UNIVERSIDAD DE GRANADA

SÍNTESIS DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE VARIABILIDAD Y DISPERSIÓN EN ESTADÍSTICA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Realizado por:

Jesús Del Pino Ruiz

Dirigido por:

Carmen Batanero

Antonio Estepa

2017

Índice

Resumen

Este trabajo es la base de una posterior tesis, que se halla ya en estado avanzado, que aborda el análisis de libros de texto y de comprensión por parte de los estudiantes de las medidas de dispersión. Este trabajo analiza las diferentes definiciones existentes sobre variabilidad aleatoria, plantea un breve resumen del marco teórico a utilizar en la tesis y trata de resumir las principales investigaciones realizadas en el campo de la variabilidad aleatoria estadística.

Abstract

This work is the basis of a later Ph. D. thesis, which is already in an advanced state, and it deals with the analysis of textbooks and students' understanding of spread measurements. This work analyzes the different existing definitions of statistical variability, presents a summary of the theoretical framework to be used in the thesis and tries to summarize the main research carried out in the field of statistical variability.

Introducción

Las ideas de variabilidad y dispersión revisten una gran importancia en la estadística, pues dotan a esta ciencia de su razón de ser y pueden ser abordadas, tanto desde la estadística descriptiva, como de la probabilidad y la inferencia. Tanto Wild y Pfannkuch (1999), como Moore (1990) incluyen la percepción de la variabilidad aleatoria como componentes esenciales del razonamiento estadístico.

Las medidas de dispersión son, además, esenciales en una distribución de datos, complementando a las de posición central, al caracterizar la variabilidad de los datos respecto a las mismas. Como sugieren Batanero, González- Ruiz, López-Martín y Contreras (2015), es importante que los estudiantes las comprendan y diferencien las relacionadas con la distribución de datos, la distribución de probabilidad y la distribución muestral.

A pesar de su importancia, la investigación didáctica sobre la comprensión de la variabilidad y la dispersión es relativamente escasa, en comparación con la existente respecto a las ideas de centro y medidas de posición central. Por este motivo me interesé en comenzar una línea de investigación al respecto, que desembocará en un estudio del tema en los libros de texto y otro estudio de evaluación amplio de la comprensión de estas ideas en estudiantes de educación secundaria y se concretará en una tesis doctoral.

La finalidad del este trabajo fin de Máster es realizar una síntesis de la investigación didáctica relacionada con este tema, que sirva de fundamento para la futura tesis doctoral, ya avanzada. Para llevarla a cabo se ha realizado una extensa consulta, estudio, análisis y síntesis de dicha investigación, clasificándola y resumiéndola en esta memoria, que se organiza en los siguientes capítulos:

En el primero de ellos se comienza justificando el interés de realizar este trabajo de síntesis, se presenta una síntesis de la evolución histórica de estos conceptos, se analizan los contenidos curriculares relacionados con las ideas de variabilidad y dispersión y se presentan los objetivos del trabajo.

El segundo capítulo expone en forma resumida algunas ideas de nuestro marco teórico que es el enfoque ontosemiótico que consideramos de interés para nuestro trabajo actual y nuestra futura tesis doctoral.

En el tercer capítulo se presenta el trabajo de síntesis de la investigación previa que se organiza a través de los significados de la dispersión, aportando a su vez estudios sobre la percepción y las concepciones de estudiantes y futuros profesores de las medidas de dispersión.

Agradecimientos: Este trabajo se financia con el proyecto EDU2016-74848-P.

Capítulo 1. El problema de investigación

1.1. Introducción

En este capítulo vamos a describir nuestro objeto de estudio, la dispersión y la forma en la que la medimos, lo que haremos desde varias perspectivas, semántica, histórica y social. En consecuencia, estudiaremos los significados institucionales, tanto de referencia como pretendido en la enseñanza, haciendo unos breves apuntes en ambos y entendidos en el sentido de nuestro marco teórico que se describe en el capítulo 2. Finalmente plantearemos los objetivos e hipótesis de investigación y la metodología que utilizaremos.

1.2. El objeto de estudio

En primer lugar, vamos a analizar el concepto de dispersión desde dos perspectivas, una dependiente de su significado en el lenguaje ordinario y en estadística y otra dependiente de su evolución histórica.

Pero antes de entrar en ese análisis haremos una introducción general sobre el concepto. La dispersión se relaciona y a veces se toma como sinónimo en la literatura con los conceptos de desviación y variación. Esto aporta matices sobre el análisis que haremos a continuación. Además, podemos encontrarla en varios ámbitos, como error intrínseco en un proceso de medida, como variación con respecto a la media en una muestra estadística o como variación con respecto a la media en una distribución de probabilidad.

1.2.1. Las nociones de variabilidad estadística y dispersión

Comenzamos analizando el significado habitual de los términos que atañen a nuestro análisis. Para ello indicamos los significados que nos da el diccionario de la R.A.E. que difieren algo del sentido matemático. Por ejemplo, en estadística un conjunto de elementos sería una muestra y la variación sería una propiedad de ella; en concreto la diferencia entre sus elementos.

> Dispersión: 1. f. Mat. Distribución estadística de un conjunto de valores.
> Variación: 1. f. Mat. Cada uno de los subconjuntos del mismo número de elementos de un conjunto dado, que difieren entre sí por algún elemento o por el orden de estos.
> Desviación: 1. f. Mat. Diferencia entre la medida de una magnitud y el valor de referencia.
> («Real Academia Española de la Lengua», 2015)

Vemos que tenemos tres términos diferentes en español para estos conceptos que son diferentes, sin embargo, en gran parte de la literatura anglosajona se manejan como equivalentes, aunque matemáticamente los podemos diferenciar. La variación es el concepto más amplio, pues se puede referir a las diferencias existentes entre los valores de una variable determinista en análisis; es decir, no es exclusiva de la estadística, mientras si lo son los de desviación y dispersión. Por medio de la *desviación* entendemos la variación de un valor particular (es decir, la diferencia entre un dato y su media o la diferencia de un punto respecto a la recta de regresión); mientras que por dispersión entendemos la variabilidad respecto a una medida de posición central (o respecto a un modelo, en general) de una distribución de datos o de probabilidad.

Para buscar los diferentes significados en inglés, vamos a analizar el significado de los términos ingleses spread, deviation y variation en el diccionario OXFORD.

> Spread (dispersión): 1. Rango de variación de algo, por ejemplo, “amplia dispersión de edades”
> Deviation (desviación): La cantidad que difiere el valor de una medida individual de un valor fijo llamado media.
> Variation (variación): Un cambio en el valor de una función debido a pequeños cambios en el argumento o argumentos de esta (Simpson y Weiner, 2016).

Por tanto, en inglés los términos “deviation” y “variation” coinciden con el significado matemático que hemos descrito, mientras puede haber algo de confusión con el término “spread” que podría hacer referencia al rango, aunque su significado es más amplio, pues el rango es sólo una medida específica de dispersión.

Existen otras definiciones en la literatura que podemos emplear, por ejemplo, podemos definir la desviación como “la diferencia entre el valor observado y el verdadero valor del fenómeno en cuestión” (Hald, 1998, p.33). Además, en la literatura de educación estadística se utilizan otros términos como “variability” que analizo a continuación y tampoco es exclusivo de la estadística:

> Variability (variabilidad):1. El hecho de que algo puede variar. Ej. La variabilidad del clima o un grado de variabilidad en el tipo de cambio (Simpson y Weiner, 2016).

El uso de estos términos en la bibliografía de educación estadística no está claro y varios autores toman posiciones diferentes que se han intentado clarificar a lo largo del tiempo en diferentes artículos. En español esta diferencia no es tan significativa, de esta manera nos indican Estepa y Ortega (2006) “podemos decir, sin creer equivocarnos, que el uso indistinto de “variabilidad”, “dispersión” y “variación” es también una constante en la literatura en español.” (p. 174) Lo mismo sucede en lengua inglesa, produciéndose un abuso como nos indican Ben-Zvi y Garfield, (2004a).

En la literatura española e inglesa se intercambian los significados de estos conceptos, lo que es incorrecto. Como nos indican Makar y Confrey (2005), el término variación "en los estudios de investigación se considera como evidente, con un significado de sentido común, y se deja sin definir" (p. 28).

Reading y Shaughnessy (2004) nos dan una primera definición de ambos términos, "variación es un nombre usado para describir el acto de variar o de condición cambiante, y variabilidad es una forma nominal del adjetivo variable, lo que significa que algo es propenso o tendente a variar o cambiar" (p. 201), profundizando más adelante, "el término variabilidad será entendido como la característica de una entidad que es observable, y el término variación para referirse a la descripción o medida de esta característica" (Reading y Shaughnessy, 2004, p.202).

Una de las definiciones que preferimos es la de Phatak y Robinson (2005), "usamos la palabra variabilidad para describir una situación en la cual las observaciones o las medidas deberían ser las mismas, pero no lo son" (p. 1).

Respecto a la dispersión, en inglés existe una discusión de índole léxica acerca de los vocablos que serían equivalentes, que son "spread" y "dispersión." En Kaplan, Fisher y Rogness (2009) y Kaplan, Rogness y Fisher (2012) se analiza este hecho, especialmente en el segundo donde nos dan las siguientes tres razones para el abandono del término "spread" como sinónimo de "variability",

> (1) "spread" ya tiene una multiplicidad de significados y sólo algunos de ellos relacionados con la dispersión; (2) el conocimiento previo del estudiante de la palabra "spread" está unida más cercanamente a significados que producen malentendidos y conceptos erróneos; y (3) los estudiantes no demuestran comprender la palabra "spread" al final de un curso estadístico de un semestre (p. 57).

Los motivos aducidos son: la polisemia ya que el término "spread" cuenta con al menos 25 significados en el diccionario Oxford (Kaplan et al., 2012), los conocimientos previos y la persistencia de esos conocimientos previos. El autor sugiere que la mejor salida para evitar posibles problemas de comprensión por parte del alumnado es el empleo del término "variability" como sinónimo de los términos "spread" y "dispersion" Puesto que en castellano no tenemos este problema de polisemia, diferenciamos en lo que sigue la dispersión como concepto estadístico, de la variabilidad que es más amplia que el anterior pues puede ser determinista y aleatoria.

1.2.2. Evolución a lo largo de la historia

Una vez analizados los posibles matices y significados que nos encontramos y fijado un punto de partida lo primero que nos podemos preguntar es ¿cómo y cuándo comienza el hombre el estudio matemático de los conceptos de variabilidad aleatoria y dispersión? Eso quizá es sencillo de contestar, pero no lo es tanto si preguntamos ¿y cómo decidió cuantificarlo? A estas preguntas trataremos de dar respuesta durante este apartado.

Los primeros que se encontraron con este problema son los babilonios hace 2300 años, en sus estudios de la noche estrellada, cuando trataban de posicionar algunos objetos celestes. Puede que se encontraran antes con este problema muy posiblemente en la agrimensura también, al no ser las herramientas de medida homogéneas y no existir un patrón, personas diferentes o una misma persona tomaría medidas diferentes y tendrían que buscar un criterio para resolver estas disputas, pero esto no está documentado y quizá sólo sean suposiciones de quien esto escribe.

Por otra parte, entre los años 500 y 300 a.C. los astrónomos babilonios desarrollaron teorías que predecían el movimiento del sol y otros astros, pero para los parámetros básicos necesitaban una correlación entre observación y predicción y aquí surge el problema del estudio de la variabilidad. En Pearson, Kendall y Plackett, (1970) se analiza cómo de este problema surge la media, pero derivado del problema de la media surge el concepto de dispersión, ya que es necesario calcular la media cuando tenemos diversas medidas de un mismo hecho que no dan el mismo valor. De los babilonios sólo sabemos que se encontraron con el problema, pero la historia que nos llega de ellos a través de las piedras con escritura cuneiforme no nos da información acerca de cómo lo resolvieron.

En el mismo artículo nos presentan también el caso de Hiparco, que investigaba el paso del Sol por un punto durante el solsticio y descubrió desigualdades y entonces se cuestionó sobre si el año tropical es constante o no. Sin embargo, él tenía en cuenta su error en la medida, que cuantificó como 1/4 de día; para esto utilizó el semi – rango de sus observaciones, en las que él fijaba una variación máxima de un cuarto de día (Pearson et al., 1970). Como podemos ver utilizó una medida de la dispersión para caracterizar su error, ya que se percató de que no obtenía la misma medida en cada ocasión y que esto no dependía en sí del hecho de que el Sol no pasase por el mismo punto, sino de la inexactitud de sus herramientas de medida.

Sin embargo, no es hasta el año 1600, en el que Galileo (1564 – 1642) hace la primera descripción matemática del error, en la que describe la distribución del error como simétrica, como nos indica Salinero (2006).

> La principal contribución de Galileo a la teoría de la probabilidad fue la creación de la teoría de la medida de errores. Según Galileo, los errores de medida son inevitables y los clasificó en dos tipos: los errores 'sistemáticos', debidos a los métodos y las herramientas de medida; y los errores 'aleatorios', que varían impredeciblemente de una medida a otra. (p. 2)

Además, Galileo supuso que estos valores se agrupaban alrededor de un "valor verdadero" en el que ya se intuye el concepto de media, por lo que se puede considerar que Galileo puso la primera piedra para la construcción de la estadística. Así pues, Galileo fue quien nos dio la primera discusión seria acerca del error; como resumen de esta discusión plantea las siguientes propiedades del error aleatorio:

> La distancia de una estrella desde el centro de la Tierra es descrita por un solo número, la distancia real.
> Todas las observaciones son sensibles al error debido al observador, a los instrumentos y a las condiciones de la observación.
> Las observaciones están distribuidas simétricamente alrededor del verdadero valor, que es el cero de la distribución simétrica de errores.
> Los errores pequeños son más frecuentes que los grandes.
> Los errores aleatorios de las observaciones nos llevan a errores aleatorios de una función de las observaciones que pueden ser grandes, incluso si los errores de observación son pequeños
> (Hald, 1998, p. 33).

Galileo no especificó ninguna ley de errores, pero de lo anterior se infiere que existe una cota superior del error. En la misma obra nos informa acerca de dicha cota:

> El modelo de medida de errores es un modelo biparamétrico que envuelve un parámetro localizado, el valor verdadero, y un parámetro de escala. Analizando la distribución de la media de errores los primeros probabilistas normalmente asumían que la cota superior del error es conocida, esto significa que el parámetro de escala es conocido. La asunción de una cota finita para el error creó numerosas dificultades para el análisis matemático de la distribución de la media (Hald, 1998, p.34).

Más tarde, en 1720, de Moivre (1667 – 1754) derivó la función normal a partir de la binomial (Hart, 1983) y trabajó en el cálculo del error profundamente en el libro "La doctrina de la probabilidad" publicado dos años antes. En él desarrolla el primer método para calcular la probabilidad de un error de un tamaño determinado, cuando el error se expresa en términos de la variabilidad de la distribución como una unidad, y la primera definición de la probabilidad del error de un cálculo.

En 1722 se publicó póstumamente la obra de Roger Cotes (1682 – 1716) "Opera Miscellanea" que contiene un artículo con un método para determinar el resultado más probable de un número de observaciones; esta es la primera obra en la que se considera formalmente la teoría de errores. Más tarde, en 1755 (aunque la publicación de los resultados fue en 1756), Simpson (1710 – 1761) publicó los axiomas que indican que los errores positivos y negativos son equiprobables y da una distribución de probabilidad del error que está acotada. En 1780 Daniel Bernouilli (1700 – 1782) propuso una distribución circular para la ley de errores y comenzó sus trabajos en mínimos cuadrados, aunque fue Legendre (1752 – 1833) quien publicó en 1805 definitivamente el método de los mínimos cuadrados. Sin embargo, fue Laplace (1749 – 1827) quien propuso en 1780 una distribución de la probabilidad normal, con centro en 0, simétrica en el eje Y, asintótica en infinito y con superficie total 1.

En 1810 se produjeron numerosos avances, Adrain (1775 – 1843) demostró la distribución de error de Laplace, y presentó el método de los mínimos cuadrados a partir del trabajo de Legendre. Durante el mismo año Gauss (1777 – 1855) definió una nueva distribución del error en la que definía la distribución como una gaussiana y la densidad de error como $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$. También presentó un método de mínimos cuadrados y estableció que la ecuación de la desviación estándar con respecto a la media es igual que la desviación estándar de una distribución dividida por la raíz cuadrada del número de datos (Hart, 1983). Más tarde en 1815 adoptó el termino de error probable, pero no fue el primero en utilizar este término, ya que Bessel (1784 – 1846) también publicó las tablas de error dadas en términos de $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ y utilizó la desviación media como medida alternativa de la dispersión.

En 1820 Laplace demostró la ley normal y el método de mínimos cuadrados, además derivó el teorema central del límite y propuso la media aritmética como un estimador "natural" del valor verdadero (Hald, 1998). Diez años más tarde en 1830, Encke (1791 – 1865) a través de sus estudios en astronomía trabajó en mejoras para el método de los mínimos cuadrados (Busto y Escribano, 2006) y derivó varios errores estándar, contribuyendo así mismo al cálculo del error probable.

En la siguiente década De Morgan (1806 – 1871) propuso varias medidas para la dispersión como el balance medio que definió como $\frac{\sum desviaciones}{N}$ o el error medio que se obtiene de la siguiente expresión $\frac{\sum Valor\ numérico\ de\ las\ desviaciones}{N}$ y utilizó el error estándar.

Cerca de 1860, Airy (1801 – 1892) que tenía por profesión la de astrónomo además de la de matemático (es muy llamativo que hasta el momento la mayoría de evoluciones de la teoría de errores y de la dispersión viene de mano de astrónomos y debido a la observación celeste) introdujo los siguientes conceptos:

Modulo: $\mathrm{C} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$
Error medio: $\frac{\mathrm{C}}{\pi}$
Cuadrado medio: $\frac{\mathrm{C}^2}{2} = \sigma^2$
Error cuadrático medio de la medida: $\frac{\sum(\text{error aparente})^2}{\mathrm{N}-1}$
Error cuadrático medio de la media: $\frac{\sum(\text{error aparente})^2}{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)}$
(Hart, 1983).

Y en 1870 Chebysev (1821 – 1894) publicó su famosa desigualdad $P(|X-\mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ que establece una cota inferior a la probabilidad P de que el valor de una variable aleatoria X con varianza σ esté a una distancia de la media μ.

En esta etapa son tres los autores que generan un cambio en la forma de aplicar la estadística, Edgeworth, Galton y Pearson, que propusieron un método empírico que sustituye los experimentos en las ciencias donde no es posible realizarlos y que ya se había empleado anteriormente con éxito en la Psicología. Cada uno de ellos trabajó en un área, Edgeworth era economista y matemático autodidacta (estudió derecho) y aplicó el nuevo método a la economía, Galton trabajó en antropología y Pearson en filosofía de la ciencia.

En 1885 Edgeworth (1845 – 1926) comparó medidas de dispersión para diferentes distribuciones y enunció una serie que lleva su nombre. Estas series aproximan una distribución de probabilidad a través de cumulantes, que son una alternativa a los momentos, se calculan de forma parecida y tienen propiedades similares. También trabajó en una versión del teorema central del límite que

> establece, en líneas generales, que bajo ciertas condiciones, un promedio muestral sigue aproximadamente la ley probabilística normal, sin importar que comportamiento probabilístico tiene la población de donde provienen las observaciones, si el número de observaciones es grande (Galbiati, 2002, p.2).

Cinco años antes, Galton (1822 – 1909) ajustó estadísticamente datos acerca de genética, más exactamente, estudió la transmisión de la inteligencia. Entre algunos de sus logros en la estadística son la invención de la línea de regresión y de la máquina Quincunx para demostrar la ley del error. También fue pionero en el uso de la distribución normal y en 1888 introdujo el concepto de correlación que es su trabajo más conocido y que más tarde nuestro siguiente protagonista, Pearson, desarrolló.

Karl Pearson (1857 – 1936) fue el padre de la Bioestadística, trabajó como hemos dicho en la cuantificación de la correlación en forma de coeficiente e introdujo la ji-cuadrado para comparar dos tablas de frecuencias con el objetivo de probar el ajuste de un conjunto de datos de un experimento a una ley probabilística. También fue el primero en utilizar la desviación estándar y la calculó para numerosas distribuciones, de esta manera entramos en el siglo XX (Galbiati, 2002).

Ese mismo año, 1900, Yule (1871- 1951) introdujo junto a Pearson, del que era colaborador la correlación y su gran aporte es el de relacionar la regresión con el método de mínimos cuadrados, además fue el primero en introducir el concepto de error estándar.

Poco más tarde, en 1905, Gosset (1876 – 1937) bajo el pseudónimo de Student publicó "El error probable de una media" en Biometrika, revista fundada por Pearson. Más tarde introdujo la distribución t como alternativa a la distribución normal para muestras pequeñas. Gosset fue amigo de Pearson y de Fisher (1890 – 1962). Este último introdujo la inferencia estadística maximizando la función de verosimilitud, la aleatorización y otras numerosas herramientas del test de hipótesis y la creación de experimentos a través de sus trabajos en el sector agrícola, además fue el primero en emplear el término varianza.

Posteriormente se desarrollaron los ordenadores y con ellos el cálculo moderno, aunque la estadística sigue progresando estamos en el momento de entender con más profundidad todos los conceptos desarrollados hasta el momento, para poder romper los límites impuestos por el cálculo convencional y aprovechar al máximo las herramientas que esta época nos ha dado. Así vemos como el inicio de la dispersión y de la estadística en sí comenzó en el estudio de lo más grande que conocemos, las estrellas (mediante la astronomía) para estar centrado actualmente en lo más pequeño (microchips).

1.2.3. Concepto de variabilidad

Anteriormente hemos analizado las nociones de variabilidad (estadística) y dispersión semánticamente y su desarrollo histórico a través de la teoría de errores; en esta sección vamos a analizar estos conceptos con más profundidad. En un primer lugar dimos como definición de variabilidad de Hald "la diferencia entre el valor observado y el verdadero valor del fenómeno en cuestión" (Hald, 1998, p. 33). Sin embargo, podemos obtener una revisión más profunda en el artículo de Wild y Pfannkuch, (1999), que nos dan tres características fundamentales de la variabilidad:

- *Omnipresencia:* la variabilidad está presente en todos los actos de la vida cotidiana, es decir, no existen dos medidas iguales de un evento ni dos productos iguales obtenidos de un procedimiento mecánico, además de endémica del sistema la dispersión puede ser inducida en la recogida de datos a través de la medida, de la muestra o accidentalmente, como se muestra en la figura 1.

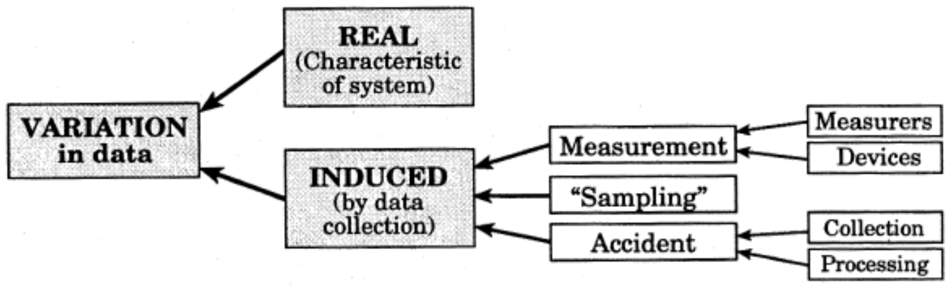


Figura 1. Fuentes de la variación en una recogida de datos (Wild y Pfannkuch, 1999, p. 236)

- *Tiene consecuencias prácticas*: a causa de la dispersión es difícil establecer modelos predictivos, para ello tenemos que crear modelos estadísticos basados en el principio de erradicar el "ruido" creado por la dispersión.
- *La estadística nos da una forma de entender la dispersión*. Y a continuación define los tres tipos de respuesta que podemos dar a la dispersión:

1. Ignorarla: efectivamente, podemos hacer como que la variabilidad no existe. Esto se puede hacer en ciertos ámbitos, por ejemplo, en las tallas de ropa o en las de zapatos, existe una cierta variabilidad, pero la ignoramos.
2. Permitirla: si la consideramos y permitimos en nuestro sistema nos da la posibilidad de anticipar el diseño de nuestros sistemas, productos, etc., … para que se vean lo menos afectados posibles por ella.
3. Cambiar el patrón (controlarla): se pueden buscar relaciones entre variables de manera que controlemos la variabilidad, si esto no es posible podemos estimar el grado de variabilidad y trabajar con ello.

