

**LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN EL CURRÍCULO
Y LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA
EN COSTA RICA**

Maynor Jiménez Castro



**DEPARTAMENTO DE
DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA**

**Trabajo Final
Máster en Didáctica de la Matemática**

**UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DEDIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA**

Directores de la Investigación

Dra. Carmen Batanero
Bernabeu

Dr. Pedro Arteaga
Cezón

RESUMEN

Esta investigación describe los principales resultados del análisis sobre la presentación de gráficos estadísticos en el currículo y los libros de texto más utilizados en la educación primaria en Costa Rica, tomando en cuenta los aportes de investigaciones previas referentes de la cultura estadística, el uso de gráficos en el currículo y los libros de texto de la educación primaria en Andalucía, España.

El estudio se fundamenta en el enfoque ontosemiótico y la metodología cualitativa de análisis de contenido, que sirven de base para establecer una valoración de la idoneidad didáctica de los gráficos estadísticos en los libros texto utilizados en el currículo matemático costarricense.

ABSTRACT

The basis of this research is to describe the main results which derived from an analysis about statistic graphs in the curriculum and textbooks most used in Costa Rican primary education. We take into consideration results obtained by previous research about statistical literacy and the use of graphs in the curriculum and textbooks used in primary school in Andalucía, Spain. The research is based on the onto-semiotic approach and the qualitative methodology analysis of content, which serve to establish an assessment of the didactical suitability for statistical graphs in the textbooks used in the Costa Rican syllabi for teaching mathematics.

Trabajo realizado dentro del proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER).

ÍNDICE

RESUMEN	i
ABSTRACT.....	i
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1	2
1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	2
1.1. INTRODUCCIÓN.....	2
1.2. SENTIDO ESTADÍSTICO Y SUS COMPONENTES	2
1.2.1. CULTURA ESTADÍSTICA	3
1.2.2. RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO	5
1.3. LA COMPRENSIÓN GRÁFICA COMO PARTE DEL SENTIDO ESTADÍSTICO	7
1.4. MARCO TEÓRICO	8
1.4.1. SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y PERSONALES.....	9
1.4.2. CONFIGURACIONES DE OBJETOS MATEMÁTICOS.....	11
1.4.3. IDONEIDAD DIDÁCTICA Y SUS COMPONENTES	14
1.5. INDICADORES DE IDONEIDAD DIDÁCTICA	16
1.6. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DEL TRABAJO.....	17
1.6.1. OBJETIVO GENERAL	18
1.6.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	18
1.6.3. HIPÓTESIS	19
CAPÍTULO 2	20
2. INVESTIGACIONES PREVIAS.....	20
2.1. INTRODUCCIÓN.....	20
2.2. LECTURA DE UN GRÁFICO	20
2.2.1. PROCESOS IMPLICADOS Y NIVELES DE COMPRENSIÓN	20
2.2.2. FACTORES CRÍTICOS EN LA COMPRESIÓN GRÁFICA	22
2.2.2.1. PROPÓSITOS DEL USO DE GRÁFICOS.....	22
2.2.2.2. CARACTERÍSTICAS DE LA TAREA.....	23
2.2.2.3. CARACTERÍSTICAS DE LA DISCIPLINA	24
2.2.2.4. CARACTERÍSTICAS DE LOS LECTORES	26
2.2.2.5. ASPECTOS DEL CONTEXTO	27
2.3. CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS Y ERRORES ASOCIADOS	29
2.4. ANÁLISIS DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LIBROS DE TEXTO	30

2.5. CONCLUSIONES DE LOS ANTECEDENTES.....	32
CAPÍTULO 3.....	33
3. ANÁLISIS CURRICULAR	33
3.1. INTRODUCCIÓN.....	33
3.2. EL SISTEMA EDUCATIVO EN COSTA RICA Y ESPAÑA	34
3.3. EDUCACIÓN ESTADÍSTICA EN COSTA RICA Y ESPAÑA: DIFERENCIAS Y SEMEJANZAS.....	37
3.4. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LAS ORIENTACIONES CURRICULARES PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA EN COSTA RICA.....	42
3.4.1. CONTEXTO DE LAS ORIENTACIONES CURRICULARES	42
3.4.2. ORIENTACIONES GENERALES SOBRE LAS MATEMÁTICAS	43
3.4.3. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS Y SUS ORIENTACIONES CURRICULARES.....	44
3.5. CONCLUSIONES.....	47
CAPÍTULO 4.....	48
4. ANÁLISIS DE GRÁFICOS EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN COSTA RICA	48
4.1. INTRODUCCIÓN.....	48
4.2. MUESTRA DE TEXTOS UTILIZADOS.....	48
4.3. VARIABLES ANALIZADAS Y TIPO DE ANÁLISIS.....	49
4.3.1. VARIABLES INDEPENDIENTES	51
4.3.2. VARIABLES DEPENDIENTES	52
4.4. RESULTADOS	54
4.4.1. TIPOS DE GRÁFICO CONSIDERADOS	54
4.4.2. NIVEL DE LECTURA DE LOS GRÁFICOS	59
4.4.3. COMPLEJIDAD SEMIÓTICA DE LOS GRÁFICOS	63
4.4.4. TIPO DE TAREA REQUERIDA.....	65
4.4.5. PROPÓSITO DEL GRÁFICO	69
4.4.6. CONTEXTOS PRESENTADOS	72
4.5. CONCLUSIONES SOBRE EL ESTUDIO DE LIBROS DE TEXTO	74
CAPÍTULO 5.....	77
5. CONCLUSIONES.....	77
5.1. INTRODUCCIÓN.....	77
5.2. CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS E HIPÓTESIS	77

5.3.	IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LOS TEXTOS ANALIZADOS.....	79
5.4.	VALORACIÓN DE LAS HIPÓTESIS.....	81
5.5.	PRINCIPALES APORTACIONES DEL TRABAJO.....	81
5.6.	LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS	82
	REFERENCIAS.....	83
	APÉNDICES	

INTRODUCCIÓN

En Costa Rica, como en España, el currículo actual de Educación Primaria concede a la educación estadística mayor importancia de la que se recogía en documentos curriculares anteriores al año 2012. El cambio refleja la importancia creciente que en la sociedad de la información le brinda a la cultura estadística del ciudadano, que la necesita para enfrentarse a la toma de decisiones en su vida cotidiana y profesional.

El presente trabajo de investigación se desarrolla en el marco del “Trabajo Final de Máster” para optar por el grado de Máster en Didáctica de la Matemática, en el grupo de investigación “Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística” de la Universidad de Granada. En este estudio nos hemos interesado por esta problemática y en concreto por la forma en que se plantea la enseñanza de los gráficos estadísticos en el currículo y el abordaje que realizan las editoriales de este concepto en los libros de texto de la Educación Primaria en Costa Rica. Para ello, partimos de referentes teóricos de la educación matemática y realizamos un análisis de los principales libros de texto utilizados en la educación costarricense; estudio que se presenta en el cuarto capítulo de esta memoria. Adicionalmente, para fundamentar el trabajo se desarrollan tres capítulos complementarios:

En el capítulo primero se justifica el problema de investigación y se recogen los elementos teóricos del mismo, constituidos por el sentido estadístico, la comprensión gráfica y algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico, planteando también los objetivos e hipótesis del trabajo. El segundo capítulo resume algunos antecedentes de la investigación referidos a los niveles de construcción y lectura de los gráficos estadísticos y a las investigaciones sobre gráficos estadísticos en documentos curriculares y libros de texto. El tercer capítulo presenta un estudio comparado de la educación estadística en la Educación Primaria y Secundaria en Costa Rica, con especial atención a la forma en que se contemplan los gráficos, tanto en el sistema educativo costarricense, como en el español.

Siguiendo una metodología cualitativa, en el cuarto capítulo se exponen los resultados del análisis, donde se han considerado las siguientes variables: tipo de gráfico, nivel de lectura, nivel de complejidad semiótica, tipo de tarea, propósito del gráfico y contexto de los datos. Por último, se finaliza la memoria con las conclusiones y referencias utilizadas, así como un anexo, donde se presenta el resumen de la comunicación aceptada para presentación en el VIII CIBEM (Madrid, Julio, 2017).

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se destacan los fundamentos teóricos, así como los objetivos e hipótesis de investigación que se plantean para realizar este trabajo. Se parte de la importancia que tiene la educación estadística, principalmente destacando la relevancia que tiene la cultura y alfabetización estadística en la formación básica de las personas (Gal, 2002). De igual forma, se resalta el interés que tiene el sentido estadístico y sus componentes, como proceso de desarrollo de habilidades en el pensamiento y razonamiento estadístico (Batanero, Contreras y Roa, 2013).

Lo anterior, plantea retos para la comprensión de la información estadística que se encuentra en nuestro medio, y además los gráficos estadísticos, constituyen los objetos matemáticos de estudio en esta investigación, por lo que en este capítulo se abordan los aspectos que indican que la comprensión gráfica es parte del sentido estadístico.

