con el programa REGRESIO. La segunda variable es cualitativa, pero al ser dicotómica se puede utilizar este coeficiente.

Problema 3. ¿Depende el número de pulsaciones del momento en que se midan (en reposo o después de haber realizado 30 flexiones)?

Comparación de dos variables cuantitativas sobre la misma muestra. También puede considerarse como asociación entre una variable cuantitativa (el tiempo invertido en realizar 30 flexiones) y otra cualitativa dicotómica (el instante en el que se realiza la medición). La diferencia entre los dos problemas está en la forma en que se hace la pregunta. Los métodos de solución son:

- ▶ Comparación del histograma de las dos distribuciones agrupando en intervalos. También podría hacerse por medio del gráfico de barras, pero debido al gran número de valores, no sería fácil hallar una respuesta.
- ▶ Comparando la media (ESTADIS) y los estadísticos de orden (MEDIANA).

- ▶ Calculando la recta de regresión. Con la nube de puntos se observa que el valor del número de pulsaciones es mayor después de las flexiones.

Problema 4. Utilizando los datos del fichero, razona si en estos alumnos la práctica de deporte depende o no de la edad.

Se trata de un estudio de relación entre una variable cualitativa dicotómica y otra cuantitativa discreta (porque la edad se da en años y toma sólo 3 valores: 12, 13 y 14 años). Por tanto, podría resolverse de las siguientes maneras:

- ▶ Con el programa CONTAJE: Obtención de tablas de frecuencias seleccionando por la práctica de deporte y comparando después las frecuencias relativas, los gráficos de barras o sectores o la moda de las distribuciones.
- ▶ Con el programa TABLAS: Obteniendo la tabla de contingencia y comparando las distribuciones condicionales.
- ▶ Con el programa REGRESIO: La variable cualitativas, (practica deporte) al ser dicotómica y tomar sólo dos valores (1,2) se puede utilizar el coeficiente de correlación para ver la asociación que existe entre ella y la variable discreta edad.
- ▶ Por el mismo motivo anterior se podría utilizar los programas ESTADIS o MEDIANA y comparar las medias o medianas.

Problema 5. El profesor de Educación Física de este Centro quiere saber si existe alguna relación entre el tiempo que invierten los niños en recorrer 30 metros en diciembre y el tiempo que tardaron en recorrer los mismo 30 metros en septiembre, con el fin de cuantificar la "rentabilidad" de sus clases. Utilizando los programas que creaas convenientes, indica si existe relación entre estas variables y de qué tipo.

Se trata de realizar un juicio de la asociación entre dos variables numéricas: el tiempo que tarda un sujeto en recorrer 30 metros en septiembre y el empleado por el mismo sujeto en diciembre.

La estrategia estándar para resolver este problema es emplear el programa REGRESIO a partir del cual se obtienen diversos indicadores de la existencia o inexistencia de asociación, que son los siguientes:

- ▶ La representación gráfica de la nube de puntos. A partir de ella, las dos características de forma y dispersión pueden dar una indicación visual del signo y la intensidad de la asociación.
- ▶ La pendiente de la recta de regresión, cuyo signo indica el signo de la asociación.
- ▶ El coeficiente de correlación, que también indica el signo y la intensidad de la asociación.

Además de este programa puede emplearse también el programa TABLAS y construir una tabla de contingencia que cruce los valores de las dos variables. Aunque esta solución no es óptima, pues no cuantifica la intensidad de la asociación, permite detectar la existencia de la misma.

Finalmente, en la tabla 3.4.1.2 se hace un resumen de los métodos previstos de solución de los problemas que serán comparados con los procedimientos seguidos por los alumnos en la sección 3.4.5. En general, cada

programa puede aportar varias soluciones correctas.

Tabla 3.4.1.2 Programas previstos en la resolución de los problemas propuestos

Programa utilizado	Número de problema				
	1	2	3	4	5
CONTAJE	X	X	X	X	
HISTO		X	X		
MEDIANA			X	X	
ESTADIS	X	X	X	X	
TABLAS	X	X		X	X
REGRESIO	X	X	X	X	X

Sobre los cinco problemas se ha efectuado un estudio teniendo en cuenta las variables de tarea descritas en la sección 2.1, cuyo resultado se muestra en la tabla 3.4.1.3.A y B.

Tabla 3.4.1.3.A Variables incluidas en la prueba de resolución de problemas con ordenador

Variables	Tablas de conting.		Número de puntos	Comparación de muestras	
	Tabla 2x2	Tabla rxc		Item 3	Item 2
	Item 1	Item 4	Item 5	Item 3	Item 2
V1.-Tipo de dependencia	Directa	Inversa	Directa	Fuerte	Débil
V2.-Intensidad de la dependencia	0.28	-0.22	0.75	t=16.75	t=0.817
V3.-Se diferencia la variable dependiente de la variable independiente	Si	Si	Si	No	Si
V4.-Tamaño de los números	> 10	> 10	1-48	1-48	1-48
V5.-Contexto familiar	Si	Si	Si	Si	Si

Tabla 3.4.1.3.B Variables incluidas en la prueba de resolución de problemas con ordenador

Variables	Tablas de conting.		Nube de puntos	Comparación de muestras		
	Tabla 2x2	Tabla rxc		Item 5	Item 3	Item 2
	Item 1	Item 4				
V6.-¿Concuerdan los datos con las teorías previas?	No hay teorías previas	No hay teorías previas	Si	Si	No	
V7.-¿Se dan los márgenes?	No	No				
V8.-Tipo de covariación	Causal unilateral	Causal unilateral	Causal unilat.	Interdepende.	Causal unilat.	
V9.-Número de puntos			48			
V10.-Tipo de muestras				Relacionadas	Independientes	

3.4.2. LA INTERACCION DEL ALUMNO CON EL ORDENADOR

Además del cuadernillo de examen, se ha registrado en disco la interacción del alumno con el ordenador como ya se hizo en el estudio exploratorio descrito en Estepa (1990). El fin perseguido fue conocer el proceso de resolución del problema seguido por el alumno, a través de las distintas opciones de PRODEST, para encontrar la respuesta pedida en cada uno de los problemas propuestos.

La interacción del alumno con el ordenador implica, en opinión de Kaput (1992), la disponibilidad de nuevos sistemas de notación matemática dinámicos e interactivos. Aunque proporciona un sinfín de posibilidades, también conlleva el asumir una serie de limitaciones y restricciones impuestas por el modo de operar específico del software que se usa.

La posibilidad de registrar en un fichero las interacciones del alumno con el ordenador permite al investigador reproducir de modo indirecto los pasos seguidos por éste en la resolución de un problema, salvando así un problema metodológico, expuesto por Crocker (1981), "el investigador no tiene forma de conocer si el sujeto cambia su estrategia de intento en intento" (pg. 283). El registro de la interacción del alumno con el ordenador, no sólo permite conocer la respuesta final del alumno al problema planteado, sino la evolución del trabajo realizado hasta llegar a la respuesta dada, lo que posibilita el estudio de los diferentes aspectos de las concepciones sobre los conceptos implicados en la resolución de las tareas propuestas. Hay que tener en cuenta, sin embargo, en el uso de la información proporcionada por el registro de interacción su carácter "reactivo", pues cuando el alumno interactúa con el ordenador, se pueden ir produciendo simultáneamente cambios en las concepciones y estrategias del estudiante que resuelve el problema.

Estos cambios tienen indudable valor en toda investigación, como veremos en la sección 3.5, en que se analiza con detalle este registro como medio de estudio del proceso de aprendizaje de una pareja de alumnos.

El uso del registro de interacción del alumno con el ordenador depende del papel asignado al ordenador en la investigación, que según Batanero y Godino (1992) pueden ser los siguientes:

- a) El ordenador actúa como sujeto que aprende, como cuando se emplea el lenguaje Logo. Se pide al alumno que realice una tarea y este produce una serie de órdenes para que el ordenador realice la tarea para él. Si el estudiante no obtiene los resultados apetecidos, modifica su programa hasta que lo consigue, pregunta al profesor o queda bloqueado.
- b) El ordenador actúa como tutor, Por ejemplo Straesser y Capponi (1991) realizan una investigación en la que se pide al alumno la construcción de una figura geométrica. Utilizan el registro de interacción en un doble sentido, estudiando primero el proceso seguido por el alumno en la construcción de la figura y a continuación la interacción del tutorial del ordenador, con el fin de evaluar el software utilizado.
- c) El ordenador actúa como "oponente inteligente". Por ejemplo, Schroeder (1983) realiza una investigación sobre el efecto de los juegos en la enseñanza de conceptos probabilísticos, donde el ordenador actúa como rival inteligente del alumno. Analizando los registros de interacción concluyen que los alumnos, en el transcurso de sus acciones, modifican sus estrategias al progresar en la adquisición de los conceptos probabilísticos.
- d) El ordenador actúa como instrumento de cálculo, para realizar gráficos o simulaciones, como ocurre con los diferentes paquetes estadísticos. Como ejemplo citamos la investigación de Mc.Kenzie y cols. (1986) que realizan una investigación con 154 alumnos de los primeros cursos universitarios que habían utilizado el paquete estadístico MINITAB durante el periodo de instrucción. Mediante el análisis de los registros de interacción, estudiaron el proceso seguido por los alumnos en la resolución de los problemas planteados. También comparan las estrategias utilizadas por los alumnos al comienzo y final de la instrucción.

Tanto en Estepa (1990) como en la presente investigación se ha utilizado el ordenador con este último papel. En esta sección el registro de interacción alumno-ordenador será analizado, junto con las producciones escritas de los alumnos, para estudiar las concepciones finales de los alumnos después de la instrucción.

En la mayor parte de las investigaciones sobre informática educativa, el análisis de los registros es de tipo cualitativo, centrándose en la definición de categorías de análisis y búsqueda de ejemplos de las mismas. En nuestro caso, hemos completado el estudio cualitativo, con otro cuantitativo. Además, el análisis no se realiza de forma aislada, sino teniendo en cuenta el resto de instrumentos de recogida de datos, lo que permite relacionar el procedimiento seguido en la solución de los problemas, la interpretación dada a los programas y los argumentos utilizados.

Aunque la disponibilidad del registro de interacción pone una herramienta metodológica importante a nuestro alcance, por sí sola no nos permite acceder al proceso completo de resolución del problema. Por tanto, ha sido necesario en este trabajo suplementarlo con otras fuentes de datos. Todas ellas en conjunto nos permiten asignar al ordenador un papel de **instrumento de**

evaluación de las concepciones de los alumnos.

Como se ha indicado, consideramos conveniente grabar todo el proceso seguido por cada alumno en la utilización de cada uno de los programas. Para ello hemos diseñado un fichero secuencial aditivo donde se van grabando cada una de las preguntas y respuestas en la interacción alumno-ordenador, los errores cometidos en la utilización de los programas y el tiempo transcurrido entre la formulación de dos preguntas consecutivas, sin que el alumno sea consciente de ello. Cada registro consta de cuatro campos donde se graba la siguiente información:

Campo 1: Nombre del programa que se está utilizando, en algunos casos, en su lugar, se graba alguna información de interés, por ejemplo si ha habido algún error.

Campo 2: Pregunta formulada al alumno por el programa.

Campo 3: Respuesta dada por el alumno a la pregunta formulada.

Campo 4: Tiempo (en segundos) transcurrido desde la pregunta anterior.

En la figura 3.4.2.1 se muestra el comienzo de uno de estos ficheros. En el anexo 3.5 se incluye un ejemplo del registro de interacción de uno de los alumnos con el ordenador.

Figura 3.4.2.1 Fragmento de fichero de interacción alumno-ordenador

Comienzo	Por favor, escribid vuestro número de equipo	11	11
Comienzo	Por favor, escribid vuestros nombres	aNTONIO	4
MENU	SELECCIONE UN PROGRAMA	5	5
BUZON	EN QUE SE ENCUENTRA EL FICHERO DE TRABAJO	S	18
BUZON	EN QUE SE ENCUENTRA EL FICHERO DE TRABAJO	A	2
NOMBRE	DEL FICHERO DE TRABAJO	ALUNNOS	6
ERROR	NOMBRE DEL FICHERO DE TRABAJO	ALUNNOS	0
ERROR	ERROR	ALUNNOS	0
Comienzo	Por favor, escribid vuestro número de equipo	11	2
Comienzo	Por favor, escribid vuestros nombres	ANTONIO	10
MENU	SELECCIONE UN PROGRAMA	5	2
BUZON	EN QUE SE ENCUENTRA EL FICHERO DE TRABAJO	a	11
NOMBRE	DEL FICHERO DE TRABAJO	alumnos	3
¿DESEA	DEFINIR UN NUEVO FICHERO?	n	4
¿QUIERE	S. LOS REGISTROS POR LOS V. DE UNA V.?	n	0
CONTAJE	NUMERO DE LA VARIABLE QUE DESEA ANALIZAR	6	5
CONTAJE	¿QUIERE EJECUTAR DE NUEVO ESTE PROGRAMA	n	17
MENU	SELECCIONE UN PROGRAMA	6	5
¿DESEA	DEFINIR UN NUEVO FICHERO?	s	15
BUZON	EN QUE SE ENCUENTRA EL FICHERO DE TRABAJO	a	4
NOMBRE	DEL FICHERO DE TRABAJO	mff20	4
¿DESEA	DEFINIR UN NUEVO FICHERO?	n	4
¿QUIERE	S. LOS REGISTROS POR LOS V. DE UNA V.?	s	1
CONTAJE	NUMERO DE LA VARIABLE DE SELECCION	3	4
LA V.	ESTARA COMPRENDIDA ENTRE UN MAX Y UN MIN	1	1
SE HA	EQUIVOCADO EN ALGUN DATO?	n	2
HISTO	NUMERO DE VARIABLE QUE SE DESEA ANALIZAR	6	6
HISTO	INTRODUZCA EL EXTREMO INFERIOR DEL INTERVALO	0	12
HISTO	INTRODUZCA LA AMPLITUD DEL INTERVALO	3	1
HISTO	QUIERE REPETIR LA TABLA DE FRECUENCIAS	n	22
HISTO	¿QUIERE EJECUTAR DE NUEVO ESTE PROGRAMA?	n	0

Este registro ha sido grabado para cada uno de los 20 alumnos individualmente. A continuación se presentan los resultados del análisis de los mismos.

3.4.3. ESTRATEGIAS SEGUIDAS POR LOS ALUMNOS PARA LA INTEGRACION DE LA INFORMACION A PARTIR DEL FICHERO DE DATOS

Cuando en un estudio de asociación se dispone de los datos sobre las variables bajo estudio, el modelo normativo indica que es preciso clasificar los casos obtenidos, según la codificación que se haya elegido, e integrar la información de modo que se tenga un resumen de los datos, a partir del cual se establece el juicio de asociación (Crocker, 1981).

En la sección 1.3 se describen los diversos tipos de tarea empleados en las investigaciones sobre el tema. En ellas es posible presentar al sujeto la información ya resumida, usualmente en forma de tabla de contingencia o bien pedir al sujeto que efectúe personalmente el resumen. En cualquiera de los dos casos, la información proporcionada se refiere sólo a las variables sobre las que ha de emitirse el juicio de asociación.

Por el contrario, cuando se proporciona al sujeto un conjunto completo de datos que incluya otras variables, además de las estudiadas, junto con un paquete de las características del empleado en nuestro caso, los datos que necesita para resolver el problema, empleando diversos formatos: tabla de contingencia, nubes de puntos, estadísticos de la variable, etc... Llamaremos integración de la información a la serie de pasos necesarios para obtener un resumen numérico o gráfico de los datos. Estos pasos incluyen la selección de variables y valores de las mismas y la elección de un método estadístico que proporcionan el resumen de los datos.

Un primer paso en el análisis de los problemas resueltos por los alumnos de la muestra experimental ha sido el estudio de cómo los alumnos, una vez leído el enunciado del problema, integran la información, que se ha incluido en un fichero de datos más amplio, para obtener la respuesta a la pregunta planteada. En nuestra opinión esto se correspondería con los dos primeros pasos de Polya (1965) para resolver un problema, esto es, "Comprender el problema" y "Concebir un plan" para acometer su resolución.

Programas empleados

Se ha estudiado, en primer lugar, el programa utilizado en la resolución de cada problema, obteniendo la tabla 3.4.3.1, donde se puede observar que los porcentajes de uso de los diferentes programas en cada problema suman más de 100. Ello es debido a que, en general, los alumnos han utilizado más de un programa para resolver un problema.

Podemos observar, en la tabla 3.4.3.1, que la mayor frecuencia de uso corresponde al programa CONTAJE, que ha sido utilizado por el 95 por ciento de los alumnos en los problemas 1 y 4, correspondientes a juicios de asociación en tablas de contingencia; y el 90 por ciento en el problema 2, correspondiente a la comparación de muestras independientes. Esta frecuencia es también importante, aunque no tan notoria, en los otros dos problemas (65 por ciento en la comparación de muestras relacionadas y 55 por ciento en la asociación entre variables numéricas.

Tabla 3.4.3.1 Frecuencia y porcentaje de alumnos que usan los distintos programas de ordenador en cada problema

Programas	Problemas				
	Probl. 1	Probl. 2	Probl. 3	Probl. 4	Probl. 5
CONTAJE	19(95.0)	18(90.0)	13(65.0)	19(95.0)	11(55.0)
HISTO	5(25.0)	7(35.0)	6(30.0)	2(10.0)	2(10.0)
ESTADIS	1(5.0)	2(10.0)	9(45.0)		9(45.0)
MEDIANA					5(25.0)
TABLAS					2(10.0)
REGRESIO					2(10.0)

El resto de los programas han sido empleados con frecuencia diferente según el tipo de problema. En consecuencia, deducimos que el alumno ha elegido diversos modos de integrar la información en función de las variables del problema. Además, como se ha razonado, algunos alumnos no se conforman con emplear un sólo programa y eligen un segundo, bien porque el elegido en primer lugar no les parece apropiado, bien para complementar la información obtenida.

Vemos así que los problemas 1 y 4, correspondientes a tablas de contingencia, han sido resueltos casi exclusivamente con la ayuda del programa CONTAJE, que proporciona las tablas de frecuencias y gráficos en variables discretas, complementada en algunos casos con el programa HISTO. Nunca se ha empleado la opción TABLAS para obtener directamente una tabla de contingencia.

El problema 5, correspondiente a asociación entre variables numéricas, que debiera resolverse empleando la nube de puntos es, sin embargo, el que presenta mayor diversidad de estrategias. Tan sólo 2 alumnos obtienen la nube de puntos mediante el programa REGRESIO y otros 2 emplean la tabla de contingencia (programa TABLAS), que eran las opciones previstas en el análisis "a priori". Por el contrario, los programas más frecuentemente empleados han sido CONTAJE (55.0 por ciento) y lo que proporcionan el cálculo de diversos estadísticos (ESTADIS, con 45 por ciento de uso y MEDIANA con 25 por ciento de uso).

El empleo de estos últimos, como veremos en la discusión que sigue, ha sido provocado por una interpretación incorrecta del enunciado. El uso de la opción CONTAJE, aún admitiendo esta interpretación, es incorrecto, puesto que la variable dependiente de este problema (el tiempo en recorrer 30 m en diciembre) es continua. Deducimos de ello que los alumnos confunden estos dos tipos de variable, hecho que será confirmado posteriormente en la sección 3.5, en el estudio cualitativo de una pareja de alumnos. Aunque este error conceptual no se relaciona directamente con la idea de asociación es importante hacerlo notar por la cantidad de alumnos implicados.

En la comparación de muestras (problema 2 y 3), las opciones utilizadas, además del programa CONTAJE, han sido los programas HISTO y ESTADIS. En el caso de comparación de muestras independientes, un 35 por ciento de alumnos

emplea las tablas de frecuencias y gráficos de variables continuas y un 10 por ciento el cálculo estadístico. Estas opciones son preferibles a la primera, pues, aunque la variable es discreta, el gran número de valores diferentes hace preferible la agrupación de la variable o el cálculo de estadísticos. No obstante, como hemos indicado en el análisis "a priori" las tres opciones son posibles.

Por último, en la comparación de muestras relacionadas aumenta la frecuencia de empleo del cálculo de estadísticos. Al ser necesaria la comparación de dos variables que precisan agrupación, el alumno ha preferido emplear un resumen de la distribución para basar en él el juicio.

Estrategia de integración de la información

Aunque los programas utilizados, comentados más arriba, proporcionan una primera información sobre el modo en que los alumnos integran la información, hemos visto que algunos alumnos emplean más de un programa y puede ocurrir que la solución final se base sólo en uno de ellos. Además, cada uno de los programas proporciona información diversa, que el alumno puede utilizar en su totalidad, para resolver el problema o bien seleccionar una parte de ella. En consecuencia, precisaremos como estrategia final de integración de la información, tomando aquella que el alumno elige para responder al problema planteado, después de los ensayos que haya considerado convenientes. Para llevar a cabo este estudio se han obtenido las 7 categorías siguientes:

1. Obtener dos o más tablas de frecuencias de la variable dependiente con el programa CONTAJE (tablas de frecuencias y gráficos de variable discreta), condicionando esta variable respecto a los distintos valores de la variable independiente. Ha sido utilizada en el 57 por ciento de los casos. Supone la construcción de una tabla de contingencia que cruce las dos variables, aunque esta construcción se realiza paso a paso, en lugar de obtener la tabla de contingencia directamente mediante el programa TABLAS. El alumno va obteniendo fila a fila, las distribuciones de frecuencias condicionales absolutas y relativas y las frecuencias absolutas marginales. Posteriormente compara las distintas filas de la tabla que obtiene con este proceso. Consideramos, pues, que este modo de integración de la información es básicamente equivalente a la tabla de contingencia clásica, aunque complementa a esta en el sentido de obtener las frecuencias relativas condicionales por filas.
2. Obtener dos o más tablas de frecuencias de la variable dependiente con el programa HISTO (tablas de frecuencias y gráficos de variable continua), condicionando esta variable a los valores de la otra. Ha sido utilizada en el 4 por ciento de los casos. Es una elaboración de la estrategia anterior, que se combina con la agrupación de valores de la variable dependiente, para obtener una tabla de contingencia de dimensión más reducida.
3. Utiliza estadísticos. Ha sido empleada en el 28 por ciento de los casos. Estos alumnos no comparan las distribuciones de frecuencias, sino diversos resúmenes de la misma. Nos encontramos aquí con una forma nueva de integración de la información respecto a las utilizadas en las investigaciones sobre juicios de asociación. El alumno no siente la necesidad de comparar las distribuciones de frecuencias condicionadas, sino que le bastan los resúmenes numéricos de estas distribuciones. Observamos aquí el uso implícito de la propiedad consistente en que la independencia de las variables supone la invarianza de sus estadísticos.

4. Obtiene la tabla de frecuencias de una distribución de una variable condicionada a un sólo valor de la otra, que es utilizada por el 2 por ciento de los estudiantes. Se corresponde con alumnos que aún no conciben el problema de asociación como de comparación de probabilidades. Es también un indicador de la permanencia de la concepción localista de la asociación, ya que se trata de decidir ésta basándose sólo en una parte de los datos.
5. Estudia sólo la tabla de frecuencias marginal de una variable. Utilizada en el 4 por ciento de los casos. En este caso se prescinde de una de las variables de interés. Indica también una falta de comprensión de la idea de asociación, ya que no se logra relacionar las variables entre sí.
6. Obtiene la tabla de frecuencias marginales de cada variable por separado. Utilizada en el 3 por ciento de los casos. Esta estrategia de integración de la información es indicativa de una comprensión deficiente de la idea de asociación. El alumno capta la necesidad de tener en cuenta las dos variables en el estudio de la asociación. No logra, sin embargo, comprender la idea de distribución condicional. Para él no es necesario el estudio de las frecuencias relativas de la variable dependiente en cada valor de la independiente, donde se halla la verdadera esencia del problema de asociación.
7. Construye con papel y lápiz una tabla de contingencia a partir del estudio de las tablas de frecuencias absolutas (programa CONTAJE). Ha sido empleada por el 2 por ciento de los alumnos. Esta sería la presentación estándar de los juicios de asociación empleados en las investigaciones psicológicas. Como vemos, muy pocos alumnos emplean espontáneamente este modo de integración de la información.
8. Obtiene la nube de puntos, la ecuación de la recta de regresión y el coeficiente de correlación. Utilizada por el 2 por ciento de los alumnos. La nube de puntos sería el formato de integración de la información que hemos empleado en el pretest y postest y, como se puede apreciar, el alumno no elige este formato espontáneamente.