Como hemos indicado antes, una de las características de la variabilidad es que la Estadística nos da una forma de entenderla, esto es, de modelarla. Una de las grandes habilidades humanas es encontrar patrones, de hecho, descifrar patrones es lo que nos lleva a modelar la variabilidad. El principal problema que nos presenta esto es que podemos ver patrones donde no los hay, por ello hay que apoyarse en la Estadística para modelizar atendiendo a tres cuestiones: en primer lugar, que el modelo nos proporciona un marco en el que el problema tiene sentido, en segundo lugar, construir un modelo adecuado a nuestro problema y por último comprender como se comporta el azar.

Para resumir, debemos tener en cuenta que la variabilidad es una realidad observable, que algunas veces puede ser explicada y para otras no tenemos el conocimiento suficiente aún. La variabilidad que no puede ser explicada viene de la variabilidad aleatoria ya que no podemos modelizarla, teniendo en cuenta que llamamos aleatoriedad a una construcción humana que no podemos "patronizar" (Wild y Pfannkuch, 1999).

1.2.4. Dispersión y medidas de dispersión

La idea de dispersión suele quedar implícita en los textos y se utiliza sobre todo para analizar la variabilidad de un conjunto de datos o de una distribución de probabilidad respecto a un valor central. Es decir, el grado en que una variable se extiende alrededor del centro o promedio de la distribución.

Después de haber definido la dispersión, lo adecuado es estudiar cómo la cuantificamos, para ello utilizamos las medidas de dispersión, que podemos definir de la siguiente manera.

> Una medida de dispersión permite describir un conjunto de datos concerniente a una variable particular, dando una indicación de la variabilidad de los valores dentro de la colección de datos. La medida de la dispersión completa la descripción dada por una medida de tendencia central de una distribución (Dodge, 2008, p.341).

Así pues, una medida de dispersión no sólo cuantifica la variabilidad de un conjunto de datos o de una distribución, sino que también es necesaria para completar la descripción de éstos. Por tanto, diferentes medidas de dispersión la cuantificarán de manera distinta y completarán la descripción o el resumen de un conjunto de datos de forma complementaria. De la misma manera que diferentes medidas de centro (como la media, la mediana o la moda) nos dan informaciones complementarias. Las principales medidas de dispersión se muestran en la tabla 1.

Como hemos dicho, cada una de ellas aporta una información diferente e interesa para según que colección de datos, lo que hace más complicada la comprensión del fenómeno de la dispersión.

Tabla 1. Resumen de las medidas de dispersión, su significado y expresión

Medida de dispersión	Significado	Expresión
Rango	Amplitud en la que varían los datos.	R = Max - Min
Cuartil	El cuartil k-esimo será el valor de la variable que deja menores o iguales que él kN/4 valores de la variable.	
Rango intercuartílico	Diferencia entre el tercer y el primer cuartil	$R_I = Q_3 - Q_1$.
Coeficiente de variación	Relación entre el tamaño de la media y la variabilidad de la variable	$C_v = \frac{\sigma}{\bar{x}}$
Varianza	La varianza mide la dispersión de los valores en torno a la media	$\sigma^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{N}$
Desviación típica	La varianza engloba el uso de las unidades cuadradas, por tanto, no queda expresada en la misma unidad que la media, por ello podemos utilizar su raíz	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{N}}$
Desviación absoluta	Es la media de los valores absolutos de la dispersión con respecto a la media	$D_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert X_i - \overline{X}\right\rvert$

1.2.5. Interés social de la comprensión de la dispersión y sus medidas

Vivimos en la época del "Big Data", es decir, del manejo de conjuntos de datos muy grandes. La estadística nos rodea, en la prensa, en la televisión, encuestas sobre el paro, sobre las preocupaciones de los españoles, la tasa de jóvenes que emigran. Pero en muchas ocasiones esos datos se presentan de manera tendenciosa que a ojos de personas que no tengan cierta cultura estadística pueden dar impresiones falsas. Como indican Batanero, Díaz, Contreras, y Roa (2013).

> La importancia que actualmente recibe la enseñanza de la estadística se debe a la necesidad, reclamada por la UNESCO y otras instituciones de proporcionar una cultura estadística que permita al ciudadano participar en la sociedad de la información. Dicha cultura es necesaria en actividades tan habituales como la lectura de la prensa o la interpretación de información en Internet, la participación en encuestas o elecciones o la interpretación de un diagnóstico médico. El término "statistical literacy" ha ido surgiendo de forma espontánea entre los estadísticos y educadores estadísticos, para resaltar el hecho de que la estadística se considera hoy día como parte de la herencia cultural necesaria para el ciudadano educado (p. 8).

Dentro de la Estadística, la comprensión del fenómeno de la dispersión y cómo cuantificarlo es fundamental, tal y como nos hace Ballman, que haciendo referencia a otros artículos desde 1988, se hace eco de la recomendación de estos de dar un especial énfasis a la comprensión y modelado de la dispersión (Ballman, 1997). La misma opinión podemos ver en Ben –Zvi y Garfield que incluso nos dicen que "la educación en estadística proporciona herramientas que los ciudadanos informados necesitan para reaccionar inteligentemente a la información cuantitativa en el mundo alrededor de ellos" (Ben-Zvi y Garfield, 2004b) Incluso el famoso escritor H.G. Wells tiene una cita al respecto "el pensamiento estadístico será algún día tan necesario para el ciudadano competente como la habilidad de leer y escribir."[1] (Wilks, 1951, p. 5) Ese día, creo firmemente que ha llegado.

1.3. Significado de la variabilidad estadística y dispersión en el currículo

Como hemos dicho anteriormente la variabilidad aleatoria tiene omnipresencia en la vida cotidiana. Pero más concretamente, en cuanto se comienza el estudio de lo aleatorio, ya estamos en contacto con la variabilidad, en consecuencia, podríamos decir que su estudio se comienza en la escuela elemental.

Por otro lado, de acuerdo a Batanero, González-Ruiz, López-Martín, y Contreras, (2015) la dispersión se encuentra implícitamente a lo largo de todo el currículo, tanto en el estudio de la correlación y regresión en primer curso de Bachillerato, como en el estudio de la probabilidad, especialmente de las variables aleatorias y su distribución, y en el estudio de la inferencia. Remitimos al lector a este artículo para un análisis de la dispersión en estos apartados del currículo.

Si nos centramos en la estadística descriptiva, aparentemente, en el curriculum actual, el tema se concreta en el estudio de las medidas de dispersión, por consiguiente, podemos decir que comienza en la ESO. Así en el RD 1105/2014 en el bloque de contenido de Estadística y probabilidad, para 3º de la ESO incluye: "Parámetros de dispersión. Diagrama de caja y bigotes. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica." (MECD, 2015, p. 394) y para 4º de ESO "Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización. Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión. Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación" (MECD, 2015, p. 398) Además, en el Bachillerato, en la asignatura "Matemáticas aplicadas a las Ciencias sociales I", en el bloque temático de Probabilidad y estadística, el anterior

[1] Esta frase literal no es de H.G. Wells, la cita pertenece al estadístico Samuel S. Wilks en su discurso de posesión presidencial de la Asociación Americana de Estadística (JASA, vol. 46, N ° 253., p. 1-18). Wilks estaba parafraseando la obra "La humanidad en el hacer" de H. G. Wells.

decreto 1467/2007 indicaba "Parámetros estadísticos de localización, de dispersión y de posición" (MEC, 2007, p. 45475), pero en el actual decreto lo han eliminado.

1.3.1. Significado institucional de referencia

En relación a nuestro marco teórico descrito en el Capítulo 2 podemos fijar tres significados a las medidas de dispersión. En primer lugar, el significado institucional de referencia, que en nuestro caso será el referente a la institución estadística, en segundo, el significado institucional pretendido en la educación no universitaria, que lo obtendremos en la planificación de la enseñanza, teniendo en cuenta muchas veces los libros de texto y por último el significado personal, que es el que los estudiantes adquieren a través de los dos anteriores. En esta sección analizaremos el significado institucional de referencia y una propuesta general del significado institucional pretendido en la enseñanza no universitaria. En el Capítulo 3 estudiaremos el significado personal que diversas investigaciones han descrito de la dispersión y sus medidas.

Estepa y Ortega (2006) describen el significado institucional de varias medidas de dispersión, que son: rango, rango intercuartílico, desviación típica, varianza, coeficiente de variación y desviación media. Para ello abordan a través de una muestra de quince libros de texto universitarios la identificación los elementos de significado o elementos primarios de las medidas de dispersión (Godino, Batanero, y Font, 2007).

- *Situaciones:* es decir, problemas, ejercicios y aplicaciones que generan actividad matemática. Entre los encontrados en la bibliografía los autores destacan los siguientes.
    1. *Encontrar el error máximo de un conjunto o subconjunto de observaciones*. Consiste en encontrar el rango de la medida.
    2. *Dar un índice de dispersión que complete la información obtenida con una medida de tendencia central.* Normalmente una medida de tendencia central no da mucha información sobre cómo es una distribución de datos, por tanto, una medida de dispersión completa mejor dicha información.
    3. *Comparar la dispersión de dos o más distribuciones medidas en la misma magnitud y unidad.* Comparar sólo la media de dos distribuciones no nos hace saber cómo de parecidas son realmente, para ello debemos comparar dos medidas de tendencia central y sus medidas de dispersión. De esta manera podemos caracterizar mejor las diferencias de dos distribuciones diferentes.

4. *Comparar la dispersión de dos o más distribuciones medidas en distintas magnitudes.* Es un caso parecido al anterior, pero deberemos usar medidas de la dispersión que sean independientes de la unidad de medida como el coeficiente de variación que ya definimos previamente.
5. *Detectar e interpretar valores atípicos.* Es bastante importante, como comentamos en el ejemplo de importancia de la enseñanza de la dispersión.
6. *Comparar la posición relativa de datos en diferentes distribuciones*. Consiste en comparar valores con el centro de su distribución a través de la medida de la dispersión.
7. *Generar datos con ciertos requisitos sobre su variabilidad.* Es el problema inverso al que estamos acostumbrados a realizar y se presenta frecuentemente en la vida real, además sirve para mejorar la percepción de la dispersión.

- *Acciones del sujeto ante tareas matemáticas:* son las operaciones, procedimientos y técnicas que emplea el sujeto para resolver el problema, con el entrenamiento se automatizan y se suele enseñar. En el trabajo citado se identificaron las siguientes:
  1. *Calcular medidas de dispersión de una serie de datos sin tabular.* Se suelen pedir las medidas de dispersión más comunes como la varianza o la desviación típica, pero se pueden pedir otras. Este tipo de actividad se da principalmente en la ESO.
  2. *Calcular medidas de dispersión de datos aislados tabulados no agrupados.* Para esto es necesario manejar las ecuaciones de la medida de la dispersión con frecuencias, lo que hace que el alumno deba conocer el manejo de las frecuencias.
  3. *Calcular las medidas de dispersión de datos tabulados agrupados en intervalos.* Además de lo realizado anteriormente hay que calcular las marcas de clase y en ocasiones los extremos pueden ser no definidos.
  4. *Calcular medidas de dispersión con calculadora y/o computador*. Es muy útil enseñar a los alumnos las funciones *stat* de su calculadora, también se puede utilizar software común como el *Excel*.
  5. *Calcular medidas de dispersión de datos transformados*. Utilizar los cambios de escala o de origen para facilitar los cálculos.
  6. *Calcular medidas de dispersión de datos presentados gráficamente* (en histogramas, diagramas de barra, polígonos de frecuencias relativas o

acumuladas, de gráfico de caja, ...). La representación gráfica, como ocurre en la Física o la Química es fundamental en muchos campos para entender correctamente un problema. En Estadística sucede lo mismo, con la ventaja de poder obtener más información de estas gráficas que sólo con los datos escritos sobre papel.

7. *Calcular la dispersión de datos separados en subpoblaciones* (Cálculo ponderado de la dispersión). Es una actividad enfocada a nivel universitario, y los autores del artículo sólo la encontraron desarrollada teóricamente.
8. *Calcular medidas de dispersión sin los datos* (a partir de información basada en propiedades, definiciones, fórmulas, etc., ...) Este ejercicio también es de nivel superior al de secundaria, menos el cálculo de la desviación típica a partir de la varianza. Este tipo de problemas es frecuente encontrarlo en textos universitarios.
9. *Realizar cálculos inversos con medidas de dispersión.* Esta tarea tampoco aparece en los manuales de ESO debido a la dificultad que entraña.
10. *Calcular e interpretara el intervalo* $(x - k\sigma, x + k\sigma)$ *y el porcentaje de datos que contiene.* Este ejercicio es fundamental a nivel de comprensión de la variabilidad, ya que les permite conocer la importancia del intervalo de Chebychev.
11. *Representar gráficos que contengan información sobre dispersión.* Como ya indicamos en el punto anterior la construcción gráfica es fundamental para la comprensión (y la mejora de ésta) de algunas propiedades e información estadística.
12. *Tipificar datos.* Este tipo de actividad, al permitir expresar los datos en unidades de dispersión consigue mejorar la comprensión de la variabilidad.

- *Lenguaje*: en el lenguaje intervienen las fórmulas, las ecuaciones, las notaciones que empleamos y también los elementos gráficos que introduzcamos. Lo podemos considerar en las siguientes categorías:

1. *Palabras y expresiones verbales.* Se podría hacer una lista infinita con respecto a este tema, pero podemos destacar: *dispersión, desviación variación, desviación típica, varianza, cuartil, desviación estándar, rango, rango intercuartílico, error, representatividad, gráfico de caja, coeficiente de dispersión, ...*

2. *Notaciones y fórmulas.* En el apartado en el que describo las diferentes medidas de dispersión aparecen diversas fórmulas, mediante transformaciones o debido a que se apliquen a datos tabulados o sin tabular pueden sufrir cambios, aunque su significado sea siempre el mismo. De hecho Estepa y Ortega (2005) hicieron un profundo estudio acerca de las diferentes formas en las que se pueden expresar las diferentes medidas de dispersión y encontraron 19 expresiones para la varianza y 20 para la desviación típica, siendo ésta una de las principales dificultades a la hora de la enseñanza:

   > Hemos encontrado 19 para la varianza y 20 para la desviación típica, lo que es un índice de dificultad, ya que, en realidad, con cuatro fórmulas para cada medida sería suficiente, ya que el resto son equivalentes a estas cuatro fórmulas" (Estepa y Ortega, 2005, p. 11).

   Como vemos, cuando un alumno se encuentra todas estas fórmulas suele tener un colapso de información y es el docente el que deberá hacer el filtrado de dicha información.
3. *Tablas.* En Estadística las tablas son fundamentales, ya sea como tablas de frecuencias, para facilitar el cálculo o para organizar datos que aparecen en toda la bibliografía.
4. *Gráficos.* Ya hemos hablado de su importancia a lo largo del resto de elementos, entre los distintos tipos de gráficos que podemos encontrar tenemos: polígonos de frecuencias, pictogramas, gráfico de cajas, histograma, gráfico de sectores, etc.

- *Conceptos:* "son nociones o ideas matemáticas utilizadas en la práctica matemática." (Estepa y Ortega, 2006, p. 170). Entre los diferentes conceptos que podemos encontrar tenemos: *rango o recorrido, desviación media, varianza, desviación típica, coeficiente de variación de Pearson o el rango intercuartílico.* En Estepa y Ortega (2006) se encuentra las diferentes definiciones a estos conceptos.
- *Propiedades:* Las propiedades de un objeto lo relacionan con los demás dando matices y modificando el significado, una de las tareas en la planificación de la enseñanza es elegir las propiedades que es adecuado enseñar a un cierto nivel. Tenemos varios tipos de propiedades.
  1. Propiedades numéricas. Referentes al conjunto de datos.
  2. Propiedades algebraicas. Referentes a las operaciones.
  3. Propiedades estadísticas. Referentes al significado estadístico.

- Argumentos: Son los razonamientos sobre los que se apoyan los cálculos y que relacionan los distintos conceptos, propiedades, etc., ...

Con todos los elementos que hemos analizado se ha descrito el significado institucional de referencia que muestran los libros de Estadística Descriptiva y orientados a la enseñanza universitaria en primeros cursos de algunas carreras. Aunque ya hemos evidenciado algún problema como el tener muchas fórmulas que describen una misma medida de la dispersión. En general hemos visto que las medidas de dispersión son conceptualmente un tema complejo y diverso.

1.3.2. Significado institucional pretendido

Para evaluar el significado pretendido es necesario hacer la misma reflexión que hemos hecho para el significado institucional, pero con los libros de texto de secundaria. Este trabajó lo realizaron Ortega y Estepa (2006).

Así pues, analizan las situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos presentes en los libros de secundaria. Estudian a cuáles se les ha dado más importancia y a cuáles menos y cuáles aparecen en todos los manuales. De esta manera podremos ver los matices del significado institucional que se transmiten, es decir, cual es el significado pretendido para las medidas de dispersión en secundaria.

Para ello se eligen de la misma manera que antes varias medidas de dispersión y 12 libros de texto de referencia, en este caso los más usuales en secundaria como Anaya, Santillana, McGraw Hill, SM, etc., ... de 3º y 4º de E.S.O.

- Situaciones: Se analizan cinco situaciones, que son,
  - El estudio de la variabilidad de un conjunto de datos mediante rangos.
  - El estudio de la variabilidad de un conjunto de datos mediante desviaciones de un valor central.
  - La comparación de dos distribuciones (esta situación se divide en dos, en un caso tienen las mismas unidades y en el otro no).
  - Comparación local externa. Comparar la posición relativa de los datos en diferentes distribuciones.
  - Problemas inversos, es decir, determinar un conjunto de datos con una medida de dispersión dada.

En este estudio las tres primeras situaciones aparecen en todos los manuales en bastantes ocasiones (de la tercera situación en especial el primer caso) mientras que las dos últimas apenas aparecen (de hecho, la cuarta sólo parece en un manual).

- *Acciones*: Se analizan 11 acciones, que son,
    1. El cálculo de las medidas de dispersión de una serie de datos.
    2. El cálculo de las medidas de dispersión de datos tabulados sin agrupar.
    3. El cálculo de las medidas de dispersión de datos tabulados agrupados
    4. El cálculo de las medidas de dispersión con calculadora y ordenador.
    5. El cálculo de las medidas de dispersión de datos transformados.
    6. El cálculo de las medidas de dispersión de datos mostrados gráficamente.
    7. El cálculo de las medidas de dispersión sin datos (a través de información dada por fórmulas, definiciones o propiedades).
    8. Realizar el cálculo inverso.
    9. Calcular e interpretar el intervalo de Chebychev.
    10. Representación gráfica con información acerca de la dispersión.
    11. Estandarización de datos.

Las acciones uno a cuatro y las acciones seis y nueve son las que más aparecen en los manuales siendo la más frecuente la acción uno, apareciendo en los manuales hasta tres veces más que la siguiente, el resto de acciones apenas aparecen en la bibliografía.

- *Lenguaje:* se encuentran numerosas expresiones y representaciones, a modo de resumen en cuanto a elementos lingüísticos puros (palabras, símbolos y fórmulas).
- *Conceptos:* no aparecen todas las definiciones, solo las más comunes, las que más aparecen son,
    - Dispersión: variación alrededor de la media.
    - Rango: valor máximo – valor mínimo.
    - Desviación media: media de las desviaciones absolutas.
    - Varianza: media de desviaciones cuadradas con respecto a la media.
    - Desviación estándar: raíz cuadrada de la varianza.

Además de estas definiciones aparecen las de rango intercuartílico y coeficiente de variación, pero los libros apenas les dan importancia alguna.

- *Propiedades*: en este caso cabe resaltar tres propiedades, cada una de tipo a la que se les prima,
    - Numérica: Los rangos, la desviación media y la desviación estándar están medidas en las mismas unidades que los datos. La varianza está media en unidades cuadradas. El coeficiente de variación es adimensional.
    - Algebraica: Propiedad sobre la transformación lineal.

- Estadística: Un mayor valor de la medida de la dispersión implica una mayor dispersión.

Aparecen otras propiedades, pero estas son las que priman en los manuales de secundaria.

- *Argumentos:* Hay dos tipos de argumentos empíricos y deductivos en todos los manuales destacan claramente los primeros. Finalmente, realizando una recopilación del significado pretendido tenemos que:
    - A pesar de que las técnicas numéricas están bien desarrolladas existe una carencia de representación gráfica. Esto redunda en que cuando tengamos el significado personal del alumno este aspecto no estará bien desarrollado.
    - Los diferentes conceptos y términos estás expresados de manera confusa y ello puede llevar a un error en el alumno al obtener su significado personal.
    - Hay medidas de la dispersión como el rango intercuartílico y el coeficiente de variación que apenas aparecen en un manual o dos, esto conlleva a una limitación de la problemática como la comparación de dispersiones en diferentes unidades, debido al desconocimiento del coeficiente de dispersión.
    - Existe una priorización de lo empírico sobre lo deductivo, menoscabando la posibilidad de que el alumno tenga más recursos para argumentar sus respuestas.

1.4. Objetivos e hipótesis de la investigación

Teniendo en cuenta los expuesto en la introducción y en las secciones anteriores, los objetivos de este trabajo fin de máster son los siguientes,

O1. *Describir el significado de referencia y el pretendido en la educación secundaria de los conceptos que se emplean en estadística para el estudio de la dispersión.* La importancia de este objetivo se debe a que nos permitirá en el futuro organizar nuestro trabajo de tesis doctoral. Este objetivo se organiza en cuatro objetivos parciales que hemos tratado de completar en este primer capítulo:

O1.1. Estudiar la diferencia de significado de dichos conceptos en el lenguaje castellano e inglés.

O1.2. Analizar la evolución histórica del concepto de dispersión.

O1.3. Estudiar el significado institucional de referencia de las medidas de dispersión en la estadística universitaria.

O1.4. Estudiar el significado institucional pretendido de las medidas de dispersión en el currículo de secundaria.

O2. *Describir el marco teórico que se va a emplear en la elaboración de la tesis.* La importancia de este objetivo es que fundamentará tanto el estudio bibliográfico realizado en el trabajo fin de máster, como la futura tesis doctoral. En el capítulo 2 se describen los principales elementos del marco teórico utilizados en este trabajo.

O3. *Realizar la revisión de la bibliografía existente sobre la dispersión y sus medidas con la finalidad de sustentar la tesis*. Este es el principal objetivo del trabajo fin de máster y se lleva a cabo en el capítulo 3. Su interés es completar el estado de la cuestión sobre el razonamiento y aprendizaje de las medidas de dispersión que permitan igualmente fundamentar la futura tesis doctoral. Permitirá también recoger ítems que puedan utilizarse en el futuro estudio de evaluación.

Para estos objetivos corresponden las siguientes hipótesis, entendidas como expectativas de lo que se espera encontrar,

H1. Se espera encontrar una variedad de significados otorgada a la definición de los términos a emplear para la dispersión y sus medidas.

H2. Se espera encontrar dificultades en la comprensión de las medidas de dispersión por parte de los estudiantes al revisar la bibliografía, pero también mostrar que la investigación sobre el tema es más escasa que la referida a las medidas de posición central.

Capítulo 2. Marco teórico.

2.1. Introducción

En este capítulo se van a abordar los elementos que constituyen nuestro marco teórico, que se centran en dos componentes básicos. En primer lugar, el papel de la cultura, el razonamiento y el sentido estadístico, por el papel que la comprensión de la dispersión y sus medidas tiene en los mismos. En segundo lugar, describimos algunos elementos de interés del Enfoque Ontosemiótico, que será marco teórico principal que se utilice en mi tesis doctoral.

2.2. Cultura, razonamiento y sentido estadístico

Comenzamos analizando los modelos que en educación estadística describen los conocimientos y competencias requeridos del ciudadano en la era de la información y que han recibido diferentes denominaciones.

2.2.1. Cultura estadística

El término *cultura estadística* es una traducción del inglés *statistical literacy* que se puede traducir más literalmente como *alfabetismo estadístico*. Se va a tomar la traducción que realizan Batanero, Díaz, Contrerasy Roa (2013) y que es la de *cultura estadística*, que en palabras de Gal (2004) se define como la

> Concepción de la alfabetización estadística que se refiere a lo que se espera de los adultos (en oposición a los estudiantes que aprenden activamente Estadística), en particular los que viven en las sociedades industrializadas. En este contexto, el término alfabetismo estadístico se refiere ampliamente a dos componentes interrelacionados, principalmente (a) la capacidad de las personas para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos relacionados con los datos o los fenómenos estocásticos, que pueden encontrar en diversos contextos (b) su capacidad para debatir o comunicar sus reacciones a dicha información estadística, tales como su comprensión del significado de la información, sus opiniones sobre las implicaciones de esta información, o sus preocupaciones con respecto a la aceptabilidad de las conclusiones dadas (p.49).