Adicionalmente se describen algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico (EOS), significados institucionales y personales, tipos de objetos matemáticos, así como también, se detallan las nociones de idoneidad didáctica y sus referentes para valorar la organización y ejecución de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todas sus dimensiones. Al final de este apartado, se plantea el objetivo general y los objetivos específicos que son pretendidos con esta investigación, explicando brevemente de qué manera se intentarán alcanzar. También se exponen las hipótesis sobre lo que se espera encontrar en el estudio empírico.

1.2. SENTIDO ESTADÍSTICO Y SUS COMPONENTES

En concordancia con lo que establecen Batanero, Contreras y Roa (2013), el sentido estadístico se concibe como un conjunto de capacidades que se entrelazan de la cultura y el razonamiento estadístico. Se entiende la cultura estadística, como la comprensión de aquellos conceptos o ideas estadísticas fundamentales que regularmente son enseñadas/aprendidas en los diversos niveles educativos con cierto formalismo y rigurosidad y que con su dominio, permiten generar habilidades para enfrentar adecuadamente una problemática en la que intervienen el estudio de datos y factores de incertidumbre, junto con unas actitudes adecuadas hacia la estadística.

Por su lado, el razonamiento estadístico, se ha de entender, como el proceso mental seguido del análisis y aplicación de las ideas estadísticas fundamentales y que conducen a la toma de decisiones adecuadas en una situación particular. Dada la importancia de estos dos aspectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística, se analizan con mayor detalle ambos conceptos.

1.2.1. CULTURA ESTADÍSTICA

La cultura estadística o alfabetización es un componente de la educación estadística que se viene analizando desde hace varios años. Así por ejemplo, en el Fifth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 5) celebrado en Singapur en 1988, ya los términos, razonamiento, pensamiento y alfabetización se empezaron a utilizar, aunque con cierta ambigüedad. Esto propició la realización del Primer Foro Internacional de Investigación sobre Razonamiento, Pensamiento y Alfabetización Estadística (SRTL-1), el cual se desarrolló en Israel en 1999. A partir de este momento, el interés por estos conceptos fue incrementando y generando más reuniones para analizar esta temática (Batanero, 2000; Ben-Zvi y Garfield, 2004).

Considerando como base la definición de alfabetización dada por la UNESCO, en la que se le considera como: “habilidad de identificar, comprender, interpretar, crear, comunicar y computar, usando materiales impresos y escritos en diversos contextos” (UNESCO, 2005, p. 21), varios autores han intentado describir la naturaleza de la alfabetización estadística, así como también, constructos relacionados con ella, tales como razonamiento, sentido y pensamiento estadístico.

Si bien no existe un consenso para referirse a estos conceptos, Ben-Zvi y Garfield, (2004), consideran que la cultura y la alfabetización estadística incluyen habilidades básicas y fundamentales que son importantes para comprender la información y la lectura e interpretación de resultados de investigaciones. Estas habilidades deben brindar la capacidad de organizar datos, construir y mostrar tablas, así como trabajar con diferentes representaciones de datos. De igual manera, ésta debe incluir la comprensión de conceptos, vocabulario y símbolos estadísticos, sin dejar de lado, la comprensión de la probabilidad como una medida de la incertidumbre.

Watson (2006) citada considera que la cultura estadística debe contemplar los siguientes elementos:

- (a) El desarrollo del conocimiento básico de los conceptos estadísticos y probabilísticos;

- (b) La comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos cuando se presentan dentro de un contexto más amplio de algún informe en los medios de comunicación o en el trabajo;
- (c) Una actitud crítica que se asume al cuestionar argumentos que estén basados en evidencia estadística.

Por su lado, Gal (2002) indica que la cultura estadística se refiere a dos componentes estrechamente relacionados:

(a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, analizando e interrelacionando los datos del contexto con los fenómenos estocásticos a los que se enfrenta la persona y por otro lado, (b) la capacidad para discutir o comunicar sus opiniones sobre las implicaciones de esta información (pp. 2–3).

El autor también indica que estas capacidades suponen conocimientos matemáticos, estadísticos y del contexto, cultura general, comprensión lectora y actitud crítica. Burrill y Biehler (2011), agregan cinco componentes:

1. Saber por qué se necesitan datos y cómo se pueden producir los datos;
2. Tener conocimiento de términos e ideas básicas de estadística descriptiva;
3. Competencia en la representación gráficas y el uso de tablas;
4. Comprender las nociones básicas de probabilidad;
5. Saber cómo se alcanzan conclusiones o inferencias estadísticas.

Igualmente, el proyecto GAISE (Franklin et al., 2007) establece una serie de recomendaciones para impulsar la educación básica en estadística, proporcionando un marco de referencia para promover el aprendizaje de las ideas estadísticas fundamentales. Indican la necesidad de que los estudiantes desarrollemn habilidades para la recolección, organización, representación e interpretación y análisis de datos, que permitan realizar inferencias y sacar conclusiones a partir de los datos, donde adicionalmente haya un abordaje de los conceptos básicos de la probabilidad. Las ideas estadísticas fundamentales en las que se basa una cultura estadística, también han sido analizadas por Burrill y Biehler (2011), quienes sugieren los siguientes conceptos:

- *Datos* – este es un concepto que se considera básico y que requiere de analizarse en contexto, pues cada vez más, la sociedad utiliza datos para describir resultados de fenómenos complejos que el ciudadano debe comprender.
- *Variabilidad* – es considerada como base del pensamiento estadístico, la cual se espera que los estudiantes utilicen y manejen modelos que permitan predecirla y

controlarla (Reading y Shaughnessy, 2004).

- *Distribución* – un concepto relevante en el análisis y razonamiento estadístico, es la distribución de los datos; este debe servir para desarrollar la capacidad de relacionar los datos, de manera que se puedan realizar inferencias para detallar informaciones o predecir comportamientos sobre las poblaciones o muestras de los datos.
- *Gráficos* – las representaciones gráficas o tabulares han tomado un papel muy importante en la actualidad, dada la facilidad para organizar, describir y analizar una importante cantidad de datos. Adicionalmente, se han convertido en un instrumento esencial de transnumeración, “uno de los modos esenciales de razonamiento estadístico que consiste en obtener una nueva información de un conjunto de datos al cambiar el sistema de representación” (Batanero et al., 2013, p. 9).
- *Relaciones de asociación* – las relaciones de asociación se establecen cuando una variable independiente, es vinculada con otra dependiente en una serie de datos, lo que lleva a considerar relaciones que generalizan las funciones, de gran importancia en los procesos de toma de decisiones con incertidumbre. Sin embargo, las personas adultas, tienden a utilizar estrategias intuitivas para relacionar variables, lo que suele conducir al error.
- *Modelos de probabilidad* - Para Batanero et al. (2013) “la principal característica de la Estadística es hacer uso de modelos aleatorios”, entre otros citamos las distribuciones uniforme binomial y normal o bien resultados más simples, como la regla del producto en el cálculo de probabilidades (Burrill y Biehler, 2011).
- *Muestreo e inferencia* – según lo indican Batanero et al., (2013, p. 10), “relacionar las características de las muestras con las de la población que representan es el principal fin de la estadística”, lo que es necesario para estimar comportamientos y sacar conclusiones a partir de la recolección de una muestra de los datos con algún grado de probabilidad, sin tener que realizar estudios con toda la población.

1.2.2. RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO

Como se ha mencionado anteriormente, los conceptos de razonamiento y pensamiento, generan un interés especial en educación estadística dada la confusión e incluso similitud con que algunos autores los utilizaban para definir las mismas capacidades. Por tanto en nuestro trabajo las englobamos como hacen Batanero y Borovcnik (2016) bajo el término razonamiento, que se entiende como el proceso

mental que sucede de la transformación de un enunciado con elementos estadísticos, a través de un proceso en el que se obtienen conclusiones. Este proceso debe llevarse a cabo a partir de contextos prácticos, donde el análisis de datos adquiere sentido, al comprender el origen y la forma en que fueron recolectados los datos (DelMas, 2004; Moore, 1988). Como se indica en Ben-Zvi y Garfield (2008, p. 358),

A diferencia de las matemáticas, donde el contexto oscurece la estructura subyacente, en las estadísticas, el contexto proporciona significado para los números y los datos no pueden analizarse de manera significativa sin tener en cuenta cuidadosamente su contexto.

Razonar significa entender y ser capaz de explicar los procesos estadísticos e interpretar adecuadamente los resultados obtenidos. Esto implica realizar interpretaciones basadas en conjuntos de datos, representaciones o resúmenes estadísticos. Puede implicar la conexión de un concepto con otro (interpretación de medidas de tendencia central y la variación de datos), o combinar ideas sobre los datos y el azar. El razonamiento estadístico también se expresa cuando se prueba un modelo estadístico para ver si representa un ajuste razonable a la realidad del contexto en estudio. Este tipo de explicación requiere una comprensión de los procesos que producen los datos y permite que las personas puedan estar mejor preparadas para predecir el comportamiento de las distribuciones de muestreo, facilitando la toma de decisiones (DelMas, 2004).