Se ha hecho un recuento de frecuencias de estas categorías en cada problema y se ha obtenido la tabla 3.4.3.2

En la tabla 3.4.3.2 se puede observar que, en general, la forma de integrar la información por los alumnos de la muestra experimental es construir varias tablas de frecuencias de una variable condicionada por los valores de la otra (número 1 en la tabla 3.4.3.2), que se ha utilizado en un porcentaje que oscila entre el 30 y el 85 por ciento, según el problema. Esto equivale a construir por pasos una tabla de contingencia con objeto de comparar posteriormente las frecuencias condicionadas. Como hemos comentado, esta forma de integración de la información completa el formato usado en las investigaciones sobre juicios de asociación, en el sentido de completar la tabla de contingencia, con las frecuencias relativas condicionales por filas para cada una de las casillas. Evidentemente la información de que se dispone es mucho más completa y será más fácil, que en el formato clásico, el uso de estrategias normativas que impliquen la comparación de frecuencias relativas condicionales.

Se puede observar en la tabla 3.4.3.2 que en los problemas relativos a tablas de contingencia (problemas 1 y 4) es donde más se ha utilizado, por lo que se puede deducir que la presentación de los datos en forma de tabla de contingencia es la que los alumnos han considerado más adecuada para resumir y analizar la información sobre asociación entre dos variables cualitativas. La

notable diferencia en el empleo de esta estrategia de integración de la información entre estos dos problemas y el resto, también es indicativo de que el alumno ha diferenciado las diversas tareas en los juicios de asociación.

Tabla 3.4.3.2 Frecuencia y porcentaje de la forma en que los alumnos integran la información en los problemas de asociación

Forma en que se integra la información	Problema				
	Probl. 1	Probl. 2	Probl. 3	Probl. 4	Probl. 5
1	17(85.0)	9(45.0)	6(30.0)	16(80.0)	9(45.0)
2	1(5.0)	2(10.0)	1(5.0)		
3		5(25.0)	12(60.0)		9(45.0)
4				2(10.0)	
5		3(15.0)		1(5.0)	
6	1(5.0)	1(5.0)	1(5.0)		
7	1(5.0)			1(5.0)	
8					2(10.0)

Un hecho digno de análisis es que el alumno dispone de un programa específico (programa TABLAS del paquete PRODEST) que construye en un sólo paso la tabla de contingencia y, sin embargo, ha preferido este procedimiento por pasos, lo que le supone un mayor tiempo de cálculo. Esto es un síntoma de la dificultad de interpretación de las frecuencias relativas condicionales y de diferenciación entre el condicional y el condicionado en la definición de las mismas, señalado por Falk (1986). En efecto, la opción TABLAS del paquete PRODEST proporciona sobre la misma tabla de contingencia, para cada una de las celdas de la tabla, la frecuencia absoluta y las dos frecuencias relativas condicionales, dadas la fila y la columna para esta celda. Al construir el alumno la tabla paso a paso sólo obtiene las frecuencias condicionales por filas, por lo que no necesita interpretar la diferencia entre los dos tipos de frecuencias condicionales. Esta manera de integrar la información, se ha utilizado en todos los problemas, quizás por tratarse de la primera opción del paquete. Sin embargo, destaca su uso en los problemas 1 y 4, cuya solución más inmediata es la construcción de una tabla de contingencia.

Cuando se utiliza esta misma forma de integrar la información, pero para variables continuas (número 2 de la tabla 3.4.3.2) el porcentaje de uso decrece considerablemente el 4 por ciento para el total de problemas. Las consideraciones hechas en el párrafo anterior son aplicables aquí, pues la diferencia mayor es que esta opción trata de variables continuas, mientras que la anterior era referida a variables discretas. Hay que hacer notar también que esta estrategia se emplea en el problema 2, referido a la comparación de muestras independientes y en un caso en la comparación de muestras relacionadas (problema 3).

Otra forma de integrar la información es el uso de estadísticos (número 3

en la tabla 3.4.3.2), que se ha utilizado en un porcentaje que oscila entre el 25 y el 60 por ciento de los casos, en los problemas de comparación de muestras (2 y 3) y en el problema 5, comparando estadísticos de orden o de tendencia central. Este último problema ha sido interpretado por los alumnos como de comparación de muestras. Estos alumnos, en lugar de utilizar la distribución completa de las variables, usan resúmenes de las mismas. Han comprendido que los estadísticos de las distribuciones no sólo sirven de descriptor de la misma, sino que también son útiles para comparar distribuciones entre sí. Este modo de integración de la información es nuevo, respecto a los usados en las investigaciones sobre el tema, y muestra en los alumnos un alto grado de formalización y comprensión de la idea de asociación. Como hemos indicado, supone el empleo implícito de la propiedad consistente en que un cambio en los estadísticos implica un cambio en la distribución.

Otros alumnos sólo emplean la tabla de frecuencias de una distribución de una variable condicionada a un sólo valor de la otra (número 4 de la tabla 3.4.3.2). Solo se ha utilizado en el problema 4. Estos dos alumnos han estudiado la distribución de la variable edad condicionada al subconjunto de los que sí practican deporte. Toman el caso positivo de la variable dependiente y en él estudian la variable independiente. Esta forma de proceder es equivalente al uso de una sola fila o columna en una tabla de contingencia como las estudiadas en el pretest, por lo que implica la permanencia de la concepción localista de la asociación.

Otras veces, el alumno sólo tiene en cuenta la tabla de frecuencias marginal de una variable (número 5 de la tabla 3.4.3.2), haciendo caso omiso de la existencia de la otra variable, basando su juicio en el estudio de una sola variable. Ya se ha razonado con anterioridad el error que esto supone.

Un alumno ha obtenido la tabla de frecuencias marginales de cada variable por separado y, según sea en cada tabla el valor de mayor frecuencia, emite su juicio de asociación en cada uno de los problemas 1, 2 y 3. Por ejemplo, en el problema 1, al tener mayor frecuencia las chicas en la variable sexo y la práctica de deporte en la variable "practicar deporte", concluye que si existe dependencia. Ya se ha señalado el error conceptual que esto supone.

En dos ocasiones, en los problemas 1 y 4, (número 7 en la tabla 3.4.3.2), dos alumnos han optado por obtener las tablas de frecuencias condicionales con el programa CONTAJE (igual que en el número 1 de la tabla 3.4.3.2), pero en esta ocasión, han construido con papel y lápiz la tabla de contingencia con sus filas y columnas correspondientes, por tanto se corrobora lo dicho más arriba sobre la dificultad de interpretación de las frecuencias relativas condicionales y de diferenciación entre el condicional y el condicionado.

Por último, dos alumnos obtienen la nube de puntos, la ecuación de la recta de regresión y el coeficiente de correlación (número 8 de la tabla 3.4.3.2) y en ellos basan su juicio. Aunque se utiliza en el problema 5, el más adecuado para el uso de estas técnicas estadísticas, es muy escaso su empleo, en contra de lo previsto, debido a que los alumnos han hecho en general una interpretación errónea del enunciado de este problema. La solución pedida (si el tiempo en recorrer 30 m en diciembre depende del tiempo invertido en recorrer los mismos 30 m en septiembre), supone un juicio de asociación entre estas dos variables cuantitativas, para lo cual las técnicas de regresión y correlación son las apropiadas. La mención en el enunciado del problema a la "rentabilidad" de los ejercicios realizados por los alumnos ha ocasionado una interpretación diferente del enunciado. Los alumnos, en su mayoría, han supuesto que se pedía estudiar la dependencia entre la variable numérica "tiempo recorrer los 30 m" y la dicotómica "momento de la medición:

septiembre o diciembre". En consecuencia han tratado de resolver el problema como si se tratase de la comparación de muestras relacionadas, por lo que el modo de integración de la información es muy similar en los problemas 3 y 5.

En resumen, y refiriéndonos a la **quinta hipótesis de nuestro estudio** confirmamos el hecho de que al disponer del ordenador el alumno emplea diversas estrategias para integrar la información. Aunque la más frecuentemente empleada es la tabla de contingencia, se complementa el formato clásico de presentación incluyendo las frecuencias relativas condicionales por filas. Una estrategia correcta nueva, respecto a los estudios psicológicos, y que supone un mayor grado de formalización, es prescindir de las tablas de frecuencias y basar el juicio en la comparación de estadísticos. Las formas en que se integra la información dependen del tipo de problema, confirmando así, el efecto de las variables de tarea (Kilpatrick, 1978) sobre la **estrategia de integración de la información**.

3.4.4. JUICIOS DE ASOCIACION

A continuación se estudian los juicios sobre la existencia de asociación que en los problemas han dado los alumnos, obteniéndose la tabla 3.4.4.1.

Tabla 3.4.4.1. Frecuencia y porcentaje del tipo de dependencia que declaran los alumnos en los problemas de asociación

Tipo de dependencia	Problema				
	Probl. 1	Probl. 2	Probl. 3	Probl. 4	Probl. 5
Dependencia con signo correcto	*18(90.0)	16(80.0)	*20(100.)	*20(100.)	*18(90.0)
Dependencia con signo incorrecto	1(5.0)				
Independencia	1(5.0)	*4(20.0)			1(5.0)
No contesta					1(5.0)

(* respuesta correcta)

En la tabla 3.4.4.1. se puede observar que una gran mayoría de alumnos han detectado la existencia de asociación correctamente en los problemas resueltos con el ordenador. Los problemas 3 y 4 (comparación de muestras relacionadas y tabla rxc) han sido resueltos en este extremo correctamente por el total de alumnos. Los problemas 1 y 5 (tablas 2x2 y nube de puntos han sido resueltos por el noventa por ciento de los alumnos (tomando en este problema como solución correcta la interpretación hecha por los alumnos como problema de muestras relacionadas). El ochenta por ciento de los alumnos contesta que existe dependencia en el problema 2 relativo a la comparación de muestras independientes, el otro 20 por ciento declara independencia. Hay que tener en cuenta que la relación entre las dos muestras es débil, por ese motivo la asociación presente en los datos no es estadísticamente significativa, por lo que la respuesta correcta, desde un punto de vista normativo, sería la de independencia. No obstante, como ocurrió en el postest en el ítem L, los alumnos consideran que una pequeña variación en los datos es ya indicativa de la existencia de asociación. Puesto que los alumnos no han recibido instrucción sobre inferencia, podemos admitir esta respuesta como correcta, respecto

a la relación institucional que se les ha presentado en relación a la asociación estadística.

Si comparamos, con el postest, se nota una ligera mejoría en los problemas resueltos con el ordenador, aunque en ambos casos los porcentajes de respuestas correctas son elevados. Al resolver los problemas con el ordenador, por un lado, el alumno tiene posibilidad de ensayar varias formas de resolución, varias maneras de integrar la información, por lo que es más sencillo para el alumno descubrir el tipo de relación existente entre las variables. Por otro lado, este es el tipo de problemas presentados durante la instrucción, y no todos los alumnos de la muestra han sido capaces de transferir las capacidades adquiridas en la resolución de problemas con el ordenador en las tareas estándar.

Es notable la diferencia entre la proporción de juicios correctos en el problema 4 y la obtenida en el ítem D del postest correspondientes ambos a asociación inversa en tablas de contingencia. Esta proporción es, por otro lado, similar a la obtenida en el ítem F que es del mismo tipo. La diferencia más importante entre los tres problemas es que en el ítem D del postest las teorías previas de los alumnos van en contra del tipo de asociación empírica. En consecuencia, corroboramos de nuevo el hecho de que la instrucción no ha cambiado el peso de las teorías previas sobre los juicios de asociación.

3.4.5. ESTRATEGIAS EMPLEADAS

También se ha realizado un estudio sobre las estrategias que emplean los alumnos cuando se enfrentan a tareas de resolución de problemas de asociación con ordenador, con el fin de comprobar nuestra hipótesis previa sobre la diferencia existente entre este tipo de resolución y el de papel y lápiz estudiado en el postest. Para lograr este objetivo se han codificado las estrategias utilizadas por los alumnos procurando en lo posible emplear las mismas categorías de análisis que se habían adoptado en el estudio de estrategias de resolución de problemas de asociación estadística sin ordenador (postest). Por ello se han comparado las estrategias en la prueba que ahora analizamos con las categorías empleadas en las tablas 3.3.3.4 (tablas de contingencia), 3.3.3.10 (nube de puntos) y 3.3.3.14 (comparación de muestras). Se ha obtenido la siguiente categorización:

1. Compara los porcentajes correspondientes en tablas de frecuencias (variable discreta) de una variable condicionada a los valores de otra. Equivalente al uso de frecuencias relativas condicionadas en una tabla de contingencia. Esta estrategia es equivalente a la estrategia 1 para tablas de contingencia, utilizada en el postest y descrita con detalle en 2.3.5.
2. Compara los porcentajes correspondientes en tablas de frecuencias (variable continua) de una variable condicionada a los valores de otra. Igual que la anterior, pero utilizando el programa de ordenador para variables continuas
3. Compara máximos y mínimos en las dos distribuciones de frecuencias. El alumno observa los máximos y mínimos en ambas variables, los compara y del resultado de esta comparación emite su juicio de asociación. Es una estrategia aplicable a problemas de comparación de muestras. La más parecida a las utilizadas en el pretest es la número 13 "compara máximos", relativa a la comparación de muestras y descrita en el anexo 2.2.2.
4. Compara los porcentajes de la distribución de una sola variable. En las tablas de contingencia, sería similar a utilizar las frecuencias relativas

marginales de una variable. Esta estrategia está incluida en la codificada con el número 10, "utiliza diversos tipos de frecuencias" y descrita con detalle en la sección 2.3.5

5. Compara estadísticos de orden y gráfico de la caja. En este caso el alumno obtiene los estadísticos de orden y el gráfico de la caja con el programa MEDIANA de ambas variables, los compara y según el resultado de la comparación emite su juicio de asociación. No es asimilable a ninguna estrategia utilizada en el pretest y postest, debido, probablemente, a que estas técnicas son más difíciles de realizar a mano que con el ordenador.
6. Compara las medias de ambas variables. El alumno obtiene las medias de ambas variables con alguno de los programas que las calcula, las compara y emite su juicio de asociación. Esta estrategia se corresponde con la codificada con el número 1 en el pretest y postest en la comparación de muestras y se describe en el anexo 2.2.1.
7. Compara las frecuencias absolutas o los porcentajes en ambas distribuciones. El alumno obtiene las tablas de frecuencias de ambas variables y a continuación compara las frecuencias absolutas o los porcentajes obtenidos en ambas tablas, emitiendo en base a esto su juicio sobre la asociación entre las variables. No aparece en el pretest y postest, pero se puede asimilar, en parte, a la codificada con el número 3 "compara porcentajes" para la comparación de muestras en el pretest y postest.
8. Compara máximos, mínimos y media de las dos distribuciones de frecuencias. Con los programas de ordenador, el alumno obtiene estos estadísticos, los compara y emite su juicio de asociación. No aparece en el pretest y postest, pero engloba a las codificadas con los números 1 "compara medias" y 13 "compara máximos" en la comparación de muestras del pretest y postest, descritas con detalle en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.
9. Compara frecuencias absolutas en una tabla. En las tablas de contingencia sería similar a utilizar las frecuencias absolutas marginales de una variable. Esta estrategia está incluida en la codificada con el número 10 "utiliza diversos tipos de frecuencias" y descrita con detalle en la sección 2.3.5.
10. Compara máximos, mínimos y recorrido en ambas muestras. Esta estrategia no ha aparecido de esta forma en el pretest y postest, aunque engloba a la codificada con el número 13 "compara máximos" y a la número 17 "compara recorridos" utilizada en los ítems L y M de comparación de muestras en el postest y descritas en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.
11. Compara máximos, mínimos, recorrido y medias en ambas muestras. Igual que la anterior, pero además incluye a la estrategia codificada con el número 1 de la comparación de muestras en el pretest y postest y descrita en los anexos 2.2.1 y 2.2.2, por tanto, es más elaborada.
12. Compara las medianas en ambas distribuciones. No ha aparecido en el pretest y postest.
13. Compara a con b y c con d en una tabla de contingencia. El alumno construye una tabla de contingencia compara las celdas de la misma y emite su juicio de asociación. Está incluida en la estrategia número 3 "compara posibilidades o razón de posibilidades" sobre las tablas de contingencia en el pretest y postest, descrita con detalle en la sección 2.3.5 y en el anexo 2.2.1.

14. Compara los mínimos en ambas distribuciones. No apareció en el pretest y postest, pero es similar a la número 13 "compara máximos" de la comparación de muestras en el postest. Descrita en el anexo 2.2.2.
15. Compara máximos, mínimos y mediana en ambas distribuciones. Incluye a las 3 y 12 anteriores, por tanto, más elaborada que estas.
16. Compara los máximos en ambas muestras. Igual a la número 13 "compara máximos" de la comparación de muestras en el postest. Descrita en el anexo 2.2.2.
17. Compara las frecuencias relativas condicionadas en una tabla de contingencia. El alumno obtiene las tablas de frecuencias condicionadas, de la misma manera que en la número 1 de esta relación, además, en este caso, el alumno ha construido con papel y lápiz una tabla de contingencia y ha comparado sus frecuencias relativas para emitir su juicio de asociación, por tanto, es más elaborada que la 1.
18. Compara máximos, mínimos y modas en ambas distribuciones. Igual que la 15, pero en lugar de la mediana compara la moda.
19. Comenta el coeficiente de correlación y compara las medias. El coeficiente de correlación no ha aparecido en el pretest y postest, seguramente por su laborioso cálculo. La comparación de medias ya se ha comentado en la número 6 anterior.

Es de destacar que no ha aparecido ninguna estrategia que se pueda asimilar a las utilizadas para la nube de puntos en el pretest y postest, probablemente debido a la confusión del enunciado del problema 5 y a la presentación de la información, ya que en este caso se ha presentado en un fichero grabado en disco e impreso en la hoja de examen y en el pretest y postest se presenta en forma de tabla o nube de puntos.

Estrategias empleadas en las tablas de contingencia 2x2 (Problema 1)

En la tabla 3.4.5.1 se dan las frecuencias y porcentajes de las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de problemas de tablas 2x2 utilizando el ordenador. En la segunda columna de dicha tabla se da la estrategia equivalente a las utilizadas en el postest; en la tercera columna se da la estrategia equivalente en la comparación de muestras en el postest, cuyo contenido y clasificación se expone en la sección 2.3.5, con el fin de poder comparar los resultados.

Comparando con el postest, se observa un porcentaje mucho mayor de estrategias correctas. Los alumnos han utilizado una estrategia correcta en el 90.0 por ciento de los casos una estrategia parcialmente correcta en el 5.0 por ciento de los casos e incorrecta en el 5.0 por ciento, los porcentajes correspondientes en el postest han sido 36.6, 43.3 y 15.0 por ciento. También se puede observar que estrategias parcialmente correctas usadas en el postest como: Compara dos o más distribuciones de frecuencias absolutas condicionadas con la marginal correspondiente; compara una frecuencia absoluta de cada distribución condicionada con la marginal correspondiente; compara o suma las diagonales, no aparecen cuando se resuelven problemas de tablas de contingencia 2x2 utilizando el ordenador. Del mismo modo, estrategias incorrectas que aparecían en el pretest y postest como: Utiliza una sola casilla; utilizar una única distribución condicional; utiliza frecuencias relativas dobles respecto

al total de la muestra u otro tipo de estrategias, que aparecían en el pretest y/o postest, ahora no aparecen. Todo esto, nos hace pensar que el uso del ordenador mejora la estrategia utilizada en la resolución de problemas de tablas de contingencia 2x2. También aparece una estrategia que en el pretest y postest se ha utilizado en la comparación de muestras.

Tabla 3.4.5.1 Frecuencia y porcentaje de las estrategias utilizadas en la resolución de problemas de tablas 2x2 con ordenador

Estrategia	Estrategia equivalente en el postest.	Estrategia equivalente en comp. muestras en el postest	Frecuencia	Porcentaje
1	1		16	80.0
2	1*		1	5.0
7		3	1	5.0
9	10		1	5.0
13	3		1	5.0
(* más elaborada o con alguna variante)				

En consecuencia, la facilidad con que el ordenador permite calcular las frecuencias relativas condicionales, junto con algunas de las estrategias descritas, ha ocasionado una mayor frecuencia de empleo de las mismas en la solución de los juicios de asociación en tablas de contingencia. De ello deducimos también que, en algunos casos, el empleo de estrategias incorrectas en el postest puede haber sido debida a la dificultad en el cálculo con fracciones y proporciones y no a errores conceptuales referidos a la idea de asociación.

Estrategias empleadas en las tablas de contingencia rxc (Problema 4)

En la tabla 3.4.5.2 se dan las estrategias, utilizadas por los alumnos en la resolución del problema, de tablas de contingencia rxc utilizando el ordenador y las estrategias equivalentes, empleadas en el pretest y postest en la resolución de estos problemas. En esta tabla se puede observar que el 90.0 por ciento ha utilizado una estrategia correcta y el 10.0 por ciento incorrecta, los porcentajes correspondientes en el postest han sido: 32.5, 55.0 y 10.0, por lo que en este caso se puede decir también que el uso del ordenador parece facilitar el empleo de estrategias más elaboradas.

Han desaparecido las estrategias parcialmente correctas como: Comparar posibilidades o razón de posibilidades, comparar dos o más distribuciones de frecuencias absolutas condicionadas con la marginal correspondiente, comparar una frecuencia absoluta de cada distribución condicionada con la marginal correspondiente y comparar o sumar las diagonales. Tampoco se han utilizado estrategias incorrectas como: Utilizar una sola casilla, utilizar una única distribución condicional, utilizar frecuencias relativas dobles respecto al total de la muestra u otro tipo de estrategias. Todas ellas utilizadas en el pretest y/o postest. Por ello se puede concluir que se aprecia cierta mejora en la resolución de problemas de tablas de contingencia rxc con ordenador por

las mismas razones argumentadas en el caso de la tabla 2x2.

Tabla 3.4.5.2 Frecuencia y porcentaje de las estrategias utilizadas en la resolución de problemas de tablas rxc con ordenador

Estrategia	Estrategia equivalente en el pretest	Estrategia equivalente en el postest	Frecuencia	Porcentaje
1	1		16	80.0
4	10		1	5.0
7		3	1	5.0
9	10		1	5.0
17	1*		1	5.0
(* más elaborada o con alguna variante)				

Estrategias empleadas en la nube de puntos (Problema 5)

En la tabla 3.4.5.3 se dan las frecuencias y porcentajes de las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución con ordenador del problema 5 correspondiente a una nube de puntos. En la segunda columna se dan las estrategias equivalentes utilizadas en la comparación de muestras en el pretest y postest y que se han descrito en los anexos 2.2.1 y 2.2.2. Los alumnos, en general han tomado este problema como comparación de muestras, por tanto las estrategias utilizadas se pueden equiparar con las correspondientes del pretest y postest. El 85 por ciento de las estrategias empleadas son correctas y el 15 por ciento parcialmente correctas. Las estrategias incorrectas del pretest y postest no aparecen con el uso del ordenador.

Además, han desaparecido la mayor parte de las estrategias empleadas en la comparación de muestras por estos mismos alumnos en el postest. Por ejemplo, el 55 por ciento de los alumnos comparaban caso a caso o hallaban la diferencia en el postest, mientras ahora ninguno usa esta estrategia, puesto que no es posible en el paquete suministrado, aunque si lo podrían haber hecho a lápiz y papel, pues los alumnos poseían todos los datos de los ficheros con los valores de las variables impresos por columnas. Vemos aquí las limitaciones que también impone el software estadístico (Li y Shen, 1992) que, en este caso, han hecho abandonar una estrategia intuitiva apropiada a los alumnos.