Por tanto, son dos ideas las que se destacan en la definición. Por una parte, la de que la cultura estadística está relacionada con las herramientas que tenemos para interpretar y evaluar todo lo que nos rodea que está relacionado con la estadística, y por otra parte la capacidad comunicativa, que permite formar una opinión a partir de la información estadística y defenderla o criticarla.

Este concepto ha ido tomando fuerza en los último 15-20 años y diferentes autores como Watson (2006), Garfield o Franklin et al. (2007) han ido confeccionando partes del todo que puede ser una definición de *cultura estadística*, por ejemplo Franklin et al. (2007) indican

> La cultura estadística es necesaria para las elecciones personales diarias... La cultura estadística implica una dosis saludable de escepticismo acerca de los hallazgos "científicos" ... La cultura estadística es esencial en nuestras vidas personales como consumidores, ciudadanos y profesionales. Las estadísticas juegan un papel en nuestra salud y felicidad. Las sólidas habilidades de razonamiento estadístico tardan mucho tiempo en desarrollarse... Pero el diseño de la recopilación de datos, la exploración de datos y la interpretación de los resultados deben enfatizarse en la educación estadística para la cultura estadística (pp. 2-9).

Otra definición es la que da Watson (2006) indicando que la cultura estadística no quedaba completamente definida por los aspectos que señalaba Gal (2004) y que se indican unas líneas más arriba. Para ella la cultura estadística debe incluir

> En particular la interpretación de gráficos y de tablas, además con la apreciación de porcentajes y medias dentro de la alfabetización cualitativa… La cultura estadística es además el punto de encuentro del curriculum basado en datos y el de probabilidad… (pp.10-11).

Esta opinión ya la expresaba Garfield (1999), que daba especial énfasis a la interpretación de tablas y gráficos. Por su parte la profesora Batanero et al. (2013) sintetizaban la opinión de Watson (2006) en tres puntos de la siguiente manera,

> (a) El desarrollo del conocimiento básico de los conceptos estadísticos y probabilísticos; (b) La comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos cuando se presentan dentro de un contexto más amplio de algún informe en los medios de comunicación o en el trabajo; (c) Una actitud crítica que se asume al cuestionar argumentos que estén basados en evidencia estadística (p.9).

Watson (2006) además expone la figura 2 para sintetizar los retos que hay por delante para conseguir alcanzar una formación que trabaje la cultura estadística.

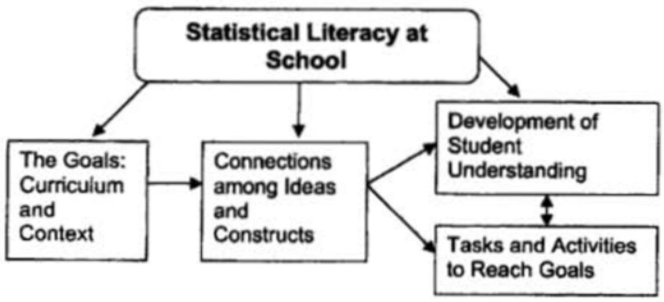


Figura 2. Retos para alcanzar la cultura estadística. (Watson, 2006, p.viii)

2.2.2. Razonamiento estadístico

En segundo lugar, se tiene la noción de *razonamiento estadístico*, que es un concepto que se define como "la encarnación estadística del <<sentido común>>" (Wild y Pfannkuch, 1999, p.223) Para el desarrollo de este *sentido común* Wild y Pfannkuch apuestan por integrar los proyectos.

Otra definición interesante es la de Garfield y Ben-Zvi (2008),

> El razonamiento estadístico es la forma en que la gente razona con las ideas estadísticas y le da sentido a la información estadística [...] puede involucrar conexiones de un concepto a otro (por ejemplo, medidas de tendencia central y dispersión) o combinar ideas acerca de datos y azar. El razonamiento estadístico también significa entender y ser capaz de explicar procesos estadísticos y de interpretar sus resultados (p.34).

Wild y Pfannkuch (1999) indican que el razonamiento estadístico incluye cinco tipos de pensamiento fundamentales que se observan en la figura 3, entre los cuales destaca uno relacionado con la variación, y que son,

- *Reconocer la necesidad de los datos.* Es decir, reconocer que la experiencia o las anécdotas no sirven para tomar decisiones.
- *Transnumeración.* Es decir, convertir los datos en otras formas de expresión, como tablas o gráficos, que nos permitan analizar mejor la situación.
- *Considerar la variación.* Tener en cuenta, como se indicaba en el capítulo 1 que la variabilidad aleatoria está presente en todos los ámbitos, saber reconocerla y predecir sus efectos.
- *Uso de modelos estadísticos.* Los modelos son fundamentales en muchos aspectos de las matemáticas, en estadística también, ya que al aparecer la aleatoriedad se hacen imprescindibles.
- *Conocimiento del contexto,* sobre estadística y de síntesis.

Incluso Garfield (2002) ahonda más en este concepto y dice que un correcto razonamiento estadístico debe incluir,

> Entender por qué las medidas de centro, dispersión y posición dicen cosas diferentes sobre un conjunto de datos; Saber cuáles son los mejores medidas de cada tipo que se deben usar bajo diferentes condiciones, y por qué representan o no a un conjunto de datos; Saber por qué el uso de resúmenes para predicciones será más preciso para muestras grandes que para muestras pequeñas; Sabiendo por qué un buen resumen de los datos incluye una medida de centro, así como una medida de dispersión y por qué los resúmenes de centro y dispersión puede ser útil para comparar conjuntos de datos (Apt. 3, párr. 11).

(b) DIMENSION 2 : TYPES OF THINKING

GENERAL TYPES
- **Strategic**
  - — planning, anticipating problems
  - — awareness of practical constraints
- **Seeking Explanations**
- **Modelling**
  - — construction followed by use
- **Applying Techniques**
  - — following precedents
  - — recognition and use of archetypes
  - — use of problem solving tools

TYPES FUNDAMENTAL TO *STATISTICAL* THINKING (Foundations)
- **Recognition of need for data**
- **Transnumeration**
  (Changing representations to engender understanding)
  - — capturing "measures" from real system
  - — changing data representations
  - — communicating messages in data
- **Consideration of variation**
  - — noticing and acknowledging
  - — measuring and modelling for the purposes of prediction, explanation, or control
  - — explaining and dealing with
  - — investigative strategies
- **Reasoning with statistical models**
- **Integrating the statistical and contextual**
  - — information, knowledge, conceptions

Figura 3. Tipos de pensamiento estadístico. (Wild y Pfannkuch, 1999, p.226)

Por tanto, se debe entender que cómo se indicaba en el capítulo 1, las medidas de dispersión son necesarias y complementan a las de tendencia central y Garfield (2002) sitúa esta idea como uno de los puntos más importantes sobre el razonamiento estadístico.

Dentro de los estudios acerca del razonamiento estadístico, una serie de los más importantes son los que tratan sobre los heurísticos. Se puede definir el término como un método para buscar una solución a un problema que no es exhaustivo, pero da buen resultado. El problema es que se generan reglas sobre problemas basadas en la experiencia, que se verifica la mayoría de las veces, pero que es falible. Es decir, proporcionan soluciones a problemas, que se basan en la experiencia y no en los datos, que en ocasiones funcionan, que se utilizan por rapidez o economía, pero que al no basarse en datos pueden fallar. Esto genera lo que se conoce como sesgo.

Tversky y Kahneman (1975) indican que cuando necesitamos sacar conclusiones o hacer juicios sobre conjuntos de datos en los que hay variabilidad, no se usan métodos formales, sino reglas heurísticas, lo que genera sesgos.

Algunos sesgos de los más conocidos son los siguientes:

a) *Ideas erróneas sobre la media.* Las personas tienden a ignorar la posibilidad de la existencia de valores atípicos y piensan que, para encontrar el centro de un conjunto de datos, siempre hay que sumar todos los números y dividir por el número de valores de datos. Esto implica que no tienen en cuenta la variabilidad (Meletiou, 2000).

b) *La orientación hacia los resultados*. Este enfoque fue identificado por Konold (1989) que se dio cuenta de que las personas tienden a interpretar los fenómenos aleatorios en términos deterministas. Por ejemplo, una probabilidad del 50% se asigna a menudo cuando no hay predicción razonable posible. Por lo tanto, para las personas que adoptan el enfoque de resultados, la información de que hay una probabilidad del 50% de que mañana llueva no les sirve, una probabilidad del 30% implica que no hay posibilidad de lluvia, mientras que una probabilidad del 70% significa que definitivamente lloverá.

c) *Las buenas muestras deben representar un alto porcentaje de la población.* Implícito en la concepción de multiplicación de la muestra y el muestreo están las nociones de representatividad de la muestra, la idea de que una muestra tendrá características similares a las de la población y la variabilidad de la muestra da la idea de que las muestras no son todas idénticas y por lo tanto no coinciden con la población exactamente. Para mostrar la concepción de multiplicación, las ideas de la representatividad de la muestra y la variabilidad de la muestra deben estar en equilibrio, lo que significa que un individuo reconoce implícitamente que una muestra representativa debe producir estadísticas similares a los parámetros de población y las diferentes muestras deberían estar compuestas por los valores de diferentes observaciones y (probablemente) tienen diferentes estadísticas resumen (Peters, 2009).

d) *La ley de los números pequeños.* La gente tiende a pensar que las muestras pequeñas se asemejan a las poblaciones de las que se extraen y las usan como base para la inferencia y la generalización Tversky y Kahneman, (1975). El problema es que erróneamente aplican la "ley de los grandes números" para muestras pequeñas y muestran una confianza injustificada en la validez de las conclusiones extraídas a partir de muestras pequeñas. Como Shaughnessy (1992) señala, para la gente estadísticamente ingenua, el efecto del tamaño de la muestra sobre la variación no es un factor a tener en cuenta. Para ellos, no es evidente que los resultados extremos son más probables en los tamaños pequeños.

e) *La idea errónea de la representatividad.* Existe el pensamiento extendido de que una muestra al azar cumple con todas las características de la población general, es decir, que es muy representativa (Kahneman y Tversky, 1972).

f) *El sesgo de equiprobabilidad*. Consiste en pensar que si en una caja tenemos dos fichas rojas y una blanca existe la misma probabilidad de sacar dos rojas que una blanca (Lecoutre, 1992).

2.2.3. Sentido estadístico

Una vez definidos lo que son el razonamiento y la cultura estadística, es pertinente definir lo que es el sentido estadístico, que la profesora Batanero et al. (2013) describen como "unión de la cultura estadística y el razonamiento estadístico" (p.8)

Además de la noción de sentido estadístico la profesora Batanero et al. (2013) plantea una serie de ideas que son fundamentales en la estadística, que son las siguientes:

- Datos.
- Gráficos.
- Variabilidad aleatoria.
- Distribución.
- Asociación y correlación.
- Probabilidad. (Los tres enfoques, clásico, frecuencial y subjetivo)
- Muestreo e inferencia.

Por tanto, el sistema educativo debería, en consecuencia, programar el curriculum, y las editoriales, los libros, como extensión del curriculum, para que fomenten y desarrollen la cultura y el razonamiento estadístico. De esta manera, la forma de enseñar los diferentes significados de la dispersión y sus medidas deben estar encaminadas a favorecer el desarrollo del sentido estadístico. Para desarrollarlo tenemos dos opciones, una es, como propone Batanero (2000):

> Si queremos que el alumno valore el papel de la probabilidad y estadística, es importante que los ejemplos que mostramos en la clase hagan ver de la forma más amplia posible esta fenomenología, e incluyan aplicaciones de su mundo biológico, físico, social y político, como las descritas en Tanur (1989). Sin renunciar a los juegos de azar, aplicaciones como las características genéticas, la previsión atmosférica, el resultado de las elecciones, el crecimiento de la población, la extinción de las especies, el efecto del tabaco o drogas sobre la salud, la extensión de epidemias, los resultados deportivos, el índice de precios o el censo de la población son cercanas a los intereses de los alumnos (p.9).

Otra es, como sugieren Wild y Pfannkuch (1999) o Batanero y Díaz, (2004) trabajar por proyectos. En este sentido Batanero y Díaz, (2011) han desarrollado un libro de proyectos que se puede encontrar en http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf

2.3. Elementos del enfoque ontosemiótico

En este apartado se van a presentar algunos de los elementos que caracterizan el Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino y Font, 2007), haciendo hincapié en los objetos y significados que este marco teórico define, ya que serán de gran utilidad en el futuro trabajo de investigación a realizar.

2.3.1. Planteamiento del EOS

Dentro de las posibles formas que hay de enfocar el EOS y de los posibles elementos que se podían traer a colación se han escogido los imprescindibles para poder realizar el trabajo posterior de tesis. En dicho trabajo se presentará este marco de una forma más amplia. Para este trabajo se han elegido los sistemas de prácticas y los objetos y significados, así como sus tipologías y atributos.

2.3.2. Sistema de prácticas

En el trabajo o el aprendizaje de las matemáticas hay dos tipos de prácticas asociadas a la resolución de problemas: una práctica operativa que consiste en el trabajo con los objetos matemáticos, y en la resolución de problemas; y, principalmente, una práctica discursiva que consiste en reflexionar sobre la práctica operativa, así como en los argumentos orales o escritos involucrados. En este primer nivel del análisis se deben identificar las prácticas realizadas.

Godino y Batanero (1994) definen objeto matemático de una manera previa de la siguiente manera

> Los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realizan determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de los "objetos matemáticos" y el que el "significado" de estos objetos esté íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática. (p. 330)

Se irá desarrollando el apartado de manera que se pueda definir mediante el uso el significado de los objetos matemáticos.

Antes que Godino, Chevallard, (1991) definió *objeto matemático* como

> Un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito (p. 8).

Sin embargo, el concepto importante para Chevallard no es la noción de objeto matemático sino la relación al objeto. Para estudiar los tipos de relaciones a los objetos antes se necesitan comprender algunas ideas previas:

- Problema: Godino se apoya en las definiciones de Lester o Simon para describir lo que se entiende por problema que se podría definir como una situación en la que hay que realizar una tarea que no tiene una solución sencilla y para la que se necesita un algoritmo, pero que se sabe reconocer cuando acaba con algún tipo de mecanismo. Al mecanismo de la resolución de un problema le llama Freudenthal *matematizar*, aunque este autor lo lleva más allá "matematizar es un proceso que continúa tanto tiempo como el que la realidad cambia, ampliando y profundizando bajo multitud de influencias, incluyendo las matemáticas, que a su vez son absorbidas por la realidad cambiante" (Freudenthal, 1991, p.30) Godino, sin embargo, propone introducir el concepto de práctica para resumir las características de la actividad de matematización.
- Práctica: "Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas." (Godino y Batanero, 1994, p.333*)* A esto es a lo que Chevallard llamaba praxema y que define como "objetos materiales ligados a las prácticas" (Chevallard, 1991, p.8).

Mientras que Chevallard se interesa solo por las instituciones, en el EOS para cada persona se pueden asociar un sistema de prácticas características. Como se ha mostrado antes la noción de práctica está relacionada con la de problema, normalmente una persona cuando trata de resolver un problema no lo hace linealmente, sino que utiliza el método de ensayo error, dando lugar a procedimientos que no llevan a la solución y que, por tanto, se abandonan, así surge la necesidad de definir las prácticas significativas:

Diremos que una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p.334).

Esta definición de práctica significativa exige organización, es decir, una práctica es significativa cuando se realiza para conseguir un fin determinado y se hace conscientemente.

En la figura 4 se muestra la emergencia de una práctica característica significativa.

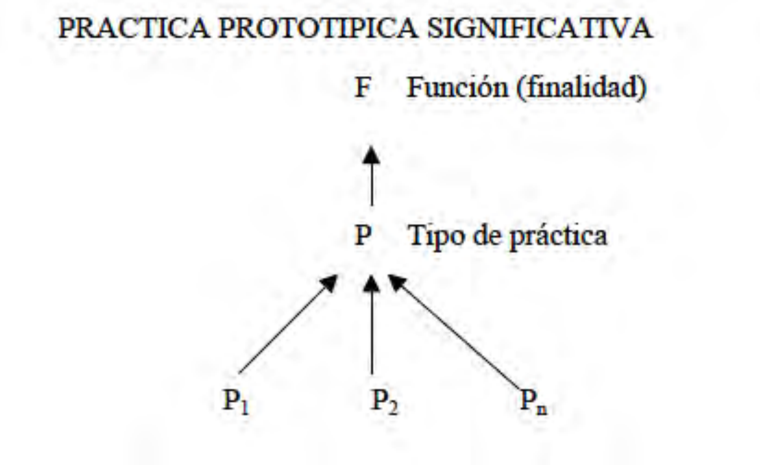


Figura 4. Práctica prototípica significativa (Godino y Batanero, 1994, p.334)

Muchas prácticas matemáticas son compartidas por grupos de personas que tienen interés en resolver los mismos problemas matemáticos y que la sociedad los reconoce como *institución*. Sin embargo, las matemáticas no son sólo personales, sino también sociales, en el aspecto de que normalmente se aprenden en grupo y cuando se investiga o resuelven problemas se comparten los resultados con los demás.

Godino y Batanero (1994) nos proponen la siguiente definición de institución,

una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen (p. 334).

Como ejemplos de instituciones matemáticas se pueden citar a las personas comprometidas con la resolución de problemas, profesores de matemáticas o los matemáticos, también es una institución bajo esta definición una clase de matemáticas, donde todos, profesor y alumnos, están involucrados en una tarea común de enseñanza – aprendizaje de matemáticas. Así dentro de cada institución las prácticas son diferentes para conseguir la resolución del campo de problemas en cuestión. Esto da pie a definir lo que es un sistema de prácticas institucional asociado a un campo de problemas, así según Godino y Batanero, (1994) este sistema "está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I." (p. 335).

Ejemplos de estos sistemas de prácticas son representaciones simbólicas, definiciones, argumentaciones, demostraciones, etc., …

2.3.3. Objetos institucionales y personales

Como consecuencia de las prácticas realizadas en la resolución de problemas emergen los objetos. Godino y Batanero (1994) plantean un ejemplo de problema del que surge el objeto *media.* Consiste en medir una cantidad desconocida, debido al error de medida intrínseco del aparato (por ejemplo, un goniómetro que se mueve Xº tendrá un error x, por lo tanto, la medida será X $\pm$ x º) tendrá una dispersión de medidas, pero, ¿cuál es la correcta? No hay nada que indique que una es mejor que otra, así emerge el concepto de media, que no será más que la suma de todas las medidas divididas por el número de estas. Este objeto, según indican Godino y Batanero (1994):

> Emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. De acuerdo con Morin (1977), la noción de emergencia significa que los productos globales de las actividades que forman un sistema disponen de cualidades propias, las cuales retro actúan sobre las actividades mismas del sistema del que se vuelven inseparables (p. 335).

Como se ha advertido anteriormente, las prácticas son características de la institución, así pues, los objetos tendrán esa misma cualidad también ya que emergen de un sistema de prácticas concreto. Por tanto, el objeto será relativo a una institución y Godino y Batanero (1994) lo define de la siguiente manera: "es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_I(C)$. Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de O_I" (p. 336).

Los objetos institucionales emergen progresivamente y se van haciendo un lugar en la institución. Una vez que lo han conseguido no se queda así, van evolucionando de manera que también se va ampliando su campo de problemas. De esta manera el objeto *media* cada vez ha ido respondiendo a más problemas de distinta índole. Cuando un objeto institucional surge en una institución matemática el objeto entonces recibirá el nombre de *objeto matemático*.

Pero no sólo existen objetos institucionales, ya que en muchas ocasiones es un sujeto, una persona individual quien está aprendiendo y quien crea un nuevo concepto, por tanto y en relación al sujeto se puede definir paralelamente un sistema de prácticas personal que

> está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Representamos este sistema por la notación $P_p(C)$" y un objeto personal que "es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_p(C)$ (Godino y Batanero, 1994, p. 337).

2.3.4. Significado institucional y personal de un objeto

Como se ha mostrado hasta ahora, el objeto emerge de un sistema de prácticas determinado, y la descripción del objeto que se hace mediante esas prácticas se puede considerar su descripción. Hay que recordar que al inicio de este apartado se dijo que se consideraría el aspecto pragmático del significado. Así lo muestran Godino y Batanero (1994) apoyándose en Vergnaud y más tarde lo especifican más claramente "coincidimos con este autor en que el significado de los objetos matemáticos debe estar referido a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación con dichos objetos" (p. 337).

Es decir, el significado parece emerger también del sistema de prácticas, no sólo el objeto. De esta manera si un objeto podía ser institucional o personal, es lógico pensar que lo mismo ocurra con su significado, se puede estudiar si esto pasa con un objeto. Si se elige el objeto *media* se observa que según la institución donde se analice tendrá un significado u otro, por ejemplo en un aula de primaria no tendrá el mismo significado que en una de secundaria, y por supuesto será mucho más profundo en un aula de la licenciatura de Estadística y en la vida diaria tendrá unas connotaciones diferentes.

Por tanto, parece que su significado depende en gran medida de la institución en la que se use, por tanto, cabe definir el significado de un objeto institucional como "el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado" (Godino y Batanero, 1994, p.338). Como se puede ver, al definirlo de esta manera se hace que el significado dependa de la institución; si esta institución es una institución matemática (M), entonces se habla del significado matemático de un objeto. Además, se puede equiparar el significado institucional de un objeto al sistema de prácticas institucional del cual emerge el susodicho objeto.

De la misma manera que se hacía con el objeto definiendo paralelamente un objeto institucional y otro personal, dependiendo de si emergía de una institución o de un sujeto, se puede hacer también con su significado, siendo la definición paralela a la anterior. Por tanto, se dice que el significado de un objeto personal es "el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado" (Godino y Batanero, 1994, p. 338). Teniendo la misma implicación que la definición institucional, pero en el marco personal.

2.3.5. Tipología y atributos de los objetos

Por ahora no se ha hablado de la clase de objetos que se pueden encontrar, pero el EOS amplía la distinción clásica que se realiza en el curriculum de concepto-procedimiento-actitud con el objetivo de describir mejor los objetos, así pues, Font y Godino, (2006) proponen la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- Elementos lingüísticos: son cualquier tipo de expresión oral o no con la que transmitimos algo (notaciones, expresiones, etc.)
- Situaciones – problema: se refiere a cualquier problema, ejercicio o tarea que se realiza.
- Conceptos – definición: como su propio nombre indica es cualquier definición que se introduce (de un objeto, por ejemplo, recta, punto, media, dispersión, etc.) ya sea mediante una definición o una descripción.
- Acciones o procedimientos: es la forma de hacer o trabajar un concepto o una demostración, etc., ...
- Proposiciones: son enunciados que se realizan sobre los objetos, en los cuales se puede, por ejemplo, definir propiedades de los mismos.
- Argumentos: con ellos se justifican las deducciones o resultados que se alcanzan.

Si así se describen mejor los objetos, se puede decir también que estos tienen una funcionalidad. Por ello, se les pueden dar unos atributos contextuales duales que ayuden a entender estas funciones, y Font y Godino (2006) introducen las siguientes dimensiones duales para considerarlos:

- Personal – institucional: Este atributo depende de si el sistema de prácticas es compartido en el seno de una institución, cuando diremos que el objeto es institucional, mientras que si el sistema es una persona el objeto es personal. Ambas facetas son necesarias ya que, aunque a través de la enseñanza o de compartir experiencias en una institución, también se da un proceso de comprensión personal al enfrentarse a un problema o en el seno de una institución. De esta manera si no se consideran ambas facetas no se está teniendo la visión completa del objeto.