Wild y Pfannkuch (1999) conciben el razonamiento (pensamiento) estadístico como la suma de cuatro dimensiones: (a) El ciclo de investigación, que consiste en el proceso cíclico de pasos desde el planteamiento del problema, hasta que se encuentra una posible solución; (b) los modos fundamentales de razonamiento estadístico; (c) el ciclo de interrogación, que consiste en replantearse en cada momento del proceso, los datos, resultados y los análisis obtenidos tomando en cuenta las premisas de las que se parten; y (d) una serie de actitudes, de mentalidad abierta, crítica, reflexiva, entre otras, que permita estar atento antes las posibles soluciones. Los modos fundamentales de razonamiento estadístico, según estos autores son los siguientes:

- *Reconocer la necesidad de los datos:* el estudio estadístico parte de datos que son representativos de la vida real, que solo serán comprendidos a partir del análisis estadístico, si han sido recogidos de forma adecuada.
- *Transnumeración:* Consiste en comprender los cambios que surgen al dar otra forma de representación a los datos; por ejemplo, al pasar de una lista desordenada de datos al histograma se visualiza la moda, simetría en la distribución o no, entre

otros. Batanero et al. (2013), describen tres tipos de transnumeración: (1) la que produce al definir una variable para describir las características de un cierto fenómeno y fijar unos códigos; (2) al pasar de los datos brutos a una representación tabular o gráfica que permita extraer sentido de los mismos; (3) al “traducir” el significado estadístico de los datos, de manera que sea de fácil comprensión para otras personas, no especializadas.

- *Percepción de la variación.* Otro componente importante del razonamiento estadístico es la capacidad de identificar los factores que influyen en la variabilidad aleatoria. Estos factores pueden ser falta de fiabilidad en el instrumento de medida, los datos o el muestreo o bien puede ser producida por factores propios de las características de los objetos de estudio (como las deficiencias en lectura y visión en chicos y chicas). El razonamiento estadístico permite dar respuesta a la variación, indagando sobre sus causas y efectos, modelando soluciones que predicen con cierto grado de error, los fenómenos aleatorios de la variación (Batanero et al., 2013).
- *Razonamiento con modelos estadísticos.* Ya comentamos anteriormente la importancia de los modelos en probabilidad. También en estadística es muy importante la modelización, en especial en los procesos de inferencia y toma de decisiones, pues ésta representa la realidad cuando los datos se comportan de manera adecuada.
- *Integración de la estadística y el contexto:* El razonamiento estadístico también se encuentra influenciado por la capacidad para entender el contexto en el que se desarrolla el estudio estadístico. Esto es de vital importancia en la fase de inicio cuando se plantea el modelo y en la fase final cuando se realiza la interpretación de la realidad a través de la modelización de los datos.

1.3. LA COMPRENSIÓN GRÁFICA COMO PARTE DEL SENTIDO ESTADÍSTICO

Como se ha observado en el apartado anterior, el sentido estadístico de una persona se puede reflejar en su cultura y razonamiento estadístico, lo cual también nos lleva a plantearnos cómo desarrollar un mejor sentido estadístico en los estudiantes, sobre todo cuando algunos autores han mostrado que la enseñanza y aprendizaje de la estadística se puede llevar a cabo desde la educación preescolar (Batanero y Godino, 2005).

Adicionalmente, se plantea la necesidad de una cultura estadística, pues muchas profesiones requieren de sus especialistas, conocimientos de las ideas estadísticas

básicas y habilidades en el razonamiento crítico fundamentadas en la evidencia objetiva. Uno de estos conocimientos básicos es la comprensión gráfica, entendida como capacidad de lectura, interpretación y construcción de gráficos sencillos (Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras, 2011).

Estos autores indican que los gráficos estadísticos constituyen uno de los medios más empleados para la presentación y el análisis de la información estadística. Esto se debe al hecho de que las ideas presentadas gráficamente son entendidas con mayor rapidez y comodidad que las explicaciones numéricas y verbales. De ahí que la comprensión de gráficos estadísticos sea un componente fundamental en la cultura estadística. Cazorla (2002) señala que son un instrumento potente para comunicar y resumir la información de los estudios estadísticos.

Watson (2006) resalta su importancia para facilitar algunos cálculos o interpretar algunos conceptos, como, por ejemplo, la correlación entre dos variables. Sugiere que en la enseñanza se deben proponer tareas en que los alumnos construyan sus propios gráficos a partir de datos recogidos por ellos mismos.

En Batanero (2000) se destaca la necesidad de que los alumnos adquieran destrezas en la lectura crítica de gráficos, ya que ésta es un componente básico para lograr la cultura estadística y una necesidad que demanda la sociedad tecnológica actual. Como veremos en el análisis curricular (Capítulo 3) el currículo recoge esta comprensión desde la escuela primaria. En el Capítulo 2 desarrollamos un poco más estas ideas analizando las investigaciones que estudian la lectura y la construcción de gráficos estadísticos. Como se verá en dicho capítulo y como indican Arteaga, Batanero, Díaz y Contreras (2009), la comprensión gráfica no se alcanza en la educación obligatoria o en la formación de los profesores. Esta es una de las razones por las que hemos elegido este tema de investigación.

1.4. MARCO TEÓRICO

Esta investigación se fundamentará en los estudios realizados por Godino y colaboradores (Godino, 2002, 2003, 2010, 2013, 2014; Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Contreras y Font, 2006), acerca de los elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico (EOS), que permitirán ubicar aspectos conceptuales y procedimentales de la enseñanza y aprendizaje de la estadística y en particular del estudio de los gráficos estadísticos en el currículo y los libros de texto en la educación primaria en Costa Rica.

Es importante tener en cuenta que la didáctica de la matemática conlleva el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conocimientos matemáticos, y que los mecanismos utilizados en la resolución de problemas, condicionan los significados que los alumnos atribuyen a los objetos matemáticos, como consecuencia de la instrucción (Godino y Batanero, 1994). Dado lo anterior, el término “significado”, se convierte en un eje medular de la didáctica matemática que varios autores han estudiado y de los cuales Godino y Batanero (1994), rescatan algunas reflexiones.

Este interés es recogido en el EOS, en donde el conocimiento y la instrucción matemática son analizados con prácticas matemáticas que dan origen a objetos matemáticos. La matemática, entendida como lenguaje simbólico y sistema conceptual, es organizada y estudiada a partir de una actividad social como la resolución de problemas (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007). De igual forma el EOS destaca el proceso de enseñanza - aprendizaje de la matemática, como una actividad relacional y multidimensional, donde participan seis facetas y cuatro componentes que se vinculan para tratar de explicar las interacciones que suceden en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tal y como se muestra en la Figura 2.1 (Godino, 2013). Como el interés de este trabajo es el estudio de los gráficos estadísticos en el currículo y los libros de texto utilizados en el contexto de la educación primaria costarricense, se analizarán elementos como: actividad matemática, objeto y significado (significado institucional y personal del contenido matemático), configuraciones de los objetos matemáticos e idoneidad didáctica.



Figura 1.1. Dimensiones y niveles del EOS (Godino, 2013, p. 115)

1.4.1. SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y PERSONALES

Como se ha indicado con anterioridad el EOS parte de la situación-problema como una noción primitiva que permite definir conceptos teóricos de práctica, objeto

(personal e institucional) y significado (Godino, 2003; Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2007). De esta manera, se entiende la práctica matemática como:

Toda actuación o expresión (verbal o gráfica, etc.), realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334).



Figura 1.2. Tipos de significados personales e institucionales (Godino, 2014, p. 13)

Esta definición permite considerar la actividad matemática en sus dimensiones operativas y discursivas, personales y sociales, pues cuando la persona se enfrenta ante la resolución de un problema, interesan tanto sus procedimientos, como la actividad social realizada para comunicar la solución. Las prácticas pueden ser tanto personales (propias de una persona) como institucionales, es decir, llevadas a cabo en el seno de un grupo de personas interesadas en resolver una misma clase de situaciones problemáticas, donde sus prácticas sociales son compartidas y están regidas por normas y reglas definidas en la institución. Estos sistemas de prácticas son introducidos en un esquema de relaciones, que resume la Figura 1.2, donde se muestra la tipología básica de significados según lo establecido por Godino (2014, p. 13).

Dentro del significado institucional de un objeto matemático, Godino (2003) y Godino et al.(2007), plantean los siguientes tipos :

- *Referencial*: todos aquellos elementos que el docente utiliza sobre un objeto matemático, cuando planifica un proceso de instrucción. Es decir, los significados reflejados por expertos en libros de texto y las orientaciones curriculares, los conocimientos previos y la experiencia docente.
- *Pretendido*: sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional. Es decir, a partir del significado de referencia, el docente realiza el planeamiento didáctico respectivo, para proponer a los

estudiantes, considerando tiempo disponible, conocimientos previos de los estudiantes y los medios y recursos didácticos que amerite el tema.

- *Implementado*: es el sistema de prácticas que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes.
- *Evaluado*: se considera el sistema de prácticas que selecciona el profesor, mediante un conjunto de tareas y/o pautas de observaciones, para evaluar el significado implementado del objeto matemático en cuestión.