Aparecen también nuevas estrategias correctas (las 5, 12, 15) basadas en los estadísticos de orden, las cuales han sido posible por la disponibilidad del software, ya que los alumnos sólo las han empleado en esta última prueba.

Tabla 3.4.5.3 Frecuencia y porcentaje de las estrategias utilizadas en la resolución de problemas de nube de puntos con ordenador

Estrategia	Estrategia equivalente en comparación de muestras en el postest	Frecuencia	Porcentaje
5		2	10.0
6	1	4	20.0
7	3	9	45.0
8	1 y 13	2	10.0
12		1	5.0
15		1	5.0
19	1*	1	5.0
(* más elaborada o con alguna variante)			

Estrategias empleadas en la comparación de muestras

Por último, en la tabla 3.4.5.4 se dan las frecuencias y porcentajes de las estrategias utilizadas en los dos problemas (2 y 3) de comparación de muestras resueltos con ordenador. En las columnas segunda y tercera se dan las estrategias equivalentes utilizadas en el pretest y postest en las tablas de contingencia y en la comparación de muestras, que se explican con detalle en los anexos 2.2.1 y 2.2.2.

En el problema 2 correspondiente a la comparación de muestras independientes, el 60 por ciento de las estrategias empleadas son correctas, superior al postest que se obtuvo 30 por ciento, por lo que en este caso también parece que el uso del ordenador facilita la resolución de este tipo de problemas. Persisten estrategias erróneas como: basar el juicio en una sola distribución (2 casos) y utilizar frecuencias absolutas (2 casos).

En general han variado las frecuencias de empleo de las distintas estrategias, así desaparece la comparación global que se usó el 25 por ciento de las veces. También aparecen estrategias propias de la tabla de contingencia (9) y la 18 que no apareció en el postest.

Respecto a la comparación de muestras relacionadas (problema 3), podemos hacer comentarios similares. En particular la estrategia 10 (comparación global) que aparecía en la comparación de muestras con un 25 por ciento de frecuencia ha desaparecido.

En resumen, se confirma en el análisis realizado el cambio de estrategias en los juicios de asociación debido a la disponibilidad del ordenador en la resolución del problema. No sólo han aparecido nuevos modos de integrar la información que completan o sustituyen a la tabla de contingencia, sino que estos nuevos modos de integrar la información han producido un cambio en las estrategias. Se observa en todos los problemas una mayor frecuencia de estrategias correctas, una variación en el sentido de completar o refinar las

utilizadas sin ordenador y la aparición de estrategias nuevas basadas en la comparación de estadísticos de orden.

Tabla 3.4.5.4 Frecuencia y porcentaje de las estrategias utilizadas en los problemas de comparación de muestras con ordenador

Estrategia	Estrategia equivalente en el postest	Estrategia equivalente en el postest	Frecuencia y Porcent.	
			Problema 2	Problema 3
1	1	5	9(45.0)	6(30.0)
2	1*	5	2(10.0)	1(5.0)
3		13*	1(5.0)	3(15.0)
4	10		2(10.0)	
6		1		3(15.0)
8		1 y 13		3(15.0)
9	10		2(10.0)	1(5.0)
10		13 y 17	1(5.0)	
11		1*		1(5.0)
14		13*	2(10.0)	
16		13*		2(10.0)
18			1(5.0)	
(* más elaborada o con alguna variante)				

Todo ello ha influido en los juicios de asociación que han visto aumentado el porcentaje de respuestas correctas respecto a las obtenidas en el postest.

3.5. ESTUDIO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DE UNA PAREJA DE ALUMNOS

Como se ha señalado en la sección 1.2.3, son muchos los trabajos sobre el empleo del ordenador en la enseñanza de la Estadística. La cuestión de si emplear o no el ordenador en la enseñanza, cuando haya posibilidades para ello, parece fuera de debate, debido a su carácter de útil imprescindible en la resolución de problemas reales. Sin embargo, también hicimos una indicación de las muchas cuestiones pendientes de investigar sobre este empleo.

En esta sección se presenta un análisis cualitativo de la observación del proceso de aprendizaje de dos alumnos, cuya transcripción se presenta en el anexo 3.6. Este estudio tiene una doble finalidad:

1) Presentar la complejidad del significado de la idea de asociación e identificar una serie de componentes del mismo, cuya adquisición pudiera necesitar de actos de comprensión (Sierpinska, 1991) para la captación del concepto. Como hemos indicado en la sección 1.2 para esta autora, comprender el concepto sería equivalente al acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y de síntesis de significados relacionados con elementos particulares de la estructura del concepto que tendrían que ser también captados en "actos de comprensión".

Detrás de cada acto de comprensión puede presentarse un obstáculo (Brousseau, 1986b), cuya superación es necesaria para la adquisición de los conceptos. Estos obstáculos, se manifiestan por su carácter persistente y su resistencia a la superación. De este modo, al descubrir los actos de comprensión ligados a la asociación estadística, pensamos contribuir a eliminar la ilusión de transparencia y sencillez aparente que presenta este concepto matemático.

2) Ilustrar, con el caso de estos alumnos, el proceso de aprendizaje de un concepto matemático. Este aprendizaje es un camino largo y costoso, lleno de puntos difíciles que deben ser superados. *"La comprensión se adquiere lentamente, junto con la acumulación de las propiedades de los objetos, de ejemplos y desarrollos de conceptos referentes a las relaciones entre clases de conceptos. Al principio los conceptos son, por lo general, sólo parcialmente definidos y relacionados débilmente con otra información almacenada en la memoria"* (Sierpinska, 1991, pg. 25). Este aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas; pero no problemas aislados, sino de una serie de actividades secuenciadas encaminadas a mostrar los diferentes aspectos del significado de un concepto lo que lleva a la adquisición gradual del mismo.

Para Brousseau (1986b) las concepciones de los estudiantes son el resultado del intercambio con las situaciones problema a las que se enfrenta, en el curso de las cuales sus conocimientos anteriores se modifican, completan o rechazan. Sin embargo, cuando en alguna de estas actividades no se alcanza el objetivo previsto, el resultado final es que la relación personal (Chevallard, 1989) de los alumnos, respecto a los objetos o nociones matemáticas, presentará sesgos y errores o vacíos conceptuales, habiéndose logrado tan sólo una parte del aprendizaje pretendido.

También hacemos notar las dificultades implicadas por la propia herramienta informática que, con frecuencia, no son suficientemente previstas. De

este modo, mientras que, por un lado, el ordenador, aparte de su utilidad como instrumento de cálculo, es un recurso didáctico importante, por otro contribuye también a añadir nuevas dificultades al aprendizaje. Estas dificultades no pueden ser observadas por el profesor, atento a un grupo numeroso de alumnos. Sólo la observación detallada con propósito de investigación puede hacernos conscientes de ellas. *"Podemos decir que el objetivo del investigador es congelar las actividades cotidianas, así como las actividades experimentales, para poder examinarlas sistemáticamente. A tal efecto el investigador selecciona un instrumento para obtener una representación de la realidad ... un investigador debe elegir, construir o adaptar un instrumento, un método, un proceso y un programa de observación que sean apropiados a la pregunta formulada, al contexto que rodea al fenómeno y a la naturaleza de ese fenómeno"* (Evertson, 1989, pg. 319).

Fox (1987) diferencia cuatro elementos en el método de observación que se deben tener en cuenta a la hora de describir una investigación:

- 1) La especificación del contenido y conclusiones que esperan alcanzarse de la observación. Esto implica la traducción de la pregunta e hipótesis de investigación en los tipos de datos que es necesario recoger, es decir, de la relación de los aspectos que se desea observar y registrar.
- 2) Elaboración de un guión de observación. Este instrumento llega a ser la formulación operativa que hace el investigador tanto de lo que se espera examinar como de lo que se espera de la misma observación.
- 3) Los observadores, su entrenamiento y procedencia.
- 4) La interacción observador - observado. En primer lugar diferencia entre observación directa e indirecta, si se observa la situación en el momento y lugar que ocurre o indirectamente, a través de una grabación en vídeo o transmisión por televisión. La primera presenta la ventaja de la capacidad del observador para reaccionar y descubrir los sentimientos y el contexto socioemocional que no puede ser sustituido por un medio mecánico. La segunda permite determinar la fiabilidad de las observaciones y estudiar repetidamente los detalles concretos de interés.

Otra diferenciación es si la observación es conocida o desconocida. Aunque el riesgo de su planificación excesiva, que supone la observación conocida, está siempre implícito, puede minimizarse, si el observador permanece en la situación de observación durante un periodo de tiempo suficientemente largo.

La ultima diferenciación es la observación externa y participante, que se refiere al papel en el cual el sujeto ve al observador. Un observador externo se presenta como una persona que entra en la situación de observación como un extraño y, aunque esté físicamente presente para observar, queda fuera de la situación en cuanto a su comportamiento. El caso contrario, en el que el observador participa en la situación es la observación participante.

En nuestro caso hemos especificado ya el objetivo y conclusiones que se esperaban alcanzar con la observación. Esta se ha realizado durante las seis sesiones de prácticas con ordenador. Los sujetos observados han sido una misma pareja de alumnos, elegidos entre los que se han prestado voluntariamente a ser observados, por tratarse de sujetos comunicativos y con un rendimiento medio alto en Matemáticas.

El proceso de toma de datos se realizó mediante cuatro fuentes de

observación. En primer lugar, mediante la interacción alumno - ordenador; todas las órdenes, datos introducidos y respuestas a las opciones del programa quedaron grabadas, con lo que se dispone de seis registros secuenciales aditivos en los que se puede inferir una traza del procedimiento empleado por estos alumnos en la resolución de los problemas propuestos en las clases prácticas.

En segundo lugar, se dispone de los cuadernillos de prácticas de estos dos alumnos (según modelo mostrado en el anexo 3.3) en los que han presentado por escrito la solución obtenida en los diversos problemas propuestos, así como la argumentación que han considerado conveniente para justificar estas soluciones.

En tercer lugar se dispuso de una grabadora de cassette en la que fue registrada la conversación que estos dos alumnos mantuvieron entre sí y ocasionalmente con el profesor. Así, mediante el registro de la interacción del alumno con el ordenador se dispone de una traza de la fase de acción en la resolución de un problema. Los debates de los alumnos y su discusión con el profesor como medio de solventar sus dudas nos permite observar los procesos de validación e institucionalización, mientras que sus soluciones y argumentaciones por escrito nos proporciona la fase de formulación de estas soluciones.

Por último, el investigador estuvo presente como observador junto a la pareja de alumnos y recogió, empleando el formulario de observación que aparece en el anexo 3.5, datos sobre los tiempos empleados por los alumnos en la resolución de los problemas, sobre la actividad desarrollada por los mismos y el profesor y sobre cuantos aspectos pudieran contribuir a la mejor interpretación de los datos tomados con los otros tres instrumentos.

Con los datos obtenidos de estas diversas fuentes se ha preparado la descripción del trabajo de los alumnos durante las sesiones prácticas que se presenta en el anexo 3.6.

En consecuencia, nos encontramos con un proceso de observación mixta entre las modalidades de directa e indirecta. Respecto al observador, aunque no participa directamente en el debate no debe ser considerado como observador externo, ya que era conocido con anterioridad por los alumnos de quienes había sido profesor en otras asignaturas y en el curso anterior.

A continuación describimos los resultados efectuados de los datos obtenidos en el proceso de observación.

3.5.1. CONCEPCIONES INICIALES DE LOS ALUMNOS PARTICIPANTES

Se trata de dos de los alumnos participantes en el experimento de enseñanza, ninguno de los cuales había estudiado Estadística previamente ni fue capaz de dar una definición o ejemplo de la idea de asociación: en adelante se denominaran E (de 20 años) y P (de 21) que son las iniciales de sus nombres de pila.

E ha interpretado correctamente las frecuencias dobles, marginales y condicionales de la tabla de contingencia, aunque invierte numerador y denominador al calcular la proporción de fumadores mostrando confusión en el concepto de proporción. Interpreta también correctamente la nube de puntos.

En las tablas 2x2 no detecta el caso de independencia, debido a que emplea una sola distribución condicional (la de personas con trastornos) en el

ítem D. Detecta la dependencia inversa en el ítem E comparando las dos distribuciones de frecuencias relativas condicionales. Asimismo detecta la dependencia directa en el ítem F, comparando razón de posibilidades.

En la tabla 2x3 el alumno aprecia claramente la relación directa entre las variables, efectuando la reducción de la tabla a otra 2x2 y comparando la diferencia entre aprobados y suspensos en ambas partes. En la tabla 3x3 detecta la no asociación, comparando las tres distribuciones de frecuencias condicionales.

Observamos en este alumno unas concepciones primarias bastante correctas referidas a la asociación entre variables cualitativas. En todos los casos, salvo en el ítem D emplea las diferentes distribuciones de frecuencias condicionales aunque en el caso de la tabla 2x3 ha reducido la dimensión. Creemos, en consecuencia, que el empleo de una sola distribución condicional en el ítem D ha sido debido a que en este ítem hay desacuerdo entre las teorías previas y la independencia de los datos.

En la nube de puntos, ítems I, J y K, detecta la ausencia de asociación en el primero, aunque argumenta que ello es debido a la presencia de otras posibles variables y no se basa en los datos. En el ítem J detecta la asociación inversa, efectuando un análisis global cualitativo del decrecimiento de la gráfica. En el ítem K detecta la asociación directa, apreciando que la mayoría de los puntos se concentran en la bisectriz del primer cuadrante.

Al comparar las muestras relacionadas (ítem L) detecta la asociación a partir de una comparación global cualitativa, señalando los casos excepcionales. Al comparar las muestras independientes (ítem M) detecta la dependencia, comparando la distribución de frecuencias en ambas muestras.

El alumno P, por su parte, interpreta correctamente la tabla, salvo la proporción pedida.

En las tablas 2x2 no es capaz de detectar el caso de independencia, creyendo que existe una relación directa, aunque compara razón de posibilidades; el caso de dependencia inversa lo da como de no dependencia, comparando distribuciones condicionales. Detecta la dependencia directa, comparando las frecuencias de un mismo valor de la variable dependiente en las dos distribuciones condicionales.

En la tabla 2x3, detecta la existencia de la asociación, al observar el crecimiento de una de las variables en función de la otra. En la tabla 3x3 su respuesta es confusa, porque, aunque en principio dice que hay relación, de su argumentación se deduce lo contrario. Va comparando el valor de máxima frecuencia en cada distribución condicional.

En la nube de puntos, ítems I, J y K, detecta la inexistencia de asociación en el primero, aunque argumenta que ello es debido a que hay puntos diferentes a los cuales corresponde la misma imagen, manifestando de este modo una concepción funcional o determinista de la dependencia entre variables cuantitativas, ya que, al ser la intensidad de la asociación muy fuerte en el ítem J esta concepción no choca con aceptar que en este caso existe independencia. En el ítem J detecta la existencia de asociación inversa a partir de la observación de la gráfica. En el ítem K indica que no hay asociación, debido a que no aprecia las semejanzas o diferencias en la gráfica. Esta respuesta es un tanto confusa, aunque puede referirse a la gran dispersión existente en esta nube de puntos.

No detecta la asociación en las muestras relacionadas, porque espera que la presión suba o baje en todos los casos, manifestando así, de nuevo su concepción funcional o determinista de la dependencia, ya que espera una relación numérica constante entre los valores de la presión antes y después del tratamiento. Si detecta la asociación en el caso de muestras independientes comparando las distribuciones de frecuencias.

3.5.2. LA ADQUISICION GRADUAL DE LA IDEA DE ASOCIACION: ACTOS DE COMPRENSION DEL CONCEPTO

Al estudiar detalladamente la observación efectuada de los alumnos, se pueden identificar una serie de dificultades que se repiten una y otra vez a lo largo de las sesiones de prácticas, relacionadas con la idea de asociación. Algunas de ellas son finalmente resueltas, bien por los mismos alumnos, bien con ayuda del profesor, aunque a veces surgen de nuevo esporádicamente, manifestando la resistencia a la superación. Pero como indica Sierpinska (1991, pg. 15), *"la rapidez de la comprensión no es una propiedad discriminativa. Lo que cuenta es la calidad o "nivel" de la comprensión. Este nivel cambia con el incremento del conocimiento, la complejidad y riqueza de la estructura. Cuando nos preocupamos por el nivel variable de la comprensión, pensamos en la comprensión como un proceso y no como un acto"*. Es este proceso de adquisición de los distintos actos de comprensión identificados lo que queremos describir en esta sección.

Otras veces, las dificultades han quedado finalmente sin resolver a lo largo del proceso, bien a pesar de la ayuda del profesor, bien porque éste no haya apreciado la dificultad de los alumnos. A continuación se presenta un listado de estos aspectos, tras los cuales se identifican posibles "actos de comprensión" de la idea de asociación.

- 1) *Para poder comparar dos o mas muestras, con objeto de estudiar la posible relación entre dos variables, la comparación ha de efectuarse en términos de frecuencias relativas.*

Los alumnos comienzan comparando frecuencias absolutas de la distribución de una variable en dos muestras (problema 1.5, del anexo 3.3). Este error es advertido por el profesor al final de la clase, en el proceso de institucionalización. Se presenta de nuevo en el problema 1.6, del anexo 3.3. En el problema 1.7 utilizan las frecuencias absolutas de las dos muestras, realizando comparaciones por diferencias en cada uno de los valores de la variable. De nuevo se comparan frecuencias absolutas en el ejercicio 2.2, del anexo 3.3, aunque ahora se fijan sólo en cuales son los intervalos más frecuentes en ambas distribuciones, concluyendo que no existen diferencias entre las distribuciones, a pesar de que el recorrido es bastante diferente. Al comienzo del ejercicio 5.1, del anexo 3.3, se comparan sólo frecuencias condicionales absolutas, aunque finalizan haciendo la comparación en porcentajes. En el resto de las prácticas la dificultad parece superada.

- 2) *La posible existencia o no de diferencias en la distribución de una variable entre dos o más muestras se deduce a partir de la comparación de toda la distribución de la variable en cada una de las muestras y no de una parte de la misma.*

Este acto de comprensión se relaciona con la concepción localista de la asociación. Como se ha indicado en las conclusiones del capítulo 2, la existencia o no de asociación entre las variables debe verificarse globalmente en el conjunto de datos. No basta con la existencia local de pares de valores

relacionados para que haya asociación.

Los estudiantes, sin embargo, comienzan con la comparación de valores aislados, al estudiar las dos muestras. En el problema 1.6, se comparan sólo los valores de máxima y mínima frecuencia en ambos grupos; aunque estas diferencias señalan ya la existencia de posible asociación es insuficiente para cuantificar la magnitud de la misma. En el problema 1.7, espontáneamente corrigen esta estrategia, para utilizar todos los valores. En el ejercicio 2.2, emplean para la comparación de dos distribuciones de frecuencias agrupadas sólo los intervalos en que se presenta mayor frecuencia, aunque el profesor les sugiere que deberían emplear todos los intervalos. En el ejercicio 3.4, del anexo 3.3, sólo se utiliza la comparación de medianas, posiblemente influenciados por el enunciado. Posteriormente la dificultad ha sido superada.

- 3) *A partir de una misma frecuencia absoluta pueden deducirse dos frecuencias relativas condicionales diferentes, según la variable que se emplee como condición. El papel de condición y condicionado en la frecuencia relativa condicional no es intercambiable.*

Ya hemos indicado que numerosos autores como Falk (1986) señalan la dificultad de interpretación de una probabilidad condicional porque los alumnos no diferencian a veces el papel jugado por la condición y el condicionado, con lo que pueden confundir $P(A|B)$ con $P(B|A)$ o no llegar a discriminarlas. Vimos que un número importante de alumnos tenían esta confusión en el estudio de las concepciones previas y que ha seguido manifestándose al finalizar la instrucción.

Al comienzo del estudio de las tablas de contingencia aparece en estos alumnos la confusión de las dos posibles frecuencias relativas condicionales que, en una tabla de contingencia se deducen de una misma frecuencia absoluta doble. En el ejercicio 5.1, los alumnos interpretan incorrectamente los porcentajes de la frecuencia relativa de la distribución condicional de personas que "practica deporte", invirtiendo la condición y el condicionado. Por ejemplo, de las personas que practican deportes el 88.5 por ciento son varones y ellos escriben en su respuesta "el 88.5 % de los hombres practica deporte". Sin embargo, esta dificultad es superada aparentemente y no vuelve a producirse.

- 4) *Dos variables son independientes si la distribución condicional de una de ellas en función de un valor de la otra variable no depende del valor dado.*

En la actividad 5.5, del anexo 3.3, se asocia, finalmente, el hecho de que las distribuciones condicionales mantengan fijas o casi fijas las frecuencias relativas, al variar el valor de la variable que actúa como condición con la independencia entre las variables en una tabla de contingencia, a pesar de que los tamaños de muestras sean diferentes. Aunque en el problema 5.6, aparece de nuevo la duda sobre si la diferencia en los tamaños de las muestras puede influir o no en la variación observada, se finaliza decidiendo que no influye y resolviendo correctamente el ejercicio. En el ejercicio 5.7 ya no aparece la duda.

- 5) *La decisión a partir de un estudio descriptivo, sobre si existe o no dependencia entre dos variables, cuando se observan pequeñas diferencias en los estadísticos de las distribuciones condicionadas, es hasta cierto punto subjetiva. Es difícil que se dé la independencia total;*

el problema de la asociación es una cuestión de grado, más bien que de existencia.

Como se sabe, el hecho de que una diferencia observada sea o no significativa depende de cuatro factores: la magnitud de la diferencia, el tamaño de la muestra, la variabilidad de los datos y el nivel de significación elegido. En un curso elemental no se poseen aún las herramientas conceptuales que proporciona el contraste de hipótesis, por los que, el juicio sobre la posible asociación entre variables tiene inevitablemente un cierto carácter subjetivo. No obstante, cuando, como en el caso que se presenta, las diferencias observadas son mínimas, estas diferencias son atribuibles al azar y no a la dependencia entre las variables. En el problema 5.3, se vuelve a repetir esta duda, que se resuelve indicando en que casos aparece o no aparece diferencia entre las frecuencias en los dos grupos. Al no haber más ejercicios donde ocurra este caso, no vuelve a producirse.

- 6) *En la determinación de la asociación entre dos variables, éstas juegan un papel simétrico. Por el contrario, en el estudio de la regresión, las variables desempeñan un papel asimétrico. Hay dos rectas de regresión diferentes, según cual de las dos variables actúe como variable independiente.*

Como se ha señalado en la sección 1.1.4, la existencia de una asociación entre variables no es siempre indicativa de una relación causa-efecto, ni siquiera en sentido amplio en que la causalidad fuese de tipo probabilístico y un mismo efecto tuviese además más de una causa. Diversos tipos de situaciones pueden dar lugar a la existencia de asociación entre las variables, como puede ser la dependencia de una causa común, la interdependencia, la concordancia o la correlación espúrea (Barbancho, 1973). En el modelo de regresión, sin embargo, se efectúa una división clara entre variables independientes o explicativas y variables dependientes o explicadas. Este hecho ha causado una serie de dificultades a los alumnos observados, dificultad que, sin duda se agrava debido a que, en el estudio de la correlación no se efectúa esta distinción, jugando las variables un papel simétrico (Afifi y Azen, 1977).