- Ostensivo – no ostensivo: Un objeto ostensivo es un objeto público, que puede ser mostrado, aunque normalmente los objetos son no ostensivos, es decir, no se perciben por sí mismos, pero se pueden asociar a estos objetos otros que sean ostensivos como gráficos, notaciones, etc., … Sin embargo, la distinción entre ostensivo y no ostensivos no está claramente delimitada ya que un objeto no ostensivo puede ser imaginado o estar implícito en el discurso matemático.
- Expresión – contenido: Los objetos pueden ser antecedentes y/o consecuentes de una función semiótica. Los objetos están relacionados entre sí, no son entidades aisladas, la relación es mediante funciones semióticas que consiste en una relación de una expresión (antecedente) con un contenido (consecuente) establecida por una persona o institución con respecto algún criterio de correspondencia.
- Extensivo – intensivo: Es la relación que se da entre una expresión y su generalización, por ejemplo, *la derivada de 3x es 3*, que es el caso particular, y *la derivada de mx es m* que es el caso general, de esta manera se hace posible generalizar.
- Unitario – sistémico: los objetos pueden ser estudiados como entidades unitarias o que deban ser descompuestas. Los objetos unitarios se suponen previamente conocidos mientras que los sistémicos deben ser descompuestos para ser analizados.

2.3.6. Tipos de significados institucionales y personales

En consecuencia, como el significado institucional, varia de una institución a otra, el significado personal variará de una persona a otra, e incluso, en la misma persona dependiendo de su evolución en la apropiación del significado de un determinado objeto matemático. Podemos definir varios tipos de significado institucional y personal que nos permita relacionar ambos (Godino y Font, 2007).

Los tipos de significados institucionales que se pueden encontrar son:

- Referencial: es el sistema de práctica que se utiliza como referencia para elaborar un significado.

- Pretendido: son todos los sistemas de prácticas incluidos en la planificación de la enseñanza.
- Implementado: es el sistema de prácticas que, como dice el propio tipo, implementa el docente.
- Evaluado: es el subsistema de prácticas que se emplea para evaluar el aprendizaje.

Los tipos de significados personales propuestos en el EOS son:

- Global: corresponde a todos los sistemas de prácticas personales que el sujeto es capaz de situar en relación a un objeto matemático.
- Declarado: son las prácticas que expresa el sujeto sean correctas o no desde el punto de vista institucional.
- Logrado: son las prácticas que manifiesta el sujeto y son acordes a las institucionales.

La relación entre estos significados se sintetiza en la figura 5.

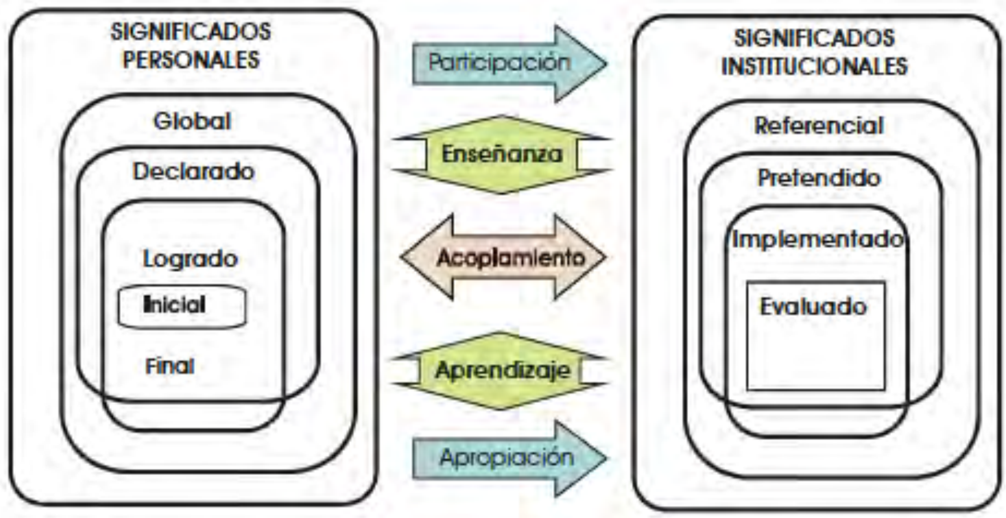


Figura 5. Tipos de significados institucionales y personales.(Godino et al., 2006, p.7)

Capítulo 3. Síntesis de la investigación sobre variabilidad estadística y dispersión.

3.1. Introducción.

Una de las dificultades que se puede encontrar al realizar una revisión bibliográfica es cómo categorizar o clasificar todos los estudios previos.

Tabla 2. Significados diferenciados de la dispersión (Batanero et al. 2015, p.17)

	Descriptivo univariante	Descriptivo bivariante	Probabilístico	Inferencial
Situaciones problemas	Análisis de variabilidad producida en los datos.	Estudiar relación entre variables. Analizar la bondad de ajuste de un modelo.	Análisis de variabilidad probable en un modelo.	Precisión de una estimación. Riesgo de error en un contraste
Lenguaje	Gráficos estadísticos univariantes Símbolos: $\bar{x}$, S.	Gráficos estadísticos bivariantes Símbolos: r; S_{xy}	Representación gráfica de distribuciones. Tablas de distribuciones. Símbolos: σ, ξ, N (μ, σ)	Representación de distribuciones muestrales. Símbolos: $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
Conceptos	Resúmenes estadísticos descriptivos	Covarianza, Correlación, Coeficiente de determinación	Distribuciones de probabilidad Parámetro	Distribución muestral, estimación, intervalo de confianza, error tipo I y II
Propiedades	La suma de la distancia de datos a la media es cero. Las medidas de dispersión siempre son positivas	Partición de la varianza en parte explicada y no explicada por la regresión	Desigualdad de Tchebycheff	Insesgadez (de un estimador) Relación entre confianza, precisión y tamaño de la muestra
Procedimientos	Cálculo numérico de estadísticos	Mínimos cuadrados Otros modelos de ajuste	Cálculo de probabilidades Simulación	Muestreo Contraste de hipótesis Simulación
Argumentos	Similares a otras ramas de la matemática	Similares a otras ramas de la matemática	Incluyen expresiones de probabilidad	Incluyen expresiones de probabilidad. No simétricos (en el rechazo o aceptación de una hipótesis)

Tras realizar el análisis lingüístico, curricular y del marco teórico que se describe en capítulos anteriores, se ha pensado que la mejor manera de organizar la investigación previa es bajo los diferentes significados de la dispersión que aparecen en el currículo y que muestran Batanero, González-Ruiz, López-Martíny Contreras, (2015) y que sintetizan en la tabla 2.

Por tanto, las investigaciones existentes se organizarán bajo estos significados; dispersión en conjuntos de datos, probabilístico y en situaciones de muestreo, añadiendo además un apartado fundamental, sobre concepciones de la dispersión en estudiantes que configuran de cierta manera el significado personal de las medidas de dispersión de estos.

3.2. Comprensión de la dispersión por parte de los estudiantes y futuros profesores.

3.2.1. La variabilidad y dispersión en conjuntos de datos.

Una cita de hace 35 años de la profesora Hart (1983) es muy llamativa "el concepto fundamental de desviación estándar es de la primeras áreas de dificultad que un estudiante de estadística encuentra" (p.16). Sin embargo, como indican Garfield (1995) y Garfield y Ben-Zvi (2007) los profesores suelen subestimar la dificultad de estos conceptos.

Efectivamente, cuando se intenta formalizar el cómo se mide la dispersión surgen una serie de problemas. Cuando un estudiante se plantea cómo medir cuán dispersos están unos datos en torno a una medida de tendencia central, por ejemplo, la media, la primera consideración que puede tener es la de sumar todas las distancias de estos datos a la medida, pero encontrará que se compensan y que sale cero.

Por tanto, una nueva idea que surge es utilizar un operador que convierta todas las distancias en positivas, por ejemplo, en este caso se utiliza el valor absoluto, como interesa la distancia promedio, se realiza la media. De esta forma se obtiene la desviación absoluta media. Pero cuando se trata de operar con esa fórmula surgen algunas dificultades de manipulación, debido al uso del valor absoluto, que no es derivable, entre otros problemas, por lo tanto, se acude a otro operador que convierte todas las diferencias en positivas, elevar al cuadrado. La nueva situación continúa siendo problemática, ya que la varianza está expresada en unidades de medida al cuadrado, y es interesante para comparar que la medida de dispersión y la medida de tendencia central estén en las mismas unidades, con lo cual se recurre a realizar la raíz cuadrada positiva. Y así es como se obtiene la desviación típica o desviación estándar (Yap, 2008).

Para los alumnos de secundaria todos estos pasos no son evidentes. Al principio no entienden la necesidad de medir la dispersión, ya que consideran las medidas de tendencia central como absolutas.(Shaughnessy, 2006) Cuando posteriormente entienden esta necesidad, el uso de diferentes unidades o los problemas del valor absoluto y ventajas de elevar al cuadrado son difícilmente entendidas (Hart, 1983). Por tanto, como indicaba esta autora, la desviación estándar es una noción que genera grandes dificultades cuando los estudiantes se enfrentan por primera vez a ella.

Sobre la desviación absoluta media se han llevado a cabo algunos estudios para relacionarla, aunque sea por sus límites, con la desviación estándar. Sobre este estadístico puede destacarse el trabajo de Boyd, (1985) pero la mayor parte de los trabajos se centran fundamentalmente en dos temas, la desviación estándar y su relación con la media.

Sobre la desviación típica existen dos tipos de trabajos, los que son más matemáticos que didácticos, aunque se aborden desde los dos ámbitos, y los que son sobre la enseñanza y concepciones del alumnado. Centrándonos en el primer foco, uno de los más antiguos es el de Harding (1996), donde a partir de un error que percibió dando clases extrajo la relación entre el rango y la desviación típica.

También podemos destacar los trabajos de Yap (2008) que describe la desviación típica, cómo surge y cómo se enfrentan a ellos algunos ejercicios, además diferencia entre la desviación típica de una población y la de una muestra, como ya se indicaba previamente en la tabla 2.

En otro artículo, Pingel (1993) valora la adecuación de la desviación típica para ser una buena medida de la dispersión en todos los casos. En dicho artículo se concluye que la desviación típica no es un buen estimador de la dispersión cuando la distribución de datos no es simétrica y centrada con respecto a la media, siendo otras medidas de dispersión como el rango, el recorrido intercuartílico o la desviación absoluta mejores estimadores. Además, indicaba que los alumnos deberían comprender que la dispersión no se puede medir con un solo parámetro como es la desviación típica, sino que existen diferentes medidas que, dependiendo de la situación, pueden medir de una forma más adecuada la dispersión.

Otro trabajo destacable es el de Jones y Scariano (2014) en el que analizan dos formas de medir la dispersión. Una de ellas con la media de las diferencias cuadradas entre los datos, y otra con la varianza (diferencias cuadradas con respecto a la media) demostrando que ambas medidas son cuantitativamente idénticas, indicando que ambas perspectivas pueden ser útiles para la enseñanza de cómo cuantificar la dispersión.

En el segundo tipo de estudios, lo conveniente es remontarse a los trabajos de Hart (1984) y Loosen, Lioeny Lacante (1985) en los que se analiza la desviación típica, su enseñanza y cómo explicarla de manera intuitiva. En el primero de ellos, Hart (1984) se plantea por qué los alumnos relacionan la desviación típica con la “medida de la dispersión” y no sucede esto con la desviación absoluta, por ejemplo. Plantea varias posibilidades, una de ellas es que la varianza es un estimador útil y que se emplea en otros cálculos estadísticos como la distribución normal, el otro es que las calculadoras ayudan a su obtención cuando no la dan directamente. La alternativa que propone Hart (1984) es la de “enfatizar la desviación absoluta como introducción a la desviación estándar, apuntando las ventajas y desventajas relativas” (p.24) Loosen et al. (1985) parten de las premisas de Hart (1984) indicando que ellos son aún más pesimistas que Hart y que creen que los estudiantes no entienden lo específica que es la desviación típica como medida de dispersión.

> Nuestra duda ha sido inducida por la forma en que muchos libros de texto introducen el concepto de dispersión. La mayoría de las introducciones ponen un mayor énfasis en la heterogeneidad entre las observaciones que en sus desviaciones de la tendencia central (Loosen et al., 1985, p.2).

Así pues, partiendo de cómo los libros de texto introducen el concepto, exponen los dos puntos de vista que para ellos son aconsejables para enseñar la desviación típica, poniendo el énfasis en la heterogeneidad de las medidas, o en la heterogeneidad de las desviaciones. Para ello realizaron un experimento con 154 alumnos de la carrera de psicología sin formación específica en dispersión, en las que le pedían que del gráfico de la figura 6 identificaran cuales era menos diferentes, en primer lugar, en los gráficos A y B, y luego entre C y D.

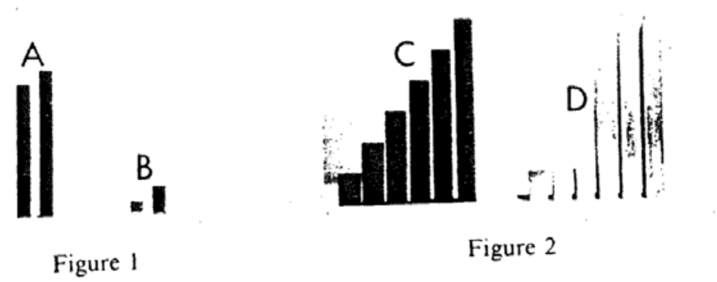


Figura 6. Test de heterogeneidad con barras. (Loosen et al., 1985, p.3)

El resultado del experimento mostró que los alumnos ponían el foco en las medidas y no en las diferencias, al no darse cuenta de cuando la desviación típica era la misma, ya que para ellos la desviación típica era mayor cuando las diferencias entre medidas eran mayores. Sin embargo, no consideraban la desviación típica como la diferencia a un punto común.

A pesar de esto, si los gráficos se mostraban de la forma en las que se hace en la figura 7, sí que veían rápidamente la desviación típica. Concluyen que, en su opinión, deben separarse dos ideas, por una parte, la idea intuitiva de dispersión y por otra el concepto de desviación típica.

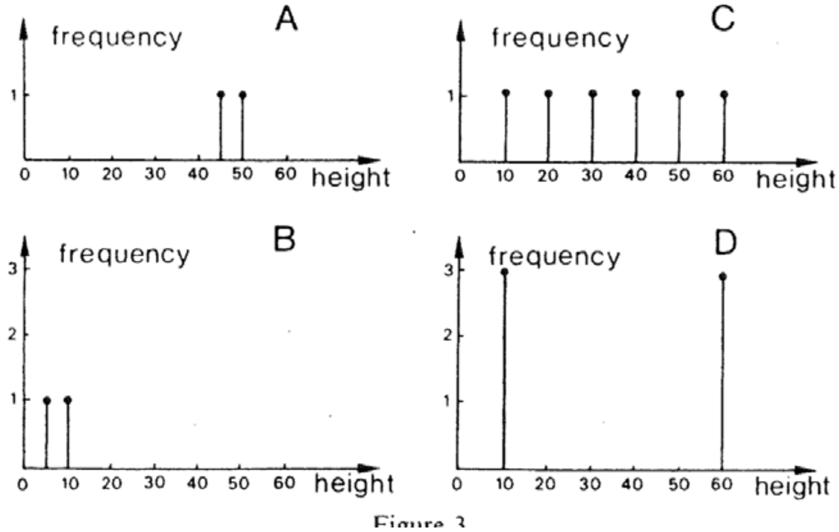


Figura 7. Test de heterogeneidad con puntos. (Loosen et al., 1985, p.4)

Concluyen que, en su opinión, deben separarse dos ideas, por una parte, la idea intuitiva de dispersión y por otra el concepto de desviación típica.

Más tarde Batanero, Godino, Vallecillos, Greeny Holmes (1994) y Shaughnessy (1997) analizaban los puntos débiles y carencias de la enseñanza estadística. Shaughnessy (1997) las llamaba *oportunidades perdidas*, una de ellas es la investigación sobre la variabilidad aleatoria, indicaba que apenas existía y que lo poco que había es lo que se ha mostrado en los artículos presentados unos párrafos antes. Él aportaba su opinión al respecto,

> Una razón es que los estadísticos han estado tradicionalmente muy enamorados de la desviación estándar como medida de la dispersión o variabilidad, y los profesores y los desarrolladores del plan de estudios a menudo evitaban lidiar con la dispersión porque sentían que no podían hacerlo sin introducir una desviación estándar. La desviación estándar no es sólo operacionalmente dificultosa, sino que es difícil de explicar por qué es una buena opción para medir la dispersión, especialmente con los estudiantes novatos. Otra razón para la falta de atención a la dispersión es que las medidas de tendencia central o promedios se utilizan a menudo para predecir lo que sucederá en el futuro, o para comparar dos grupos diferentes - no siempre se utiliza correctamente a este respecto, por supuesto, pero sin embargo se utiliza. La incorporación de

> dispersiones o variación en estos procesos de predicción o comparación sólo confunde la capacidad de las personas para hacer predicciones o comparaciones limpias (Shaughnessy, 1997, p.11).

Batanero et al. (1994) también hacían una revisión de lo que había sido la investigación en estadística en general y de la variabilidad en uno de sus apartados, señalando que,

> a) la estadística ha recibido hasta la fecha menos atención que otras ramas de las matemáticas;
> b) la mayor parte de la investigación se ha llevado a cabo en situaciones experimentales, en lugar de en situaciones escolares;
> c) muchos estudios se centran en niños muy pequeños o en estudiantes de universidad, siendo escasa la investigación en las edades 11 a 16 años;
> d) las primeras investigaciones en el campo han sido efectuadas por psicólogos en lugar de por educadores matemáticos, aunque este aspecto está empezando a cambiar (p. 528).

Otro trabajo interesante es el realizado por Clark, Kraut, Mathews y Wimbish (2007) en el que analizaban la comprensión de estudiantes de cursos de estadística de tres conceptos, la media, la desviación típica y el teorema central del límite. Para el estudio seleccionaron a 17 estudiantes de cuatro campus diferentes que habían obtenido una calificación de A (la más alta) en un curso de estadística elemental, utilizaron un sistema de entrevistas para ello. En este trabajo repetían el trabajo de Mathews y Clark (2007) que realizaron con 7 alumnos utilizando el mismo mecanismo de selección y trabajo. En este primer artículo concluían que los alumnos no comprendían que significaba la desviación típica, a pesar de haber obtenido sobresaliente en un curso introductorio de probabilidad y estadística.

La conclusión de Clark et al. (2007) era la siguiente,

> Con respecto a la desviación estándar, los resultados de este estudio sugieren que las desalentadoras interpretaciones cognitivas de los estudiantes de nivel "A" observadas en (Mathews y Clark, 2007) pueden, de hecho, ser representativas de los resultados de la mayoría de los cursos tradicionales a nivel nacional. Más de un tercio de los estudiantes en ambos estudios no habían progresado más allá de las concepciones de acción de la desviación estándar, y en algunos casos estas concepciones de acción no se demostraron en las entrevistas, sino que sólo se dedujo del éxito de los estudiantes en sus cursos (p.11).

Por tanto, en estos dos estudios se observa que, a pesar de ser alumnos sobresalientes en cursos específicos de estadística, las dificultades para comprender y manejar el concepto de desviación estándar son persistentes.

Poco se sabe, sin embargo, acerca de la comprensión de los estudiantes de las medidas de dispersión, cómo se desarrolla esta comprensión, o cómo los estudiantes pueden aplicar su comprensión para hacer comparaciones de la variación entre dos o más distribuciones…. Una comprensión incompleta de la desviación estándar puede limitar la comprensión de los estudiantes de estos temas más avanzados (delMas y Liu, 2005).

En dicho artículo también apuntan dos ideas o conceptos fundamentales para la comprensión del concepto de desviación típica, el primer concepto es el de distribución de datos, como ya se indicaba en la introducción de este apartado, sobre la otra indican,

> Un segundo concepto fundamental es el de la media aritmética. Una comprensión conceptual de la desviación estándar requiere más que el conocimiento de un procedimiento para calcular la media, ya sea en forma de procedimiento o simbólica (por ejemplo, Σx/n). Las imágenes que metafóricamente consideran que la media se comporta como un punto de apoyo autoajustable en un equilibrio se acerca a la concepción necesaria (delMas y Liu, 2005, p.56).

Para trabajar estos conceptos desarrollaron un programa en java que compilaron para Macintosh, donde se podían visualizar los conceptos fundamentales que intervienen en la desviación típica y modificarlos para tratar de predecir sus cambios, el resultado se puede ver en la figura 8, donde se puede observar una distribución en la que se analiza qué sucede si desplazamos varios datos.

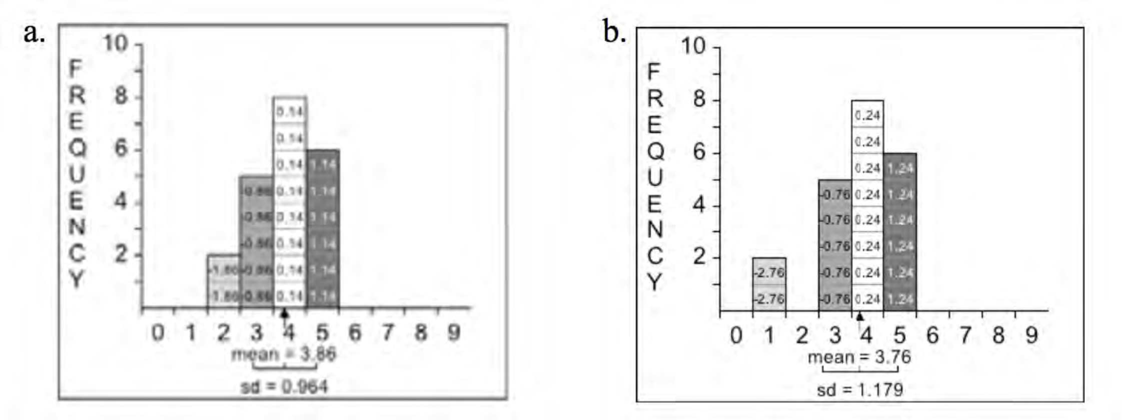


Figura 8. Representación gráfica de la desviación típica y sus conceptos relacionados. (delMas y Liu, 2005, p.57)

Para estudiar las concepciones de los estudiantes seleccionaron 129 alumnos de cuatro secciones de un curso introductorio de estadística. Tres de estos grupos trabajaron con un profesor que tenía un máster en educación matemática y cuatro años de experiencia, la otra sección trabajó con un profesor que era estudiante de doctorado en educación matemática, con mención en estadística, y tenía un año de experiencia. Finalmente, de los 129 estudiantes 27 participaron voluntariamente en el estudio y 13 accedieron a la entrevista final. La formación era específica “con respecto a la desviación estándar, los estudiantes habían participado en una actividad que exploraba factores que afectaban el tamaño de la desviación estándar” (delMas y Liu, 2005, p.59).

La formación consistió en jugar con el software, moviendo de diferentes maneras las barras de la distribución, para ser conscientes de cómo cambia la desviación típica al mover los diferentes datos. De esta manera se mezcla la instrucción directa con el aprendizaje por descubrimiento que permite facilitar el cambio conceptual, haciendo que los alumnos presten atención a aspectos que, por algún motivo, antes obviaban.

> Se promovió una concepción centrada en la media de la desviación estándar, llamando la atención sobre los valores de las desviaciones, preguntando a los estudiantes cómo los movimientos hipotéticos de las barras podrían afectar la media y entrevistándolos acerca del modelo de razonamiento sobre cómo afectó la distribución de las desviaciones a los valores de la media y la desviación estándar. El segundo objetivo era promover una comprensión sobre cómo la forma de distribución está relacionada con el tamaño de la desviación estándar. Se les pidió a los estudiantes que predijesen cómo la media y la desviación estándar estarían afectadas por las distribuciones en forma de campana y asimétricas de los mismos conjuntos de barras (delMas y Liu, 2005, p.60).

En la fase de test se cuestionó a los alumnos acerca de la desviación típica de pares de histogramas y tenían que indicar cuál de los dos tenía mayor desviación estándar, la propuesta se puede ver en la figura 9 y a continuación se dará información sobre lo que pretende cada ítem.

El ítem 1 buscaba que los estudiantes se diesen cuenta que ambos gráficos tenían las mismas barras en diferentes lugares. Los ítems 2 y 3 probaron la sensibilidad de los estudiantes a la densidad de valores alrededor de la media. El ítem 4 fue diseñado específicamente para ver si los estudiantes comprendían que, con las mismas frecuencias y rango, una distribución con un sesgo más fuerte tiende a tener una mayor desviación estándar. El ítem 6 muestra dos distribuciones que son un reflejo especular. Los ítems de prueba 5 y 7 buscaban una percepción sobre la agrupación, estos dos ítems fueron diseñados para identificar estudiantes que pudieran prestar atención sólo al orden de las barras y no a la densidad relativa de desviaciones de la media. El par de gráficos en los ítems 8, 9 y 10 no tenían las barras idénticas y tampoco tenía los mismos valores representados en cada gráfico. Los ítems de prueba 8 y 10 fueron diseñados para desafiar la creencia de que una distribución perfectamente simétrica y en forma de campana siempre tendrá una desviación estándar menor (delMas y Liu, 2005).