Desde el punto de vista personal, Godino (2003) y Godino et al.(2007), consideran importante hacer la distinción entre el significado personal global, el declarado y el logrado.

- *Significado global*: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el alumno, relativas a un objeto matemático.
- *Significado declarado*: este da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- *Significado logrado*: el significado personal logrado corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se consideran como errores de aprendizaje.

Por último, se aprecia en la Figura 1.2, las relaciones entre los diferentes significados antes mencionados.

1.4.2. CONFIGURACIONES DE OBJETOS MATEMÁTICOS

Como se ha mencionado, en los sistemas de prácticas matemáticas participan objetos claramente identificados como: símbolos, gráficos, etc. y otros que se evocan con frecuencia al realizar procesos cognitivos de análisis, como lo son: conceptos, relaciones, premisas, proposiciones. De esta actividad matemática, emergen nuevos conceptos y relaciones (configuraciones), los cuales pueden ser clasificados como “objetos personales”, si suceden de las prácticas matemáticas de la persona individual, o bien si emergen y son compartidos dentro de un grupo, “objetos institucionales”. La

emergencia de los objetos personales, está relacionada con procesos cognitivos de interiorización, condensación y reificación, mientras que en el plano institucional, la emergencia de objetos institucionales surge de los procesos sociales de comunicación, simbolización y regulación (Godino et al., 2007).

En Godino (2003) y Godino et al., (2007) se propone la siguiente clasificación de objetos matemáticos primarios:

- *Lenguaje*: este objeto es fundamental en la actividad matemática, pues con él, se puede representar, describir y comunicar la información que resulta de una situación problemática, utilizando para ello, términos, expresiones, notaciones, gráficos y otros elementos.
- *Situaciones-problemas*: constituye la actividad matemática que surge de ejercicios, problemas y aplicaciones tanto matemáticas como extra matemáticas.
- *Conceptos-definición*: corresponde a los conocimientos que el estudiante requiere evocar al realizar una actividad matemática y que generalmente forma parte de la estructura cognitiva. Ellos son definiciones de los objetos matemáticos que el sujeto debe aplicar al interactuar con una situación-problema.
- *Proposiciones*: corresponden a oraciones declarativas que describen propiedades o características de los conceptos que se emplean en la resolución de una actividad planteada.
- *Procedimientos*: corresponden a los algoritmos, operaciones y técnicas de cálculo que realiza un sujeto al tener que resolver una situación-problema. Estos suelen ser estrategias aprendidas y automatizadas que realiza el estudiante ante un tipo de problema particular.
- *Argumentos*: corresponden a los enunciados utilizados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo, cuando se ejecuta una actividad matemática (Recio y Godino, 2001). Esto es realizado en los libros de texto, con una variedad de formas: ejemplos o contraejemplos para comprobar o justificar un concepto, demostraciones informales, representaciones gráficas para validar alguna característica de los datos o bien la validación por medios deductivos, típica de los libros de texto a nivel universitario, en donde se hace uso de demostraciones con un despliegue importante de símbolos, definiciones y propiedades de los objetos matemáticos en cuestión.

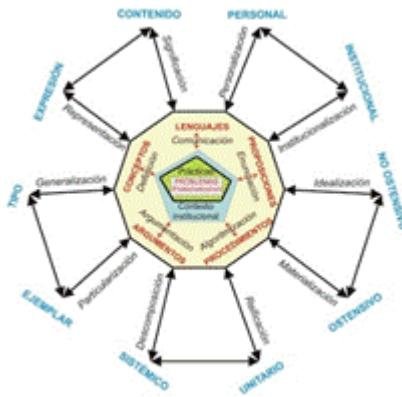


Figura 1.3. Modelo ontosemiótico de los conocimientos matemáticos (Godino, 2014, p. 23)

Estos seis tipos de objetos matemáticos primarios interactúan entre sí facilitando el surgimiento de otros objetos personales e institucionales más complejos, donde las situaciones-problema y los procedimientos o acciones brindan un contexto y constituyen el componente fenomenológico y los conceptos-definiciones, proposiciones y argumentos, desempeñan un papel normativo en las matemáticas (componente teórico), dejando al lenguaje un papel fundamental como parte de la praxis (componente fenomenológico) y el componente teórico como se observa en la Figura 1.3 (Godino, 2003, 2010; Godino et al., 2007). Adicionalmente, el modelo ontológico propuesto en Godino (2002), considera cinco facetas o dimensiones duales que se muestran en la Figura 1.3:

- *Dualidad personal / institucional*: Si trata de la realización de una tarea escolar de un sujeto individual, se considera objeto personal. Por el contrario, si analizamos documentos curriculares, libros de texto, etc. son considerados objetos institucionales.
 - *Dualidad elemental / sistémico*: En esta se considera los objetos matemáticos como entidades compuestas con una cierta organización o estructura y en la cual pueden intervenir una serie de propiedades y relaciones. Por el contrario, una expresión es elemental, cuando sus características o propiedades, se ponen en juego de manera transparente, con si se tratara de entidades unitarias o elementales.
 - *Dualidad ostensiva / no ostensiva*: Esta dualidad obedece a la consideración de un objeto tanto desde su visión perceptible o material (palabra escrita, un gráfico, gestos, etc.), como al referente mental que tiene el sujeto sobre el objeto.
 - *Dualidad ejemplar / tipo*: esta dualidad es equivalente a la distinción entre lo particular que se determina por sí mismo y el objeto genérico que define una cierta

clase o conjunto de objetos.

- *Dualidad expresión / contenido*: Esta dualidad se entiende como las relaciones de dependencia existentes entre un antecedente (expresión, significante) y su consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

1.4.3. IDONEIDAD DIDÁCTICA Y SUS COMPONENTES

Como se ha descrito anteriormente, en el EOS se parte de las prácticas matemáticas para fundamentar un sistema de nociones teóricas sobre la naturaleza, origen y significado de los objetos matemáticos en el contexto educativo, lo que permiten articular las dimensiones epistémica (significados institucionales o socioculturales) y cognitiva (significados personales o individuales). Estos fundamentos constituyen las bases para abordar los problemas asociados al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues con ellos se modela los conocimientos matemáticos a enseñar y los aprendizajes logrados por los estudiantes. Sin embargo, hasta este momento no se han analizado, las implicaciones que tienen las acciones y relaciones de estos objetos matemáticos, sobre el problema didáctico, es decir, sobre el estudio de los procesos de planeamiento, enseñanza y evaluación de conocimientos matemáticos en el aula escolar.

En este marco teórico, el proceso de enseñanza aprendizaje es considerado como un proceso no determinístico, relacional y multidimensional, donde se gestan interacciones y subprocesos de las seis facetas descritas en la Figura 1.1. Estos son llevados a cabo a través de la unidad primaria de análisis didáctico, denominada “configuración didáctica”, la cual está “constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de un objeto o contenido matemático y usando unos recursos materiales específicos” (Godino et al., 2007, p. 62). La configuración didáctica, está asociada a una serie de eventos que se realizan en un tiempo dado y se llevan a cabo de manera secuencial, donde se integran:

- *Configuración Epistémica*: se registran los elementos que utiliza el docente, estudiante o ambos, en la ejecución de una tarea: procedimientos, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentos.
- *Configuración Instruccional*: esta va ligada a la anterior y está constituida por los recursos empleados por el docente y los estudiantes en la mediación pedagógica de una tarea matemática particular.

- *Configuración Cognitiva*: las dos anteriores dimensiones aportan una serie de elementos que permiten la construcción de los conocimientos, a través de una red de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas personales.

Estos elementos teóricos aportados en varios trabajos (Godino, 2013; Godino et al., 2007; Godino, Contreras, et al., 2006) y se describen como la realización de procesos de instrucción no determinísticos. Además, pueden ser valorados teniendo en cuenta los criterios para medir la pertinencia y adecuación de los procesos de enseñanza y aprendizaje implementados. Esta valoración es denominada *idoneidad didáctica* en Godino, Bencomo y Font (2006), y definida en Godino et al. (2006), como la articulación coherente y sistémica de los seis componentes siguientes:

- *Idoneidad epistémica*: es una valoración del grado de la representatividad de los significados implementados o pretendidos, en relación al significado de referencia. Esta puede ser baja o alta de acuerdo con el grado de profundidad con que se aborden los conocimientos en el aula; un abordaje en que solo se enseñan los procedimientos de un concepto es pobre, en comparación con una dinámica, donde se analizan propiedades y argumentos en el contexto.
- *Idoneidad cognitiva*: corresponde a la valoración del grado en que los significados que se desean transmitir pueden ser alcanzados por los estudiantes y la cercanía que se establece entre los significados personales logrados por el estudiante y los significados pretendidos - implementados.
- *Idoneidad interaccional*: valora el grado en que el planeamiento del proceso de enseñanza y aprendizaje antecede y resuelve los conflictos semióticos que se puedan presentar en el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*: se refiere a la valoración sobre la disponibilidad y pertinencia de los recursos (materiales y temporales) que se necesitan para desarrollar el proceso de instrucción.
- *Idoneidad afectiva (emocional)*: se refiere al grado en que los estudiantes están implicados (interés, motivación, ...) en su proceso de estudio. En este tipo de idoneidad didáctica intervienen factores tanto institucionales como del estudiante y su historial escolar.
- *Idoneidad ecológica*: corresponde con el grado en que el proceso de enseñanza y aprendizaje se ajusta y concuerda con los intereses locales (escuela, organización y

sociedad).