Así en problema 6.1 se estudia la relación entre dos variables interdependientes y los alumnos se preguntan cual variable debe tomarse como independiente. Se añade también la dificultad semántica del término independiente, que significa "no depende de". Está claro que si existe correlación entre dos variables, la dependencia (en sentido estadístico) de ambas es mutua (Rios, 1967), por lo que no puede decirse que una de ellas sea independiente de otra y ésta a su vez dependa de la primera. Confrey (1990) subraya el papel del lenguaje en la construcción de las concepciones erróneas. Los significados que las palabras tienen en la vida cotidiana no pueden ser suprimidos en la enseñanza. Los estudiantes adquieren durante la instrucción un segundo dominio de conocimientos radicalmente diferentes del primero, pero que coexisten con él y a veces se presenta la dificultad de cual de estos significados es el pertinente en una situación. Los alumnos solucionan el problema tomando como variable independiente una al azar, lo cual estadísticamente es correcto en este caso; puesto que es un caso de interdependencia. Sin embargo, esta decisión afectará a la recta de regresión calculada; pues, en general, existen dos rectas de regresión distintas, según la variable que se considere como independiente.

De nuevo en el problema 6.2 se plantea, al estudiar la relación entre peso y perímetro del cuello, cual es la variable independiente; E argumenta que "el perímetro del cuello es independiente del peso"; a partir de este

comentario se produce un debate, en el cual, finalmente eligen correctamente la variable independiente pero, desafortunadamente, al no haber comentado con el profesor su problema, siguen con la duda conceptual sobre el significado del término "independiente" en este contexto. En la actividad 6.3, sin embargo, se dan cuenta de que se trata de relacionar entre sí dos variables dependientes de una tercera, por lo que deciden que cualquiera de ellas puede actuar como variable independiente.

En el ejercicio 6.4 los alumnos opinan que aquí si tiene sentido de hablar de variable independiente, ya que peso y número de calzado son independientes; se observa de nuevo la confusión producida por el doble significado de una misma palabra, incluso desde el punto de vista matemático; en palabras de Cauty (1984) se trataría de un fenómeno de homonimia. Posteriormente vuelve a surgir la discusión sobre si la altura o el peso son la variable independiente, por motivos similares.

En los problemas 6.5, 6.6 y 6.7, parece que, finalmente, la dificultad se ha superado. No obstante, no queda claro si los alumnos han captado el significado de la variable independiente en este contexto, ya que la discusión continúa aún en los ejercicios 6.8 y 6.9. Tampoco aparece por ningún lado la referencia a la existencia de dos rectas distintas de regresión.

7) Una correlación positiva indica dependencia directa entre las variables

En la actividad 6.1, aunque los alumnos interpretan correctamente el hecho de que la asociación es fuerte, debido al alto valor del coeficiente, no llegan a estudiar si el tipo de dependencia es directo o inverso. En el ejercicio 6.2, aunque llegan a indicar que "al aumentar una variable la otra aumenta" no identifican este hecho con la idea de relación directa entre las variables. Nunca llegan a emplear la idea de "relación o dependencia directa".

8) Una correlación negativa indica dependencia inversa entre las variables.

Interpretación de una correlación negativa. En el problema 6.5, los alumnos se sorprenden al encontrar por primera vez un coeficiente de correlación negativo, hasta el punto de preguntar al profesor si ello es posible. Asimismo, aparece la duda en la comparación de dos coeficientes de correlación negativos, ya que, en este caso, un número menor corresponde a mayor intensidad en la asociación, consideramos que ello se debe al fenómeno que ya hemos señalado de inversión de la relación de orden (González y cols., 1990). En este caso los alumnos han reconocido que un número negativo de mayor valor absoluto es menor que otro número negativo de menor valor absoluto. En el contexto de la correlación, sin embargo, el primero es "mayor", pues la intensidad de la correlación se expresa por el valor absoluto del coeficiente (Liebetrau, 1983). Así, el conocimiento adquirido sobre el orden de los números negativos dificulta ahora la comprensión del signo negativo del coeficiente de correlación; se convierte en obstáculo epistemológico para dicha comprensión.

En realidad aunque, ayudados a veces por el profesor han observado que el signo negativo del coeficiente de correlación se corresponde con una pendiente negativa en la recta de regresión y que al crecer los valores de x disminuyen los de y , no llegan a utilizar el término "dependencia inversa" en ninguna de las actividades 6.6 y 6.7. De este modo, parece que el aprendizaje se finaliza

sin que hayan llegado a diferenciar conceptualmente los dos tipos de relación.

- 9) *El valor absoluto del coeficiente de correlación es indicativo de la intensidad de la asociación.*

Aunque en las primeras actividades los alumnos asocian un alto valor del coeficiente con una dependencia fuerte, en la actividad 6.4 no identifican, en principio, la idea de "intensidad de la asociación" con el coeficiente. Relacionan la magnitud de éste con la mayor o menor dispersión de la nube de puntos. El hecho de que para ciertos valores de la x haya muchos valores diferentes de y les choca con la idea de que la asociación sea intensa. Terminan dando una respuesta correcta, aunque sin gran convencimiento.

3.5.3. DIFICULTADES INDUCIDAS POR EL EMPLEO DE LA HERRAMIENTA INFORMATICA

Anteriormente se ha señalado que otro punto de interés es indicar las dificultades implicadas por el empleo del ordenador. En este caso, como se puede observar, estas dificultades provienen con frecuencia del hecho de que el alumno debe realizar ciertos pasos previos a la solución del problema de asociación. Como ya señalabamos en nuestra Memoria de Tercer Ciclo (Estepa, 1990), aunque el ordenador es hoy en día un recurso imprescindible en el uso y aprendizaje de la Estadística, existe la posibilidad de que las dificultades derivadas del uso del ordenador sean grandes. En este caso el alumno utilizaría una proporción apreciable de su tiempo en aprender el uso del software produciéndose el fenómeno que Brousseau (1986a) describe como "deslizamiento metacognitivo".

Mientras que en la mayor parte de las investigaciones citadas en la sección 1.3, el alumno cuenta con la información ya organizada y resumida en una tabla de contingencia, aquí la tarea es bastante más compleja. Se trata de un problema en el cual, además de la información necesaria para solucionarlo, el alumno cuenta con mucha más información, representada por las múltiples variables presentes en el fichero. Además esta información no está sintetizada; es preciso seleccionar solamente los datos pertinentes a la pregunta y organizarlos en forma de tabla o gráfico. A continuación se presentan las dificultades que este proceso ha producido.

- 1) *Confusión de una variable con otra diferente:*

Aparece en el problema 1.6, del anexo 3.3, debido a que los alumnos suponen que el carácter impulsivo se manifiesta con el número de errores, e identifican estas dos variables. Probablemente, el contexto de este fichero, introducido con la idea de mostrar a los alumnos las diferentes aplicaciones de la estadística, no ha llegado a ser suficientemente comprendido. Lo mismo sucede en el ejercicio 1.7.

- 2) *Falta de concienciación en la necesidad de seleccionar una parte del fichero, debido a que intervienen dos variables diferentes en el análisis necesario para responder a la pregunta.*

Aparece en el ejercicio 1.3, que es el primero relacionado con la idea de asociación entre variables. Se repite nuevamente en el problema 1.4, aunque los alumnos logran superarlo por sí mismos.

- 3) *Dificultad en decidir cual es la variable que se debe emplear como variable de selección, esto es, de diferenciar entre variable que actúa como condición y variable condicionada en una distribución de frecuencias condicionadas.*

Esta dificultad, ligada también a la confusión de condicionales descrita por Falk (1986), aparece en el problema 1.3, agravada por el hecho de que en el fichero de datos se han empleado códigos numéricos para las modalidades de las variables cualitativas, por lo que un mismo código, tiene significado distinto, según en qué variable se emplee. En esta práctica, sólo la ayuda del profesor consigue resolver el conflicto. Se repite en el ejercicio 4.1, aunque se rectifica espontáneamente. Vuelve a producirse en el problema 5.8, cuando se realiza por primera vez un estudio en el que intervienen tres variables, lo que es comprensible, debido a la complejidad relativamente mayor de la tarea.

- 4) *Creencia en la necesidad de seleccionar registros, cuando no es necesario en la actividad pedida.*

La dificultad que origina la posibilidad de selección de parte de un fichero se manifiesta también en el hecho de que, a veces, los alumnos utilizan la opción de selección sin necesidad. Aparece en el problema 2.1, en la que los alumnos usan la opción de selección, tomando como variable de selección la variable a analizar y como intervalo de selección el rango de variación de esta variable. El profesor les indica que no era necesario emplear esta opción. Se repite este error en el ejercicio 2.4, por dos veces; el profesor vuelve a indicarles su error. Aparece de nuevo en el problema 3.2; y el profesor les ayuda de nuevo. Se repite en el problema 4.2, aunque se corrige espontáneamente.

- 5) *Dificultad en la interpretación de la selección de valores de la variable independiente dentro de un intervalo, una vez realizada la selección*

En el problema 1.5, se debe dividir el fichero de datos en dos partes: aquellos alumnos con menos de 3 errores en palabras y el resto. Se pide comparar en estas dos muestras el número de errores en comprensión lectora; una vez seleccionadas las dos muestras, sólo utilizan en cada muestra los intervalos de la variable dependiente que coinciden con los tomados en la independiente; es un efecto similar al que se daría en una tabla 2x2 al comparar solamente los elementos a y d de la diagonal principal, desechariendo el resto.

En el ejercicio 1.6, en lugar de seleccionar un sólo valor de la variable sexo, para estudiar las diferencias entre varones y hembras, se seleccionan los valores 1 y 2. No queda claro si ha sido un error involuntario o una mala interpretación de la palabra máximo. En los ejercicios 1.7 y 1.8 esta dificultad se ha superado.

- 6) *Creencia en que no es posible utilizar como variable de selección la variable a analizar, con objeto, por ejemplo, de eliminar los valores atípicos.*

Se presenta en el ejercicio 3.3 y es resuelto con ayuda del profesor. Aparece de nuevo en el problema 4.3 y preguntan al profesor con objeto de resolver la cuestión, quedando resuelta.

- 7) *No reconocimiento de la notación decimal empleada por el ordenador.*

Se produce en el ejercicio 4.1; y es consultado su significado al profesor, tanto para la notación .102768, como para la notación exponencial 8.852219E -02, quedando al final debidamente aclarada.

3.5.4. DIFICULTADES RELACIONADAS CON OTROS CONCEPTOS ESTADISTICOS

Además de las dificultades anteriores, se observa en el proceso otras relativas a conceptos estadísticos elementales, que ya se suponían adquiridos durante el bachillerato. Por el interés que tiene mostrar también la dificultad de conceptos aparentemente sencillos, se describen a continuación.

1) *Los conceptos de proporción, razón y porcentaje.*

Esta es una dificultad ya detectada en las diversas pruebas realizadas a los alumnos, descritas en el capítulo 2 y en las secciones 3.1 y 3.3. En el ejercicio 1.3a), del anexo 3.3, se observa la confusión entre proporción y porcentaje, que se repite posteriormente en el problema 1.3b); asimismo, en este apartado se observa posteriormente la confusión entre porcentaje y razón. En el ejercicio 1.8, continúa la identificación, posiblemente esta confusión no ha sido suficientemente aclarada en las clases, lo que explica la permanencia de esta confusión en los alumnos al finalizar el periodo de enseñanza. Aparece de nuevo en los problemas 5.1 y 5.2.

2) *La interpretación de las frecuencias acumuladas.*

La idea de frecuencia acumulada, en estrecha relación con la de estadístico de orden, resulta difícil a los alumnos, como ya se puso de manifiesto en Estepa (1990). Esta dificultad ha surgido de nuevo en nuestro experimento de enseñanza.

En el ejercicio 1.4a) se observa que los alumnos no utilizan directamente la tabla de frecuencias relativas acumuladas proporcionada por el programa, para hallar la frecuencia de niños con 10 o más errores; en lugar de ello suman las frecuencias de cada uno de los valores incluidos en esta desigualdad. Lo mismo ocurre en el comienzo de solución del ejercicio 2.7 a); aunque uno de los compañeros le indica al otro que se puede obtener la solución por diferencia de la frecuencia acumulada respecto al total; sin embargo, el primero no cree esta solución hasta que comprueba que los resultados son equivalentes por ambos procedimientos.

En el primer intento de solución del ejercicio 2.4, los alumnos no relacionan la tabla de frecuencias acumuladas con la pregunta que les pide determinar el porcentaje de casos menor que un valor dado, aunque, una vez releído el enunciado finalizan el ejercicio con éxito.

En el ejercicio 3.2 los alumnos piensan que la frecuencia acumulada crece en forma lineal no sólo dentro de los respectivos intervalos sino en todo el rango de variación de la variable, lo que les lleva a intentar la solución a la pregunta pedida mediante el empleo de una regla de tres. Aquí de nuevo aparece el efecto de una convención que se efectúa en Estadística y que no siempre es suficientemente explicitada al alumno. Puesto que no conocemos la forma de la función de distribución teórica, utilizamos como aproximación para la distribución empírica una función lineal por intervalos. Puesto que los intervalos son en si mismos arbitrarios, se justifica la confusión de los alumnos.

3) *Interpretación incorrecta de desigualdades*

Cambio de menor por menor o igual en el ejercicio 1.5; El segundo día de la práctica se había superado este error, que también fue señalado en Estepa (1990).

4) *Elección de una amplitud y extremo inicial adecuados para la agrupación de los datos en intervalos.*

Aunque en el ejercicio 2.1, los alumnos deciden que la amplitud más adecuada es 15, en la práctica siguiente, emplean una amplitud 6 para comparar la superficie celular en dos partes diferentes del fichero. De este modo, se observa una inconsistencia en lo que declaran en un ejercicio y lo que emplean en el siguiente. Otras veces, como en los ejercicios 2.4 y 2.7, la no previsión de los extremos que se obtendrán a partir de un punto inicial y una amplitud dada obliga a repetir el primer histograma obtenido. En el problema 2.7b) aunque se elige adecuadamente la amplitud, el extremo inicial elegido obliga a repetir el histograma. En el ejercicio 5.2 los alumnos han de repetir por este motivo la tabla de contingencia, una vez obtenida.

5) *El intervalo modal*

Puesto que los intervalos de clase se eligen a criterio del que realiza la agrupación y no hay una regla fija para la elección de los mismos, el intervalo modal dependerá de la agrupación elegida; se presenta aquí un ejemplo claro de que, en algunas ocasiones no existe una solución única "correcta" de los problemas estadísticos (Chatfield, 1988); lo cual añade una dificultad intrínseca a los mismos, pues la costumbre habitual del contrato didáctico (Brousseau, 1986a) es que sólo existe una "buena solución". En el ejercicio 2.7 los alumnos, refiriéndose al intervalo modal señalan: "es 170-175, pero lo mismo podría servir 170-180".

6) *Interpretación de funciones de salto con discontinuidad.*

Estas funciones se emplean en la representación gráfica de frecuencias acumuladas de variables discretas y aparece en el cálculo de percentiles y rangos de percentiles, si no se agrupan los datos; se manifiesta esta dificultad en el ejercicio 3.1, lo mismo que ocurrió en Estepa (1990).

7) *Idea de "valores centrales de una distribución".*

Se manifiesta en el ejercicio 3.1; y es resuelta con ayuda del profesor.

8) *Confusión entre percentil y rango de percentil.*

Aparece en el ejercicio 3.2 en donde, para calcular el valor de la variable correspondiente al 10 por ciento inferior de casos, introducen el 10 como valor de la variable. Resuelven esta confusión con ayuda del profesor.

9) *Representatividad de la media y mediana para un conjunto de datos dados.*

Aparece en el problema 4.3d) cuando se pregunta cual medida de valor central es más adecuada, en un conjunto de datos marcadamente asimétrico. Los alumnos no son capaces de hallar la respuesta hasta que ésta les es sugerida por el profesor. La discriminación de este aspecto de los valores centrales es estudiada por Russel y Mokros (1991) quienes lo consideran un aspecto esencial en la comprensión de los mismos.

3.5.5. DIFICULTADES DE TIPO LINGÜISTICO

Por último, se considera también de interés mostrar las dificultades provocadas por el lenguaje empleado en los problemas propuestos, que, en ocasiones, ha inducido al alumno a errores sobre la solución pedida.

1) *Confusión del término "número más frecuente de errores", que se refiere a la moda:*

En el problema 1.4c) se interpreta que ha de ser un número entero, excluyendo al cero que es la moda en esta distribución. Puesto que la variable considerada es "número de errores", se supone que se refiere sólo a los casos en que haya error; el valor cero no se considera un número, puesto que en este caso no hay errores. Se repite esta exclusión del cero en el segundo intento de solucionar el ejercicio 1.5 (segundo día de la práctica).

2) *Confusión de un término lingüístico con el nombre de una variable:*

En el problema 1.8 la frase "con el resto del grupo" ha hecho suponer que la variable que debe tomarse para selección es la variables "grupo". Este error es advertido con la ayuda del profesor.

3) *Incomprensión de la solución pedida en un problema:*

En el ejercicio 2.3 se pide al alumno que observe varios histogramas de una misma distribución, reduciendo progresivamente la amplitud de los intervalos y dibuje la forma aproximada que el histograma tomaría de seguir el proceso indefinidamente. Se pretende introducir la idea de función de densidad. Se observa por el diálogo de los alumnos entre sí y con el profesor, la incomprensión total de lo que se espera como respuesta. Sólo con la ayuda del profesor producen finalmente la respuesta, apreciándose aquí un ejemplo del denominado "efecto Jourdain" (Brousseau, 1986a). El mismo fenómeno se observa en el último apartado del ejercicio 4.4, cuando se pregunta a los alumnos cual estadístico es más adecuado como medida de tendencia central. De nuevo se repite en el problema 6.4, aunque ahora provocado por el profesor, que inicia una discusión con los alumnos sugiriéndoles que deben dar su respuesta en términos del coeficiente de correlación, aunque ya los alumnos estaban vislumbrando una contestación correcta a la pregunta, basándose en la dispersión y forma de la nube de puntos.

3.5.6. RESULTADOS DEL POSTEST EN LOS ALUMNOS OBSERVADOS

En el postest, el alumno E no define ni da un ejemplo de dependencia funcional ni aleatoriedad entre variables, interpretando correctamente todos los datos de la tabla; aunque en lugar de proporción expresa un porcentaje, manifestando que continua con la confusión entre los dos conceptos. También interpreta correctamente la nube de puntos.

En las tablas 2x2 interpreta la dependencia inversa del ítem D como de no dependencia entre las variables, a pesar de comparar las distribuciones condicionales. En el ítem E, sin embargo, interpreta correctamente la dependencia inversa, usando la misma estrategia. En este segundo caso, los datos están mucho más claros, ya que la mayor frecuencia aparece en la diagonal y la intensidad de la asociación es mucho mayor. Además no se contradicen las expectativas previas del alumno. En este caso, se ha resuelto

correctamente el caso de independencia, utilizando la comparación de distribuciones condicionales de frecuencias relativas. Consideramos, en consecuencia, que el fallo en el ítem E no es debido a la concepción unidireccional de la asociación, sino a la fuerza con que el alumno mantiene sus teorías. Esta persistencia es explicada en las investigaciones psicológicas. Para Alloy y Tabachnik (1984) sólo una cantidad muy alta de datos que contradigan las teorías previas llevaría a que los juicios fuesen objetivos. Para Pérez Echeverría (1990) las teorías previas impiden que las personas perciban de modo adecuado la correlación. Estas teorías sólo serían rechazadas cuando se dispusiese de otras teorías alternativas y no simplemente por la observación de los datos.

En la tabla 2x3 el alumno E detecta el caso de independencia, calculando las frecuencias relativas condicionales y comparándolas entre sí. En la tabla 3x3 detecta también la existencia de asociación por el mismo procedimiento.

En consecuencia, el mayor cambio que se observa en este alumno, respecto al estudio de las tablas de contingencia es que pasa de una mayor variabilidad de estrategias intuitivas a una estrategia sistemáticamente empleada, que consiste en la comparación de frecuencias relativas condicionales, que coincide con las actividades llevadas a cabo durante el periodo de enseñanza. Aunque ya el alumno, aparentemente tenía unas ideas intuitivas bastante correctas, al detectar correctamente en muchos de los casos el tipo de asociación, la variabilidad de estrategias iniciales ocasionó el que no detectara el caso de independencia, que ahora ha sido correctamente detectado. Asimismo, se ha detectado la dependencia inversa en el caso de correlación alta, aunque no así en el caso de débil correlación, que ha ido unida a la existencia de teorías previas en contra de la asociación presente en los datos.

En la nube de puntos, ítems I, J y K, en el primero indica que la relación es "directa", cuando en realidad es inversa. Ello es debido a la dificultad lingüística que ya hemos señalado, puesto que indica: "a más partidos empatados mejor clasificación en la liga", y posteriormente da a entender que se refiere a los primeros puestos. En este caso, esta respuesta es, en este sentido correcta, aunque desde el punto de vista matemático sea incorrecta. Se ha producido una inversión del orden lineal indicada por González y cols. (1990), que no había sido prevista en la construcción del cuestionario. Detecta la independencia en el ítem J, argumentando el que la gráfica es prácticamente constante. Finalmente, en el ítem K argumenta la independencia, debido a la dispersión de la nube de puntos.

Aunque aparentemente los resultados parecen peores que en el pretest hay que hacer notar que la independencia se argumentó en el pretest por un motivo falso, tras el que se hallaba una concepción incorrecta de la independencia que ha sido superada, al dar ahora un argumento válido. Asimismo se emplea ahora la idea de dispersión de la nube de puntos, que antes era inexistente y, que, en este caso, hace que no se detecte la asociación debido a la baja correlación.

El alumno E indica que hay asociación en las muestras relacionadas hallando la diferencia en los pares de valores correspondientes y comprobando los porcentajes de casos en que la presión sube o baja. En el caso de muestras independientes (ítem M) también los detecta comparando las distribuciones de frecuencias.

Aunque en este caso la relación en el ítem L es casi inexistente, lo cierto es que existen unas pequeñas diferencias positivas entre las dos

distribuciones. Tanto en este ítem como en el siguiente se aprecia una evolución favorable de las estrategias, que ahora emplean todos los valores de la distribución.

El alumno P es capaz de dar un ejemplo correcto de cada una de las dos clases de dependencia e interpreta correctamente la tabla, aunque confunde proporción y porcentaje, manifestando así que el concepto proporción sigue siendo confuso para él. Lee correctamente la nube de puntos.

En las tablas 2x2, el alumno P no detecta la dependencia inversa en el ítem D; sino que indica que "no puede decirse que haya una relación directa". Para ello ha calculado las distribuciones marginales, y saca su conclusión del hecho de que el número de elementos en cada muestra es diferente, lo que indica que esta dificultad, aparentemente superada en las prácticas ha vuelto a aparecer, manifestando una de las características de los obstáculos, su persistencia. En el ítem E detecta la existencia de dependencia y, aunque no emplea la palabra inversa, indica que "depende de que no se ingiera la dieta". Para ello ha calculado todas las frecuencias marginales y condicionales por filas y columnas, utilizando correctamente los datos, tal como ha hecho en las prácticas con ordenador. Igualmente, en el ítem F realiza estos mismos cálculos, detectando claramente el caso de independencia.

En la tabla 2x3 llega a la idea de dependencia directa (incorrecta); aunque ha calculado todas las frecuencias relativas de la tabla, la interpretación de las mismas ha sido incorrecta, al utilizar finalmente sólo las de una casilla. Respecto a la tabla 3x3, llega a una conclusión correcta de dependencia, aunque sólo comparando frecuencias absolutas; probablemente porque en este caso los números son sencillos de comparar sin necesidad de pasar a porcentajes.

El alumno P presenta una mejoría en las estrategias empleadas en tablas 2x2, aunque no así en las generales rxc. Llega a detectar correctamente la independencia en la tabla 2x2, no así en la 2x3, y detecta correctamente el resto de los casos excepto en el ítem D en el que las teorías previas han influido en la respuesta. Aunque ha habido una progresión en el aprendizaje, se manifiesta aún una gran dificultad en la interpretación de la asociación en tablas rxc.