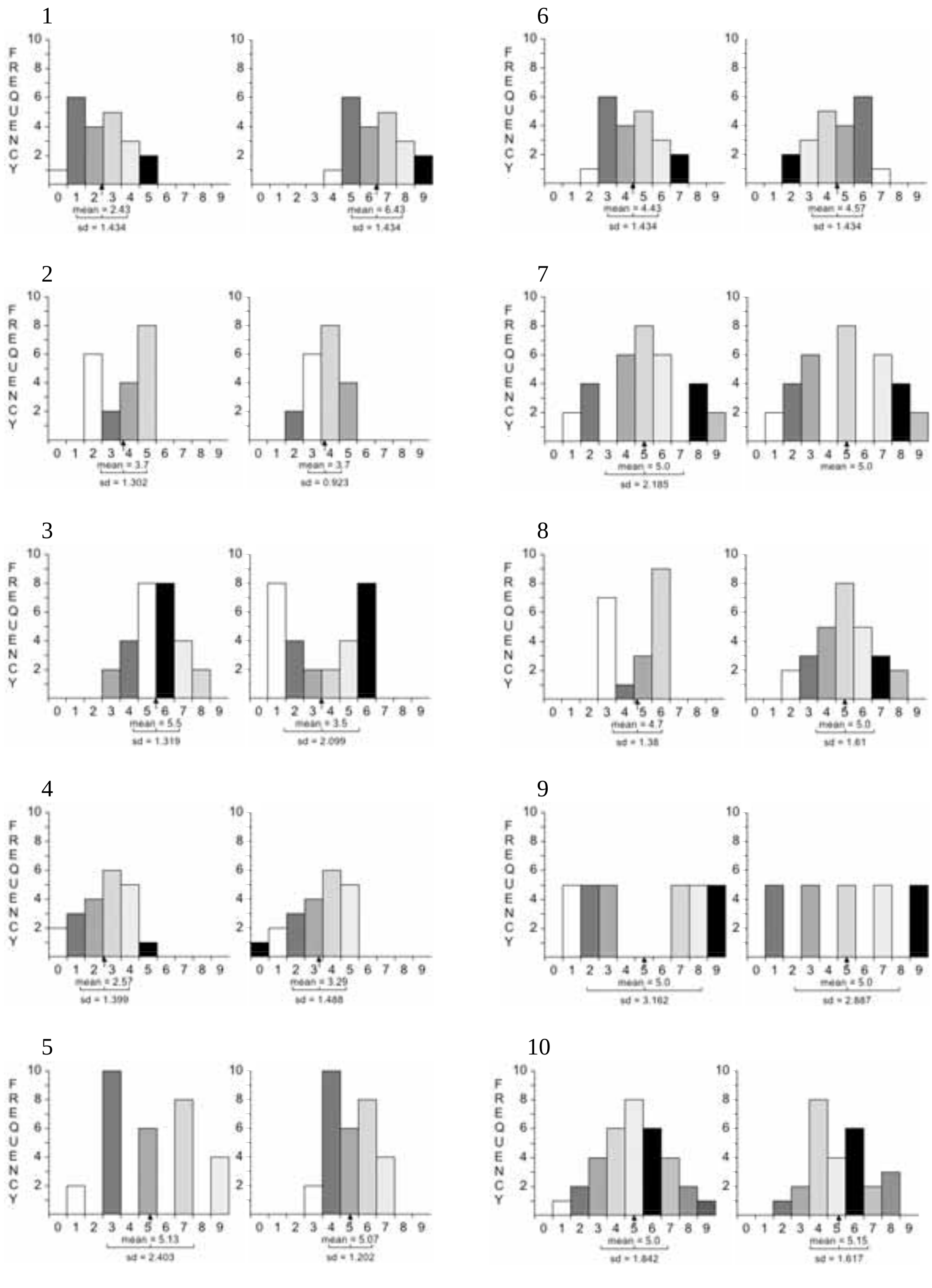


Figura 9. Test sobre desviación típica (delMas y Liu, 2005, p.62)

Debido a que fue un estudio exploratorio no se realizan consideraciones sobre que la instrucción se puede mejorar, aunque hace algunas propuestas, sin embargo, a la hora de analizar las respuestas de los alumnos, aunque hay cierta mejoría siguen persistiendo ciertos problemas.

> Esto sugiere que los estudiantes tienden a adoptar un enfoque de reconocimiento de patrones basado en reglas al comparar distribuciones. Si este es el caso, es necesario abordar dos preguntas. ¿Qué tipo de experiencias se requieren para que los estudiantes pasen de un enfoque basado en reglas a un entendimiento más integral que se pueda generalizar a una variedad de contextos? Además de la experiencia interactiva presentada en el presente estudio, ¿necesitan los estudiantes un apoyo adicional para reflexionar sobre las relaciones entre los diferentes factores y para atender y coordinar los cambios relacionados? Un enfoque de reconocimiento de patrones basado en reglas es consistente con el objetivo de encontrar la respuesta correcta al darse cuenta de las características que diferencian una distribución de otra y percatándose de la correspondencia con el tamaño de la desviación estándar […] Se podrían introducir varios cambios en el programa para apoyar la construcción de modelos y estudiar cómo afecta a la comprensión de la desviación estándar. El software actualmente llama la atención a una sola barra en lugar de enfatizar visualmente cómo cambian las características simultáneamente. Una segunda visualización sobre el área gráfica del histograma que presenta barras de desviación horizontales coloreadas para coincidir con los correspondientes colores de barra de frecuencia verticales puede facilitar la coordinación de cambios simultáneos de valores, la media, las desviaciones y la desviación estándar (delMas y Liu, 2005, p.80).

Otro trabajo interesante sobre las medidas de dispersión en general y sobre la desviación típica en general es Garfield, DelMas y Chance (2007), donde indican que

> La comprensión de la variabilidad tiene aspectos informales y formales, desde la comprensión de que los datos varían (por ejemplo, las diferencias en los valores de los datos) hasta la comprensión e interpretación de las medidas formales de variabilidad (por ejemplo, rango, desviación típica) (p.118).

En este trabajo se afianza el uso del vocabulario en el sentido de Reading y Shaughnessy (2004) en el que *variability* hacía referencia al fenómeno de la dispersión y *variation* a cómo se mide, siendo el concepto *measures of variability* equivalente a *variation*. Durante el trabajo indican que la forma en la que está distribuido el curriculum afecta a cómo se enseñan estos conceptos y a cómo se aborda el trabajo sobre razonamiento estadístico.

> Luego se introducen medidas de variabilidad (o dispersión), y los estudiantes aprenden a calcularlas y a interpretarlas brevemente. Normalmente, sólo se enseña la noción formal de variabilidad medida por tres estadísticos diferentes (es decir, el rango, el intervalo intercuartílico y la desviación estándar) (Garfield, DelMas y Chance, 2007, p.119).

Indicaban que los cuatro motivos por los que no se desarrolla un razonamiento estadístico son: mismo contenido y estructuración en todos los cursos, clases basadas en lectura del libro y ejercicios, uso de la tecnología solo en escasas demostraciones sin que los alumnos lo manipulen, y ausencia de evaluación formativa, ya que la única evaluación que se realiza es la final.

Para paliar estos problemas desarrollaron un estudio de lecciones japonesas que consistía en la entrega de un CD con pequeñas conferencias, videos breves en los que se explica cómo se utilizan los conceptos estadísticos de la lección en contextos reales, herramientas de simulación o applets interactivos, actividades que utilizan el software

DataDesk para analizar datos y ejercicios de revisión / evaluación. El libro utilizado fue *Práctica Estadística Activa* de Moore (1997), además se empleó una metodología colaborativa donde los alumnos trabajaban a menudo en grupo.

Se realizaron tres experimentos de enseñanza o lecciones, y al final de cada uno se hacía una pequeña evaluación que marcaba el ritmo y tipo de trabajo del siguiente. En el primer experimento de enseñanza, que se realizó mediante el trabajo de conjuntos de datos sin agrupar, el resultado no fue el esperado y los alumnos seguían presentando bastantes problemas para manejarse con la interpretación de la dispersión y sus medidas, con lo que cambiaron el trabajo a datos agrupados para un segundo experimento de enseñanza. Tras este segundo intento hubo una mejora, en la que los alumnos identificaban mejor la desviación típica y el rango, pero obviaban el recorrido intercuartílico.

Garfield, DelMas y Chance (2007) lo achacan a que los estudiantes lo relacionan con los diagramas de caja. En el tercero propusieron tras mucho meditarlo una tarea compleja, donde debían comparar tres medidas de dispersión, rango, desviación estándar y recorrido intercuartílico de diferentes variables a través de histogramas y diagramas de caja, donde debían de ordenar los gráficos de mayor a menor medida de cada uno de los tres estadísticos. Sin embargo, la mejoría no se notó hasta el final, como ellos mismo indican, "es quizás sorprendente observar que, a pesar de las múltiples lecciones sobre las medidas de dispersión, la mayoría de los estudiantes no demostraron una comprensión conceptual de estas ideas hasta el final del curso" (Garfield, DelMas y Chance, 2007, p.141).

Finalmente realizan una propuesta de trayectoria didáctica o de aprendizaje, una forma de cronograma de cómo presentar los diferentes conceptos,

> • Comience con la comprensión básica de los estudiantes de que los datos varían.
> • Investigar por qué las mediciones varían y los procesos que conducen a la variación en los datos.
> • Examinar las representaciones gráficas de la dispersión; Utilizar gráficos para comparar la dispersión de más de un conjunto de datos.
> • Enfocarse en las diferencias que aparecen en algunos gráficos y lo que indican acerca de la dispersión en el medio de un conjunto de datos.
> • Promover la toma de conciencia tanto de la extensión general como de la distribución de la mayoría de los datos.
> • Examinar las medidas del centro y cómo las medidas de dispersión se basan en las diferencias desde el centro, reconociendo cómo las medidas de dispersión son más informativas en el contexto de una medida de centro.
> • Determinar las características relativas (por ejemplo, resistencia) de diferentes medidas de dispersión para diferentes tipos de distribuciones, y cuando tiene sentido usar medidas particulares como resúmenes de dispersión para distribuciones particulares (Garfield, DelMasy Chance, 2007, p.142).

3.2.2. Coordinación de medidas de posición central y dispersión

Como se observa en las sugerencias de estos autores, relacionar la desviación típica con la media es un camino a una mejor comprensión de este tipo de medida de dispersión, siguiendo esta línea los siguientes trabajos que se van a presentar abordan este tipo de ideas, es decir, la interacción entre la desviación típica y la media.

Uno de los primeros textos que se pueden presentar en este sentido es el que propone Gordon (1986) donde se plantea si la media y la desviación típica son conceptos ligados, y trata de demostrar a un compañero que no lo son. Lo hace reportando el mismo resultado que se mostraba al inicio del sub apartado anterior por Jones y Scariano (2014) donde se manifestaba que es equivalente calcular la varianza (y por ende la desviación típica) con la diferencias cuadradas entre todos los datos entre sí, y las diferencias cuadradas entre los datos y la media. Por tanto, una primera conclusión es que se puede utilizar este doble enfoque para enseñar a trabajar con estas dos medidas de dispersión. Sin embargo, en la enseñanza tradicional siempre se tiende a enseñar la varianza y la desviación típica como resultado de operar con las diferencias cuadradas de los datos con respecto a la media.

Un artículo muy interesante es el de Lee y Lee (2011) donde hacen una revisión de la coordinación entre las medidas de tendencia central y las de dispersión, y además hacen una propuesta de materiales curriculares para trabajar estas ideas tanto en análisis de datos como en muestreo. Parten de las ideas que se expresaban en el apartado 4.2 y en este mismo sub apartado de Garfield (2002) y Shaughnessy (2006) acerca de que las medidas de dispersión completan las medidas de tendencia central y las de posición para resumir una distribución de datos. En este trabajo los alumnos son profesores en prácticas a los que van guiando. Para analizar el método de enseñanza las clases se grabaron y se realizó un diseño cuasi experimental pre-post.

En este caso la formación lleva seis capítulos o lecciones. En la primera el objetivo es que los profesores comprendan la importancia de las medidas de centro y dispersión de forma conjunta en el contexto de comparación de distribuciones de datos. En la segunda visionan un video sobre el mismo contenido, pero realizado por alumnos de secundaria. En la tercera se les forma sobre el uso de las desviaciones para calcular algunas medidas de dispersión, como la desviación típica. En el siguiente capítulo se extienden los cálculos realizados en conjuntos de datos unidimensionales a datos bivariados. En las dos siguientes lecciones se utilizan simulaciones para introducir situaciones de muestreo.

El resultado final no es muy bueno, y aparentemente se necesita una formación más amplia para desarrollar estas ideas estadísticas consistentemente, como indican los propios autores "Por lo tanto, no es de extrañar que en un período de tiempo tan corto los futuros profesores de nuestro estudio no desarrollaran sus propias ideas de forma que pudieran implementarlas en situaciones pedagógicas" (Lee y Lee, 2011, p.44).

Posteriormente Sánchez y Orta (2013) publicaron un trabajo donde de nuevo se trabaja de forma conjunta los conceptos de medidas de tendencia central y de dispersión en un contexto de comparación de distribuciones. El objetivo de este artículo es el de exponer tres actividades para secundaria donde se trabajen ambos conceptos. Antes de esto analizan la media, algunas medidas de dispersión y su relación, e indican algunos tipos de problemas en los que aparece el problema de la media, como la estimación de una cantidad cuando los valores no coinciden debido a un error de medida, cuando se reparten de forma igualitaria un cierto número de cantidades diferentes, cuando se utiliza como resumen de un conjunto de valores que conforman una distribución que es aproximadamente simétrica y para predecir el valor más probable al seleccionar un elemento de una distribución al azar (Sánchez y Orta, 2013). Sobre la dispersión indica textualmente,

> Es una característica de un conjunto de datos numéricos. Hay diferentes medidas de la dispersión, donde las más usadas son: rango, desviación media, desviación estándar, y cuartiles. El cálculo de algunas medidas de dispersión es algo más difícil que el de la media, sin embargo, con cualquier calculadora científica se obtienen fácilmente, una vez que se le introducen los datos. Un significado que se suele dar a las medidas de dispersión es como indicadores de qué tan separados están los datos entre sí. Basta ordenar los datos o hacer su gráfica de frecuencias para percibir intuitivamente la dispersión; en contraste, la dispersión como un número específico es para la mayoría un misterio. Las ideas de separación y la interpretación del valor numérico están en un terreno abstracto, y aunque importantes, faltaría interpretar la dispersión en los contextos en los que se presenta (Sánchez y Orta, 2013, p.68).

Para trabajar estos conceptos proponen dos contextos, en primer lugar, un contexto de medidas repetidas y, en segundo lugar, contexto de riesgo.

El primer tipo de contexto se centra en la realización de medidas de una magnitud física, de las cuales se pretende saber cuál es la mejor aproximación al *valor verdadero*. Para que la media sea un buen estimador de ese valor se deben dar dos condiciones, las medidas deben ser independientes y la frecuencia de errores por exceso y defecto similar, de esta manera y cuánto mayor sea el número de medidas, mejor estimador será la media. En este contexto se propone un problema donde dos grupos miden la altura de un poste mediante dos métodos diferentes, y realizan nueve medidas. A los alumnos se les hace dos cuestiones. La primera de ellas pide a los alumnos que indiquen que número propondrían para indicar la altura lo más exactamente posible, en este caso la respuesta esperada es la media. La segunda es que evalúen la precisión de cada método, para ello necesitan utilizar las medidas de dispersión y propone el artículo el posible uso de cuatro de ellas, el rango, la desviación media, la desviación típica y el error cuadrático (Sánchez y Orta, 2013).

El segundo tipo de contexto habla del riesgo, que se define en el artículo como

> El riesgo se presenta cuando hay potenciales resultados no deseados que pueden traer como consecuencia pérdidas o daños. Definir el riesgo significa especificar los resultados valiosos y los no deseados en un orden que refleje el valor que se les atribuye […]Una vez que se identifican los riesgos, el problema es determinar qué tan grandes o perjudiciales son y cuáles son las posibles causas que los gobiernan […] El análisis del riesgo ofrece información para la toma de decisiones. La teoría de la toma de decisiones en situaciones de riesgo tiene dos aspectos; por un lado, define reglas abstractas sobre lo que debería hacer la gente en situaciones de riesgo, por otro, estudia lo que hace la gente cuando se enfrenta realmente a tales situaciones (Sánchez y Orta, 2013, pp. 71-72).

Los dos problemas propuestos en este contexto son uno referente al juego y otro referente a un problema salud-enfermedad. En el primero se dan las listas de ganancias y pérdidas de dos juegos, y se pide la elección de uno de ellos para jugar. En este caso los datos están seleccionados para que las medias coincidan, y una primera aproximación sea que da igual jugar a cualquiera de los dos juegos, pero un análisis más concienzudo le hará utilizar alguna medida de dispersión. El segundo problema da los datos de tiempo de vida de varias personas que se han sometido a tres tratamientos diferentes debido a que tienen una enfermedad incurable, el problema pide elegir uno de los tres posibles tratamientos de forma razonada, de nuevo los tres tratamientos ofrecen la misma media pero no así la misma dispersión, por tanto, de nuevo se necesitará calcular alguna medida de dispersión o representar los datos para tomar una decisión correcta.

Dentro de la realización de materiales curriculares, cabe destacar también un trabajo de delMas (2001) en el que diseñaba una serie de actividades para trabajar la desviación estándar relacionándola con la media, más en concreto como una medida de la densidad de los datos alrededor de la media.

Por último, dentro del tratamiento conjunto de la media y la desviación típica se puede destacar el trabajo de Dubreil-Frémont, Chevallier-Gatéy Zendrera (2014). En este trabajo analizan la evolución de 352 estudiantes universitarios en la comprensión de la media y la desviación típica, mediante un diseño pre-post. En el pre-test los alumnos mostraban una caracterización algorítmica de la media y no comprendían la desviación típica. Tras el curso de estadística los alumnos comprendían el concepto de media y mejoraban en el de desviación típica, es muy interesante la categorización de las concepciones de la desviación típica que realizan para los test y que se pueden observar en la figura 10.

Conceptions of standard deviation	Before the course		After the course	
	Total	Percentage	Total	Percentage
measure of dispersion	9	8.3	34	14.3
square root of variance	11	10.2	109	45.8
tautology	1	0.9		
variance			3	1.3
range	28	25.9	9	3.8
midrange	1	0.9		
interdecile range	2	1.9	1	0.4
interquartile range	2	1.9	3	1.3
other	54	50	79	33.2
Total	108	100	238	100

Figura 10. Concepciones de los estudiantes sobre la desviación típica ((Dubreil-Frémont et al., 2014, p.3)

Sin embargo, la comprensión del concepto de desviación típica sigue siendo dificultosa, como los propios autores indican

> este estudio trató con las concepciones de los estudiantes de la media y la desviación estándar antes y después del curso de estadística. Los resultados mostraron que los estudiantes tienen una mejor comprensión de la media que de la desviación estándar siempre que se realizan test. Los resultados confirmaron que los estudiantes mejoraron sus concepciones de media y desviación estándar al final del curso (Dubreil-Frémont et al., 2014, p.4).

Otro tipo de estudios abarcan todas las medidas de dispersión en general, sin centrarse específicamente en alguna de ellas.

De hecho, uno de los más interesantes, por novedoso y diferente es el de Lehrer y Kim (2009) donde para trabajar la dispersión y sus medidas piden a los alumnos, en este caso de 10-11 años, equivalente a 6º de primaria, que se inventen unas medidas para medir la dispersión. Esto da lugar a métodos como el de distancia entre pares, que consiste en ordenar los valores y medir la distancia entre un valor y el anterior, en el que los alumnos evidencian que cerca de una medida de tendencia central estos valores se reducen. Otra alumna se inventó un método de desviaciones con respecto a la mediana. Otros alumnos presentaron métodos gráficos a través de la herramienta TinkerPlots. Es una actividad que permite desarrollar el razonamiento acerca de la dispersión y su medida y que como indican los autores,

> La medición se concibe a menudo como una actividad mundana, y en la escuela llega a menudo con ideas preconcebidas. Los estudiantes pueden aprender "habilidades" para medir, pero rara vez se les pide que lidien con la problemática fundamental de la relación entre una medida y un fenómeno particular. Sugerimos una táctica alternativa, en la que los estudiantes inventen y

> revisen las medidas, porque inventar medidas implica inherentemente estructurar fenómenos. En este caso, posicionamos a los estudiantes para inventar y revisar las medidas de variabilidad. Muchas de estas soluciones inventadas coordinan el centro y se difunden de manera que anticipan los tipos de soluciones que se utilizan en la disciplina de la estadística, tales como el intervalo intercuartílico y las métricas basadas en la desviación, como la desviación media y la desviación estándar. Esta forma de estructurar la dispersión a menudo escapa a los estudiantes mucho más mayores (Lehrer y Kim, 2009, p.130).

La tesis de Turegun (2011) analiza precisamente las concepciones en estudiantes de diferentes medidas de dispersión, en este caso, el rango, el recorrido intercuartílico y la desviación típica. Con una experiencia de más de 20 años enseñando matemáticas y casi 15 estadística en la universidad se dio cuenta de que sus alumnos, aunque conocían el algoritmo de la desviación típica, les costaba explicarla en un contexto de datos. Es decir, aunque son capaces de decir que la desviación típica es una medida de dispersión, y saben calcularla, no saben relacionar el número que obtienen con su sentido, a pesar de que, en muchos sentidos, como indica, el cálculo de la desviación típica es farragoso. Las demás medidas también son interesantes, y trabajarlas todas en conjunto puede ser una buena técnica de ataque, porque como el propio Turegun (2011) indica

> Reconocer el hecho de que estas medidas de propagación tienen distintos niveles de sensibilidad a la presencia de valores atípicos en un conjunto de datos puede conducir al desarrollo cognitivo al decidir cuál de estas medidas puede ser más apropiada para usar en una distribución de datos particular (p. 67).

Utiliza para el análisis la taxonomía SOLO (de sus siglas en inglés Estructura de los Resultados de Aprendizaje Observados) otorgando cinco niveles a la comprensión de las medias de la dispersión: A) Pre-estructural, donde las respuestas están mal articuladas y demuestra no entender la pregunta; b) uni-estructural, en las que las respuestas son vagas y no están relacionadas entre sí; c) multi-estructural, en este taxón demuestra cierto conocimiento de las medidas de dispersión indicando similitudes, diferencias y conexiones entre el rango, el recorrido intercuartílico y la desviación estándar; d) relacional, además de lo anterior es capaz de identificar qué medidas de dispersión son más resistentes a los valores atípicos al relacionar las medidas de dispersión con la media, la mediana y los valores atípicos; y por último e) el taxón de abstracción, donde además de lo anterior es capaz de indicar la medida de dispersión que puede ser más apropiada en el caso de una distribución sesgada. (Turegun, 2011) De los 29 alumnos que estudió ninguno estaba en el taxón pre-estructural, pero tampoco hubo ninguno en el taxón de abstracción, la mayoría se encontraban en el taxón multi-estructural.

Las conclusiones del estudio son que los alumnos emplean sus propias expresiones para hablar acerca de las medidas de la dispersión. Esto se relaciona con estudios previos de Makar y Confrey (2005) y de Watson y Kelly, (2008) que hacían especial hincapié en la importancia del lenguaje en la introducción de las nociones estadísticas, ya que gran parte del vocabulario se emplea cotidianamente en otros contextos y otros significados, por tanto es importante ser cuidados en la construcción del lenguaje en la formación estadística de los alumnos. Por otra parte, los alumnos tienen ideas previas, que en muchas ocasiones les otorgaban una alta comprensión intuitiva de las medidas de dispersión. Por último, se hace alusión a la bonanza del método de entrevistas frente al sistema de test para ahondar más en las concepciones que tienen los alumnos.