Figura 1.4. Componentes de la idoneidad didáctica (Godino, 2014, p. 42)

En la Figura 1.4 se muestran las relaciones entre los componentes de la idoneidad didáctica que se deben tomar en cuenta para la valoración del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En él se muestra un hexágono regular que plantea la valoración máxima, mientras que un hexágono irregular inscrito, muestra las posibles valoraciones que se pueden obtener del proceso en un caso real particular.

1.5. INDICADORES DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

Como se ha descrito en el apartado anterior, la idoneidad didáctica corresponde a una valoración sobre el planeamiento y la efectividad de la implementación del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo cual no es sencillo de realizar, pues involucra una serie de componentes o dimensiones que no son directamente observables. Esto plantea la necesidad de realizar inferencias que permitan calificar con mayor objetividad la organización y ejecución del proceso de enseñanza y aprendizaje. Para ello, Godino (2013), plantea algunos indicadores de las idoneidades y sus relaciones entre sí, las cuales no son exhaustivas, pero pueden servir de guía para el diseño y valoración de las acciones formativas planificadas o efectivamente implementadas. En nuestro caso, la idoneidad didáctica se aplicará al uso de los gráficos estadísticos en los libros de texto en la educación primaria en Costa Rica, por lo que el detalle de los indicadores expuestos por Godino (2013), se podrá observar en el Apéndice de este trabajo.

1.6. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DEL TRABAJO

En los apartados anteriores se ha argumentado que en la educación estadística ha destacado el objetivo de formar ciudadanos críticos y analíticos de las grandes cantidades de información que hoy día se comunican y se ponen a disposición por diversos medios. Estas ideas aunadas a estándares internacionales que estimulan la incorporación de la educación estadística desde tempranas edades en el sistema educativo, ha sido la base para que muchos países incorporen dentro de sus planes curriculares la formación estadística desde los primeros años escolares.

La educación matemática ofrecida para los niveles educativos de primaria y secundaria del sistema educativo costarricense ha carecido, hasta hace poco de profundidad en temas de estadística y probabilidad (Ruiz, Chavarría y Mora, 2003). Más recientemente, en la nueva reforma educativa impulsada desde el año 2012, estos contenidos han sido incluidos como mayor relevancia.

Parte de la transformación sufrida en el currículo de matemática, se debe a la influencia internacional. Por ejemplo los Principios y Estándares para la Matemática Escolar del National Council o Teachers of Mathematics (NCTM, 2014), en su apartado de Análisis de Datos y Probabilidad, señalan la importancia del razonamiento estadístico como un elemento esencial para desempeñarse como ciudadano crítico e informado, planteando la importancia del tema de análisis de datos y la probabilidad como aspectos a incorporar en los diferentes niveles del sistema escolar.

La situación descrita plantea una serie de retos que hacen de la enseñanza de la estadística en Costa Rica, un tema de interés para efectos de investigación, pues los docentes de Educación Primaria no tienen la experiencia ni en muchos casos la formación adecuada, que permita atender las recomendaciones curriculares para una enseñanza de la estadística que promueva las habilidades antes mencionadas por la National Council o Teachers of Mathematics.

En el caso costarricense, la formación de los docentes en la educación primaria es generalista, donde el docente recibe muy pocos cursos de matemática dentro de su formación y una nula preparación en el campo estadístico. Esta deficiencia formativa de los educadores resalta la importancia de las fuentes de información que utiliza el docente para impartir sus lecciones de estadística y particularmente de la utilización de los gráficos como parte de ella. Dadas estas condiciones este trabajo se enfoca en el análisis del uso y aplicación de los gráficos estadísticos dentro del currículo y los libros de texto en la educación primaria de Costa Rica.

1.6.1. OBJETIVO GENERAL

Dicho lo anterior, este trabajo tiene como objetivo general, analizar la incorporación de los gráficos estadísticos en el currículo y los libros de texto recientes más utilizados en la educación primaria de Costa Rica. La importancia de este objetivo se deduce de toda la argumentación anterior y en especial del hecho de que es importante contar con libros adecuados en este tema, donde la formación previa y experiencia del profesorado es aún escasa.

1.6.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Como objetivos específicos, del trabajo se plantean los siguientes:

- O1. Determinar el significado institucional pretendido para los gráficos estadísticos en el currículum de educación primaria en Costa Rica, contemplados en el tema de “Estadística y Probabilidad” de los planes de estudio en I y II Ciclo de la Educación en Costa Rica y su correspondencia con el significado pretendido en el contexto educativo español. Para obtener la información necesaria que permita alcanzar este objetivo se realizará un análisis comparativo entre los principales aspectos de la educación estadística en España y Costa Rica, enfocando la atención en el uso de los gráficos estadísticos dentro de sus currículos educativos.
- O2. Analizar las principales variables que definen la implementación de actividades y ejemplos propuestos sobre gráficos estadísticos en los libros de texto de educación primaria de Costa Rica. Para lograr este objetivo se parte del estudio previo de Díaz-Levicoy (2014), quien determinó como variables relevantes para analizar los libros de texto las siguientes: tipo de gráfico, nivel de lectura del gráfico (Curcio, 1991; Friel, Curcio y Bright, 2001), nivel de complejidad semiótica del gráfico, y tarea propuesta. También se analizará el propósito del uso de los gráficos (Kosslyn, 1985) y el contexto que enmarca la actividad, dentro de los propuestos en el informe PISA (ME, 2012).
- O3. Determinar la idoneidad del uso de los gráficos estadísticos utilizados en los libros de texto en la educación primaria en Costa Rica, de acuerdo con los componentes de la idoneidad didáctica propuesto por Godino y colaboradores. Para lograr este propósito, se utilizan los resultados obtenidos en los objetivos anteriores, referentes al tipo de gráfico, complejidad semiótica, tareas propuestas en los libros de texto, propósitos y contexto, para contrastarlos con el significado pretendido en el currículo

costarricense.

De igual forma, si bien no existe un estudio científico realizado en la educación primaria de Costa Rica que confirme el grado de avance en la enseñanza de la estadística y la probabilidad, apreciaciones docentes y ministeriales confirman que el nivel de atención puesto en estos temas es mínimo. Esta situación es preocupante, pues aunado a la poca formación docente en la enseñanza de esta disciplina, los libros de texto utilizados en la educación primaria, podrían ser una limitante en el apoyo docente para eliminar estas apreciaciones negativas.

Lo anterior, nos conduce a plantearnos dos hipótesis, que nos permitirán tener una valoración general en cuanto a la pertinencia de los libros de texto en la educación primaria y el uso de gráficos estadísticos en ellos.

1.6.3. HIPÓTESIS

H1. Los libros de texto no siguen las disposiciones didácticas y metodológicas del Ministerio de Educación Pública en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad y particularmente, la incorporación y enseñanza de los gráficos estadísticos en la educación primaria costarricense.

Para comprobar esta primera hipótesis, se plantea realizar una valoración general de los aspectos estudiados en los libros de texto y su pertinencia con relación a las disposiciones ministeriales en cuanto al uso de los gráficos en la educación primaria en Costa Rica.

H2. Los gráficos estadísticos propuestos en las diferentes actividades-problema de las series de libros estudiadas, no guardan relación con lo propuesto en el nivel escolar y los niveles de complejidad semiótica, según la clasificación establecida en las investigaciones de Batanero, Arteaga y Ruiz (2009).

La segunda hipótesis se validará con los resultados obtenidos al comparar el estudio de frecuencias de los gráficos estadísticos por nivel escolar y complejidad semiótica, con lo establecido en las orientaciones curriculares costarricenses. En este sentido el interés se centrará en confirmar o rechazar la hipótesis argumentando conclusiones basadas en el estudio realizado y la normativa propuesta por el Ministerio de Educación Pública, resultados de otras investigaciones y aspectos recomendados por organismos internacionales.

CAPÍTULO 2

INVESTIGACIONES PREVIAS

1.7. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta un resumen de las principales investigaciones en las que se apoya el trabajo y se ha clasificado en los siguientes apartados: lectura de un gráfico, factores críticos en la comprensión gráfica, construcción de gráficos y errores asociados y análisis de gráficos en libros de texto. Para preparar esta revisión nos hemos apoyado en trabajos de síntesis anteriores al nuestro, en particular los de Arteaga (2009, 2011), Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras (2011), Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas (2012), Díaz-Levicoy (2014) y Vigo (2016).

1.8. LECTURA DE UN GRÁFICO

Un primer grupo de investigaciones describe la actividad de lectura de un gráfico, que es compleja pues su interpretación requiere la de cada uno de los elementos que constituyen el gráfico (por ejemplo, su título, escala o elementos específicos, como las barras del diagrama de barras) y posteriormente la interpretación conjunta de todos los elementos del gráfico (Arteaga, 2011).