En la nube de puntos, ítem I, J y K, argumenta que la relación es directa en el primero, dando un argumento similar al alumno anterior, por lo que se puede considerar su respuesta como correcta. Lo que parece claro en ambos casos es que no se relaciona el tipo de dependencia con la pendiente de la recta de regresión. En el ítem J argumenta la independencia debido a la constancia de la gráfica. En el ítem K indica que no hay relación debido a la dispersión de la nube.

De este modo se aprecia una mejoría evidente en las estrategias, que utilizan las ideas de constancia en la gráfica, forma y dispersión de la misma. Ha desaparecido también el error consistente en suponer la unicidad de la imagen, pasando de una concepción funcional de la dependencia a otra más amplia que incluye la dependencia aleatoria.

En las muestras relacionadas indica que no hay dependencia, estudiando la variación caso a caso y comparando el porcentaje de casos en que sube o baja la presión. En las muestras independientes detecta la dependencia comparando las distribuciones.

Ha desaparecido también aquí el sesgo consistente en suponer que la

presión debe subir o bajar en todos los casos para que exista asociación. Asimismo, el alumno P ha mejorado su estrategia, comparando las distribuciones de las variables intervintentes.

3.5.7. ANALISIS DE LAS ENTREVISTAS SOBRE EL PROCESO SEGUIDO EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS CON ORDENADOR

Puesto que, en la prueba de resolución de problemas con ordenador, cuyo contenido y resultados globales se han descrito en las secciones 3.4.1, 3.4.3, 3.4.4 y 3.4.5, no se realizó una observación del trabajo de los alumnos E y P, con objeto de no perturbar su trabajo, ya que dicha prueba coincidía con el examen final de la asignatura, hemos considerado conveniente efectuar posteriormente una entrevista con estos alumnos.

El objetivo de esta entrevista ha sido profundizar en el proceso de resolución seguido por los alumnos en los diferentes problemas, así como obtener información complementaria que nos ayude a interpretar las respuestas a estos ejercicios del resto de sus compañeros. Asimismo, se pretende hacer aflorar los errores conceptuales del alumno, especialmente los referidos a la asociación estadística, para comprobar si las dificultades observadas en el proceso de aprendizaje de estos alumnos mediante el método de observación han sido o no finalmente superadas.

Se trata de una entrevista no estructurada (Taylor y Bogdan 1986), ya que, aunque los fines y el contenido de la misma han quedado especificados con anterioridad, no se ha efectuado un listado previo de todas las preguntas formuladas, que han sido variadas por el investigador en el curso de la entrevista, cuando se ha considerado conveniente para el fin a alcanzar. Aunque la prueba ha constado de diversos tipos de problemas, la entrevista se ha referido sólo a los problemas de asociación estadística, que son los investigados en nuestro trabajo.

Una vez realizadas las entrevistas, se efectuó una transcripción de las mismas que se presenta en el anexo 3.7. A continuación presentamos un análisis del contenido de estas entrevistas, referido a los siguientes aspectos:

1. Proceso de resolución seguido por cada alumno en cada uno de los ejercicios referidos a asociación estadística; en particular interesa ver si se produce una diferenciación de estrategias en función de las variables de tarea de los diferentes problemas. Asimismo interesa ver el modo en que el alumno integra la información (Crocker, 1981) y si hay una diferenciación entre las estrategias empleadas por los alumnos en la resolución de problemas de asociación con y sin ordenador.
2. Comprensión alcanzada por el alumno sobre la asociación estadística; errores conceptuales manifestados; sesgos y vacíos de significación respecto al mencionado concepto que permanecen después de la instrucción.
3. Errores conceptuales en otros conceptos estadísticos, que pudieran influenciar la comprensión final alcanzada por el alumno sobre la asociación estadística.
4. Grado de dominio alcanzado en el instrumento informático y dificultad que le produce el empleo de esta herramienta.

A continuación se analizan cada uno de estos aspectos en las dos entrevistas efectuadas.

ENTREVISTA REALIZADA AL ALUMNO E

Proceso de resolución y conocimientos sobre la asociación estadística manifestados durante el mismo

Este alumno utiliza como estrategia de integración de la información la obtención de las distribuciones de frecuencias condicionales de la variable dependiente, para los diversos valores de la independiente en el problema 1. Una vez obtenidas estas distribuciones condicionales, compara las frecuencias relativas condicionales en estas distribuciones, manifestando una comprensión clara de la idea de asociación en las tablas 2x2. Asimismo, en la entrevista muestra que distingue con claridad las frecuencias condicionales relativas respecto a filas y columnas de la tabla; esto es; diferencia con claridad el concepto de condición y condicional en una probabilidad condicional (Falk, 1986).

En el segundo problema se utiliza de nuevo esta técnica de formación paso a paso de las diferentes distribuciones condicionales, combinada ahora con la agrupación de los valores de la variable dependiente en intervalos, como medio de obtener una tabla de contingencia de tamaño asequible al análisis. El alumno emplea los mismos intervalos para la agrupación en las dos distribuciones condicionales obtenidas. Notamos aquí que esta estrategia de integración de la información es nueva, respecto a las empleadas en la comparación de muestras cuando el alumno no dispone ordenador.

Al no ser muy grandes las diferencias de frecuencias en los distintos intervalos, el alumno decide que no hay asociación en los datos. Sin embargo, en el curso de la entrevista se pone de manifiesto que aprecia estas pequeñas diferencias, y, aunque el alumno decide que, globalmente, las diferencias no son lo suficientemente importantes para atribuirlas a la asociación, no parece muy convencido de su opinión, cuando el entrevistador intenta ver la estabilidad de la misma.

En los dos problemas anteriores, las muestras a comparar son independientes, mientras que en el problema 3 se deben comparar dos muestras relacionadas, esto es, dos mediciones de la misma variable sobre los mismos sujetos. Por ello, aunque se trata de un problema de asociación de la variable dependiente número de pulsaciones sobre una variable independiente implícita (momento en que se efectúa la medición) el alumno no ha identificado esta variable implícita, por lo que modifica la estrategia seguida en los dos casos anteriores. En lugar de estudiar las dos distribuciones "número de pulsaciones antes" y "número de pulsaciones después", comparando las frecuencias relativas en los mismos intervalos de valores ha obtenido los estadísticos de estas distribuciones y comparado directamente sus valores.

Esta estrategia es correcta e incluso más elaborada que la anterior, pues su empleo exige la compresión del hecho de que si los estadísticos de una variable dependiente cambian al variar los valores de la independiente, debe haber variado también las correspondientes distribuciones condicionales, por lo que se deduce la asociación (Rios, 1967). No obstante destacamos el hecho de que, a pesar de que la variable dependiente es la misma que en el problema anterior, ha habido una modificación de estrategias. A la pregunta del investigador sobre si es posible otras soluciones al problema, busca otros estadísticos distintos (los estadísticos de orden), los cuales enumera e

interpreta correctamente, aunque cree que la moda está también incluida entre ellos. No llega a sugerir que sea posible el mismo método de solución empleado en los dos ejercicios anteriores para resolver el correspondiente a la asociación en muestras relacionadas.

En el problema 4 sobre la comparación de muestras independientes, de nuevo se seleccionan paso a paso las distribuciones condicionales de frecuencia de la variable dependiente, en lugar de emplear directamente la opción de tablas de contingencia. Ante la pregunta de si es posible otro método de cálculo, no piensa en ningún momento en comparar la edad media de los que practican o no practican deporte.

El problema 5 pide la relación entre dos variables numéricas: "tiempo tardado en recorrer 30 metros en septiembre" y "tiempo tardado en recorrer 30 metros en diciembre". La solución más natural a este problema es estudiar la regresión y correlación entre las variables. Sin embargo, el hecho de que este problema pueda también ser interpretado como de relación de una variable cuantitativa "tiempo en recorrer 30 metros" y una dicotómica implícita "momento en que se realiza la medición: septiembre o diciembre", junto con la mención en el enunciado a la "rentabilidad" de la práctica del deporte ha hecho que los alumnos, en su mayoría hayan cambiado el enunciado de la pregunta, como se muestra en la entrevista mantenida. En lugar de estudiar la relación que en el conjunto de sujetos tiene el tiempo final en función del tiempo inicial, han interpretado que se trata de cuantificar la diferencia entre las dos distribuciones de tiempos.

Por este motivo, el alumno, al igual que la mayor parte de sus compañeros no emplea la regresión en su estrategia inicial. En lugar de ello, emplea la comparación de estadísticos de orden en ambas variables, es decir, la misma estrategia del problema 3. A las preguntas del entrevistador sobre si es posible resolver el problema con otros programas intenta hacerlo con la tabla de contingencia, lo que no es una buena opción, ya que prácticamente todos los datos se concentran en la misma casilla. Sólo ante la insistencia del entrevistador identifica finalmente la regresión bivariante como una posible solución al problema. No obstante, una vez obtenidos los parámetros no se fija, en primer lugar en el coeficiente de correlación que sería el estadístico más significativo para indicar la relación entre los dos tiempos ($r = 0.76$ en este ejercicio), sino que sigue comparando las dos medias. Con ello se ve la dependencia del tiempo en recorrer los 30 metros respecto al instante de medición, pero no la dependencia de los dos tiempos entre sí. Sólo al final interpreta correctamente, tanto la correlación lineal como la gráfica de dispersión, aunque no piensa que esto sea un dato relevante para la solución del problema, al haber cambiando el enunciado de la pregunta.

Errores conceptuales referidos a la asociación

Esporádicamente el alumno intenta juzgar la asociación en términos de frecuencias absolutas, como en el problema 2, aunque finalmente, ante las preguntas del entrevistador modifica su estrategia.

En el problema 5 aparece de nuevo la confusión entre los conceptos de variables dependiente e independiente en regresión; sólo soluciona su dilema con la sugerencia del entrevistador.

Errores conceptuales referidos a otros conceptos estadísticos

El alumno muestra una confusión entre los conceptos de variable discreta y continua. Cuando tiene que resolver el problema 1, elige como primera opción la correspondiente a variables continuas, aún cuando la variable a analizar es cualitativa. Aunque posteriormente cambia a la opción correcta del programa, ello se debe, no a la diferenciación entre estos conceptos, sino a que "por los resultados que me salían, por las tablas y gráficos, veía que no era viable, entonces pensé que tenían que ser discretas". Esta misma confusión se muestra en el problema 2, en el que inicialmente elige la opción de variables discretas, aunque la variable a analizar es continua, rectificando de nuevo, en base a que no encuentra los resultados esperados.

Piensa que la moda es un estadístico de orden (problema 3); ello puede ser debido sólo a una confusión terminológica, pero también podría tratarse de que no ha relacionado la idea de orden o posición relativa de un valor de la variable respecto a la distribución con estos estadísticos.

Dificultades en el manejo del paquete de programas

Aunque el alumno conoce el funcionamiento de los diversos programas e interpreta correctamente los resultados de los mismos, no diferencia con claridad la ventaja que cada uno de ellos le aporta para la resolución de los diferentes problemas.

En particular, este alumno no ha apreciado la ventaja que supone, en cuanto a la integración de la información, el obtener directamente la tabla de contingencia con la opción 10 del paquete, en lugar de irla construyendo progresivamente a partir de emplear repetidamente la opción de selección de variables en uno de los programas que proporcionan las tablas de frecuencias de una sola variable (opciones 5 y 6). Ello no es debido a desconocer el funcionamiento de este programa, como se pone de manifiesto en la entrevista.

La dificultad en dilucidar cuando es o no necesario seleccionar registros por los valores de una variable se muestra en el problema 2, en el que el alumno inicialmente no efectúa ningún tipo de selección, por lo que debe modificar su estrategia inicial.

ENTREVISTA REALIZADA AL ALUMNO P

Proceso de resolución y conocimientos sobre la asociación estadística manifestados durante el mismo

Al igual que su compañero, el primer problema lo resuelve mediante la selección sucesiva de las diferentes distribuciones de frecuencias condicionales de la variable dependiente para los distintos valores de la independiente. También confunde la opción conveniente del paquete estadístico al no diferenciar las nociones de variable discreta y continua. Rectifica su opinión al ver que los resultados obtenidos no eran los esperados. El alumno finaliza el problema comparando las frecuencias relativas condicionales en las dos distribuciones. A la pregunta del entrevistador, indica que era posible resolver el problema directamente con la opción de tablas de contingencia, que no ha usado porque conocía mejor el manejo de los primeros programas aprendidos.

En la segunda actividad emplea la misma estrategia que en el problema

anterior, agrupando los datos de las dos distribuciones condicionadas en intervalos de amplitud 10. Compara las frecuencias correspondientes a los mismos intervalos, aunque realiza la comparación no en todos los intervalos, sino basándose en los valores máximo, mínimo y promedios. A instancias del investigador intenta una solución alternativa empleando la opción 10 que da directamente la tabla de contingencia y, finalmente sugiere que sería posible comparar las medias y características de dispersión de las dos distribuciones.

De la misma manera que su compañero, cambia de estrategia para resolver los problemas correspondientes a la comparación de muestras relacionadas, eligiendo la opción de cálculo de estadísticos. Sin embargo no emplea la media que sería el estadístico más significativo para comparar estas distribuciones sino los máximos, mínimo,... e incluso el coeficiente de apuntamiento. A las preguntas del investigador no parece tener claro este papel de la media en la comparación de muestras. Reconoce también que sería posible resolver el problema con la opción de regresión, pero no para relacionar el número de pulsaciones antes del ejercicio con las de después del ejercicio, sino para obtener las medias y varianzas de las dos variables. Comparando las mismas podría deducir la existencia de diferencias.

En el ejercicio 4 de nuevo va formando las distintas distribuciones condicionales de la variable dependiente, aunque para decidir la asociación emplea una sola frecuencia condicional. A instancias del investigador reconoce que puede emplear la tabla de contingencia para resolver el problema de un modo más directo. Sin embargo, como se fija en una sola distribución condicional, cree erróneamente que se trata del caso de independencia, manifestando una concepción localista de la asociación. Influenciado por las sugerencias del entrevistador finaliza empleando el resto de distribuciones y reconociendo su error.

En el ejercicio 5, hace la misma interpretación del enunciado que su compañero, por lo que trata de resolver el problema empleando los estadísticos de orden. A instancias del entrevistador reconoce que puede emplear el programa de regresión para resolver el problema (en el sentido en que él ha entendido la pregunta). Interpreta correctamente el coeficiente de correlación, tanto en el signo como en la intensidad.

Errores conceptuales referidos a la asociación

En el segundo problema el alumno decide la independencia en base a la comparación de los valores mínimo, máximo y centrales de las distribuciones de frecuencia relativas condicionales. Esta comparación sería suficiente para decidir la dependencia de las variables, ya que el cambio en uno de estos estadísticos implicaría el cambio en las distribuciones de frecuencias condicionales. Aunque en este caso, efectivamente se da la independencia entre las variables, la estrategia no es, en general correcta para decidir la independencia en el caso general. Aunque los test de diferencias de media se emplean para decidir la dependencia de una variable cuantitativa en función de otra cualitativa, la comparación se basa no sólo en los valores medios, sino también en las varianzas.

Cuando, a instancias del entrevistador intenta resolver el problema empleando directamente la opción 10 que proporciona la tabla de contingencia, las comparaciones efectuadas se refieren a todos los intervalos, pero emplea frecuencias absolutas en lugar de frecuencias relativas. Ello influye en que considere iguales las dos distribuciones respecto a los intervalos centrales, en los cuales, sin embargo, se aprecia una diferencia notoria de frecuencias

relativas.

Usa una sola distribución condicional para decidir si existe asociación entre las variables en el ejercicio 4, por lo que cree erróneamente que se trata del caso de independencia. Reconoce su error por la presión de las preguntas del investigador.

En el problema 5 aparece la dificultad de distinguir entre la variable dependiente e independiente, lo que logra con ayuda del entrevistador.

Errores conceptuales referidos a otros conceptos estadísticos

En el primer problema se observa la confusión del alumno entre los conceptos de variable discreta y continua, pues intenta tratar una variable cualitativa como continua. Sin embargo, en la segunda actividad reconoce claramente como continua la variable.

En el problema 5 se observa una confusión entre los conceptos de media y mediana, posiblemente terminológica, ya que cree que la media es un estadístico de orden. Compara los estadísticos de orden en ambas variables llegando a una detección correcta de la asociación del tiempo en recorrer 30 m respecto al instante de medición, pero no responde a la pregunta del enunciado sobre si hay relación entre estos dos tiempos. Por las sugerencias del entrevistador, reconoce que el programa de regresión podría emplearse para resolver el problema.

Dificultades en el manejo del paquete de programas

Aunque el alumno conoce el funcionamiento de los diversos programas e interpreta correctamente los resultados de los mismos, no diferencia con claridad la ventaja que cada uno de ellos le aporta para la resolución de los diferentes problemas.

En particular, este alumno no ha apreciado la ventaja que supone, en cuanto a integración de la información, el obtener directamente la tabla de contingencia con la opción 10 del paquete, en lugar de irla construyendo progresivamente a partir de emplear repetidamente la opción de selección de variables en uno de los programas que proporcionan las tablas de frecuencias de una sola variable (opciones 5 y 6). Ello no es debido a desconocer el funcionamiento de este programa, como se pone de manifiesto en la entrevista.

Indica en el primer problema que no ha alcanzado suficiente soltura en el manejo de las opciones 10 y 11, referidas a tablas de contingencia y regresión, por ser los últimos programas aprendidos.

En el primer problema se produce la confusión con la opción de selección de variables; aunque el alumno es consciente de que debe seleccionar por la variable sexo, al incluir como valores de selección todos los posibles de esta variable, obtiene la distribución marginal de la variable "practica deporte", en lugar de una de las distribuciones, error que comete dos veces sucesivas.

3.6. CONCLUSIONES SOBRE LA EVOLUCION DE CONCEPCIONES Y RESOLUCION DE PROBLEMAS CON ORDENADOR

Conclusiones sobre el experimento de enseñanza

El cuarto objetivo de nuestra investigación, expuesto en la sección 1.4.2 era el estudio de la evolución de las concepciones referidas a la asociación estadística, como consecuencia de una enseñanza basada en el ordenador y en la resolución de problemas. Esta enseñanza fue llevada a cabo, tal como se describe en la sección 3.2, sobre una muestra de alumnos cuyas concepciones iniciales se han descrito en la sección 3.1. En la sección 3.3 hemos estudiado las respuestas de los alumnos a la prueba sobre juicios de asociación utilizada como postest al finalizar la enseñanza y las hemos comparado con las respuestas a los ítems equivalentes del pretest. Del análisis de la evolución observada hemos extraído las conclusiones siguientes:

Juicios de asociación

Ha habido una mejora notable en la corrección del juicio de asociación en los casos en que los datos no contradicen las expectativas previas. En especial, esta mejora se ha notado en el caso de la independencia de las variables, que es ahora claramente identificada por los alumnos. Se conserva, sin embargo, en algunos alumnos, la dificultad en detectar la dependencia inversa de las variables en la tabla de contingencia.

En la enseñanza recibida se ha propuesto a los alumnos algunos problemas para ser resueltos con ordenador en los que se presenta una dependencia inversa tanto en tablas de contingencia, como en comparación de muestras. Sin embargo, para este tipo de problema, no se estudia el coeficiente de asociación explícitamente. Además, dichos coeficientes no están dotados de signo, como ocurre para el coeficiente de correlación. Por este motivo, no se define explícitamente la "dependencia inversa" en las tablas de contingencia, sino sólo la ausencia o presencia de asociación.

Estos alumnos han interpretado la dependencia inversa en tablas 2x2 como independencia. Consideramos, en consecuencia, que este es un punto que debe ser revisado en nuevas propuestas de enseñanza y que deben organizarse sesiones de debate con los alumnos, para lograr la superación de esta concepción errónea.

Estrategias en los juicios de asociación

En general la mejoría en las estrategias empleadas es notable. Por un lado, respecto a la clasificación de las estrategias en niveles de elaboración (Pérez Echeverría, 1990), se observa un desplazamiento hacia los niveles superiores de estrategias. Respecto a la corrección de los conceptos y teoremas en acto (Vergnaud, 1982; 1990) implícitos en estas estrategias, hay un desplazamiento de las estrategias incorrectas o parcialmente correctas hacia las parcialmente correctas o correctas en la mayor parte de los ítems. Este desplazamiento ha sido especialmente notable en todos los ítems, excepto en los de dependencia inversa en tablas 2x2 y en los de comparación de muestras. De manera global, todos los alumnos, excepto dos, han mejorado sus estrategias.

Concepciones erróneas sobre la asociación estadística

Prácticamente todos los alumnos han superado la **concepción determinista** de la asociación, pasando a aceptar ahora tanto la dependencia funcional como la aleatoriedad entre variables. Se admite ahora la dispersión en la nube de puntos en el caso de dependencia y se reconoce claramente la constancia en la relación como sinónimo de independencia entre las variables. Tampoco se emplea ahora en las tablas de contingencia el argumento de que algunas de las celdas **b** o **c** deba ser cero para admitir la dependencia, ni se exige la existencia de una relación algebraica entre las variables en el caso de las nubes de punto.

En general, los alumnos que presentaban una **concepción localista** de la asociación la han superado, pasando a una visión de la asociación basada en el conjunto de todos los datos y no en una parte de los mismos. El alumno percibe ahora la importancia de tener en cuenta la información relativa al consenso (Pozo, 1987), esto es, de todo el conjunto de datos, a la hora de realizar un juicio de asociación. Este desplazamiento se manifiesta en el abandono, casi generalizado de las estrategias que emplean una sólo casilla o una sola frecuencia condicional en las tablas de contingencia, y de la interpretación aislada de pares de puntos en las nubes de puntos y de casos aislados en la comparación de muestras.

Respecto a la **concepción unidireccional**, en general se observa una disminución del número de alumnos que la manifiestan. Sin embargo, algunos alumnos mantienen esta concepción en las tablas de contingencia, por los motivos que hemos razonado en el punto anterior.

Por el contrario, en general, los alumnos que presentaban una **concepción causalista** de la asociación continúan manifestándola. Esto se pone de manifiesto en las respuestas al ítem K en que los alumnos, en su mayoría, siguen considerando que hay independencia en las variables. Continúan dando el argumento de que ello es debido a que el juicio de uno de los jueces no puede influir en el juicio del otro, esto es, no admiten la correlación debida a la concordancia. Asimismo, aún hay un caso en que esta concepción es extrema, al argumentarse en el ítem I la existencia de otras variables, para considerar que no hay asociación en los datos.

Finalmente, un porcentaje de alumnos apreciable intenta reducir la tabla 3x3 a una tabla 2x2, hecho que hemos interpretado como indicativo de esta concepción.

Aunque en la enseñanza recibida se estudia teóricamente y se ha incluido en los apuntes proporcionados a los alumnos la diferencia entre correlación y causalidad, los alumnos de nuestra muestra, no han sido capaces de superar sus concepciones previas al respecto. También han sido insuficientes las dos actividades prácticas en que se ha trabajado la correlación en el contexto de concordancia.

El significado del término dependencia en el lenguaje coloquial, unido a que, en general, el interés del estudio de la asociación entre variables es precisamente la búsqueda de relaciones causa-efecto entre las mismas ha primado sobre la instrucción recibida. Como indica Confrey (1990), los alumnos incorporan a la enseñanza el significado de las palabras en la vida cotidiana; cuándo usan este significado, en lugar del científico que queremos dar en el aula a los mismos términos es una cuestión que debe ser investigada. Como consecuencia, se hace necesario la organización más cuidadosa de situaciones didácticas específicas encaminadas a la superación de la concepción causalista de la asociación en futuros experimentos de enseñanza.

Otras dificultades y errores

Algunos alumnos continúan manifestando una dificultad en la interpretación de la tabla de contingencia y en el cálculo de frecuencias relativas condicionales. Ello es debido especialmente a la persistencia de la confusión entre condicional y condicionado en la frecuencia relativa condicional, dificultad asimilable a la descrita por Falk (1986) para la probabilidad condicional.