Para acabar este sub-apartado se van a realizar unos breves comentarios sobre el recorrido intercuartílico, referidos principalmente a las dificultades del cálculo de la medida de posición como puede verse en Weisstein (s. f.) y Langford (2006) y es la cantidad de métodos de cálculo para los cuartiles que pueden encontrarse y que pueden generar problemas a la hora del cálculo de una medida de dispersión derivada como es el recorrido o rango intercuartílico. Para ilustrarlo se acompaña la figura 11.

method	1st quartile	1st quartile	3rd quartile	3rd quartile
	n odd	n even	n odd	n even
Minitab	$\frac{n+1}{4}$	$\frac{n+1}{4}$	$\frac{3n+3}{4}$	$\frac{3n+3}{4}$
Tukey (Hoaglin et al. 1983)	$\frac{n+3}{4}$	$\frac{n+2}{4}$	$\frac{3n+1}{4}$	$\frac{3n+2}{4}$
Moore and McCabe (2002)	$\frac{n+1}{4}$	$\frac{n+2}{4}$	$\frac{3n+3}{4}$	$\frac{3n+2}{4}$
Mendenhall and Sincich (1995)	$\left[\frac{n+1}{4}\right]$	$\left[\frac{n+1}{4}\right]$	$\left[\frac{3n+3}{4}\right]$	$\left[\frac{3n+3}{4}\right]$
Freund and Perles (1987)	$\frac{n+3}{4}$	$\frac{n+3}{4}$	$\frac{3n+1}{4}$	$\frac{3n+1}{4}$

Figura 11. Algunos métodos de cálculo de los cuartiles. (Weisstein, s. f.)

3.2.3. La variabilidad y dispersión en probabilidad.

Uno de los grandes problemas con la dispersión en situaciones de probabilidad es la confusión de ésta con situaciones de muestreo. Este tipo de situaciones las analiza Shaughnessy (1997) en un estudio con profesores en activo, al preguntar qué es más probable al lanzar una moneda, obtener XOOXO o XXXXX. Algunos estudiantes contestaron que la muestra era pequeña y que en muestras grandes se obtendría una situación similar a la primera; sin embargo, en este caso, no hay muestra, en todo caso hay un espacio muestral, en el sentido probabilístico, pero no real de la muestra de una población (Shaughnessy, Watson, Moritzy Reading, 1999).

Otro trabajo destacable dentro del estudio de la dispersión en la probabilidad es el del spinner, este experimento fue realizado por Shaughnessy y Ciancetta (2001) y (2002) con una ruleta mitad blanca y mitad negra proponiendo a estudiantes que predijesen el número de negras que habría en diez tiradas. Después se tiraba la ruleta diez veces y repetían la predicción. Los autores observan que como, después de la segunda tirada se llevaban en total 5 negras y 15 blancas este resultado causó un conflicto cognitivo en los alumnos, ya que no eran capaces de comprender series de tiradas que no estuvieran equilibradas.

El objetivo de este ejercicio es que los alumnos encuentren la conexión que se puede hacer entre la dispersión observada en los datos de ensayos repetidos de un experimento, y los resultados que se esperan basados en el conocimiento del espacio muestral subyacente o distribución de probabilidad. Por lo tanto, los experimentos de probabilidad son muy prometedores como un contexto viable para la recopilación de datos sobre las concepciones de los estudiantes acerca de la variabilidad aleatoria. Cuando se realiza un experimento probabilístico se puede centrar la atención en la variación inherente en los resultados, y no sólo en el valor esperado para un resultado en particular (Shaughnessy y Ciancetta, 2002; Canada, 2004).

3.2.4. La variabilidad y dispersión en el muestreo

La dispersión también está presente en situaciones de muestreo, como indicaba en su tesis Canada (2004).

> Las muestras también varían en la medida en que representan a su población original. Por ejemplo, si la población son todos los estudiantes de una escuela secundaria, en la misma encuesta de opinión en dos grupos diferentes de estudiantes es probable que se produzcan dos resultados diferentes. Por lo tanto, las situaciones de muestreo pueden invocar muchos niveles de significado si tenemos en cuenta la variación (p. 38).

Un estudio interesante en este ámbito es el que realizaron Bakker y Gravemeijer, (2004)) sobre la comprensión de las distribuciones y muestreo mediante el uso de las TICs (una applet web llamado Minitools que ya no se encuentra disponible) en alumnos de 7º grado (equivalente a 1º de ESO), y que repitió Slauson (2008) con la conclusión de que el método fue “muy eficaz en el desarrollo de la comprensión conceptual de los estudiantes de la distribución” (p. 31).

Otros estudios como el de Leavy, (2006) se han centrado en las concepciones de profesores en prácticas sobre las medidas de dispersión en distribuciones y la comparación de muestras. Para ello se dividió el estudio en tres etapas, un pre-test, una formación y un examen al final, en la primera etapa se vio que los futuros profesores en su mayoría utilizaban principalmente los métodos numéricos en lugar de métodos gráficos. Tras el trabajo se sensibilizaron con cuestiones como el tamaño de la muestra o las limitaciones de la opción elegida previamente para representar los datos. Este trabajo es importante porque precisamente son los docentes los que tienen en su mano la formación de los estudiantes y existe entre ellos una falta de conocimiento de estadística.

Otro estudio muy importante, en este caso sobre los tipos de razonamiento de los estudiantes sobre la variabilidad aleatoria, es el de Shaughnessy, Ciancettay Canada, (2004) que indican que el razonamiento de los estudiantes en situaciones de muestreo se puede clasificar en: aditivo, proporcional, y de distribución.

- Los estudiantes que razonan de forma aditiva se centran en la frecuencia.
- Los estudiantes que razonan de forma proporcional se centran en las frecuencias relativas para hacer conjeturas sobre las muestras tomadas de una población de composición conocida.
- Los estudiantes que razonan en forma de distribución razonan con frecuencias esperadas y con la desviación de las expectativas razonables para considerar posibles composiciones de la muestra.

El trabajo de Saldanha y Thompson, (2002) da cuenta del razonamiento sobre muestreo,

> Distinguimos dos concepciones de muestra y muestreo que surgieron en el contexto de un experimento de enseñanza realizado en una clase de estadística de la escuela secundaria. En una concepción 'muestra como una versión cuasi-proporcional, a pequeña escala de la población' es la imagen principal. Esta concepción implica la imagen mental de repetir el proceso de muestreo y una imagen de variabilidad entre sus resultados que apoya el razonamiento sobre las distribuciones. Por el contrario, una muestra puede ser vista simplemente como "un subconjunto de una población" - una imagen mental que no engloba la de muestreo repetido, y de ideas de variabilidad que se extienden a la distribución (p.257).

En este trabajo se sugiere que el razonamiento sobre muestreo es más sofisticado que el razonamiento de distribución, donde son necesarios para razonar la frecuencia relativa y la desviación de la expectativa de una muestra para hacer inferencias sobre la población.

El razonamiento inferencial parece requerir una concepción multiplicativa de la muestra y muestreo. La concepción multiplicativa incluye la noción de comparación de una muestra estadística con la población de las estadísticas resultantes de las estadísticas de todas las muestras posibles de un determinado tamaño de la población. Este tipo de razonamiento es necesario para poder aplicar un razonamiento deductivo.

Uno de los estudios más conocidos y ambiciosos sobre el razonamiento acerca de la variabilidad en situaciones de muestreo e inferencia es el que llevaron a cabo Chance, del Mas y Garfield (2004) que se desarrolló durante siete años en dos universidades de EEUU. En un principio el objetivo era evaluar la utilidad de un software de simulación para el aprendizaje de distribuciones muestrales, sin embargo, derivó en cinco investigaciones. En la primera etapa observaron una mejora en la percepción de la distribución de muestreo, pero también se dieron cuenta de que necesitaban algo más que un componente visual. Así que rediseñaron la actividad para involucrar a los estudiantes en reconocer sus errores y ayudarlos a superar las intuiciones erróneas que persisten en la orientación de sus respuestas en los ítems de evaluación. Después de esta segunda etapa aún mejoró más la comprensión de la distribución de muestreo, pero también es cierto que aún persistían ciertos prejuicios.

En la tercera etapa se estudió los prerrequisitos necesarios para la comprensión de la distribución de muestreo y el porqué de la persistencia de errores, de aquí pudieron obtener una lista con estos datos.

En la cuarta etapa a través de entrevistas abiertas establecieron cinco niveles de razonamiento acerca de la distribución muestral:

1. Razonamiento idiosincrático: se conoce la terminología, pero no que significa.
2. Razonamiento verbal: se conoce la terminología y se comprende, pero no se ha incorporado al comportamiento.
3. Razonamiento de transición: se identifican una o dos dimensiones del proceso muestral sin integrarlas.
4. Razonamiento procedimental: se identifican correctamente las dimensiones del proceso de muestreo, pero no se integran plenamente, ni se entiende el proceso que genera distribuciones muestrales.

5. Razonamiento de proceso integrado: se tiene una comprensión del proceso de muestreo, de las distribuciones de muestreo y es capaz de coordinar las reglas y el comportamiento del proceso de muestreo.

Este modelo es la base de la quinta etapa, ya que en esta desarrollaron un diagnóstico para establecer en qué nivel está el encuestado.

Estos cinco estudios ponen la base para entender por qué es tan difícil entender la distribución de muestreo.

Otro estudio que se ha llevado a cabo en varias ocasiones es el que trata sobre la ley de los grandes números que indica que a medida que la muestra es más grande habrá menos dispersión con respecto a los parámetros de la población.

Sin embargo, a través del ítem del hospital, se descubre que un error bastante frecuente es la no identificación de la variabilidad en situaciones de muestreo. El ítem del hospital se ha empleado en varios estudios. En dicho ítem planteaban que había dos hospitales donde nacían 5 y 50 niños y se preguntaba en cuál de los dos era más probable tener un 80% de nacimientos de niños y un 20% de nacimientos de niñas en un día cualquiera, la probabilidad de tener valores atípicos es mayor en una muestra pequeña. Como ya indicaba Canada (2014) "la investigación muestra que los entornos de muestreo ofrecen la oportunidad de observar el efecto del tamaño de la muestra en la variación" (p. 51).

3.2.5. Interpretando y mostrando la dispersión

Como se observa en el apartado anterior, hoy día el uso de software con fines educativos está tomando cierto auge, apoyado por la administración. El software pretende mostrar las representaciones gráficas de una forma más dinámica. En este apartado se va a realizar la revisión bibliográfica de estudios relacionados con cómo se puede mostrar la dispersión a través de gráficos y en especial sobre el diagrama de caja, que como se indicaba en el capítulo 2 es el tipo de gráfico que se incluye en el curriculum en los niveles de secundaria obligatoria.

Uno de los estudios más antiguos y a la par interesantes es el de Friel y Bright (1996) que se hace eco de otros estudios de 1965 en adelante en los que introduce el término *graphicacy* que se podría traducir como graficabilidad (el término no existe en español), es decir, la habilidad de leer y entender gráficos. De hecho, otros autores posteriores se han apoyado en este concepto, como por ejemplo Mellissinos, Ford y McLeod, (1997) indicaban que el razonamiento estadístico sobre distribuciones podía suponer un nexo común entre las medidas de tendencia central, de dispersión y la gaficabilidad. Además de otros estudios, donde se dota a los gráficos de carácter cultural debido a la presencia a través de la historia y en todos los fenómenos que nos rodean, como el de Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras (2011). Sin embargo, como indicaban Friel, Curcio y Bright (2001), muchas veces los alumnos trabajan con gráficos, pero no entienden claramente qué están representando ni para qué lo hacen.

En este apartado se van a presentar estudios que analizan cómo afectan los gráficos a la representación de la variabilidad aleatoria y se va a centrar la atención en un gráfico que es importante porque representa la dispersión y es el que está incluido en el currículum a tal fin, que es el diagrama de caja.

En Inzunza (2006) se analizan los errores de los estudiantes universitarios a través del estudio de la dispersión en gráficos, en este caso se trataba de indicar la desviación típica en distintos tipos de gráficos, como un histograma o la representación de diferentes distribuciones normales. El resultado, como el propio autor indica,

> Señala que los estudiantes mostraron diferentes conceptos erróneos y dificultades en la comprensión de la variabilidad, así como una comprensión superficial de la desviación estándar como medida de dispersión, a pesar de ser estudiantes universitarios que habían tomado por lo menos un curso de estadística en niveles previos y en los momentos de la investigación estaban tomando un curso de inferencia estadística (p.6).

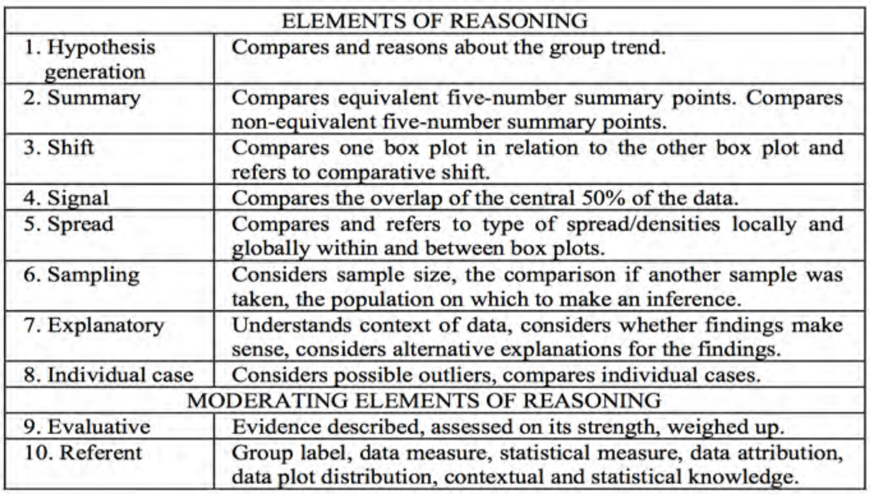
Otros estudios sobre una línea similar son los de Cooper y Shore (2008) y Cooper y Shore (2010). En el primero trabajan la dispersión en histogramas y gráficos del tronco, en el segundo se centran en diagramas de barras e histogramas. El objetivo de ambos estudios es el estudio de la dispersión sobre los gráficos. En el segundo de ellos indicaban,

> Si bien la dispersión se manifiesta de manera diferente en los tipos de gráficos en general, nuestra elección de los gráficos es particularmente pertinente porque sus similitudes visuales a menudo resultan en los lectores a no distinguir entre ellos, lo que agrava las dificultades de percibir la dispersión. Los estudiantes tienden a encontrar estos tipos de gráficos en ambientes algo diferentes. Los gráficos de barras de valores y los gráficos de barras de distribución se ven en las aulas de educación primaria cuando se presentan las presentaciones gráficas por primera vez. Siguen apareciendo a lo largo de los cursos de primaria y secundaria aun cuando se introducen representaciones gráficas más sofisticadas. Los histogramas y los gráficos de barras se encuentran entre los gráficos más frecuentes en las clases introductorias de estadística. Fuera de la escuela, se encuentran comúnmente gráficos de tiempo, otros gráficos de barras de valores y gráficos de barras de distribución en los medios. Los estudiantes que no han tenido una experiencia adecuada diferenciando entre tipos de gráficos, debido en parte a los diferentes ambientes en los que generalmente se encuentran, pueden encontrar especialmente difícil conectarlos con los datos y juzgar (o comparar) la dispersión apropiadamente (Cooper y Shore, 2010, p.12).

Si se centra la atención sobre la construcción de algún diagrama en particular, uno que llama la atención es el diagrama de caja, que a través del uso de diferentes estadísticos permite comparar muestras y/o conjuntos de datos. El diagrama lo ideó Tukey, (1977) y se basa para su construcción en el cálculo de los cuartiles y los valores máximo y mínimo del conjunto de datos. La forma de realizarlo y un breve análisis de las posibilidades que aporta en secundaria lo podemos encontrar en Batanero, Estepa y Godino (1991), además de una breve revisión del software que se puede emplear para su enseñanza. Otro artículo en la misma línea, pero algo posterior es el de Minnaard, Minnaard, Rabino, Garcia y Moro (2002) que apoyaban la enseñanza mediante gráfica ya que,

> La utilización de las gráficas, ayuda a los alumnos no solo a aprender los contenidos conceptuales, sino a construir los procesos mediante los cuales se puede acceder a la cultura. La gráfica, tiene como finalidad aclarar o facilitar la comprensión del texto que la acompaña, por lo cual favorece un mayor aprendizaje. Se debe tener en cuenta que las gráficas no son meramente decorativas. Deben estar integradas al texto que acompañan (p.5, aptdo. Conclusión, párr. 1-2).

Pero el estudio más interesante es el de Pfannkuch (2006), en dicho artículo, además de recoger todo el estudio previo sobre diagramas de caja plantea un diseño de investigación – acción, llevado a cabo por una profesora con 12 años de experiencia en una escuela de chicas, para los niveles equivalentes a 4º de ESO, que como indica es donde se introduce el estudio del diagrama de caja. En el artículo se analizan dos de las tres clases en las que se trabaja el diagrama de caja, en la primera sesión se introduce y explica el diagrama de caja para comparar distribuciones de datos y se les asigna como tarea realizar varios ejercicios del libro de texto sobre este tipo de gráfico y el gráfico del tronco. En la segunda sesión se trabajó sobre la interpretación de los diagramas de caja. El análisis posterior se basa en cómo se trabajan los diez elementos del razonamiento sobre diagramas de caja que se muestran en la figura 12.



ELEMENTS OF REASONING	
1. Hypothesis generation	Compares and reasons about the group trend.
2. Summary	Compares equivalent five-number summary points. Compares non-equivalent five-number summary points.
3. Shift	Compares one box plot in relation to the other box plot and refers to comparative shift.
4. Signal	Compares the overlap of the central 50% of the data.
5. Spread	Compares and refers to type of spread/densities locally and globally within and between box plots.
6. Sampling	Considers sample size, the comparison if another sample was taken, the population on which to make an inference.
7. Explanatory	Understands context of data, considers whether findings make sense, considers alternative explanations for the findings.
8. Individual case	Considers possible outliers, compares individual cases.
MODERATING ELEMENTS OF REASONING	
9. Evaluative	Evidence described, assessed on its strength, weighed up.
10. Referent	Group label, data measure, statistical measure, data attribution, data plot distribution, contextual and statistical knowledge.

Figura 12. Modelo de razonamiento sobre comparación con diagramas de caja (Pfannkuch, 2006, p.33)

En estos diez elementos tenemos en primer lugar la generación de una hipótesis, es un paso previo al análisis y es en lo que se fijará en alumno cuando realice el diagrama. En segundo lugar, se hace el cálculo de los estadísticos y se comparan, y en tercer lugar, se realiza la comparación entre diagramas; en el cuarto se centra la atención en la comparación del recorrido intercuartílico, en el quinto paso se analiza la dispersión, comparando los rangos y los recorridos intercuartílicos, y en el sexto escalón se comparan los tamaños de las muestras, ya que también afectan a las conclusiones que se pueden obtener. En el octavo paso se estudian los valores atípicos y se comparan. En los pasos nueve y diez se generan las conclusiones y se indican los números y el contexto que han llevado a dicho razonamiento.

Algunas de las conclusiones sobre el análisis de la dispersión en este estudio indican que los alumnos siguen teniendo dificultad en entender completamente lo que hacen,

> En elemento del razonamiento acerca de la dispersión por parte de la profesora, dos comparaciones son evidentes: comparar las densidades entre bloques de una caja y comparando las densidades entre los bloques de las dos cajas. Dicha discusión no fue clara para los estudiantes, ni entendieron como la comparación de las dispersiones les iba a ayudar a hacer una inferencia (Pfannkuch, 2006, p.41).

Por tanto, cuando se trabaja con los gráficos de caja habrá que centrar más la atención es este tipo de puntos débiles.

Para acabar este apartado se incluye también un trabajo que es consecuencia del trabajo de este TFM y tesis, en este caso Del-Pino y Estepa (2017) que al centrar la atención sobre los diagramas de caja observan que la presentación de dicho contenido en libros de textos es bastante pobre y en ocasiones inexistente, cuando en el curriculum está incluida.

3.3. Análisis de textos y percepción de algunas medidas de dispersión en los estudiantes.

Una serie de estudios de especial relevancia para el abordaje de este trabajo son Estepa y Ortega (2005); Estepa y Ortega (2006); Ortega y Estepa (2005a); Ortega y Estepa, (2005b); y Ortega y Estepa (2006) en los que se analizan la dispersión y las medidas de dispersión en textos universitarios, y en secundaria bajo el Enfoque Onto-semiótico, así como las concepciones de los estudiantes evaluadas en un grupo de 3º de ESO.

En el primero de ellos se analizan 14 textos universitarios para estudiar el significado de referencia de algunas medidas de dispersión, en concreto la desviación típica y la varianza, donde uno de los resultados más interesantes es que hallaron 19 expresiones diferentes para la varianza y 21 expresiones diferentes para la desviación típica, muchas de ellas expresiones equivalentes o empleadas en diferentes contextos (muestra – población, datos sin agrupar – agrupados, etc., …) pero que genera un potencial conflicto semiótico en los estudiantes. El trabajo de Estepa y Ortega (2006) es una presentación en congreso del anterior, donde se vuelve a hacer hincapié en la dificultad de comprender la dispersión y sus medidas, debido en gran parte a las numerosas situaciones y lenguaje diverso que se emplea en los textos universitarios.

En Ortega y Estepa (2005a) estudiaron las concepciones sobre dispersión en estudiantes de secundaria mediante un test de 13 ítems sobre distribuciones, muestreo y algunas medidas como los cuartiles o el rango. El test se llevó a cabo en una muestra de 85 estudiantes de 3º de ESO que todavía no habían trabajado las medidas de dispersión. Los resultados mostraban una dificultad para entender algunos conceptos asociados a la dispersión. Los propios autores indicaban,

Los estudiantes de esta muestra han percibido el mínimo y el máximo, en promedio de manera incorrecta, minusvalorando el primero y sobrevalorando el segundo, en consecuencia, el rango lo han sobrevalorado. Al considerar las respuestas individuales, la percepción correcta del mínimo solo alcanza la cuarta parte de los estudiantes y la del máximo apenas sobrepasa la sexta parte de las respuestas.

> El tercer cuartil es percibido adecuadamente en promedio, ya que coinciden la media teórica y la experimental (tabla 1), aunque la variabilidad experimental supera a la teórica. Como el rango, el tercer cuartil ha sido sobrevalorado por los estudiantes y, en consecuencia, el rango intercuartílico. También hemos visto que los estudiantes de esta muestra perciben mejor la componente regular que la aleatoria. (Ortega y Estepa, 2005a, p.12)

En Ortega y Estepa, (2005b) analizaron el significado institucional de referencia de las medidas de dispersión rango, recorrido intercuartílico, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación a través del estudio de una muestra de 14 libros universitarios de Estadística Descriptiva, este trabajo es una ampliación del primero de esta serie. En Ortega y Estepa (2006) se realizó un análisis a través del EOS de los libros de secundaria más utilizados en 3º y 4º de ESO bajo la LOGSE que incluyó 8 editoriales, en dicha comunicación se analizan las entidades primarias en los textos, y exponía las siguientes conclusiones,

Sólo unas pocas situaciones pueden ser consideradas como verdaderos problemas, buscando casi exclusivamente el dominio de las habilidades de cálculo.

Las técnicas necesarias para la resolución de problemas se desarrollan principalmente en contextos numéricos. Los gráficos raramente se utilizan para representar o interpretar la dispersión, y en varios libros de texto se evita el uso de fórmulas.

Todos los libros de texto usan palabras y expresiones cuyo significado puede ser confuso para los estudiantes. Por ejemplo, dispersión, diferencia, error, distancia, homogeneidad, heterogeneidad, representatividad, concentración, etc.

La confusión se introduce, a veces deliberadamente, entre la dispersión referencial e intrínseca, así como entre la dispersión absoluta y relativa.

No hay unanimidad en la secuenciación de los contenidos que tratan de la dispersión. Algunos editores incluyen la dispersión en 2º de E.S.O. (13 años), mientras que otros la posponen a 4º de E.S.O. (16 años de edad).

El rango, la varianza y la desviación estándar son estudiados en todos los libros de texto analizados. No ocurre lo mismo con el rango intercuartílico o el coeficiente de variación.

> Finalmente, debemos enfatizar el uso excesivo del razonamiento empírico, generalmente basado en ejemplos elegidos al azar, lo que perjudica las maneras deductivas de argumentar (Ortega y Estepa, 2006, p.5).

3.4. Concepciones de la dispersión.

En el apartado anterior hemos podido ver que al investigar sobre la dispersión se hace sobre varios elementos diferentes como la recolección de datos, la distribución o el muestreo, siguiendo esta línea me parece interesante presentar las diferentes concepciones que Shaughnessy (2007) nos da de la dispersión a modo de síntesis de la investigación consultada por este autor.