1.8.1. PROCESOS IMPLICADOS Y NIVELES DE COMPRENSIÓN

Los procesos implicados en la comprensión de los gráficos estadísticos, ha sido un tema de estudio por varios investigadores, quien en su mayoría se han enfocado en la lectura e interpretación de los gráficos. Sin embargo, de manera general, la comprensión de gráficos se ha relacionado más con actividades donde se involucra tres tipos de tareas: traducción, interpretación y extrapolación o interpolación de información.

Más en detalle, Bertin (1967) plantea que la comprensión de gráficos conlleva tres procesos: una concepción general obtenida de la identificación de componentes externos del gráfico (*identificación externa*), como pueden ser tema, título y las etiquetas. Luego, una observación más profunda de algunos componentes del gráfico (*identificación interna*), identificando relaciones y aspectos relevantes que determinan variabilidad en los datos, como lo son las variables y las escalas representadas, por último, la *percepción de la correspondencia* entre los elementos identificados anteriormente y el contexto, permiten obtener conclusiones sobre las variables y sus relaciones.

Esto supuestos permitieron establecer diversos niveles de lectura de un gráfico, los cuales se ha denominado de la siguiente manera:

Extracción de datos: consiste en establecer relaciones entre los ejes X e Y (frecuencia – valor en gráficos de barras o bien dispersión – coordenadas entre puntos en diagramas de dispersión.)

Extracción de tendencias: se da cuando se identifican relaciones entre dos subconjuntos de datos (por ejemplo: moda - frecuencia entre subconjuntos).

Análisis de la estructura de los datos: se da cuando se comparan tendencias o agrupamiento de datos para sacar conclusiones y efectuar predicciones.

Otra definición sobre los niveles de comprensión de un gráfico, es propuesta por Curcio (1987), Friel, Curcio y Bright (2001) y Wainer (1992), quienes establecieron tres diferentes clasificaciones para denotar los niveles de comprensión de gráficos:

1. *Leer los datos*, lo cual se refiere a la capacidad específica de lectura literal del gráfico sin interpretar la información contenida en él, por lo que se refiere únicamente a los hechos explícitamente representados.
2. *Leer entre los datos*, cuando se es capaz de comparar e interpretar valores de los datos, integrar los datos de un gráfico, buscar relaciones entre las cantidades y aplicar procedimientos matemáticos simples a los datos; de esta forma se logra una comprensión tanto la estructura básica del gráfico, como de las relaciones contempladas en él.
3. *Leer más allá de los datos*, se refiere a la capacidad de realizar inferencias y proyecciones a partir de los datos; es decir, predecir e inferir sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico, por lo que se requiere conocer el contexto en que los datos se presentan.
4. *Leer detrás de los datos*: este nivel fue agregado en (Friel et al., 2001) y consiste en realizar una valoración crítica con respecto al método de recolección de datos, validez y fiabilidad, que permita justificar la confiabilidad de las conclusiones realizadas.

Estudios realizados en Friel, Curcio y Bright (2001), muestran que las principales dificultades en la comprensión de los gráficos y tablas, aparecen en los dos niveles superiores, es decir “leer entre los datos” y “leer más allá de los datos”, lo que refleja debilidades en la correlación de datos y un análisis más exhaustivo entre ellos y el mismo contexto de donde provienen.

Ante estas circunstancias, autores como Friel et al. (2001), han estudiado los factores que intervienen en la comprensión de los gráficos, la cual describen como la capacidad para derivar el significado de los gráficos creados por otros o por sí mismos.

Arteaga (2009, 2011), en el estudio de niveles de lectura obtenidos por los futuros profesores dentro de un proyecto en que deben responder a una pregunta usando su propio gráfico, observa que la mayoría obtuvo niveles de lectura de 1, 2 y 3 (según la clasificación de Curcio), pero pocos lograron llegar a una lectura crítica de nivel 4.

Monteiro y Ainley (2006, 2007) también expresan en su estudio sobre la lectura de gráficos con futuros profesores, debilidades en conocimientos matemáticos para llevar a cabo una lectura adecuada de gráficos tomados de la prensa diaria. Algunos no leían correctamente el gráfico y otros a pesar de leerlo, no lograban realizar una interpretación correcta de su significado en el contexto donde se producían los datos; es decir, no llegan al nivel de lectura crítica de los datos.

En Friel et al. (2001) consideran que el nivel de compresión gráfica, está determinada por los cuestionamientos que se planteen sobre los datos y el contexto, lo que desencadena, varios factores críticos que pueden influir en la comprensión del gráfico. Entre ellos se destacan: los propósitos del uso de gráficos, características de la tarea, características de la disciplina y características del lector.

1.8.2. FACTORES CRÍTICOS EN LA COMPRESIÓN GRÁFICA

En este apartado se describen algunos factores que influyen en la mayor o menor facilidad de comprensión de la información representada en un gráfico.

1.8.2.1. PROPÓSITOS DEL USO DE GRÁFICOS

Las razones por las que se utilizan gráficos se dividen básicamente en dos clases: para efectos de análisis o para efectos de comunicación (Kosslyn, 1985). Los gráficos utilizados para el análisis de datos funcionan como herramientas de descubrimiento en las primeras etapas del análisis de datos, sobre todo cuando se espera que el estudiante tenga sentido de los datos; es decir, se utilizan como herramientas para detectar características importantes o inusuales de los datos.

Este aspecto del uso de la gráfica parece estar relacionado con lo que sucede en el currículo escolar, donde tradicionalmente, el enfoque didáctico está en la construcción de gráficos por parte del estudiante, más que en el análisis de las razones con que fueron construidos los gráficos. Sin embargo, esta concepción está cambiando y más

recientemente la atención en la construcción de gráficos por parte de los estudiantes se ha abordado dentro de un contexto más amplio de investigaciones estadísticas que se centran en el uso de gráficos para propósitos de dar sentido a los datos a través del trabajo con proyectos (Batanero et al., 2013; Friel, Curcio y Bright, 2001b).

Por su parte, los gráficos utilizados para la comunicación se definen como imágenes destinadas a transmitir información sobre números y relaciones entre números; "Un buen gráfico obliga al lector a ver la información que el diseñador quería transmitir" (Kosslyn, 1994, p.271). Tales gráficos normalmente contienen estadísticas de resumen en lugar de los datos originales; son simples en forma y contenido y están destinados a mostrar patrones (Spence y Lewandowsky, 1990).

Debido a que los gráficos son de uso común en revistas, periódicos, internet y básicamente cualquier medio de comunicación, ellos se han constituido en un recurso de gran importancia para la sociedad, lo que ha dirigido esfuerzos en los currículos escolares para introducirlos en las distintas asignaturas con el propósito de dar a conocer información, lo que pone a prueba la comprensión gráfica de los estudiantes.

1.8.2.2. CARACTERÍSTICAS DE LA TAREA

La percepción gráfica que realice un estudiante al enfrentarse a un gráfico estadístico, va a depender básicamente de tres factores, según lo mencionan en Friel et al. (2001): la sintaxis de la percepción visual (decodificación visual), las operaciones que impliquen el uso de las propiedades sintácticas de los gráficos y el contenido semántico del gráfico (es decir, el contexto).

En primer lugar, la decodificación visual de los gráficos se concentra en determinar las dimensiones físicas asociadas con los gráficos (por ejemplo, la longitud de la línea, el área circular, la posición de los puntos) que debería emplearse para representar los valores de los datos que faciliten el uso y la lectura del gráfico. Esto debe realizarse con especial atención, pues el procesamiento visual del material gráfico permite generar la primera imagen de los datos fuera del contexto y por lo tanto debe llegar con la mayor claridad a la mente de quien lo visualiza.

Con respecto a las tareas de análisis de datos o aquellas operaciones que impliquen el uso de las propiedades sintácticas de los gráficos, se refiere a aquellos procesos mentales que suceden sobre la representación gráfica que permiten identificar o hacer inferencias sobre las propiedades que no resultan obvias de los datos. Estos procesos son clasificados en Friel et al. (2001) con un modelo Mixto Aritmético-Perceptivo (MA-

P), en el cual se pueden dar dos procesos de análisis: por un lado enfocado en una cantidad, es decir, las operaciones se concentran en la lectura de puntos o bien en extraer un valor de un punto absoluto. Por otro lado, los procesos de análisis, centrados en la integración de la información entre los puntos de datos. En este proceso, las tareas implican el uso de dos o más valores en los datos. El lector gráfico utiliza la información para: (a) realizar cálculos tales como determinar la suma de un conjunto de valores, una media entre valores en los datos, o la relación de dos valores; (b) hacer comparaciones, ya sea entre valores o entre partes, realizadas cuantitativa o cualitativamente (el lector puede identificar valores exactos para indicar una diferencia numérica, hacer estimaciones para determinar diferencias relativas o determinar las proporciones); o (c) identificar tendencias basadas en información cualitativa o comparar tendencias cualitativa o cuantitativamente (para determinar las tendencias, se pueden identificar aumentos, disminuciones o fluctuaciones).