Puesto que, en la idea de frecuencia relativa condicional se encuentra subyacente la idea de probabilidad condicional, creemos que la dificultad es debida a la falta de comprensión de este último concepto. Creemos de sumo interés resaltar esta problemática, puesto que la confusión en las frecuencias relativas condicionales ha de influir necesariamente sobre el juicio de asociación dado por los estudiantes y no hemos encontrado en la literatura de investigación trabajos que relacionen estos dos aspectos.

Hay que tener en cuenta, además, que en los cursos de Estadística Descriptiva, como es el presentado en esta experiencia, no se trabaja la idea de probabilidad ni de probabilidad condicional. Pero, como indican Inhleder y Piaget (1955) la idea de probabilidad es prerequisito para la comprensión de la idea de asociación y, aún añadiríamos más, también es un prerequisito de la misma la idea de probabilidad condicional. Concluimos, en consecuencia, llamando la atención sobre esta problemática, tanto para futuras investigaciones, como para la planificación de la enseñanza del tema.

Sigue siendo notable la influencia de las teorías previas sobre los juicios de asociación, tanto que cuando éstas contradicen la asociación empírica, ésta no es tenida en cuenta en el juicio. Aunque los alumnos han aprendido estrategias normativas y las emplean correctamente en el caso general, se sigue produciendo un cambio de estrategias en el caso de teorías en contra de los datos o incluso se produce un juicio erróneo de asociación, a pesar de emplearse una estrategia correcta.

Actos de compresión sobre la idea de asociación

Mediante el análisis de las respuestas a las pruebas realizadas por escrito al principio y final de la instrucción hemos podido obtener las conclusiones citadas respecto a la evolución de las concepciones de los alumnos. Pero un estudio más detallado del proceso de aprendizaje precisa una metodología observacional y cualitativa, llevada a cabo en la sección 3.5. en que se describe este proceso para una pareja de alumnos. En el análisis del trabajo y las discusiones de estos alumnos mientras resuelven las tareas propuestas a lo largo de la enseñanza se han identificado los siguientes actos de comprensión (Sierpinska, 1991) sobre la noción de asociación estadística:

AC1: Para poder comparar dos o más muestras, con objeto de estudiar la posible relación entre dos variables, la comparación ha de efectuarse en términos de frecuencias relativas.

AC2: La posible existencia o no de diferencias en la distribución de una variable entre dos o más muestras se deduce a partir de la comparación de toda la distribución de la variable en cada una de las muestras y no de una parte de la misma.

AC3: A partir de una misma frecuencia absoluta pueden deducirse dos frecuencias relativas condicionales diferentes, según la variable que se emplee como condición. El papel de condición y condicionado en la frecuencia relativa condicional no es intercambiable.

AC4: Dos variables son independientes si la distribución condicional de una de ellas en función de un valor de la otra variable no depende del valor dado.

AC5: La asociación es una cuestión de grado; es difícil que se dé la independencia total; en el contexto de los estudios estadísticos también la dependencia funcional exacta es rara.

AC6: En la determinación de la asociación entre dos variables, éstas juegan un papel simétrico. Por el contrario, en el estudio de la regresión, las variables desempeñan un papel asimétrico. Hay dos rectas de regresión diferentes, según cual de las dos variables actúe como variable independiente.

Los términos "variable dependiente" y "variable independiente" en regresión tiene un sentido distinto del que les damos en la vida ordinaria. La variable "independiente" es aquella cuyos valores conocemos, la que tomamos como explicativa. La "variable dependiente" es la que tratamos de explicar; de predecir; sus valores son calculados a partir de la "variable independiente". Sin embargo, debido a la simetría del concepto de correlación, ambas variables dependen una de otra o son independientes entre sí.

AC7: Una correlación positiva indica dependencia directa entre las variables

AC8: Una correlación negativa indica dependencia inversa entre las variables.

AC9: El valor absoluto del coeficiente de correlación es indicativo de la intensidad de la asociación.

Aunque esta lista de actos de comprensión es, sin duda, incompleta, consideramos que constituyen un primer paso en el análisis de la complejidad del significado del concepto de asociación. Por la importancia que este concepto tiene en la comprensión de muchos procedimientos estadísticos, como se puso de manifiesto en la sección 1.1, consideramos del máximo interés continuar la investigación encaminada a la identificación de actos de comprensión de este concepto y del diseño de situaciones didácticas encaminadas a la consecución de los mismos.

Conclusiones sobre la resolución de problemas de asociación usando el ordenador

El tercer objetivo planteado en esta investigación era realizar un estudio del modo en que los sujetos de la muestra organizan e integran la información, cuando ésta se les presenta formando parte de un fichero de datos, como paso previo a la emisión del juicio de asociación y, cómo resuelven los problemas de asociación cuando disponen de un paquete estadístico como ayuda en los cálculos.

Nuestras hipótesis sobre este punto eran dos:

► Por un lado, en la Hipótesis H5 se conjeturaba que el hecho de disponer

de un ordenador hacia que el alumno emplease una variedad de estrategias para integrar la información disponible, y no sólo el formato clásico de la tabla de contingencia.

- ▶ Por otro, la Hipótesis H6 establecía nuestras expectativas de la influencia del modo en que se efectúa esta integración previa de la información, sobre las estrategias finales empleadas en los juicios de asociación.

Las conclusiones alcanzadas sobre estas hipótesis son las siguientes:

Estrategias de integración de la información

En general, se observa un predominio del empleo de la tabla de contingencia, como paso inicial en la resolución del problema. Esta tabla de contingencia no es obtenida, sin embargo, mediante la opción del paquete estadístico disponible al efecto, lo que indica, por un lado, la dificultad de uso del paquete estadístico y, por otro, la confusión en la interpretación de las frecuencias relativas condicionales, señalada por Falk (1986) que continúa manifestándose tras la instrucción.

La tabla de contingencia se elabora mediante un proceso iterativo paso a paso, mediante la aplicación sucesiva de las opciones 5 (tablas de frecuencias para variables discretas) y 6 (tablas de frecuencias para variables continuas), seleccionando uno a uno los valores de la variable independiente. Con este procedimiento se obtiene, en ambos casos, un refinamiento de la tabla de contingencia clásica, al lograr el cálculo automático de las frecuencias relativas condicionales por filas. En el segundo caso, además, se agrupa la variable en intervalos.

Sin embargo, el alumno no se conforma en general, con un sólo resumen gráfico o numérico para la integración de la información sino que usa y compara diferentes programas, tomando, finalmente el que considera más adecuado. Esta forma final de presentación de la información está influida en gran medida por las variables de tarea de los problemas. Así, mientras en el estudio de la asociación entre variables cualitativas se elige, habitualmente, resumir los datos en forma de tabla de contingencia, en el resto de los problemas ésta es igualada o aventajada por el empleo de resúmenes numéricos de la distribución. El alumno no precisa emplear todos los datos referidos a los valores de las variables o sus frecuencias; le basta comparar los estadísticos en las distribuciones de frecuencias relativas condicionales implicadas, lo que sin duda indica un mayor grado de formalización en la adquisición de la idea de asociación.

Como dato significativo, los alumnos no han empleado, en general el resumen gráfico de los datos, mediante la nube de puntos. Ello es debido a una interpretación errónea del enunciado de uno de los problemas.

Juicios de asociación

Se observa la corrección de la mayoría de los juicios emitidos por los alumnos. Por un lado ello es debido a que los problemas no contradicen abiertamente las expectativas de los alumnos; por otro, el disponer de diversas posibilidades de integración de la información ha propiciado el empleo de frecuencias relativas y con ello de estrategias correctas, que han influido sobre los juicios obtenidos.

Estrategias en los juicios de asociación

Al comparar con los problemas realizados sin ayuda del ordenador, se observa una proporción mucho mayor de estrategias correctas, propiciado por la facilidad con que el alumno ha dispuesto de las frecuencias relativas condicionales. De ello deducimos también que el uso incorrecto de algunas estrategias en el postest no ha sido debido a errores conceptuales sobre la idea de asociación sino a dificultades en el cálculo de fracciones y porcentajes.

En todas las categorías de problemas aparecen estrategias nuevas y son suprimidas algunas de las que eran usadas con frecuencia relativamente alta en el postest. Por ejemplo, en las tablas de contingencia desaparece el empleo de una sola casilla; en la comparación de muestras desaparece la comparación global y la comparación caso a caso que era empleada en el 55% de los alumnos, debido, en parte a la limitación del software estadístico.

Adquieren una importancia notable las estrategias basadas en la comparación de estadísticos de orden o en la representación gráfica de los mismos, que no ha sido usada por ninguno de los alumnos en la prueba realizada con papel y lápiz.

En resumen, se confirma nuestra hipótesis sobre la influencia del modo en que se integra la información sobre las estrategias en los juicios de asociación. A nuestro juicio, esto abre una nueva línea de investigación sobre estrategias en los juicios de asociación realizados con ordenador, que complete la información presentada sobre nuestra muestra, la cual, debido a su tamaño reducido, es necesariamente limitada.

CONCLUSIONES GENERALES DE LA INVESTIGACION

RESUMEN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACION Y APORTACIONES SOBRE EL MISMO

Al iniciar esta Memoria, indicamos que el propósito seguido en esta investigación era realizar un análisis didáctico del concepto de asociación estadística, que incluyese el estudio epistemológico del concepto, la síntesis de las investigaciones previas, el estudio de las concepciones iniciales de los alumnos y, finalmente, de la evolución de las mismas, como consecuencia de una enseñanza basada en el uso del ordenador.

Todos estos aspectos han sido abordados a lo largo de los tres capítulos en que hemos organizado el trabajo, cada uno de los cuales contiene las conclusiones parciales que hemos obtenido sobre los distintos puntos. El objetivo de esta sección, con la que finalizamos nuestra Memoria, es presentar un resumen de nuestras principales aportaciones sobre el problema planteado, así como señalar algunas implicaciones de las mismas para la enseñanza del tema y, finalmente, indicar posibles líneas de investigación en las que continuar el trabajo desarrollado.

En el primer capítulo comenzamos mostrando la importancia que tiene una correcta comprensión del concepto de asociación, debido a que este concepto es la base en que se asientan un gran número de métodos estadísticos. La introducción, debida a Galton, Pearson, Weldon, Fisher y sus colaboradores de la posibilidad del estudio de la interrelación entre variables aleatorias, extiende la idea de dependencia funcional y hace posible la introducción de modelos matemáticos en un gran número de ciencias como la Biometría o la Psicometría que, hasta esa fecha, no habían contado con un método científico especialmente adaptado a las mismas.

El desarrollo histórico del tema, expuesto en la sección 1.1.2, muestra también como el beneficio ha sido mutuo, puesto que, a su vez, son los

problemas aplicados en las diversas ciencias los que, junto con el apoyo de la potente idea de asociación y la aparición de los ordenadores, han hecho desarrollar espectacularmente la Estadística en nuestro siglo.

No obstante, aunque los modelos matemáticos basados en la idea de asociación proporcionan una potente herramienta para comprender, predecir y controlar fenómenos de las ciencias más diversas, no resuelven los problemas filosóficos asociados al método científico. Numerosos filósofos han debatido la noción de causa y, en relación con la metodología de investigación, también las relaciones entre asociación y causalidad.

En las secciones 1.1.3 y 1.1.4 presentamos un resumen de este debate, mostrando finalmente la definición de causación débil y su relación con la idea de asociación. En consecuencia, mostramos que correlación y causalidad no siempre van unidas, lo que refuerza, por un lado, el papel de la teoría en el proceso de investigación, así como indica la necesidad del control de las variables y el diseño de las investigaciones.

Un punto de arranque imprescindible en toda investigación sobre concepciones de los estudiantes, es el estudio de los resultados anteriores en las áreas de conocimiento afines. Aunque el concepto de asociación estadística no ha sido investigado por educadores matemáticos, hemos encontrado un gran número de investigaciones en el campo de la Psicología, la mayor parte de ellas relacionadas con las investigaciones sobre el modo que los sujetos adultos toman decisiones en ambiente de incertidumbre. Los resultados de estas investigaciones, expuestos en la sección 1.3, muestran que una concepción correcta de la noción de asociación estadística no siempre se adquiere espontáneamente, incluso alcanzada la edad adulta. Asimismo, las investigaciones psicológicas muestran los numerosos sesgos en las estrategias empleadas para resolver los juicios de asociación y el peso de las teorías previas sobre la interrelación entre variables sobre los juicios emitidos, esto es, el peso de la "correlación ilusoria".

Puesto que, además, las investigaciones mencionadas se han restringido, casi exclusivamente al estudio de la asociación entre variables dicotómicas (tablas 2x2), en la sección 1.4, en la que exponemos nuestro problema de investigación, hemos razonado la necesidad de extender los resultados de la investigación previa a otros tipos de tareas. En esa sección nos planteamos, en consecuencia, del análisis resultante del capítulo 1, los siguientes objetivos:

1. *Realizar un estudio de las concepciones previas (correctas o incorrectas) que poseen los alumnos sobre la asociación estadística entre variables dicotómicas desde una perspectiva matemática, esto es, identificar los conceptos y teoremas en acto (Vergnaud, 1982; 1990) subyacentes en las estrategias empleadas en este tipo de juicios de asociación.*
2. *Realizar un estudio global de las concepciones del sujeto referidas a una muestra representativa de problemas de asociación que abarque las tablas de contingencia rxc, nubes de puntos y comparación de muestras.*

Entre las posibles elecciones globales que permiten configurar una enseñanza específica sobre el tema de asociación estadística, decidimos basar el curso en la utilización del ordenador, porque, en la actualidad, consideramos que éste es un recurso imprescindible en la práctica estadística. Ahora bien, una vez que el alumno ha aprendido a usar un paquete estadístico, nos encontramos con un nuevo tipo de tarea sobre asociación, no estudiada con anterioridad en la investigación previa, lo que nos hizo formular el siguiente objetivo:

3. *Estudiar la manera en que el alumno integra la información y las estrategias utilizadas, cuando se plantea un problema de asociación estadística a partir de un fichero de datos y se dispone de una colección de programas de ordenador para realizar el análisis.*

La importancia del concepto de asociación y los sesgos mostrados sobre la misma en los individuos adultos, plantean a la Educación Matemática el diseño de planes de formación sobre la asociación estadística. Un problema de interés es el estudio del efecto de una instrucción sistemática para la superación de las concepciones erróneas y las estrategias incorrectas en los juicios de asociación. Puesto que no hemos encontrado investigaciones sobre esta problemática, nos planteamos un nuevo objetivo:

4. *Realizar un estudio de la evolución de las concepciones referidas a la asociación estadística, como consecuencia de un proceso de enseñanza basado en el uso de ordenadores y en la resolución de problemas.*

Resultados del estudio de concepciones iniciales sobre la asociación estadística

Para cumplir los dos primeros objetivos se ha construido un cuestionario, con el procedimiento descrito en la sección 2.1. La versión piloto de este cuestionario, que fue cumplimentada por 51 alumnos, se ha empleado para el cálculo de la fiabilidad del instrumento y para realizar un estudio cualitativo detallado de las respuestas, que se presenta en la sección 2.2 y ha sido el punto inicial de la identificación de las concepciones incorrectas de los alumnos.

La versión final del instrumento, que sería posteriormente empleada como pretest en el experimento de enseñanza, se aplicó a una muestra de 213 alumnos (muestra de comparación), con objeto de comparar las concepciones iniciales de los alumnos participantes en el experimento de enseñanza con un grupo más amplio y dotar, así, al estudio de evolución de concepciones, de una mayor validez. Las tres muestras de alumnos han mostrado una similitud notable en cuanto a la interpretación de los datos, juicios de asociación, estrategias en la resolución de los problemas, concepciones iniciales y otras variables estudiadas.

El estudio de concepciones iniciales, mostrado en el capítulo 2, constituye en sí mismo una aportación original en diversos aspectos:

- Se han estudiado minuciosamente los procedimientos de resolución de los problemas de asociación y su agrupación en estrategias relativos a las tablas de contingencia 2x3; tablas 3x3, nube de puntos y comparación de muestras, estableciendo una primera categorización de las mismas, que puede ser completada en investigaciones posteriores.
- Se comparan nuestros resultados referidos a la tabla 2x2 con los de otras investigaciones psicológicas. En particular, se estudian los niveles de elaboración de estrategias que Pérez Echevarría (1990) propone para las tablas de contingencia 2x2, extendiéndolo por nuestra parte a las tablas 2x3 y 3x3, llegando a la conclusión de que los alumnos utilizan un nivel más elaborado de estrategia conforme la tabla aumenta de dimensión.
- Se ha definido una nueva clasificación de las estrategias en tablas de contingencia 2x2, que puede ser utilizada para la tabla de contingencia de dimensión general rxc, atendiendo a los conceptos y teoremas en acto implícitos en las mismas, utilizados correcta o incorrectamente.
- Se ha realizado un estudio conjunto multivariante de la exactitud en los

juicios de asociación, identificando factores indicativos de las diferentes competencias necesarias en este tipo de juicios (sección 2.3.3).

Los estudios anteriores nos han llevado a identificar los siguientes tipos de concepciones erróneas sobre la asociación, que se describen con mayor detalle a lo largo del capítulo 2 y, en especial en la sección 2.4 de conclusiones:

Concepción determinista o funcional: Cuando el alumno cree que para que exista asociación a cada valor de la variable independiente debe corresponder un único valor de la dependiente; esto es, debe existir una función que relacione las dos variables. En consecuencia, no admite la dependencia aleatoria. En particular, dentro de ella se incluye la **concepción algebraica** identificada por Ruiz Higueras (1991) para el caso de la dependencia funcional, cuando los alumnos suponen que es preciso la existencia de una expresión algebraica que ligue las variables.

Concepción localista: Cuando el alumno basa su juicio sobre la asociación entre las variables en un subconjunto de casos, entre todos los datos proporcionados, que confirma el tipo de asociación percibido. Es decir, utiliza solamente un subconjunto de los valores, no teniendo en cuenta la representatividad de los mismos respecto a los datos globales.

Concepción unidireccional: Cuando el alumno cree que una variación de una de las variables en un sentido, debe ir acompañada de una variación de la otra en el mismo sentido. Para ellos sólo existe la dependencia directa o la independencia y el caso de dependencia inversa es interpretado como de independencia de las variables. Esta concepción ha sido también identificada en el estudio histórico del concepto.

Concepción causalista: Cuando el alumno cree que para que exista dependencia siempre debe existir la relación causa-efecto, identificando correlación y causalidad, concepción que es paralela a la mantenida por algunos autores, dentro de la controversia sobre el tema en filosofía de la ciencia. En este caso no se admite la existencia de asociación debida a la concordancia.

Con estos resultados, y otros descritos con mayor detalle en las conclusiones del capítulo 2, cumplimos los dos primeros objetivos propuestos en nuestra investigación, a la vez que aportamos datos que confirman las expectativas o hipótesis previas sobre los resultados alcanzables, expuestas en la sección 1.4.5.

En efecto, respecto a las hipótesis H1 y H2, en las secciones 2.2.5, 2.3.5 y 3.4.5, hemos identificado estrategias incorrectas y parcialmente correctas, utilizadas por un grupo numeroso de alumnos, y empleadas consistentemente en ciertos tipos de tareas. El análisis cualitativo de los datos realizado en la sección 2.2, ha permitido identificar las concepciones erróneas que acabamos de describir. El análisis de los conceptos y teoremas en acto implícitos en las estrategias realizado en las secciones 2.3 y 3.3 ha permitido identificar también aspectos correctos, aunque incompletos, en las concepciones de los alumnos.

Respecto a la hipótesis H3 sobre el efecto de las variables independientes de nuestro estudio sobre los procedimientos de resolución y errores de los alumnos, ha quedado suficientemente probada en dos aspectos:

- El análisis factorial y análisis "cluster", realizado en la sección 2.3.3, muestra el efecto de las variables de tarea sobre la exactitud

de los juicios de asociación, ya que los diferentes ítems se agrupan en los diversos factores, en función de dichas variables de tarea.

- Los análisis de correspondencias realizados en las secciones 2.3.5.1 y 2.3.5.2 muestran el efecto de las distintas variables de tarea de los ítems sobre las estrategias empleadas por los alumnos.

Evolución de concepciones

Para cumplir el objetivo 3 de la investigación, era necesario la elaboración de una ingeniería didáctica (Artigue, 1989) para la enseñanza de la asociación estadística, cuya preparación, desarrollo y resultados se han expuesto en el capítulo 3. Aunque la ingeniería desarrollada no constituye, en sí misma, el fin de la investigación, sino un medio de mostrar la evolución de las concepciones y el trabajo de los alumnos con el ordenador, consideramos que también puede constituir una aportación de nuestra tesis.

Una vez finalizada la enseñanza, los alumnos de la muestra experimental cumplimentaron un cuestionario paralelo al empleado como pretest. Comparando los resultados de estas dos pruebas se ha llegado a las siguientes conclusiones:

- Se ha notado una notable mejoría en los **juicios de asociación**, cuando los datos no contradicen las teorías previas. En particular, los alumnos identifican claramente el caso de independencia. Persiste, sin embargo la no percepción de la dependencia inversa en la tabla de contingencia.
- Se ha observado una evolución positiva en las **estrategias utilizadas** después de la instrucción. Ha habido un desplazamiento hacia los niveles superiores en la clasificación de Pérez Echeverría (1990). En todos los ítems se aprecia una mayor corrección de estrategias, desde el punto de vista de los conceptos y teoremas en acto empleados, excepto en los de comparación de muestras y los de dependencia inversa en tablas 2x2.
- Casi la totalidad de los alumnos han superado la concepción determinista sobre la asociación, aceptando ahora la dependencia aleatoria. También se ha visto superada la concepción localista, percibiendo ahora la importancia de tener en cuenta la totalidad de los datos para emitir el juicio de asociación. Hay mejoría en la concepción unidireccional, pero persiste la concepción causalista, que no ha sido cambiada por la instrucción.
- Debido a la confusión entre condicional y condicionado Falk (1986), algunos alumnos manifiestan dificultades en el cálculo de las frecuencias relativas condicionadas. También persiste la emisión del juicio de asociación en consonancia con las teorías previas, que priman, en ocasiones, sobre los datos presentados.

Estas conclusiones cumplen el tercer objetivo de nuestra investigación, en cuanto a que proporcionan una información sobre el estado de las concepciones de los alumnos al comenzar y finalizar el proceso de enseñanza. También permiten confirmar la cuarta hipótesis planteada en la sección 1.4.5. sobre la evolución de las concepciones, los tipos de errores y su relación con las variables de nuestro estudio.

Para comprender, sin embargo, con mayor detalle, cómo se ha producido este proceso, se realizó una observación detallada del trabajo de una pareja

de alumnos a lo largo de las sesiones prácticas de trabajo con ordenador. El análisis de su actividad y discusiones durante la resolución de los problemas ha permitido identificar los siguientes actos en la comprensión del concepto de asociación (Sierpinska, 1991):

AC1: *Para poder comparar dos o más muestras, con objeto de estudiar la posible relación entre dos variables, la comparación ha de efectuarse en términos de frecuencias relativas.*

AC2: *La posible existencia o no de diferencias en la distribución de una variable entre dos o más muestras se deduce a partir de la comparación de toda la distribución de la variable en cada una de las muestras y no de una parte de la misma.*

AC3: *A partir de una misma frecuencia absoluta pueden deducirse dos frecuencias relativas condicionales diferentes, según la variable que se emplee como condición. El papel de condición y condicionado en la frecuencia relativa condicional no es intercambiable.*

AC4: *Dos variables son independientes si la distribución condicional de una de ellas en función de un valor de la otra variable no depende del valor dado.*

AC5: *La asociación es una cuestión de grado; es difícil que se dé la independencia total; en el contexto de los estudios estadísticos también la dependencia funcional exacta es rara.*

AC6: *En la determinación de la asociación entre dos variables, éstas juegan un papel simétrico. Por el contrario, en el estudio de la regresión, las variables desempeñan un papel asimétrico. Hay dos rectas de regresión diferentes, según cual de las dos variables actúe como variable independiente.*

AC7: *Una correlación positiva indica dependencia directa entre las variables*

AC8: *Una correlación negativa indica dependencia inversa entre las variables.*

AC9: *El valor absoluto del coeficiente de correlación es indicativo de la intensidad de la asociación.*

Resolución de problemas de asociación usando el ordenador

Finalmente, el último objetivo propuesto en la sección 1.4.2, consistía en realizar un estudio de estrategias seguidas por los mismos sujetos en la resolución de juicios de asociación, cuando los datos forman parte de un fichero de datos que contiene otras variables y se dispone de un paquete estadístico para realizar los cálculos. Para lograr este objetivo, se realizó una prueba complementaria sobre este tipo de problemas, en la que cada alumno trabajó individualmente con un ordenador. A partir del análisis de sus respuestas al cuestionario y de la interacción del alumno con el ordenador, se han obtenido las siguientes conclusiones:

- En general, los alumnos no se conforman con un único resumen numérico o gráfico de los datos; por el contrario se utilizan varios programas para integrar la información, como paso previo en la resolución del problema.
- El resumen estadístico más frecuentemente empleado es la tabla de contingencia, construida mediante un proceso iterativo, a través de

las distribuciones de frecuencias condicionadas de una de las variables, para los distintos valores de la otra. También han utilizado la comparación de estadísticos, indicativo de un mayor grado de formalización en la adquisición de la idea de asociación, que es un modo de integración de la información no empleado en las investigaciones sobre el tema.