1. Variabilidad en valores particulares.

Konold y Pollatsek (2002) analizaron como percibían los estudiantes la media y la mediana y que problemas tenían al percibirla, uno de ellos es que no suelen considerar la variabilidad en esos datos y cuando lo hacen lo hacen de manera puntual (es decir pueden calcular la desviación típica y considerarla un punto alejada del *promedio*).

2. Variabilidad como cambio en el tiempo.

Este tipo de concepción nos puede ser válida para introducir la covariación, por ejemplo, en Moritz, (2004) nos dice el autor “la covariación estadística se refiere a la correspondencia de la variación de dos variables estadísticas que varían a lo largo de escalas numéricas" (p. 228). Si una de estas escalas representa al tiempo tendremos entonces cómo evoluciona una variable estadística con el tiempo pudiendo introducir de esta manera la covarianza.

3. Variabilidad en todo el rango.

Normalmente en un suceso aleatorio en que se puede dar cualquier valor, la concepción de la dispersión será entendida como toda la colección de datos y puede ser descrita probabilísticamente, además es parecido a la definición de muestra. En este marco los estudiantes perciben más fácilmente que no sólo los datos varían, sino que la muestra puede variar también (Shaughnessy, 2007).

4. Variabilidad como el rango de probabilidad de una muestra.

Partiendo del problema de los caramelos realizado por Reading y Shaughnessy, (2000) y Ortega y Estepa (2005a) dice Shaughnessy (2007) que se "*puede dar lugar a herramientas estadísticas para representar la variabilidad dentro o a través de las muestras, tales como diagramas de caja o la distribución de frecuencias*" (p. 985). Para ello es necesario que el estudiante entienda o conozca que es la frecuencia relativa, además puede dar lugar al concepto de muestra de una distribución si lo aplicamos al rango de probabilidad de una distribución de medias o a distribuciones de otra muestra.

5. Variabilidad como diferencia a un punto fijo.

Esta concepción es relativa a la construcción personal de la medida de la dispersión. La primera idea intuitiva sería calcular el promedio de las desviaciones con respecto a la media. Quien así actúa se lleva la sorpresa de que la suma de las desviaciones es cero, porque se compensan los valores positivos con los negativos. Un segundo intento, sería tomar el valor absoluto de las desviaciones con las que el resolutor obtiene la desviación media. Esta desviación media al tratar con valores absolutos dificulta la manipulación algebraica. En consecuencia, se sustituye por elevar las desviaciones al cuadrado para evitar los valores negativos y calcular la media de las desviaciones al cuadrado, de esta manera obtenemos la varianza. Posteriormente se introduce la desviación típica haciendo la raíz de la varianza para tener esta medida en las mismas unidades que la media. Con respecto a esta concepción, sólo nos valdría la primera parte, ya que esta concepción hace alusión a la diferencia de un punto con respecto un punto fijo, que o bien podría ser un extremo o, como ilustro en mi ejemplo, una medida de centro. En la siguiente concepción sí que podemos aplicar el concepto de varianza o de desviación típica.

6. Variabilidad como la suma de los residuales.

Como indicaba en la anterior concepción esta concepción se preocupa de "*la cantidad colectiva de una distribución está fuera de un valor fijo y proporciona una medida de la variabilidad total de una distribución completa de los datos*" (Shaughnessy, 2007, p.985). Es decir, la varianza y la desviación típica están dentro de esta concepción, esto también quiere decir que esta concepción es aplicable a otro tipo de cálculos de residuales, como los mínimos cuadrados.

7. Variación como covariación o asociación.

Como ya hemos en la 2ª concepción la idea de covariación implica el que haya dos variables y que los cambios de una afecten a la otra (sin necesidad de implicar causalidad), en el caso anterior una de las variables era el tiempo, pero en realidad puede ser cualquier relación. La principal dificultad que presenta es el análisis de que parte de la variación se debe al azar y cual a la causalidad. Esto se puede ver en Batanero, Estepa, Godinoy Green (1996) donde se realizó un estudio acerca de las ideas preconcebidas de los estudiantes, en varias tablas que implicaban el tabaquismo con enfermedades pulmonares, el sedentarismo con alergias, etc., ... en el primer caso los alumnos esperaban que el fumar hiciese que se disparase el número de afecciones pulmonares, sin embargo no era así, pero ellos aun viendo que no había relación seguían empeñados en ello.

8. Variación como distribución.

Las distribuciones también pueden variar y cuando comparamos varias distribuciones se hace importante la significación estadística. Las distribuciones de probabilidad surgen para ayudarnos a elegir en casos de distribuciones o muestras (Shaughnessy, 2007).

3.4. Conclusiones del estudio de los antecedentes.

A modo de pequeñas conclusiones se puede apreciar en las diferentes investigaciones presentadas que los problemas de comprensión de la desviación típica, como medida más empleada, y de las demás medidas son persistentes. Estas dificultades suelen venir de problemas con el lenguaje y con la comprensión del fenómeno, ya que muchas veces el algoritmo sí que está controlado.

Esta comprensión es mejorable a través de una instrucción cuidada y orientada a la mejora, como se muestra en varios estudios que realizan experimentos de enseñanza, pero aún no existe un resultado que indique cuál es el mejor camino. Propuestas como las de delMas (2001) con actividades para orientar la comprensión de la desviación típica como medida de la densidad de datos alrededor de la media; la de Sánchez y Orta (2013) sobre análisis conjunto de media y desviación típica en secundaria y la de Lehrer y Kim (2009) a través de la invención de medidas de dispersión en alumnos de última etapa de primaria y primera etapa de secundaria son interesantes puntos de partida para introducir estos conceptos y desarrollar concepciones más sólidas.

Se han mostrado también diferentes heurísticas y concepciones que tienen los alumnos, el conocer estos puntos débiles en el razonamiento estadístico da un punto de partida para afrontar los problemas sobre la comprensión de los distintos significados de la variabilidad que presentan los estudiantes. Igualmente se presentan algunas investigaciones sobre la presentación del tema en los libros de texto.

Nuestro trabajo de tesis está orientado a completar los anteriores y se centrará en analizar los libros de texto de 3º y 4º de ESO de la LOE (MEC, 2006), así como en realizar un test sobre la comprensión de las medidas de dispersión planteadas en el curriculum en alumnos de 3º de ESO.

Capítulo 4. Conclusiones

4.1. Introducción

Para finalizar la memoria, en este capítulo se presentan unas breves conclusiones de este trabajo de fin de máster organizada en tres bloques, conclusiones sobre los objetivos, sobre las hipótesis y líneas de investigación futuras.

4.2. Conclusiones respecto a los objetivos

En el Capítulo 1 se plantearon los siguientes objetivos, que pensamos se han alcanzado en el trabajo.

O1. *Describir el significado de referencia y el pretendido en la educación secundaria de los conceptos que se emplean en estadística para el estudio de la dispersión.* Dicho objetivo se dividió en los siguientes sub objetivos:

O1.1. Estudiar la diferencia de significado de dichos conceptos en el lenguaje castellano e inglés.

O1.2. Analizar la evolución histórica del concepto de dispersión.

O1.3. Estudiar el significado institucional de referencia de las medidas de dispersión en la estadística universitaria.

O1.4. Estudiar el significado institucional pretendido de las medidas de dispersión en el currículo de secundaria.

Este primer objetivo y sus sub ojetivos quedan cubierto en el primer capítulo, en el que se analiza semántica e históricamente los conceptos de variabilidad y dispersión, así como de las medidas de dispersión. Además, se estudia el significado institucional de referencia en la estadística universitaria y en el currículo de secundaria, resaltando el hecho de que la dispersión y sus medidas se relacionan, tanto con la estadística descriptiva, como con la probabilidad y la inferencia (Batanero et al., 2015).

Como conclusión de estos estudios se observa la dificultad de estos conceptos debido al amplio número de medidas de dispersión existente y al problema de polisemia en lengua inglesa.

O2. *Describir el marco teórico que se va a emplear en la elaboración de la tesis.* La importancia de este objetivo es que fundamentará tanto el estudio bibliográfico realizado en el trabajo fin de máster, como la futura tesis doctoral.

El segundo objetivo se cubre en el segundo capítulo, donde se describe el Enfoque Onto Semiótico, explicitando algunos de los constructos de dicho marco que son los que específicamente se usan en el trabajo fin de máster, y que también proporcionan una herramienta para el análisis de los libros de texto que hemos realizado en el trabajo presentado en el congreso CIVEOS 2, que presentamos como anexo.

O3. *Realizar la revisión de la bibliografía existente sobre la dispersión y sus medidas con la finalidad de sustentar la tesis*.

El tercer objetivo fue el principal del estudio y se cubre en el capítulo tres, en el cual se estudia la bibliografía relacionada con el tema, que se clasifica teniendo en cuenta diferentes apartados y los significados de la dispersión en el currículo. Los resultados nos han permitido completar el estado de la cuestión sobre el razonamiento y aprendizaje de las medidas de dispersión que permitan fundamentar la futura tesis doctoral. Además, nos ha ayudado a seleccionar ítems que puedan utilizarse en el futuro estudio de evaluación. Una conclusión de este estudio es que existe poca bibliografía referente a las medidas de dispersión en comparación con la existente sobre medidas de tendencia central.

4.3. Conclusiones respecto a las hipótesis

Igualmente, en el capítulo 1 se expusieron diferentes hipótesis, entendidas como expectativas de lo que se esperaba encontrar en el trabajo,

Con respecto a la primera hipótesis "se espera encontrar una variedad de significados otorgada a la definición de los términos a emplear para la dispersión y sus medidas", en el capítulo uno se comprueba la polisemia existente. Así mismo, se pueden indicar al menos siete medidas de dispersión diferentes; por tanto, se verifica la hipótesis.

Con respecto a la segunda hipótesis, "se espera encontrar dificultades en la comprensión de las medidas de dispersión por parte de los estudiantes al revisar la bibliografía, pero también mostrar que la investigación sobre el tema es más escasa que la referida a las medidas de posición central" se confirma en el capítulo tres.

En dicho capítulo por un lado se pone de manifiesto la escasez de investigaciones como hemos comentado, y como ya indicaban Batanero et al. (1994) y Shaughnessy (1997) hasta el principio de este siglo los estudios sobre variabilidad eran casi inexistentes y en los estudios posteriores se encuentran dificultades, que a día de hoy, no se han solventado. Por tanto, se verifica esta parte de la hipótesis.

Respecto a las dificultades de comprensión se han descrito las siguientes: No se comprende la necesidad de utilizar un operador que convierta todas las distancias en positiva al estudiar una medida de dispersión (Hart, 1983), no se comprende la necesidad de usar la misma escala de medida, cuando se pasa de la varianza a la desviación típica (Loosen et al., 1985); confundir dispersión y hetereogeneidad (Loosen et al., 1985); no comprender la necesidad de promediar las desviaciones en el cálculo de varianza o desviación típica (Clark et al., 2007), no ser capaces de producir una distribución con un número pequeño de valores que de una cierta desviación típica o incluso una cierta media y no comprender los factores que afectan el valor de la desviación típica (DelMas y Liu, 2005), interpretación incorrecta de la dispersión en el diagrama de cajas (Garfield, delMast y Chance, 2007), falta de coordinación de las medidas de posición central y dispersión (Jones y Scariano, 2014).

Otros trabajos estudian la comprensión de la variabilidad en probabilidad o en muestreo o bien proporcionan sugerencias de enseñanza del tema, sobre todo utilizando tecnología.

4.4. Líneas de investigación futuras

Teniendo en cuenta lo aportado en el trabajo, vemos que son numerosas las líneas de investigación futuras. Entre ellas destacamos las siguientes:

- Realización del análisis de las medidas de dispersión en libros de texto españoles (tanto LOE como LOMCE). Aunque Estepa y Ortega (2005, 2006) realizaron el análisis de los libros de secundaria, estos libros fueron de una etapa anterior y además se centraron en el estudio descriptivo de la dispersión. Sería conveniente analizar la dispersión tanto en probabilidad como en inferencia, así como en el estudio de la regresión y correlación. Por otro lado, sería bueno extender el estudio a los libros de Bachillerato.
- Evaluación del significado personal de los estudiantes de secundaria y Bachillerato sobre la dispersión y sus medidas. La realización de este estudio requerirá la construcción de un cuestionario que recoja el significado institucional pretendido para estos conceptos, y el análisis de las respuestas a una muestra representativa de estudiantes.

- Realización de experimentos de enseñanza sobre el tema. Aunque en el capítulo 2 se han descrito algunos de estos experimentos, en general no están basados en estudios de evaluación previos y globales como el que pretendemos abordad en la tesis doctoral. El diseño y evaluación de dichos experimentos no será ya un objetivo de la tesis, pero puede ser retomado por otros estudiantes que deseen realizar investigación sobre este tema.

Referencias

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números*, *76*, 55–67.

Bakker, A. y Gravemeijer, K. P. (2004). Learning to reason about distribution. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.).*The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 147–168). New York: Springer.

Ballman, K. (1997). Greater emphasis on variation in an introductory statistics course. *Journal of Statistics Education*, *5*(2). Recuperado a partir de https://ww2.amstat.org/publications/JSE/v5n2/ballman.html

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, *15*, 2-13.

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125–164). Zaragoza: ICE.

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números83*, 7-18.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1991). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, *9*, 25–31.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D. y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 151–169.

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R. y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *25*(4), 527–547.

Batanero, C., González-Ruiz, I., López-Martín, M. del M. y Contreras, J. M. (2015). La dispersión como elemento estructurador del currículo de estadística y probabilidad. *Epsilon*, *32*(2), 7–20.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004a). Research on reasoning about variability: A forward. *Statistics Education Research Journal*, *3*(2), 4–6.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004b). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3–15). Springer.

Boyd, A. V. (1985). The standard deviation and absolute deviations from the mean. *Teaching*

Statistics, *7*(3), 78–81.

Busto, A. I. y Escribano, M. del C. (2006). D. Antonio Aguilar y Vela: su visión del estudio del Cálculo de Probabilidades. En F. M. García Tomé (Ed.), *Historia de la probabilidad y la estadística (III)* (pp. 179-194). Madrid: Delta.

Canada, D. L. (2004). *Elementary preservice teachers' conceptions of variation*. Tesis Doctoral: Universidad estatal de Portland, Portland, OR.

Chance, B., del Mas, R. y Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distribitions. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 295–323). Springer.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. Presentado en *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.* Grenoble: Université Joseph-Fourier.

Clark, J., Kraut, G., Mathews, D. y Wimbish, J. (2007). *The fundamental theorem of statistics: Classifying student understanding of basic statistical concepts*. No publicado. Recuperado a partir de https://pdfs.semanticscholar.org/dfc4/7fb23105706c0d33e197876c1f0b1956c629.pdf

Cooper, L. L. y Shore, F. S. (2008). Students' misconceptions in interpreting center and variability of data represented via histograms and stem-and-leaf plots. *Journal of Statistics Education*, *16*(2), 1–13.

Cooper, L. L. y Shore, F. S. (2010). The effects of data and graph type on concepts and visualizations of variability. *Journal of Statistics Education*, *18*(2), 1–16.

delMas, R. (2001). What makes the standard deviation larger or smaller? *Statistics Teaching and Resource Library(STAR).* Recuperado a partir de http://www. causeweb. org/repository/StarLibrary/activities/delmas2001

delMas, R. y Liu, Y. (2005). Exploring students' conceptions of the standard deviation. *Statistics Education Research Journal*, *4*(1), 55–82.

Del-Pino, J. y Estepa, A. (2017). Análisis del tratamiento de la dispersión en libros de texto de 3º y 4º curso de la Educación Secundaria Obligatoria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, y M. del M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico.* Granada, España. Recuperado a partir de http://digibug.ugr.es/handle/10481/45411

Dodge, Y. (2008). *The concise encyclopedia of statistics*. Berlin: Springer Science y Business Media.

Dubreil-Frémont, V., Chevallier-Gaté, C. y Zendrera, N. (2014). Students' conceptions of average and standard deviation. En K. Makar, B. de Sousa, y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*. Flagstaff, AZ. Recuperado a partir de http://icots.info/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_C142_DUBREILFREMONT.pdf

Estepa, A. y Ortega, J. (2005a). Estudio del significado de las medidas de dispersión estadísticas. Presentado en IX *Congreso de Metodología de las Ciencias Sociales y de la Salud,* Granada: AEMCO. Recuperado a partir de https://drive.google.com/file/d/0Bz5fQaZGkP76ekNCbWVJNXdSZlk/view?usp=sharing

Estepa, A. y Ortega, J. (2005b). Significado institucional de referencia de las medidas de dispersión. En L. Ordoñez, C. Batanero, y A. Contreras (Eds.), *Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 167-202). Jaén: Servicio de Publicaciones.

Estepa, A. y Ortega, J. (2006). Meaning of the dispersion and its measures in secondary education. En C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador de Bahía, Brasil: IASE. Recuperado a partir de http://iase-web.org/documents/papers/icots7/6F2_ESTE.pdf.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *8*(1), 67-98

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Amsterdam: Kluwer.

Friel, S. N. y Bright, G. W. (1996). Building a Theory of Graphicacy: How Do Students Read Graphs? Presentado en el *Annual meeting of AERA*. Nueva York, NY. Recuperado a partir de http://eric.ed.gov/?id=ED395277

Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 124–158.

Gal, I. (2004). Statistical literacy. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 47–78). Springer.

Galbiati, J. (2002). *Desarrollo histórico de la estadística.* Recuperado a partir de http://www.jorgegalbiati.cl/ejercicios_4/HistoriaEstadistica.pdf

Garfield, J. (1995). How students learn statistics. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, 25–34.

Garfield, J. (1999). Thinking about statistical reasoning, thinking, and literacy. Presentado en *First Annual Roundtable on Statistical Thinking, Reasoning and Literacy (STRL-1)*. Instituto de Ciencia Weizmann, Tel-Aviv.

Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, *10*(3), 58–69.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review*, *75*(3), 372–396.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Nueva York, NY: Springer Science y Business Media.

Garfield, J., DelMas, R. C. y Chance, B. (2007). Using students' informal notions of variability to develop an understanding of formal measures of variability. En M. C. Lovet y P. Shah (Eds.), *Thinking with data* (pp. 117–147). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum..

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1-2), 127–135.

Godino, J. D., Bencomo, D. E., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27*(2), 221-252.

Godino, J. D. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Gordon, T. (1986). Is the standard deviation tied to the mean? *Teaching Statistics*, *8*(2), 40–42.

Hald, A. (1998). *A history of mathematical statistics from 1750 to 1930* (1 edition). New York: Wiley-Interscience.

Harding, D. (1996). The range of a set of data. *Teaching Statistics*, *18*(3), 81–81.

Hart, A. E. (1983). The non-standard deviation. *Teaching Statistics*, *5*(1), 16-20.

Hart, A. E. (1984). How should we teach the standard deviation? *Teaching Statistics*, *6*(1), 24–27.

Inzunza, S. (2006). Some conceptions and difficulties of university students about variability. En *Proceedings of the 28th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 244–250). Mérida, Méjico: Citeseer.

Jones, D. L. y Scariano, S. M. (2014). Measuring the variability of data from other values in the set. *Teaching Statistics, 36*(3), 93–96.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive psychology, 3*(3), 430–454.

Kaplan, J. J., Fisher, D. G. y Rogness, N. T. (2009). Lexical ambiguity in statistics: What do students know about the words association, average, confidence, random and spread. *Journal of Statistics Education*, *17*(3), 1–19.

Kaplan, J. J., Rogness, N. T. y Fisher, D. G. (2012). Lexical ambiguity: making a case against spread. *Teaching Statistics, 34*(2), 56-60.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and instruction*, *6*(1), 59–98.

Konold, C. y Pollatsek, A. (2002). Data analysis as the search for signals in noisy processes. *Journal for research in mathematics education*, 259–289.

Langford, E. (2006). Quartiles in elementary statistics. *Journal of Statistics Education, 14*(3), 1–27.

Leavy, A. M. (2006). Using data comparison to support a focus on distribution: Examining preservice teacher's understandings of distribution when engaged in statistical inquiry. *Statistics Education Research Journal*, *5*(2), 89–114.

Lecoutre, M.-P. (1992). Cognitive models and problem spaces in «purely random» situations. *Educational studies in mathematics*, *23*(6), 557–568.

Lee, H. S. y Lee, J. T. (2011). Enhancing prospective teachers' coordination of center and spread: a window into teacher education material development. *The Mathematics Educator*, *21*(1), 33-47.

Lehrer, R. y Kim, M.-J. (2009). Structuring variability by negotiating its measure. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 116–133.

Loosen, F., Lioen, M. y Lacante, M. (1985). The standard deviation: some drawbacks of an intuitive approach. *Teaching Statistics*, *7*(1), 2–5.

Makar, K. y Confrey, J. (2005). Variation talk: Articulating meaning in statistics. *Statistics Education Research Journal*, *4*(1), 27-54.

Mathews, D. y Clark, J. (2007). *Successful students' conceptions of mean, standard deviation, and the Central Limit Theorem*. No publicado. Recuperado a partir de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.636.8870yrep=rep1ytype=pdf

MEC. *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*. Madrid: Autor

MEC (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor

MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* Madrid: Autor

Meletiou, M. M. (2000). *Developing students' conceptions of variation: An untapped well in statistical reasoning*. Tesis Doctoral. Universidad de Texas, Austin, TX. Recuperado a partir de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/00.Meletiou.Dissertation.pdf

Mellissinos, M., Ford, J. y McLeod, D. (1997). Student understanding of statistics: Developing the concept of distribution. En J. Dossey & J. Swafford (Eds.), *Proceedings of the 19th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp.175-180) Bloomington, IL.

Minnaard, V., Minnaard, C., Rabino, C., Garcia, M. y Moro, L. (2002). El uso de las gráficas en la escuela: otro lenguaje de las ciencias. *Revista Iberoamericana de Educación, 28*. Recuperado a partir de http://digital.cic.gba.gob.ar/handle/11746/4908

Moore, D. S. (1997). *The active practice of statistics*. Nueva York, NY: Macmillan.

Moritz, J. (2004). Reasoning about covariation. En J. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 227–255). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Ortega, J. y Estepa, A. (2005). Percepción de la dispersión por los estudiantes de secundaria. En *Actas del V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 17–22). Oporto, Portugal.

Ortega, J. y Estepa, A. (2006). Meaning of the dispersion and its measures in secondary education. En C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador de Bahía, Brasil: IASE. Recuperado a partir de https://www.ime.usp.br/~abe/ICOTS7/Proceedings/PDFs/InvitedPapers/2B2_ORTE.pdf

Pearson, E. S., Kendall, M. G. y Plackett, R. L. (1970). *Studies in the history of statistics and probability* (Vol. 1). Griffin London.

Peters, S. A. (2009). *Developing an understanding of variation: AP statistics teachers' perceptions and recollections of critical moments*. Tesis Doctoral. Universidad Estatal de Pennsylvania, Pennsylvania, PA. Recuperado a partir de http://iase-web.org/documents/dissertations/09.Peters.Dissertation.pdf

Pfannkuch, M. (2006). Comparing box plot distributions: A teacher's reasoning. *Statistics Education Research Journal*, *5*(2), 27–45.

Phatak, A. y Robinson, G. (2005). Understanding and modelling variability: Practitioners' perspectives. Presentado en la *International Statistical Institute, 55th Session,* Sydney, Australia.

Pingel, L. A. (1993). Variability. Does the standard deviation always measure it adequately? *Teaching Statistics*, *15*(3), 70–71.

Reading, C. y Shaughnessy, J. M. (2000). Student perceptions of variation in a sampling situation. En T. Nakahar y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89-96). Hiroshima, Japón.

Reading, C. y Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Springer Netherlands.

Real Academia Española de la Lengua. (2015). *Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua* (23[a]). Espasa. Recuperado a partir de http://dle.rae.es/

Saldanha, L. y Thompson, P. (2002). Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(3), 257–270.

Salinero, P. (2006). *Historia de la teoría de la probabilidad.* Universidad Autónoma de Madrid. Recuperado a partir de http://cipri.info/resources/HIST-Historia_de_la_Probabilidad-Salinero.pdf

Sánchez, E. A. y Orta, J. A. (2013). Problemas de mediciones repetidas y de riesgo para desarrollar el razonamiento de estudiantes de secundaria en los temas de media y dispersión. *Números*, *83*, 65–77.

Shaughnessy, J. y Ciancetta, M. (2001). Conflict between students' personal theories and actual data: The spectre of variation. Presentado en *Second International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy.* Armidale, NSW Australia.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 465-494). Nueva York, NY: Macmillan.