Por último, la comprensión gráfica depende del contenido semántico del gráfico, lo cual lo proporcionan, los aspectos antes mencionados en conjunción con el contexto en el que se desarrolle la actividad representada en el gráfico. Debido a que los datos están basados en contextos del mundo real, un lector de gráficos debe ser capaz de describir, organizar, representar, analizar e interpretar datos, teniendo en cuenta el marco contextual de los datos. De igual forma, el lector gráfico debe presentar la capacidad de razonabilidad, es decir, aplicar ciertos principios de la lógica formal, para conectar el pensamiento estadístico con el contexto, de manera que las decisiones tomadas con base en su análisis estadístico, sea coherente con la realidad.

1.8.2.3. CARACTERÍSTICAS DE LA DISCIPLINA

La estadística como disciplina se concentra en el estudio sistemático de los datos, específicamente, la recolección, descripción y representación de datos para una adecuada obtención de conclusiones (Moore, 1991). Asociados con esta disciplina están varias herramientas y conceptos, algunos de los cuales afectan a la comprensión gráfica. La dispersión y la variación dentro de un conjunto de datos, el tipo de datos, el tamaño de un conjunto de datos y la forma en que una representación proporciona la estructura para los datos (es decir, la complejidad del gráfico), pueden influir en la comprensión del gráfico.

Dispersión y variación. En la estructuración de la información, se debe considerar la reducción de datos y la escala. La transición que se lleva a cabo de las representaciones

tabulares y gráficas de los datos brutos a otras formas de datos agrupados o resúmenes, se les llama reducción de datos. En Friel et al. (2001), se describen varias investigaciones donde se muestra como la escala (herramienta para la reducción de datos), genera dificultades a la hora de la comprensión gráfica, sobre todo cuando los estudiantes no saben definir la escala de acuerdo con el conjunto de datos que manejan o bien cuando se tiene un rango de ellos. Esto suele suceder con la incomprensión en el significado de los ejes, por ejemplo, cuando se trata de un gráfico de barras (en la forma de “L”) de datos desagrupados, el eje vertical muestra el valor de cada observación, mientras que el eje vertical para los gráficos de barras de datos agrupados (histogramas) proporciona la frecuencia de ocurrencia de cada observación o rango de observaciones.

Con respecto al tipo de datos y tamaño del conjunto de datos, es importante tener estos elementos en cuenta para determinar qué tipo de gráfico utilizar. Los gráficos de imagen, diagramas de líneas y gráficos de barras son útiles para resumir datos que incluyen medidas repetidas y son apropiados para estudiar datos nominales, ordinales y de intervalos que involucren conteos. Por el contrario, los histogramas se utilizan con mayor frecuencia para organizar datos continuos en los que puede haber pocas medidas repetidas. Debido a que se pueden escalar tanto la frecuencia como los valores de los datos de los ejes, los histogramas son útiles para trabajar con conjuntos de datos grandes. Por su lado, los gráficos circulares son útiles para comparar los datos de porcentaje o proporción en relación con una sola característica (Moore, 1991).

Complejidad del Gráfico: En este aspecto es importante considerar, que si bien no existe claridad para clasificar la complejidad de un gráfico, es fundamental hacer un tratamiento bien pensado y detallado de lo que los estudiantes necesitan saber para usar y comprender gráficas en diferentes áreas temáticas o niveles de escolaridad. En este sentido, para los primeros años escolares se sugiere un trabajo docente centrado en una transición gradual de los objetos mismos de estudio, a la representación gráfica, estableciendo relaciones y comparaciones de frecuencias y medidas, para introducir los gráficos de barras. En los niveles educativos superiores, la progresión del trabajo gráfico es mucho menos clara. La reducción de datos (definición de escalas y agrupamiento de datos), surge como otra noción fundamental que los estudiantes deben desarrollar si quieren entender los gráficos de barras y otros tipos de gráficos. En este sentido, los histogramas son considerados difíciles de entender conceptualmente y causan problemas importantes para muchos alumnos (Rangecroft, 1994). Por su lado, los gráficos de líneas pueden ser más difíciles de comprender que otros gráficos, ya que el

estudiante tiene dificultad para establecer las relaciones entre los valores de eje X con los del eje Y en un gráfico cartesiano.

Adicionalmente a la complejidad estructural de un gráfico, se puede agregar el nivel de complejidad semiótica; el cual se puede establecer como en Batanero, Arteaga y Ruiz (2009), es decir, como los siguientes niveles:

- *Representa solo sus resultados individuales*: corresponde a la actividad semiótica de más bajo nivel, la cual consiste en representar solo uno de los datos individuales o de una de las variables que interviene en el evento en estudio, invisibilizando los demás datos y relaciones.
- *Representación de un conjunto de datos uno a uno*: en este nivel se representan todos los valores de las variables y es posible visualizar cierta variabilidad, sin llegar a percibir con claridad tendencias entre los datos. Es posible la “extracción de los datos”, pero no lo suficiente para llegar a la “extracción de tendencias”.
- *Producción de gráficos separados para cada distribución*: en este nivel se visualiza un dominio de los conceptos de variable, frecuencia y distribución, lo que permite representar agrupamientos de datos por categoría de acuerdo con la variable y realizar frecuencias, estableciendo la relación proporcional entre estas dos dentro del gráfico. De esta manera, podrían visualizarse relaciones entre los datos a partir de las medidas de posición central (moda, media y mediana) en gráficos de barras horizontales y verticales, así como polígonos de frecuencias. De igual forma, podría omitirse aspectos de forma del gráfico, como lo pueden ser etiquetas de los ejes o título del gráfico.
- *Representación de dos distribuciones sobre un mismo gráfico*: este es el más alto nivel de complejidad semiótica establecido para un gráfico (Arteaga, 2009; Batanero et al., 2009). Este nivel contempla la posibilidad de la representación de distribuciones con dos escalas dentro de un mismo gráfico. Para esto, es posible que se utilicen los diagramas de barras adosados.

1.8.2.4. CARACTERÍSTICAS DE LOS LECTORES

Varios estudios referidos en Friel et al. (2001), indican que diferencias individuales de las poblaciones a las que van dirigidas los gráficos, también influyen en la comprensión de la información representada en ellos. Por ejemplo, se consideró la capacidad cognitiva en relación con las etapas de desarrollo piagetiano, determinándose

que existe una relación positiva significativa entre el pensamiento lógico, el razonamiento proporcional y la capacidad de representación gráfica. De igual forma, se establece en estos estudios, que para interpretar gráficos lineales, se necesita capacidad de razonamiento abstracto, sugiriendo la introducción de este tipo de recursos en la educación media o secundaria.

Otros estudios, se concentraron en la representación gráfica como práctica, más que en la perspectiva cognitiva. Estos argumentan que la práctica y las experiencias significativas permiten mejorar el desempeño en la compresión de los gráficos, pues los estudiantes con pocas oportunidades de participar en la gráfica como práctica, muestran menos competencia que aquellos para los que es rutinario hacerlo.

En los estudios de (Curcio, 1987; Fells, 1926; Fisher, 1992; Gal, 1993, 1998; Maichle, 1994; McKnight y Fisher, 1991; Russell, 1991; Thomas, 1933; Gillan y Lewis, 1994) citados en (Friel et al., 2001), el conocimiento y la experiencia en matemáticas han sido identificados como otras características necesarias para la comprensión gráfica. En este sentido, en el modelo MA-P descrito anteriormente, separara los pasos de procesamiento en componentes no aritméticos y aritméticos. Ellos sugirieron que los usuarios de gráficos a menudo leen gráficos para propósitos cuantitativos y realizan una variedad de operaciones aritméticas al leer gráficos. Igualmente, indican que las actividades de plantean la necesidad del análisis de datos, están estrechamente relacionadas con las ideas matemáticas básicas involucradas en los procesos de contar, medir y clasificar y que los estudiantes más jóvenes necesitan manejar números pequeños y conjuntos más reducidos de datos. Curcio (1987) indica que el contenido matemático de un gráfico, es decir, el "número de conceptos, relaciones y operaciones fundamentales contenidos en él" (p.338), fue un factor que determina la comprensión gráfica, lo que implica que los conceptos previos matemáticos son fundamentales para una adecuada lectura e interpretación de los gráficos.

Adicionalmente, otros estudios también expuestos en Friel et al. (2001), encontraron relaciones entre la experiencia matemática, la identificación de los tipos de gráficos de barras y la comprensión y lectura de gráficos, lo que prueba la importancia de las características que debe poseer el lector o usuario de los gráficos estadísticos.

1.8.2.5. ASPECTOS DEL CONTEXTO

La elección de estrategias y representaciones matemáticas apropiadas depende a menudo del contexto en el que se plantea un problema matemático. El contexto se

considera ampliamente como un aspecto de la solución de problemas que impone demandas adicionales a quien tenga la tarea de resolver un problema.