- Las estrategias posteriores, una vez obtenido el resumen de los datos, han tenido un mayor grado de corrección que las empleadas en el cuestionario utilizado como postest. Pensamos que debido a disponer del útil informático el alumno puede calcular más fácilmente las frecuencias relativas condicionales.
- En relación a las estrategias utilizadas en el postest, desaparecen algunas incorrectas y parcialmente correctas y aparecen otras, generalmente correctas. Han adquirido importancia el uso de estadísticos de orden. La mayoría de los juicios de asociación han sido correctos.

IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DEL TEMA

Una investigación como la que presentamos quedaría inconclusa si no aportara algunas conclusiones, aunque sean modestas, que de alguna manera, incidieran en la enseñanza del contenido matemático estudiado. A continuación, se exponen las implicaciones que para la enseñanza presentan, a nuestro juicio, los resultados de este trabajo.

Esta investigación ha puesto de manifiesto la complejidad de un tema, aparentemente simple, a la vez que su importancia. La identificación de los actos de comprensión del concepto, la controversia de las relaciones y diferencias entre correlación y causalidad, el hecho de que la comprensión de la idea de asociación no se alcanza espontáneamente, son motivos que aconsejan el reforzar la enseñanza de este tema a nivel universitario e incluso su iniciación en los últimos años de la enseñanza secundaria.

Este reforzamiento pasa, necesariamente, por una planificación detallada de la enseñanza y la preparación de los profesores que han de llevarla a cabo en los aspectos matemáticos y didácticos del concepto. Estos incluyen el conocimiento de las concepciones previas de los alumnos, respecto a la cual hemos aportado, en este trabajo, información relevante.

Un primer punto a tener en cuenta son los prerrequisitos matemáticos necesarios para abordar este tema con éxito. Además de los ya indicados por Inhelder y Piaget (1955) relativos al razonamiento proporcional y la probabilidad, hemos visto que sería necesario insistir en el estudio de la probabilidad condicionada, ya que los alumnos de nuestra muestra han presentado las dificultades respecto a la misma descritas por Falk (1986).

Se han identificado cuatro tipos de concepciones incorrectas sobre la asociación estadística que poseen algunos alumnos, de las cuales, las que hemos denominado concepción unidireccional y causalista, han permanecido al finalizar la instrucción. Ello implica la necesidad de diseño de situaciones didácticas específicas, que complementen las empleadas en nuestro experimento de enseñanza. En ellas, se debe propiciar que el alumno explique estas concepciones erróneas y entre en fuerte contradicción con las mismas, con objeto de crear un conflicto cognitivo, y lograr vencer estas concepciones erróneas.

Al diseñar y secuenciar las actividades que deben resolver los alumnos,

se deberían también tener en cuenta los actos de comprensión que hemos identificado sobre la idea de asociación, puesto que, como hemos visto en la sección 3.5, los alumnos observados no han sido capaces de alcanzar algunos de ellos.

IMPLICACIONES PARA OTRAS INVESTIGACIONES

La amplitud del tema de investigación abordado hace que, aunque, en las distintas secciones de este trabajo, se han aportado respuestas parciales a las preguntas que nos planteábamos en la introducción de la tesis, sea necesario completar nuestros resultados sobre diversos aspectos. A continuación sugerimos posibles líneas en que este trabajo puede ser extendido, con objeto de orientar la investigación futura sobre el tema.

Concepciones previas de los alumnos

- Aunque en este trabajo hemos detectado las dificultades de los alumnos relacionadas con el razonamiento proporcional, no hemos hecho un estudio sistemático sobre la implicación de estas dificultades sobre las estrategias y juicios de asociación. Una primera línea de investigación podría ir encaminada a esclarecer de una manera sistemática estas relaciones mediante el análisis de nuestros propios datos, referido a estas variables o bien complementándolos con datos sobre otros tipos de tareas.
- Aunque, en el estudio de concepciones previas que hemos realizado, se han utilizado tablas de contingencia 2×3 y 3×3 , nubes de puntos y comparación de muestras, hemos indicado que los resultados obtenidos son sólo una primera aportación al problema de identificación de estrategias en este tipo de tarea. En la literatura sobre el tema sólo se estudian las estrategias en tablas de contingencia 2×2 . Consideramos, en consecuencia, que abrimos aquí una línea de investigación prometedora, sobre la clasificación de las variables de estas tareas y el refinamiento de la categorización de estrategias presentada en nuestro trabajo.

Actos de comprensión del concepto

- Mediante el dispositivo de observación de una pareja de alumnos, hemos identificado nueve actos de comprensión que muestran la complejidad del significado del concepto de asociación. Sin embargo, esta lista no es completa, ya que hay muchos aspectos complementarios de los identificados, cuya comprensión es necesaria para una completa adquisición de la idea de asociación. Una extensión de la presente investigación podría ir encaminada a identificar sistemáticamente los actos de comprensión del concepto, lo que también tendría como consecuencia la posibilidad de elaboración de instrumentos más completos sobre la evaluación de las concepciones.

Evolución de las concepciones

- En el experimento de enseñanza efectuado se ha tratado el concepto de asociación desde un punto de vista descriptivo, estudiando como criterio de independencia en tablas de contingencia la igualdad de frecuencias relativas condicionadas; el coeficiente de correlación lineal y la recta de regresión en variables continuas y en la comparación de muestras sólo el estudio de las diferencias entre las distribuciones o sus estadísticos. No se ha trabajado nada de los aspectos de muestreo e inferencia. Por ello queda abierta la problemática del diseño y evaluación de una enseñanza donde se

trabajaran, los aspectos inferenciales con el fin de estudiar, en este caso, la evolución de concepciones.

Resolución de problemas de asociación usando un ordenador

Finalmente, el estudio de las estrategias en los juicios de asociación, en la situación de resolución de problemas con ordenador merece una doble reflexión. Por un lado, hemos visto que al ser esta tarea esencialmente diferente a las empleadas en las investigaciones sobre juicios de asociación, las estrategias y juicios se ven cambiadas respecto a las descritas en la literatura sobre el tema. Ello abre una nueva línea en la caracterización de las variables de tarea de este tipo de problema y en el estudio de las estrategias empleadas en la misma. La segunda reflexión es la oportunidad que brinda, desde un punto de vista metodológico, el registro de la interacción con el ordenador, como medio de estudio de los procesos de resolución de este tipo de problemas.

REFERENCIAS

- ABRAMSON, L. y ALLOY, L.B. (1980). Judgment of contingency: errors and their implications. En A. Baum y J. Singer (Eds.), *Advances in Environmental Psychology*, vol. 2, (p. 11-139). Hillsdale, N. Jersey: Erlbaum.
- ADI, H., KARPLUS, R. y LAWSON, A. (1978). Intellectual development beyond elementary school VI: correlational reasoning. *School Science and Mathematics*, 75, 675-683.
- AFIFI, A. A. y AZEN, S. P. (1977). *Statistical analysis: A computer oriented approach*. Nueva York: Academic Press.
- ALLAN, L.G. y JENKINS, H.M. (1980). The judgment of contingency and the nature of the response alternatives. *Canadian Journal of Psychology*, 34, 1-11.
- ALLAN L. G. y JENKINS H. M. (1983). The effect of representations of binary variables on judgment of influence. *Learning and Motivation*, 14, 381-405.
- ALLOY, L. B., ABRAMSON, L. Y. y KOSSMAN D. A. (1986). The judgment of predictability in depressed and nondepressed college students. En J. B. Overmier y F. R. Brush (Eds.) *Effect, conditioning and cognition: Essays on the determinants of behavior*, (p. 229-246). Hillsdale, N. Jersey: Erlbaum.
- ALLOY, L.B. y TABACHNIK, N. (1984). Assessment of covariation by humans and animals: The joint influence of prior expectations and current situational information. *Psychological Review*, 91, 112-149.

- ANDERSON, C. W. y BARNET, V. (1983). In step with the microcomputer. *Teaching Statistics*, 5, 2-6.
- ARCURI, L. y FORZI, M. (1988). Prior expectations and manner of data presentation as factors influencing covariation estimates for incomplete contingency tables. *Acta Psychologica*, 67, 121-133.
- ARKES, H.R. y HARKNESS, A.R. (1983). Estimates of contingency between two dichotomous variables. *Journal of Experimental Psychology: General*, 112, 1, 117-135.
- ARKES, H.R. y ROTHBART, M. (1985). Memory, retrieval and contingency judgments. *Journal of Personality and Social Psychology*, 49, 3, 598-606.
- ARTIGUE, M. (1984). *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques. Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques*. Tesis de Estado. Paris: Universidad París VII.
- ARTIGUE, M. (1989). Ingenierie didactique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 9.3, 281-308
- ARTIGUE, M. (1990). Epistemologie et Didactique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 10, 2-3, 241-286.
- BABBIE, E. (1989). *The practice of social research*. Belmont, Ca: Wadsworth Publishing Company.
- BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Librairie Utin
- BARBANCHO A. G. (1973). *Estadística elemental moderna*. Barcelona: Ed. Ariel. (Cuarta edición, reimpresión de 1.975).
- BARNETT, V. (1988). Statistical consultancy. A basis for teaching and research. En R. Davidson, y J. Swift (Ed.): *Proceedings of the II International Conference on Teaching Statistics*, (p. 303-307). Universidad de Victoria.
- BATANERO BERNABEU, M. C., DIAZ GODINO y ESTEPA CASTRO, A. (1987). Un paquete didáctico de programas para el laboratorio de estadística. En I. Brincones y cols. (Ed.). *Actas del I Simposio Internacional de Educación e Informática*, (p. 380-388). Madrid: I.C.E. de la Universidad Autónoma.
- BATANERO BERNABEU, M. C., DÍAZ GODINO, J. y ESTEPA CASTRO, A. (1988). *Curso de Estadística aplicada basado en el uso de ordenadores*. Jaén: Los autores.
- BATANERO BERNABEU, M. C., DIAZ GODINO y ESTEPA CASTRO, A. (1991). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la Enseñanza Secundaria. *Suma*, 9, 25-31.
- BATANERO BERNABEU, M.C., ESTEPA CASTRO, A. y DIAZ GODINO, J. (1991). Estrategias y argumentos en el estudio descriptivo de la asociación usando microordenadores. *Enseñanza de las Ciencias*, 9, 2, 145-150.
- BATANERO, M. C. y GODINO, J. D. (1992a). Una metodología para estudiar la interacción de los estudiantes con el ordenador. Quebec, Canadá: Comunicación presentada en el ICME VII.

- BATANERO, M. C., GODINO, J. D. y VALLECILLOS, A. (1992b). El análisis de datos como útil y como objeto en Didáctica de la Matemática. *Educación Matemática*, 4, 1 46-53.
- BECKER, R. A., CHAMBERS, J. M. y WILKS, A. R. (1988). *The new S language*. Pacific Grove, Ca: Wadsworth and Brooks.
- BENZECRI, J. P. (1982). *Histoire et Préhistoire de l'analyse des données*. París: Bordás.
- BERRY, W. D. y FELDMAN, S. (1985). *Multiple regression in practice*. Londres: Sage University Paper.
- BEYTH-MAROM, R. (1982). Perception of correlation reexamined. *Memory and Cognition*, 10, 6, 511-519.
- BIEHLER, R. (1988). Educational perspectives on exploratory data Analysis. *Sixth International Congress on Mathematical Education*. Budapest.
- BIEHLER, R. (1990). Changing conceptions of statistics. A problem area for teacher education. En A. Hawkins (Ed.), *Training teachers to teach statistics*, (p. 20-38). Vooburg: I.S.I.
- BIEHLER, R. (1991). Computers in probability education. En R. Kapadia and M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in Education*, (p. 109-211). Amsterdam: Reidel.
- BISQUERRA R. (1988). *Introducción a la estadística aplicada a la investigación educativa. Un enfoque informático con los paquetes BMDP y SPSS*. Barcelona: Promociones Publicaciones Universitarias.
- BLAND, J. M. (1985). Computer simulation of two statistical principles. *Teaching Statistics*, 7, 74-77.
- BOLLEN, K. A. (1989). *Structural equations with latent variables*. Nueva York: J. Wiley.
- BRANDWEIN, A. C. y ROSENBERG, L. (1991). Teaching the introductory statistics course with a lotus 1-2-3 package. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics*, Vol 2, (p. 183-186). Nueva Zelanda: Otago University Press.
- BRAY, J. H. y MAXWELL, S. (1985). *Multivariate analysis of variance*. Londres: Sage University Paper.
- BRENNAN, R. L. (1983). *Elements of Generalizability Theory*. Iowa: ACT Publications.
- BRENT, E. E. (1989a). *Data collection selection: An expert system to assist in the selection of appropriate data collection procedures*. Versión 1.0. Columbia, Missouri: The Idea Works, Inc.
- BRENT, E. E. (1989b). *Scaling strategist: An expert system to assist in the design of questionnaires*. Versión 1.0. Columbia, Missouri: The Idea Works, Inc.

BRENT, E. E., MIRELLI, E. J. y DETRING, E. y RAMOS, F. (1991). *Statistical Navigator Professional*. Columbia, Missouri: The idea Works.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2, 164-198.

BROUSSEAU, G. (1986a). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des Mathématiques*. Thèse d'Etat. Burdeos: Université de Bordeaux I

BROUSSEAU, G. (1986b). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7.2, 33-115.

BURNILL, G. (1991). Quantitative literacy - implementation through teacher inservice. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics*, Vol 1, (p. 50-55). Nueva Zelanda: Otago University Press.

BUTTS, T. (1980) Posing problems properly. En S. Krulik, (Ed.), *Problem Solving in School Mathematics, 1980 Yearbook*, (p. 23-33). Reston, Virginia: N.C.T.M.

CARMINES, E. G. y ZELLER, R. A. (1979). *Reliability and validity assessment*. Londres: Sage University Paper.

CARRETERO, M. Y GARCIA MADRUGA, J. A. (1984). *Lecturas de psicología del pensamiento. Razonamiento, solución de problemas y desarrollo cognitivo*. Madrid: Alianza Editorial.

CARRETERO, M., PEREZ ECHEVERRIA, M.P. y POZO, J.I. (1985). El extraño caso del aceite de colza y la solución de problemas de correlación. *Revista de Psicología General y Aplicada* 40, 4, 703-725

CASTRO, E. (1991). *Estudio sobre resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativos*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

CAUTY, A. (1984). Tropes et figures du discours mathématique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 5, 1, 81-128.

CELEUX, G., DIDAY, E., GOVART, G. y LE CHEVALIER, Y. (1989). *Classification automatique des données*. París: Dunod.

CHAMBERS, J. M., CLEVELAND, W. S., KLEINER, B. y TUKEY, P. A. (1983). *Graphical methods for data analysis*. Boston: Duxbury Press.

CHAPMAN, L.J. y CHAPMAN, J.P. (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid Psychodiagnostic signs. *Journal of Abnormal Psychology*, 74, 271-280.

CHAPMAN G.B. y ROBBINS S. J. (1990). Cue interaction in human contingency judgment. *Memory & Cognition*, 18, 5, 537-545.

CHATFIELD, A. (1988). *Problem solving. A statistician's guide*. Londres: Chapman & Hall.

CHATLOSH, D.L., NEUNABER, D.J. y WASSERMAN, E.A. (1985). Response-outcome contingency: behavioral and judgment effects of appetitive and aversive outcomes with college students. *Learning and Motivation*, 16, 1-34.

- CHEVALLARD, Y. (1987). *Integration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques*. Marsella: IREM Aix' Marseille
- CHEVALLARD, Y. (1989): Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. En: *Actas del Seminario de Grenoble*. Grenoble: IREM. Université de Grenoble.
- CHEVARNEY, N. L., COLLIER, R. O. y FIENBERG, S. (1977). A framework for the development of measurement instruments for evaluating the introductory statistics course. *The American Statistician* 31, 1, 17-23.
- COCKCROFT (1985). *Las Matemáticas sí cuentan*. Madrid: M.E.C.
- COOK, T. D. y CAMPBELL, D. T. (1979). *Quasi-experimentation. Design and analysis issues for field setting*. Chicago: Rand Mc. Nelly Publishing Company.
- CONFREY, J. (1990). A review of the research on student conceptions in Mathematics, Science, and Programming. *Review of Research in Education*, 16, 1, 3-55.
- CORNEJO, J. M. (1988). *Técnicas de investigación social: el análisis de correspondencias*. Barcelona: P.P.U.
- CROCKER, J. (1981) Judgment of covariation by social perceivers. *Psychological Bulletin*. 90, 2, 272-292.
- CROCKER, J. (1982). Biased questions in judgment of covariation studies. *Personality and Social Psychology Bulletin*. 8, 214-220.
- CRUISE, J. R., DUDLEY, R. L. y THAYER, J. D. (1984). *A resource guide for introductory statistics*. Dubuque, Iowa: Kendall / Hunt Publishing Company.
- CUADRAS, C. M. (1991). *Métodos de análisis multivariante*. Barcelona: P.P.U. (Segunda edición)
- CURCIO, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, Virginia: N. C. T. M.
- DAS, M. N. y GIRI, N. C. (1986). *Desing and analysis of experiments*. Nueva York: John Wiley & Sons (Segunda edición).
- DANE, F. C. (1990). *Research methods*. Pacific Grow, California: Thomson Informatión Publishing group.
- DAVIS, J. A. (1985). *The logic of causal order*. Londres: Sage University Paper.
- DEAR, R. (1991). Simulations in the classroom. En Vere-Jones, D. (Ed.): *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics*, (p. 238-242). Nueva Zelanda: Otago University Paper.
- DICKINSON, A. y SHANKS, D. (1985). Animal conditioning and human causality judgment. En L. G. Nilsson y T. Archer (Eds.), *Perspectives on learning and memory*, (p. 167-191). Hillsdale, Nueva Jersey: LEA.

- DICKINSON, A., SHANKS, D. y EVENDEN, J. (1984). Judgment of act-outcome contingency: the role of selective attribution. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*. 36A, 29-50.
- DIXON, W. J. (Ed.) (1990). *BMDP statistical software manual*. University of California Press.
- DOUADY, R. (1986). *Le jeu de Cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Recherches en Didactique des mathématiques*, 7.2, 5-31
- DUNN, O. J. y CLARCK, V. A. (1987). *Applied statistics: Analysis of variance and regression*. Nueva York: J. Wiley. (Segunda Edición).
- ELLET, F. S. y ERICKSON, D. P. (1986). Correlation, partial correlation and causation. *Synthese*, 67, 157-173.
- ENGEL, A. (1986). Statistics by simulation. En R. Davidson, y J. Swift (Ed.), *Proceedings of the II International Conference on Teaching Statistics*, (p. 217-224). Universidad de Victoria.
- ENGEL, A. (1991). The central role of the PC in teaching statistics at school. En Vere-Jones, D. (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics*. (p. 168-177). Nueva Zelanda: Otago University Press.
- ERLICK, D. E. y MILLS, R. G. (1967). Perceptual quantification of conditional dependency. *Journal of Experimental Psychology*, 73, 1, 9-14.
- ESCOFIER, B. y PAGES, J. (1988). *Analyses factorielles simples et multiples: objectifs, méthodes et interprétation*. París: Dunod.
- ESTEPA CASTRO, A. (1990). *Enseñanza de la Estadística basada en el uso de ordenadores: Un estudio exploratorio*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- ESTEPA CASTRO, A., BATANERO BERNABEU, M.C. y DIAZ GODINO, J. (1992) Una metodología de análisis de interacción alumno-ordenador en la investigación sobre informática educativa. *Epsilon*, 22, (p. 47-53). (Número especial dedicado al I CIBEM).
- EVANS, J. St. B. T. (1982). On statistical intuitions and inferential rules. A discussion of Kahneman and Tversky. *Cognition*. 12, 323-326.
- EVERITT, B. S. (1980). *The analysis of contingency tables*. Londres: Chapman & Hall.
- EVERTSON, C. (1989). La observación como indagación y método. En M. C. Wittrock (Ed.), *La investigación de la enseñanza*, Vol 2, (p. 303-328). Barcelona: Paidos.
- FALK, R. (1986). Misconceptions of statistical significance. *Journal of structural learning*, 9, 83-96.
- FALK, R. (1988). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson & J. Swift (Eds.) *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*, (p. 242-297). Universidad de Victoria.

FELDT, L. S. y BRENNAN, R. L. (1991). Reliability. En R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement*, (p. 105-146). Nueva York: MacMillan.

FELLER, W. (1973). Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones. México: Limusa. (Segunda reimpresión, 1980).

FISCH, B. y GRIFFEATH, D. (1988). *Graphical aids for stochastics processes*. Belmont, Ca: Wadsworth & Brooks.

FISCHBEIN, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

FISCHBEIN, E. (1990). Training teachers to teach statistics. En A. Hawkins (Ed.), *Training teachers to teach statistics*. Vooburg: I.S.I.

FOX, D. J. (1987). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: Ediciones de la Universidad de Navarra. (Segunda edición)

FREUDENTHAL, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

FRUDE, N. (1987). *A guide to SPSS/PC+*. Londres: Mc. Milan Education.

GALMACCI, G. y PANNONE, M. A. (1991). SUSAM: A teaching tool for multicollinearity analysis. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics*, Vol 2, (p. 209-216). Nueva Zelanda: Otago University Press.

GANDHI, B.V.R., VELEZ AROCHO, J.I., GANDHI, P. M. y GANDHI, S. (1991). Career orientation and training in statistics for secondary school students in Puerto Rico. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics*. Vol 1, (p. 75-78). Nueva Zelanda: Otago University Press.

GARFIELD, J. (1981). *An investigation of factors influencing student attainment of statistical competence*. Ph. Dissertation. University of Minnesota. UMI. 800-521-0600.

GARFIELD, J. y AHLGREN, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probabilities and statistics: Implications for research. *Journal for research in Mathematics Education*, 19, 1, 44-63.

GEBOTYS, R. J. y CLAXTON-OLDFIELD, S. P. (1989). Errors in the quantification of uncertainty: a product of heuristics or minimal probability knowledge base? *Applied Cognitive Psychology*, 3, 157-170.

GIMENEZ, J. (1991). *Innovación metodológica de la Didáctica especial del número racional positivo. (Diagnóstico cognitivo y desarrollo metodológico)*. Tesis Doctoral. Barcelona: Departamento de Pedagogía i Didàctica. Facultat de Lletres. Universitat Autònoma de Barcelona.

GODINO, J. D. y BATANERO BERNABEU, M. C. (1983a). Teoremas de límite en probabilidad: una introducción didáctica con microordenador. En *Actas de las I Jornadas Andaluzas de profesores de matemáticas*, (p. 101-110). Cádiz: Universidad de Cádiz.