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. En F. Biddulph y K. Carr (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 6–22). Rotorua, Nueva Zelanda, Universidad de Waikata.

Shaughnessy, J. M. (2006). Research on students' understanding of some big concepts in statistics. En G. Burril (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 77–98).

Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 957–1009). Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy, J. M. y Ciancetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 295–312). Cape Town, Sudáfrica: IASE.

Shaughnessy, J. M., Ciancetta, M. y Canada, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 177-184). Bergen, Noruega.

Shaughnessy, J. M., Watson, J. M., Moritz, J. B. y Reading, C. (1999). School mathematics students' acknowledgement of statistical variation. En Maher (Ed.), *There's more to life than centers. Presession Research Symposium, 77th Annual National Council of Teachers of Mathematics Conference*. San Francisco, CA. Recuperado a partir de http://ecite.utas.edu.au/16177

Simpson, J. y Weiner, E. (Eds.). (2016). *Oxford English Dictionary*. Clarendon Press. Recuperado a partir de https://en.oxforddictionaries.com

Slauson, L. V. (2008). *Students' conceptual understanding of variability*. Tesis doctoral. The Ohio State University. Recuperado a partir de https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/08.Slauson.Dissertation.pdf

Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Turegun, M. (2011). *A model for developing and assesing community college students' conceptions of the range, interquartile range and standard deviation*. Tesis doctoral. Universidad de Oklahoma. Recuperado a partir de https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/11.Turegun.Dissertation.pdf

Tversky, A. y Kahneman, D. (1975). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. En D. Wendt y C. Vlek (Eds.), *Utility, probability, and human decision making* (pp. 141–162). Springer.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Lawrence Erlbaum Associates.

Watson, J. M., Collis, K. F. y Moritz, J. B. (1995). The developments of concepts associated with sampling in grades 3, 5, 7, and 9. Presentado en *Australian Association for Research in Education 1995 Conference*. Hobart, Tasmania.

Watson, J. M. y Kelly, B. A. (2008). Sample, random and variation: The vocabulary of statistical literacy. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(4), 741–767.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). Developing concepts of sampling. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44–70.

Weisstein, E. W. (s. f.). *Quartiles*. Recuperado 28 de marzo de 2017, a partir de http://mathworld.wolfram.com/Quartile.html

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-248.

Wilks, S. S. (1951). Undergraduate statistical education. *Journal of the American Statistical Association*, *46*(253), 1–18.

Yap, V. B. (2008). The standard deviation as a descriptive statistic. *Mathematical Medley*, *34*(1), 16-20.

Anexo. Trabajo presentado en el CIVEOS II.

Análisis del tratamiento de la dispersión en libros de texto de 3º y 4º de ESO.

Analysis of the variation treatment in 3rd and 4th courses of secondary education textbooks.

Jesús del Pino Ruiz, Antonio Estepa Castro.

Universidad de Jaén.

Resumen

En este trabajo vamos a analizar y discutir varios libros de texto bajo el marco teórico EOS dentro del desarrollo de un proyecto de investigación en el que pretendemos analizar la dispersión estadística desde el punto de vista didáctico en la Educación Secundaria Obligatoria. En la bibliografía analizada no hemos encontrado el análisis de este tema en dicho nivel de enseñanza en el currículo actual, tal como se indica en Del-Pino y Estepa (2015)

Continuando con ese trabajo se han seleccionado textos de diferentes editoriales (las más representadas en centros públicos y privados) para su análisis que se realiza en este artículo.

Palabras clave: dispersión, libros de texto, EOS

Abstract

In this paper we will analyze and discuss several textbooks under the EOS framework in the development of a research project in which we analyze the statistical dispersion from the educational point of view in Secondary Education. In the analyzed literature we have not found the discussion of this issue at that level of education for the current curriculum, as shown in Del-Pino and Estepa (2015)

Continuing that work have been selected texts from different publishers (the most represented in public and private schools) for analysis made in this article.

Keywords: variation, variability, textbooks, EOS

.

1. Introducción.

Podemos definir la dispersión como "*la diferencia entre el valor observado y el verdadero valor del fenómeno en cuestión*" (Hald, 1998, p. 33). Es fácil entender desde esta definición que sin esta diferencia no sería necesaria la estadística y por tanto podemos coincidir con numerosos autores en que la dispersión está en el corazón de la estadística y que es su razón de ser. (Gould, 2004; Meletiou, 2002; Meletiou-Mavrotheris y Lee, 2002; Wild & Pfannkuch, 1999; Shaughnessy, 1997; Ben-Zvi, 2004).

Sin embargo, en los libros de texto no se trata el concepto de dispersión en sí, sino que se tratan las medidas de dispersión directamente. En consecuencia, definiremos las medidas de dispersión.

> Una medida de dispersión permite describir un conjunto de datos concerniente a una variable particular, dando una indicación de la variabilidad de los valores dentro de la colección de datos.

> La medida de la dispersión completa la descripción dada por una medida de tendencia central de una distribución. (Dodge, 2008, p.341)

Así pues, una medida de dispersión no sólo cuantifica la variabilidad de un conjunto de datos o de una distribución, sino que también es necesaria para completar la descripción de éstos.

Por tanto, diferentes medidas de dispersión cuantificarán de manera diferente la dispersión y completarán la descripción o el resumen de un conjunto de datos de forma diferente, de la misma manera que diferentes medidas de centro (como la media, la mediana o la moda) nos dan informaciones diferentes.

El análisis de los libros de texto es una tendencia reciente, hasta la década de los 80 no se empezó a sistematizar el estudio de este material curricular, sin embargo, desde entonces ha seguido una línea ascendente, creciendo fuertemente el número de estudios sobre libros de texto en los treinta años posteriores (Fan et al., 2013). Sin embargo, en estadística aún no hay gran número de estudios, destacando la Universidad de Granada como el lugar donde más libros de texto se han analizado, donde se han utilizado libros de todos los niveles educativos, destacando Ortiz (1999), por ser el primero, o Gea, Batanero, Cañadas y Arteaga (2013) y, Gómez, Ortiz y Gea (2014) por ser de los últimos.

La importancia del libro de texto como recurso didáctico es fundamental, hoy día y poco a poco este recurso se va sustituyendo por otros, como el uso de internet, pero todavía es el recurso estrella.

Así pues, un estudio sobre la instrucción de cualquier concepto debe incluir el análisis de los libros de texto de los cursos en los que se trabaja. Una minuciosa lectura de la literatura disponible pone de relieve las razones por las que los libros de texto son objetos adecuados de investigación:

> a) Los libros de texto son objetos y medios tangibles;
> b) Los libros de texto contienen texto de manera significativa;
> c) Los libros de texto son ampliamente utilizados por los estudiantes y los profesores;
> d) Los libros de texto están profundamente integrados en el currículo;
> e) Los libros de texto reflejan las tradiciones culturales y educativas.

Glasnović Gracin (2014, p. 252)

2. Marco teórico.

Para analizar los libros de texto de secundaria hemos optado por el enfoque onto-semiótico, de entre los presentados en Del-Pino y Estepa (2015). En este trabajo veíamos algunas características del EOS que lo hacían la mejor opción para analizar libros de texto.

En este marco teórico creado por Juan Díaz Godino y colaboradores desde la década de los 90, para realizar un análisis epistémico hay que describir los significados parciales de los objetos matemáticos ya que en el EOS el significado global (u holístico) aglutina los diferentes significados parciales del objeto, también hay que tener en cuenta los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio. Para una institución de enseñanza concreta, el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático (Pino-Fan, Godino y Font, 2011, p.147)

Para poder realizar el estudio del significado utiliza seis objetos matemáticos primarios

> Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
> Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, ...)
> Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
> Proposiciones (enunciados sobre conceptos, ...)
> Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
> Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo...). (Godino y Font, 2007, p.3)

Para analizar estos objetos en el EOS se construye lo que se denomina Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) (Godino y Batanero, 2009).

> Es una herramienta que da cuenta de un proceso complejo y dinámico, - la emergencia de objetos y significados- y que puede ser cumplimentada de varias maneras; lo cual pone de manifiesto la relatividad de los objetos y significados matemáticos (Castro, Godino y Rivas, 2010, p. 267.)

La ventaja de utilizar esta herramienta es que sistematiza el análisis de objetos y significados permitiendo un gran margen de maniobra.

3. Metodología.

Hemos seleccionado para el análisis cuatro libros de texto para 3º de ESO (L1, L2, L3 y L4) y otros 4 para cada una de las opciones de 4º de ESO (A –L5, L7, L9 y L11) y B – L6, L8, L10 y L12-) siguiendo el anterior curriculum (LOE), vigente hasta septiembre del año en curso, que será reemplazado por un nuevo curriculum (LOMCE.)

Los libros seleccionados son los de las editoriales Anaya, Santillana, SM y Oxford siguiendo el análisis que se hizo en Del-Pino y Estepa (2015) sobre los libros más empleados en los centros públicos y privados de Andalucía tal y como se recogía en el registro de la web de la Junta de Andalucía para el curso 2014-2015.

Para el análisis inicial utilizamos el GROS, de forma que podemos analizar todas los objetos matemáticos que aparecen en los textos, en un análisis preliminar del material hemos centrado nuestra atención en dos objetos matemáticos , las situaciones-problemas (problemas, ejercicios, actividades, … orientadas a que el estudiante las resuelva) que se presentan, para analizar si existe algún sesgo que dé preferencia hacia alguna de las medidas a estudiar y los conceptos-definición y proposiciones, para analizar si alguna de las medidas está infra-representada o tiene definiciones contradictorias que puedan llevar a confusión.

4. Resultados y discusión.

Como indicaba Batanero (2001) en sus reflexiones finales, parece que la estadística en los institutos no va por el mismo camino de mejora e implantación que a nivel universitario, discutiendo varios motivos para que esto ocurra

> esto indica la existencia de una problemática educativa que tiene su raíz en que la incorporación de la estadística desde la escuela, no es todavía un hecho. Aunque los currículos de Educación Primaria y Secundaria la incluyen, los profesores suelen dejar este tema para el final del programa y con frecuencia lo omiten. Los alumnos llegan a la universidad sin los conocimientos básicos y es preciso comenzar el programa repitiendo los contenidos de estadística descriptiva y cálculo de probabilidades que debieran haber asimilado en la escuela. (Batanero, 2001, p. 11)

Por este motivo es interesante analizar cómo está distribuida la enseñanza estadística y más concretamente el estudio de la dispersión a lo largo del currículum español.

El Real Decreto 1631/2006 en su descripción de la asignatura de matemáticas de 3º de ESO dice sobre la estadística

> Debido a su presencia en los medios de comunicación y el uso que de ella hacen las diferentes materias, la estadística tiene en la actualidad una gran importancia y su estudio ha de capacitar a los estudiantes para analizar de forma crítica las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas y abusos que a veces contiene la información de naturaleza estadística. (M.E.C., 2007, p. 751)
>
> Bloque 6. Estadística y probabilidad.
>
> … Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones. Análisis de la dispersión: rango y desviación típica...
>
> … Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Actitud crítica ante la información de índole estadística… (M.E.C., 2007, p. 756)

Y en el cuarto curso de E.S.O. nos encontramos, para la opción A.

> Bloque 6. Estadística y probabilidad.
>
> … Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Uso de la hoja de cálculo...
>
> … Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones... (M.E.C., 2007, p. 758)

Y para la opción B.

> Bloque 6. Estadística y probabilidad.
>
> … Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias. Representatividad de una distribución por su media y desviación típica o por otras medidas ante la presencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. Valoración de la mejor representatividad en función de la existencia o no de valores atípicos. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones... (M.E.C., 2007, p. 759)

Podemos ver que en el tercer curso se realiza una pequeña introducción y tan sólo se trabajan dos medidas de dispersión, en cuarto, para la opción A, se introduce el gráfico de caja y las medidas de dispersión para comparar y valorar (distribuciones de datos) y en la opción B, mucho más completa, trabajaremos el análisis de otras medidas de dispersión y su significado (descentralizaciones, asimetrías, valores atípicos, ...) y la representatividad de la media y las diferentes medidas de la dispersión en función de la existencia de valores atípicos.

En este primer análisis al currículo apreciamos ya varios defectos como el estudio tardío de la dispersión (3º de E.S.O.), la diferencia entre las opciones A y B en 4º de E.S.O. o que el bloque de estadística sea el bloque 6, último bloque de contenidos, que se sitúa al final del programa como nos indicaba Batanero (2001).

4.1. Concepto de medidas de dispersión.

En esta primera parte analizaremos las definiciones que aparecen y cómo se definen las diferentes medidas de dispersión.

Tabla 1. Definiciones realizadas en los textos analizados.

	Tercero				Cuarto A				Cuarto B			
Concepto	L1	L2	L3	L4	L5	L7	L9	L11	L6	L8	L10	L12
Dispersión	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No
Rango	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Desviación típica	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Varianza	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Coeficiente de variación	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Rango intercuartílico	No	No	No	No	No	No	Si	No	No	No	Si	No
Diagrama de caja	No	No	No	No	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si
Desviaciones respecto a la media	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Desviación media	Si	Si	Si	No	No	Si	No	No	No	Si	No	No
Medidas de dispersión	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si

En el lenguaje utilizado en estas definiciones llama mucho la atención un efecto, que ya percibieron Estepa y Ortega (2005) en textos universitarios, que es el uso de diferentes formulaciones para algunas medidas de dispersión como la desviación típica y la varianza. Este ejemplo se puede apreciar especialmente en [L3] el libro de 3º de Oxford, donde encontramos cuatro formas diferentes de

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot F_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot F_2 + \ldots + (x_m - \bar{x})^2 \cdot F_m}{N}}$$

Figura 1. Formulación en el texto de la desviación típica. [L3]

Fórmula de la desviación típica

La **desviación típica** viene también dada en forma reducida por la fórmula siguiente:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2 \cdot F_i}{N}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}$$

y también por esta otra, que es más fácil aún de aplicar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \cdot F_i}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \cdot f_i - \bar{x}^2}$$

Figura 2. Formulaciones alternativas de la desviación típica en [L3]

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE DIBUJA UN DIAGRAMA DE CAJAS?

37. Un **diagrama de cajas** es un gráfico en el que se dibuja una caja central, que indica el intervalo en el que se concentra el 50 % de los datos (sus extremos son el 1.er y 3.er cuartiles) y una línea central que marca la mediana. A partir de él podemos detectar datos atípicos que se alejan del resto. Con esta información, representa estos datos mediante un diagrama de cajas.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	1	7	8	2	1	1	6	4
F_i	1	8	16	18	19	20	26	30

PRIMERO. Se calcula la mediana, Q_1 y Q_3.

$Me = 3 \quad Q_1 = 2 \quad Q_3 = 7$

SEGUNDO. Se representan estos datos en una recta.

TERCERO. Se dibuja un rectángulo de anchura comprendida entre Q_1 y Q_3, una línea que pase por la mediana y rectas exteriores que marcan el rango de los datos.

Figura 3. Explicación de la construcción de un diagrama de caja en [L7] y [L8]

calcular la desviación típica en la misma página, sin explicitar que son equivalentes y por qué, en otros textos se dan normalmente dos definiciones al menos pudiendo generar confusión en el alumnado. Figura 1 y 2

En cuanto al Diagrama de la Caja, que es un contenido novedoso del curriculum de 4º (opción A y B), percibimos también que la definición que hace el texto de Santillana (L7 y L8) es incompleta, ya que no específica cómo se construyen los bigotes. Lo muestra en un ejercicio resuelto de la parte final, (Figura 3). En los otros libros que lo incluyen solamente dice como se construye la caja, pero no los bigotes. En algunos libros como el de Oxford de la opción A de 4º (L9) no incluye el grafico de la caja, a pesar de ser preceptivo, por aparecer en el curriculum como ya hemos comentado.

4.2. Situaciones-problema, actividades y ejercicios en que intervienen las diferentes medidas.

Una vez que hemos visto los conceptos incluidos vamos a estudiar cuántas situaciones problema, aplicaciones y ejercicios aparecen en los textos para cada una de las medidas de dispersión.

Tabla 2. Situaciones – problema por medida de dispersión.

	Tercero				Cuarto A				Cuarto B			
Medidas dispersión	L1	L2	L3	L4	L5	L7	L9	L11	L6	L8	L10	L12
Rango	3	6	2	17	0	0	3	3	0	0	9	5
Desviación típica	20	15	16	20	9	12	6	15	9	12	11	15
Varianza	5	6	5	10	0	9	2	4	0	9	2	10
Coeficiente de variación	6	9	4	9	9	5	10	6	9	5	15	6
Rango intercuartílico	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	5	0
Diagrama de caja	0	0	0	0	7	1	0	2	7	1	5	3
Interpretación conjunta de media y desviación típica	6	6	1	6	1	5	4	8	1	5	7	5

Como se puede apreciar en la tabla 2 la desviación típica está sobrerrepresentada frente a las demás medidas, esto puede suponer que hay un cierto interés en que este cálculo se controle mejor, sin embargo, la comprensión de su significado, que podemos puntualizar en la interpretación conjunta de la desviación típica y la media que aparece con bastante menor frecuencia, incluso que otras medidas de dispersión. Otra observación pendiente de estudio es la presencia destacada del coeficiente de variación frente a otras medidas en algunos textos de 4º de ESO [L9] y [L10]. La varianza se define en todos los libros, sin embargo, no aparecen ejercicios específicos de cálculo de varianza en los libros de Anaya de 4º de ESO (L5 y L6), lo que la convierte en un mero apoyo para calcular la desviación típica.

5. Conclusión.

Como vemos, en los libros de texto se dan dos problemas en torno a las definiciones y las situaciones-problema. En cuanto a las definiciones en muchas ocasiones se dan varias definiciones y/o formulaciones de un mismo término, sin especificar que son equivalentes, lo que puede provocar confusión en los estudiantes Este hecho fue detectado en libros de texto universitarios en Estepa y Ortega (2005) pero ahora comprobamos que también sucede en libros de texto de secundaria.

En cuanto a la presencia de situaciones – problema vemos que hay un exceso de éstas para la desviación típica y sin embargo un tipo de situación – problema como el de interpretación conjunta de la desviación típica y la media que facilita la comprensión del fenómeno de dispersión aparecen muy poco. Otras medidas que aparecen de forma testimonial son el rango intercuartílico y el diagrama de caja, que proporciona una apreciación visual de la dispersión. Este último con diversas imprecisiones e incorrecciones que propiciará unas concepciones erróneas en los estudiantes. Todas estas imprecisiones, omisiones e incorrecciones deberán ser corregidas por el profesorado que utilice los textos.

Una propuesta curricular que mejorase estos defectos debería incluir material para apreciar la equivalencia de las diferentes formulaciones de la desviación típica, comenzando desde 3º de ESO que supone la introducción del concepto por primera vez y puede generar equivocaciones al emplearlo. Por otra parte, es necesario equilibrar el número de situaciones – problema, actividades y ejercicios en las que se usa cada medida de dispersión, ya que todas son igualmente útiles y los textos sin embargo dan la falsa impresión de que tan solo la desviación típica lo es. Por último, dicha propuesta didáctica deberá incluir una construcción correcta del grafico de la caja.

Anexo

Los libros seleccionados para realizar el análisis han sido:

L1: Colera, J., Gaztelu, I., Oliveira, M.J. (2010) Matemáticas 3. Madrid: Anaya.

L2: Álvarez, M.D., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T. y Serrano, E. (2007) Matemáticas 3 ESO. Proyecto La Casa del Saber. Madrid: Santillana.

L3: Sánchez González, J.L., y Vera López, J. (2007) Matemáticas 3º Secundaria. Serie Cota. Proyecto Ánfora. Madrid: Oxford University Press.

L4: Vizmanos, J.R., Anzola, M., Bellón, M., Hervás, J.C. (2010) Pitágoras Matemáticas 3. Proyecto Conecta 2.0. Madrid: Ediciones SM.

L5: Colera, J., Martínez, M., Gaztelu, I., Oliveira, M.J. (2008) Matemáticas 4. Opción A. Madrid: Anaya.

L6: Colera, J., Martínez, M., Gaztelu, I., Oliveira, M.J. (2008) Matemáticas 4. Opción B. Madrid: Anaya.

L7: Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T. y Serrano, E. (2008) Matemáticas 4 ESO. Opción A. Proyecto La Casa del Saber. Madrid: Santillana.

L8: Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T. y Serrano, E. (2008) Matemáticas 4 ESO. Opción B. Proyecto La Casa del Saber. Madrid: Santillana.

L9: Contreras Caballero, I., Fernández Palicio, I., Lobo García, B., Pérez Mateo, S., Pérez Sanz, J.L., Uriondo González, J.L. (2012) Matemáticas 4º ESO Opción A. Proyecto Adarve. Madrid: Oxford University Press.

L10: Contreras Caballero, I., Fernández Palicio, I., Lobo García, B., Pérez Mateo, S., Pérez Sanz, J.L. (2012) Matemáticas 4º ESO Opción B. Proyecto Adarve. Madrid: Oxford University Press.

L11: Vizmanos, J.R., Alcaide, F., Serrano, E., Moreno, M., Hernández, J. (2012a) Pitágoras Matemáticas 4 ESO. Opción A. Proyecto Conecta 2.0. Madrid: Ediciones SM.

L12: Vizmanos, J.R., Alcaide, F., Serrano, E., Moreno, M., Hernández, J. (2012b) Pitágoras Matemáticas 4 ESO. Opción B. Proyecto Conecta 2.0. Madrid: Ediciones SM.

Referencias

Batanero, C. (2001). *Presente y futuro de la Educación Estadística*. Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Ben-Zvi, D. (2004). Reasoning about variability in comparing distributions. *Statistic Educational Research Journal*, 3(2), 42-63

Castro, W. F., Godino, J. D., y Rivas, M. (2010). Competencias de maestros en formación para el análisis epistémico de tareas de razonamiento algebraico elemental. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 259-270). Lleida: SEIEM

Del-Pino, J., Estepa, A. (2015). Análisis de libros de texto. Estadística de libros empleados en Andalucía. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 2. 117-124.

Dodge, Y. (2008) *The Concise Encyclopedia of Statistics*. Editorial Springer.

Estepa, A. y Ortega, J. (2005, septiembre). *Estudio del significado de las medidas de dispersión estadísticas*. Trabajo presentado en el IX Congreso de Metodología de las Ciencias Sociales y de la Salud, Granada. España.

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013) Textbook research in mathematics education: development status and directions. ZDM. *The international Journal on Mathematics education*, 45 (5), 633-646.

Gea, M., Batanero, C., Cañadas, G. y Arteaga, P. (2013). La organización de datos bidimensionales en libros de texto de Bachillerato. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 373-381. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Glasnović Gracin, D. (2014). What can textbook research tell us about national mathematics education? Experiences from Croatia. . En Jones, K.; Bokhove, C.; Howson, G. and Fan, l. (EDS.). *Proceedings of International Conference on Mathematics Textbook Research and Development*. 251-256. 29-31 July 2014, University of Southampton, UK

Godino, J. D. y Batanero, C (2009). Formación de profesores de Matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. Conferencia Invitada al VI CIBEM, Puerto Montt

(Chile), 4-9 Enero 2009.

Godino, J. D, Batanero, C y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The international Journal on Mathematics education*, 39 (1), 127-135.

Godino, J. D. y Font, V. (2007). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos.* Recuperado el 25 de agosto de 2016, de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo2_enfoque%20ontosemi%F3tico%20cognici%F3n.pdf.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., y Konic, P. (2008). *Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution*. ICME 11, Topic Study Group 27, Mathematical Knowledge for Teaching. Monterrey, Mexico.

Gómez-Torres, E., Ortiz, J. J. y Gea, M.M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5, 49 – 71

Gould, R. (2004). Variability: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 7–16.

Hald, A. (1998). *A History of Mathematical Statistics: from 1750 to 1930*. Wiley intersciencie publications.

M.E.C. (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, 5 de enero de 2007.

Meletiou, M. (2002). Conceptions of variation: A literature review. *Statistics Education Research Journal*, 1(1), 46–52. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ1%281%29.pdf

Meletiou-Mavrotheris, M., and Lee, C. (2002). Teaching students the stochastic nature of statistical concepts in an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal*, 1(2), 22–37. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ1%282%29.pdf

Ortiz de Haro, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Godino, J.D, y Font, V., (2011) Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*. 13 (1), 141-178.

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. In F. Biddulph & K. Carr (Eds.), *People in mathematics education. Proceedings of the 20th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 6-22, Rotorua, New Zealand: MERGA.

Wild, C. J., and Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67, 223–265.