- GODINO, J. D. y BATANERO BERNABEU, M. C. (1983b). Distribuciones de estimadores en el muestreo: una introducción didáctica con microordenador. En *Actas de las I Jornadas Andaluzas de profesores de matemáticas*. (p. 111-120). Cádiz: Universidad de Cádiz.
- GODINO, J. D. y BATANERO BERNABEU, M. C. y ESTEPA CASTRO, A. (1988). *Laboratorio de Estadística: Uso del paquete de programas PRODEST*. Jaén: Los autores.
- GODINO, J. D. y BATANERO BERNABEU, M. C. y ESTEPA CASTRO, A. (1990). Estrategias y argumentos en el estudio descriptivo de la asociación usando microordenadores. En G. Booker, P. Cobb y T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the XIV International Conference of Psychology of Mathematics Education*, (p. 157-164). México: P.M.E. Program Committe.
- GODINO, J. D. y BATANERO BERNABEU, M. C. y ESTEPA CASTRO, A. (1991). Task Variables in Statistical Problem Solving Using Computers. En J. P. Ponte y cols. (Eds.), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies. Research in Contexts of Practice*, (p. 193-203). Berlin: Spring-Verlag.
- GODINO, J. D. y BATANERO, M.C. (1993). La notion du signifié en didactique des mathématiques. Comunicación presentada en el Coloquio "Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France". París, 1993.
- GOETZ, J. P. y LECOMPTE, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.
- GOKHALE, D. V. y KULLBACK, S. (1978). *The information in contingency tables*. Nueva York: Marcel Dekker, Inc.
- GOLDEN, C. W. (1986). Computer graphics: aid for statistical instruction. *The Journal of Computer Information Systems*, 26, 29-33.
- GONZALEZ, J. L. y cols. (1990). *Números enteros*. Madrid: Síntesis.
- GOODMAN, T. (1986). Using the microcomputer to teach Statistics. *Mathematics Teacher*, 79, (3), 210-215.
- GRAS, R. (1992). L'analyse des données: une méthodologie de traitement de questions de didactique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 12, 1, 59-72.
- GREEN, D. R. (1981). *Probability concepts school pupils aged 11-16 years*. Ph. D. Thesis, Loughborough University.
- GRONER, R., GRONER, M. y BISHOP, W. F. (1983). The role of heuristics in models of decision. En R. W. Scholz (Ed.). *Decision making under uncertainty*. (p. 87-108). Amsterdam: North Holland.
- GUTIERREZ JAIMEZ, R.; MARTINEZ ALMECIJA, A. Y RODRIGUEZ TORREBLANCA, C. (1993). *Curso básico de probabilidad*. Madrid: Pirámide.
- HARMAN, H. H. (1976). *Modern factor analysis*. The University of Chicago Press.
- HARRISON, S. (1993). Máxima: Interactive teaching programs for Mathematics. *Teaching Statistics*, 15, 2, 40-41.

HARTWING, F. y DEARING, B.F. (1979). *Exploratory data analysis*. Londres: Sage University Press.

HAWKINS, A. (1990). Success and failure in statistical education - a UK perspective. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics*, Vol 1, (p. 24-32). Nueva Zelanda: Otago University Press.

HAWKINS, A., JOLLIFFE, F. y GLICKMAN, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. Nueva York: Longman.

HEITELE, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastics ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.

HERMAN, J. (1990). *Analyse de données qualitatives. Vol 2. Traitement d'enquêtes, modèles multivariés*. París: Masson.

HILDEBRAND, D. K., LANG, J. D. y ROSENTHAL, H. (1977) *Analysis of nominal data*. Londres: Sage University Paper.

HOGARTH, R.M. (1980). *Judgment and choice: The psychology of decision*. Chischester: Wiley.

HOLMES, P. (1980). *Teaching statistics 11-16*. Schools Council by Foulsham Educational. England.

HOLMES, P. (1986). The impact of computers on school statistics teaching. En R. Davidson y J. Swifft (Ed.), *Proceedings of the II International Conference on Teaching Statistics*. (p. 194-196). Universidad de Victoria.

HOLMES, P. y ROUNCENFIELD, M. (1990). *From cooperation to coordination*. Sheffield: Centre for Statistical Education.

HOWSON, A. B. y KAHANE, J. P. (1986). *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Cambridge: Cambridge University Press.

INHELDER, B. y PIAGET, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Paris: Presses Universitaires de France. (Traducción castellana, Primera reimpresión, 1985. Barcelona: Paidos).

JENKINS, H.M. y WARD, W.C. (1965). Judgment of de contingency between responses and outcomes. *Psychological Monographs*. 79, 1-17.

JENNINGS, D. L., AMABILE, T. M. y ROSS, L. (1982). Informal covariation assessment: Data-based versus theory-based judgments. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Ed.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, (p. 211-230). Nueva York: Cambridge University Press.

JOINER, B. L. (1982). The case for using computers in teaching statistics. En D. R. Grey y cols. (Ed.): *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*. (p. 307-312). University of Sheffield.

JUNGERMAM, H. (1983). The two camps on rationality. En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty*. (p. 63-86). Amsterdam: North Holland.

JULLIEN, M. y NIN, G. (1989). L'E.D.A. au secours de L'O.G.D. ou quelques remarques concernant l'enseignement de la statistique dans les collèges. *Petit x*, 19, 29-41.

KADER, G. (1991). Simulations in Mathematics - Probability and computing. En Vere-Jones, D. (Ed.): *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics* (p. 178-184). Nueva Zelanda: Otago University Press.

KAHNEMAN, D., SLOVIC P. y A. TVERSKY (1982) *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Nueva York: Cambridge University Press. (Reimpresión de 1985)

KAHNEMAN, D. y TVERSKY, A. (1973). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Ed.) *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, (p. 48-68). Nueva York: Cambridge University Press.

KANJI, G. K. y HARRIS, R. R. (1986). The challenge of computers in today's statistical education. En R. Davidson y J. Swift (Ed.), *Proceedings of the II International Conference on Teaching Statistics*, (p. 175-179). Universidad de Victoria.

KAPUT, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (p. 515-556). Nueva York: Macmillan.

KELLEY, H. (1973). The process of causal attribution. *American Psychologist*, 28, 107-128.

KEMPTHORNE, O. (1980). The teaching of statistics: content versus form. *The american statistician*, 34, 1, 17-21.

KENNEDY, W. J. y GENTLE, J. E. (1980). *Statistical computing*. Nueva York: Marcel Dekker.

KILPATRICK, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradboard (Eds.), *Mathematical problem solving: papers from a research workshop*, (p. 7-20). Columbus, Ohio: Eric/Smeac.

KILPATRICK, F. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, (p. 1-16). Hillsdale, Nueva Jersey: LEA.

KNOKE, D. y BURKE, D. (1980). *Log-linear models*. Londres: Sage.

KULM, G. (1980). The classification of problem-solving research variables. En Goldin y McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving*, (1984). Philadelphia: The Franklin Institute Press.

KUNDA, Z y NISBETT, R. (1986). The psychometrics of everyday life. *Cognitive psychology*, 18, 195-224.

LANE D. M., ANDERSON, C. A. y KELLAM, K. L. (1985). Judging the relatedness of variables: The psychophysics of covariation detection. *Journal of Experimental Psychology. Perception and Performance*, 11, 5, 640-649.

- LANGER, E. J. (1975). The illusion of control. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, 1982, (p. 231-238). Nueva York: Cambridge University Press.
- LECOUTRE, M. P. (1986). Effet d'information de nature combination et de nature fréquentielle sur les jugements probabilistes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6, 2-3, 193-213.
- LECOUTRE, M. P. (1990). *Statistique descriptive. Exercices corrigés avec rappels de cours*. Paris: Masson.
- LEON, M.R. and ZAWOJEWSKI, J.S. (1991). Use of the arithmetic mean: an investigation of four properties issues and preliminary results. En Vere-Jones, D. (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics*, Vol. 1, (p. 302-306). Nueva Zelanda: Otago University Press.
- LERMAN, I. C. (1981). *Classification et analyse ordinaire des données*. París: Dunod.
- LESH, R. (1987). The evolution of problem representations in the presence of powerful conceptual amplifiers. En C Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*, (p. 117-206). Londres: Lawrence Erlbaum Assoc.
- LESTER, F. K. (1980). Research on mathematical problem solving. En R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education*, (p. 286-323). Reston, Virginia: N.C.T.M.
- LI, K. Y. and SHEN, S. M. (1992). Student' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics*, 14, 1, 2-9.
- LIEBETRAU, A. M. (1983). *Measures of association*. Londres: Sage University Press.
- LOPEZ CORELLA, S. y DIEZ LOZANO, B. (1988). Problemas resueltos de Estadística y Probabilidades. Zaragoza: Edelvives.
- MCKENZIE, J.D., RYBOLT, W.H. y KOPCSO, D.P. (1986). A study of the interaction between the use of statistical software and the data analysis process. En R. Davidson y J. Swift, (Ed.), *Proceedings of the II International Conference on Teaching Statistics*. (p. 190-193). University of Victoria.
- MESSICK, S. (1992). Validity. En R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement*. (p. 13-104). Londres: MacMillan.
- MEVARECH, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 415-429.
- MILES, M. B. y HUBERMAN, A. M. (1984). *Qualitative data analysis: a sourcebook of new methods*. Londres: Sage Publications.
- MOORE, D. S. (1991). *Statistics. Concepts and controversies*. Nueva York: Freeman.
- MOORE, D. S. (1992). Teaching statistics as a respectable subject. En F. Gordon y S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first century* (p. 14-25). Nueva Jersey: The Mathematical Association of America.

MURPHY, G.L. y MEDIN, D.L. (1985). The role of theories in conceptual coherence. *Psychological Review*, 92, 3, 289-316.

N.C.T.M. (1988). *Data analysis*. Reston, Virginia: N.C.T.M.

NAKAMURA, R. (1991). Teaching the gaussian distribution with computers in senior high school. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics*, Vol 1, (p. 199-204). Nueva Zelanda: Otago University Press.

NEWMAN, J. R. (1956). *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Traducción española de Ediciones Grijalbo. Barcelona. (Cuarta edición, 1979).

NIE, N. H., HULL, C. H., JENKINS, J. G., STEINBRENNER, K. y BENT, D. H. (1975). *S.P.S.S. Statistical package for the social sciences*. Nueva York: Mc. Graw- Hill.

NISBETT, R., BORGIDA, E., CRANDALL, R. y REED, H. (1982). Popular induction: Information is not necessarily informative. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Ed.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, (p. 101-116). Nueva York: Cambridge University Press.

NISBETT, R. y ROSS, L. (1980). *Human inference: strategies and shortcomings of social judgment*. Nueva Jersey: Prentice Hall.

NORTES CHECA, A. (1977). *Estadística teórica y aplicada*. Burgos: H. S. R.

OOSTHUIZEN, J.H. (1991). Teaching and learning statistics. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics*, Vol. 2, (p. 61-66). Nueva Zelanda: Otago University Paper.

ORTEGA MARTINEZ, A. R. (1991). *Contingencia y juicios de covariación en humanos*. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Psicología Experimental y Fisiología del Comportamiento. Universidad de Granada.

ORTON, A. (1988). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata y MEC.

PEARSON, E. S. (1965a). Some incidents in the early history of biometry and statistics 1890-1894. *Biometrika*, 52, 3-18. En E. S. Pearson, y M. Kendall (1970). *Studies in the history of Statistics and Probability*, Vol 1, (p. 323-338). Londres: Charles Griffin.

PEARSON, E. S. (1965b). Some reflexions on continuity in the development of mathematical statistics 1885-1920. *Biometrika*, 54, 341-55. En E. S. Pearson, y M. Kendall, (1970). *Studies in the history of Statistics and Probability*. Vol. 1, (p. 339-354). Londres: Charles Griffin.

PEARSON, K. (1906). Walter Frank Raphael Weldon 1860-1926. *Biometrika*, 5, 1-52. En Pearson, E. S. y Kendall, M. (1970), (Eds.), *Studies in the history of Statistics and Probability*, Vol 1, (p. 265-322). Londres: Charles Griffin.

PEARSON, K. (1920). Notes on the history of correlation. *Biometrika*, 13, 25-45. En Pearson, E. S. y Kendall, M. (1970), (Eds.), *Studies in the history of Statistics and Probability*, Vol 1, (p. 185-205). Londres: Charles Griffin.

- PEREZ ECHEVERRIA, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.
- PETERSON C. (1980). Recognition of noncontingency. *Journal Personality and Social Psychology*, 38, 5, 727-734.
- PETERSON C. R. y BEACH L. R. (1967). Man as an intuitive statistician. *Psychological Bulletin*, 68, 1, 29-46.
- PIAGET e INHEIDER (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France. (Segunda edición de 1.974).
- PIAGET, J. y GARCIA, R. (1973). *Las explicaciones causales*. Barcelona: Barral.
- POLLATSEK, A. y cols. (1981). Concept or computation: Students' understandings of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.
- POLYJA, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- POPPER, K. (1962). *La lógica de la investigación científica*. Madrid: Tecnos.
- POZO, J.I. (1987). *Aprendizaje de la ciencia y pensamiento causal*. Madrid: Visor.
- PUIG, L. y CERDAN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- RÄDE, L. (1991). Statistics and the computer. En D. Vere-Jones, (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics*. Vol. 1, (p. 435-439). Nueva Zelanda: Otago University Paper.
- REGIER, M. H., MOHAPATRA, R. N. y MOHAPATRA, S. N. (1982). *Biomedical statistics with computing*. Nueva York: John Wiley.
- REYNOLDS, H. T. (1977). *The analysis of cross-classifications*. Nueva York: Free Press.
- RICO, L. (1993). *Investigación sobre errores de aprendizaje en Educación Matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- RIOS, S. (1967). *Métodos estadísticos*. Madrid: Ediciones del Castillo.
- RIOS, S. (1976). *Ánalysis de decisiones*. Madrid: ICE.
- RIVADULLA, A. (1991). *Probabilidad e inferencia científica*. Barcelona: Anthropos.
- RUIZ HIGUERAS, L. (1991). *Una aproximación a las concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- RUSSEL, B. (1973). "Acerca de la noción de causa". En B. Russell. *Obras completas*. (p. 1015-1029). Madrid: Aguilar.

- RUSSELL, S. (1988). Graphing software: the place of computers in an elementary data analysis curriculum. *Sixth International Congress on Mathematical Education*. Budapest.
- RUSSEL, S. J. y MOKROS, J. R. (1991). What's typical? Children's and teachers' ideas about average. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics*, Vol. 1, (p. 307-313). Nueva Zelanda: Otago University Press.
- RYAN, T. A., JOINER, B. L. Y RYAN, B. F. (1982). *Minitab reference manual, Minitab Proyect*. Philadelphia: University Park.
- SAX, G. (1989). *Principles of educational and Psychological measurement and evaluation*. Belmont, Ca: Wadsworth Publishing Company.
- SCHOENFELD, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in Mathematics. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (p. 334-370). Nueva York: Macmillan.
- SCHOLZ, R. W. (1983). *Decision making under uncertainty*. Amsterdam: North Holland
- SCHOLZ, R. W. (1987). *Cognitive strategies in stochastic thinking*. Dordrecht: Reidel.
- SCHOLZ, R. W. (1991). Psychological research in probabilistic understanding. En R. Kapadia y M. Borovcnik, (Eds.), *Chance Encounters: Probability in Education*. p. (213-249). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- SCHROEDER, T. L. (1983). An assessment of elementary school students's development and application of probability concepts while playing and discussing two strategy games on a microcomputer. *DAI*, 45, 1365A.
- SCHUYTEN G. (1991). Statistical thinking in Psychology and Education. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics*, Vol 2, (p. 486-489). Nueva Zelanda: Otago University Press.
- SCOTT, P. (1989). Introducción a la investigación y evaluación educativa. *Lecturas en Educación Matemática*. México: UNAM
- SEAL, H. L. (1967). The historical development of the Gauss linear model. *Biometrika*, 54, 1-24. En Pearson, E. S. y Kendall, M. (1970). *Studies in the history of Statistics and Probability*. Vol 1, (p. 207-230). Londres: Charles Griffin.
- SHAKLEE, H. (1979). Bounded rationality and cognitive development: upper limits on growth? *Cognitive Psychology*, 11, 327-335.
- SHAKLEE, H. (1983). Human covariation judgment: accuracy and strategy. *Learning and Motivation*, 14, 433-448.
- SHAKLEE, H. y MIMS, M. (1981). Development of rule use in judgment of covariation between events. *Child Development*, 52, 317-325.

- SHAKLEE, H. y MINS, M. (1982). Sources of error in judging event covariations: Effects of memory demands. *Journal of Experimental Psychology Learning, Memory and Cognition*, 8, 3, 208-224.
- SHAKLEE, H. y TUCKER, D. (1980). A rule analysis judgments of covariation between events. *Memory and Cognition*, 8, 459-467.
- SHANKS, D.R. (1985). Forward and backward bloking in human contingency judgment. *The Quartely Journal of Experimental Psychology*, 37B, 1-21.
- SHANKS, D. R. (1987). Acquisition functions in contingency judgment. *Learning and Motivation*, 18, 147-166.
- SHANKS, D. R. (1989). Selectional processes in causality judgment. *Memory & Cognition*, 17, 1, 27-34
- SHANKS, D. R. (en prensa). Actions and judgment of causality. Cambridge: Applied Psychology Unit.
- SHANKS, D. R., PEARSON S. M. y DICKINSON A. (1989). Temporal contiguity and judgment of causality by human subjects. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 41B, 2, 139-159.
- SIEGEL, S. (1986). *Estadística no paramétrica*. México: Trillas.
- SIERSPINSKA, A. (1991). Some remarks on understanding in mathematics. *For the learning of mathematics*, 10, 3, 24-36.
- SIERRA BRAVO, R. (1991). *Diccionario práctico de Estadística*. Madrid: Paraninfo.
- SIMON, J. L. (1990). *Resampling: Probability and Statistics a radically different way*. Alington, VA: Resampling Stats.
- SKEMP, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, Nov. 9-15
- SMEDLUND, J. (1963). The concept of correlation in adults. *Scandinavian Journal of Psychology*, 4, 165-174.
- SPEED, T. (1988). Question, answers and statistics. En R. Davidson, y J. Swifft (Ed.): *Proceedings of the II International Conference on Teaching Statistics*, (p. 18-28). Universidad de Victoria.
- STANIC, G.M.A y KILPATRICK, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematical curriculum. En R. I. Charles y E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Hillsdale, N. Jersey: Lawrence Elrbaum Associate Publisher.
- STEIMBRING, H. (1990). The nature of stochastical knowledge and the traditional mathematics curriculum. Some experience with in-service training and developping materials. En A. Hawkins (Ed.), *Training teachers to teach statistics*, (p. 2-19). Vooburg: I.S.I.
- STEINER, G. H. (1990). Needed cooperation between science education and mathematics education. *Zentrakblatt für Didaktik der Mathematik*, 90, 6, 194-197.

- STIRLING, W. D. (1987). *Statlab. Microcomputer based practical classes and demonstrations for teaching statistical concepts.* Wellington, Nueva Zelanda: The New Zealand Statistical Association.
- STRÄESSER, R. y CAPPONI, B. (1991). Drawing-computer model-figure. En G. Furinghetti (Ed.): *Proceedings of the XV PME Conference*, (p. 302-309). Genova: Dipartamento di Matemática. Universitá Genova.
- TANIS, E. A. (1992). Computer simulations to motivate understanding. En F. Gordon y S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first century*, (p. 217-225). Nueva Jersey: The Mathematical Association of America.
- TANNER, A. y WARDROP, R. (1992). Hands-on activities in introductory statistics. En F. Gordon y S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first century*, (p. 122-127). Nueva Jersey: The Mathematical Association of America.
- TAYLOR, S. J. y BOGDAN, R. (1986). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* Buenos Aires: Paidos.
- TENNANT-SMITH (1985), J. (1985) *Estadística: teoría, problemas y aplicaciones en Basic.* Madrid: Anaya Multimedia.
- THORNDIKE, R. L. (1989). *Psicometría aplicada.* México: Limusa
- TROLIER T. K. y HAMILTON, D. L. (1986). Variables influencing judgments of correlational relations. *Journal of Personality and Social Psychology*, 50, 5, 879-888.
- TUKEY, J. (1962). The future of data analysis. *Annals of Mathematical Statistics*, 33, 1-67.
- TUKEY, J.W. (1977). *Exploratory Data Analysis.* Addisson Wesley. Nueva York.
- TVERSKY, A. y KAHNEMAN, D. (1982a). Causal schemes in judgments under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, (p. 117-128). Nueva York: Cambridge University Press.
- TVERSKY, A. y KAHNEMAN, D. (1982b). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, (p. 3-20). Nueva York: Cambridge University Press. (Traducido en M. Carretero y J. A. García Madruga (1984). *Lecturas de psicología del pensamiento. Razonamiento, solución de problemas y desarrollo cognitivo.* (P. 169-184). Madrid: Alianza Editorial).
- TVERSKY, A., SATTATH, S. y SLOVIC, P. (1988). Contingent weighting in judgment and choice. *Psychological Review*, 95, 3, 371-384.
- VAN TASSEL, D. (1980). *Basic pack statistics programs for small computers.* Nueva Jersey: Prentice Hall.
- VAZQUEZ, C. (1987). Judgment of contingency: cognitive biases in depressed and nondepressed subjects. *Journal of Personality and Social Psychology*, 52, 2, 419-431.

- VERGNAUD, G. (1982). Cognitive and developmental Psychology and research in Mathematics Education: some theoretical and methodological issues. *For the learning of mathematics*, 3, 2, 31-41.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 2-3, 133-170.
- VINNER, S. y DREYFUS, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 4, 356-366.
- WARD, W. C. y JENKINS H.M. (1965). The display of information and the judgment of contingency. *Canadian Journal of Psychology*, 19, 231-241.
- WASSERMAN, E. A. CHATLOSH, D. L. NEUNABER, D. J. (1983). Perception of causal relation in humans: factors affecting judgment of response-outcome contingencies under free-operant procedures. *Learning and Motivation*, 14, 406-432.
- WASSERMAN, E. A. y SHAKLEE, H. (1984). Judging response-outcome relations: the role of response-outcome contingency, outcome probability and method of information presentation. *Memory & Cognition*, 12, 3, 270-283.
- WEBB, N. L. (1992). Assessment of student's knowledge of mathematics: step toward a theory. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (p. 661-686). Nueva York: MacMillan.
- WEBER (1985). *Basic content analysis*. Londres: Sage university Press.
- WELDON, K. L. y THAM, P. (1991). What is basic statistics? lessons from a canadian-indonesian project. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics*, Vol 2, (p. 95-99). Nueva Zelanda: Otago University Press.
- WELL, A. D., BOYCE, S. J., MORRIS, R. K., SHINJO, M y CHUMBLEY, J. I. (1988). Prediction and judgment as indicators of sensitivity to covariation of continuous variables. *Memory & Cognition*, 16, 3, 271-280.
- WHITE (1980). Avoiding errors in educational research. En R. S. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education*, (p. 47-65). Reston, Virginia: N.C.T.M.
- WILLET, J. B. y SINGER, J. D. (1992). Providing a statistical "model": teaching applied statistics using real-world. En F. Gordon y S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first century* (p. 83-98). Nueva Jersey: The Mathematical Association of America.
- WRIGHT J.C. y MURPHY G. L. (1984). The utility of theories in intuitive statistics: the robustness of theory-based judgments. *Journal of Experimental Psychology General*, 113, 2, 301-322.
- YANG, M.C.K. y ROBINSON, D.H. (1986). *Understanding and learning statistics by computer*. Philadelphia: World Scientific Publishing.
- YATES, J. F. y CURLEY, S. P. (1986). Contingency judgment: Primacy effects and attention decrement. *Acta Psychologica*, 62, 293-302.