Para el Programme for International Student Assessment (PISA) de la Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD), la prueba PISA, es importante que utilice una amplia variedad de contextos. Esto ofrece la posibilidad de conectar con los intereses individuales y con la gama de situaciones en las cuales los individuos operan en el siglo XXI. En este sentido, para el marco matemático implementado para clasificar los ítems de evaluación que conforman la prueba PISA, se han definido cuatro categorías de contexto (OECD, 2016):

- Personal - Los problemas clasificados en esta categoría se centran en las actividades del propio estudiante, su familia o su grupo de iguales. Los tipos de contextos que pueden considerarse personales incluyen (pero no se limitan a) aquellos que involucran preparación de alimentos, compras, juegos, salud personal, transporte personal, deportes, viajes, programación personal y finanzas personales.
- Ocupacional (escolar) – Esta categoría incluye problemas del contexto ocupacional circunscritos al mundo del trabajo o de la escuela, como este nuestro interés. Aspectos categorizados como ocupacionales pueden incluir cosas tales como medir, calcular costos y pedir materiales para la construcción, control de calidad y trabajos relacionados en el medio escolar.
- Social - Los problemas clasificados en la categoría de contexto social se centran en la comunidad (local, nacional o global). Pueden involucrar actividades referentes a sistemas de votación, transporte público, gobierno, políticas públicas, demografía, publicidad, estadísticas nacionales y economía, etc. Aunque los individuos están involucrados en todas estas cosas de una manera personal, en la categoría de contexto social el enfoque de los problemas está en la perspectiva de la comunidad.
- Científico – El contexto científico se relacionan con la aplicación de las matemáticas al mundo natural y temas relacionados con la ciencia y la tecnología. Los contextos particulares pueden incluir áreas tales como clima, ecología, medicina, ciencia espacial, genética, medición y el mundo de las matemáticas en sí entre otras. Los ítems que son intramatemáticos, donde todos los elementos involucrados pertenecen al mundo de las matemáticas, entran dentro del contexto científico.

1.9. CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS Y ERRORES ASOCIADOS

Además de las dificultades anteriormente mencionadas con respecto a la facilidad de comprensión de la información representada en un gráfico, se mencionan otros aspectos que tienen que ver con la construcción de gráficos y los errores asociados con esta actividad.

De esta manera estudios de Li y Shen, 1992, citados en Arteaga et al. (2012), señalan algunos errores que comenten los estudiantes al llevar a cabo la construcción de gráficos; entre ellos se mencionan, la dificultad o inconsistencia al elegir el tipo de gráfico adecuado para la representación de los datos; usaron polígonos de frecuencia con variables del tipo cualitativas o bien, usaron gráficos de barras cuando lo correcto era usar gráficos de dispersión y cometieron errores al representar variables no relacionadas en el mismo gráfico. De igual forma se indica en este estudio, los errores cometidos principalmente al definir las escalas, lo cual Wu (2004), describe en su investigación como uno de los tres principales errores cometidos por los estudiantes al desconocer las convenciones en la construcción de gráficos.

Wu (2004), también se refiere en su estudio a otros errores cometidos por los estudiantes en la lectura e interpretación de gráficos y concluye en general que ellos muestran mejores destrezas en la lectura que en la interpretación ya que esta última, requiere de inferencias que se hacen sobre información que no se visualiza directamente en el gráfico.

Otros autores como Pereira-Mendoza y Mellor (1990), al analizar la lectura y comprensión de un gráfico en estudiantes de primaria, también encontraron que los estudiantes cometían más errores en la interpretación que en la lectura literal de un gráfico. Sin embargo, un simple cambio de orientación en un gráfico de barras (pasar de una representación horizontal a una vertical) les hace cometer errores en su lectura. Por su parte Lee y Meletiou-Mavrotheris (2003), basados en su estudio con 162 estudiantes, concluyen que ellos presentan cuatro tipos de dificultades en la construcción, interpretación y aplicación de histogramas en la vida real:

- Percepción de los histogramas como una representación de datos individuales o aislados, donde cada barra se refiere a una observación particular y no a un conjunto agrupado de datos.
- Tendencia a interpretar los histogramas como un gráfico de dos variables.
- Tendencia a comparar el eje vertical y las alturas de las barras cuando hay variación en dos histogramas.

- Interpretación determinista, sin apreciar que los datos representan un fenómeno aleatorio que podría variar al tomar diferentes muestras de la misma población.

Por su parte Ben-Zvi y Friedlander (1997), aportan elementos importantes al realizar una investigación con estudiantes de primaria, en la que por tres años registraron los procesos de pensamiento estadístico utilizados al enfrentarse a proyectos de análisis de datos con el uso de la tecnología. En ella encontraron errores al construir o elegir un gráfico; por ejemplo, los estudiantes mostraron un *uso acrítico*, al aceptar las opciones que por defecto les brinda el software para la construcción de un gráfico, aunque no sean adecuadas. También, pudieron observar que los estudiantes muestran habilidades en el manejo del software para construir correctamente un gráfico si se les indica el tipo a utilizar, o bien, si se les pide realizar alguna modificación o interpretación, pero no son capaces de seleccionar la gráfica más adecuada (*uso significativo de una representación*).

Los errores en la comprensión y representación de los datos no son un problema exclusivo de los estudiantes de primaria o secundaria, también sucede en los futuros profesores. Este es el caso de las investigaciones realizadas en Bruno y Espinel (2005), donde se solicita a los futuros profesores construir un histograma a partir de gráficos tomados de la prensa. Los resultados muestran debilidades en los estudiantes al no diferenciar los procedimientos de representación de los diagramas de barras para variables cualitativas y discretas frente a los histogramas para lo continuo o agrupado en intervalos.

Arteaga (2011), también describe errores que comenten los futuros profesores de primaria cuando elaboran gráficos estadísticos. Los resultados de su estudio destacan que los estudiantes comenten errores en el establecimiento de escalas (escalas no proporcionales), rótulos confusos, representación incorrecta de intervalos, entre otros. Igualmente, se comenten errores donde no concuerdan el tipo de variables representada o bien, las variables no se relacionan entre sí.

1.10. ANÁLISIS DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LIBROS DE TEXTO

En este apartado se describen algunas investigaciones que preceden a nuestro estudio y que sirven de base para determinar los procedimientos y metodologías a implementar.

En primer lugar es importante considerar el valor que tiene el libro de texto como recurso didáctico; (Escolano, 2009, p. 172) lo define como “*soporte curricular, a través del cual se vehicula la vulgata escolar, o sea, el conocimiento academizado que las instituciones educativas han de transmitir*”, adicionalmente agrega que:

Es un espacio de memoria como espejo de la sociedad que lo produce, en cuanto en él se representan valores, actitudes, estereotipos e ideologías que caracterizan la mentalidad dominante, de una determinada época, o lo que es lo mismo, el imaginario colectivo que configura algunos aspectos fundamentales de lo que hoy se entiende por currículo oculto, y también del explícito (p. 172).

Por su parte Fernández y Caballero (2017), teniendo en cuenta algunas reflexiones sobre los libros de texto de matemática y sus repercusiones para los procesos de enseñanza-aprendizaje, lo define como: “*libro, ya sea impreso en papel o en cualquier otro formato, editado con el fin de servir de guía para enseñar Matemáticas en un determinado curso/nivel educativo perteneciente a un plan de estudios*” (p. 205).

Van Dormolen (1986), clasifica los libros de texto de matemática en tres grandes grupos:

- Los que contienen ejercicios y problemas
- Los que plantean la teoría, por un lado y problemas y ejercicios por otro.
- Los que mezclan la teoría con la práctica (ejercicios y problemas)

En el caso de la investigación que se lleva a cabo, se trabaja con libros de texto del tercer tipo, es decir, con libros donde se entrelazan la teoría con la práctica.

En este contexto diversas investigaciones han abordado el uso de los gráficos estadísticos en los libros de texto y el currículo, destacando aportes como los de Díaz-Levicoy (2014), en donde se realiza un estudio de los libros de texto de editoriales de gran tradición en la comunidad autónoma de Andalucía, para la educación primaria española y en la que se consideran aspectos de tipo de gráfico, nivel de lectura, complejidad semiótica y tipo de tarea donde se utilizan gráficos estadísticos. Igualmente se consideran investigaciones consecuentes de este estudio como lo han sido Arteaga, Batanero y Contreras (2011); Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea (2015, 2016); Díaz Levicoy, Giacomone, López Martín y Piñeiro (2016).

Adicionalmente, se han considerado investigaciones, que si bien, no se concentran en el uso de gráficos estadísticos en los libros de texto, si abordan variables tratadas en nuestro estudio (Arteaga, 2009, 2011; Arteaga, Batanero y Contreras, 2011; Arteaga et al., 2012; Batanero et al., 2009; Batanero, Gea, Arteaga y Contreras, 2014; Castellanos,

2013; Ruiz, 2014; Vigo, 2016). De esta manera, se analizan los niveles de lectura, complejidad semiótica y aspectos de la construcción e interpretación de gráficos estadísticos en futuros profesores y el currículo matemático en diversos países como España, Chile, Colombia, entre otros.

1.11. CONCLUSIONES DE LOS ANTECEDENTES

En este capítulo se han descrito diversas investigaciones que plantean discusiones sobre la cultura estadística; la interpretación y elaboración de gráficos estadísticos en el contexto educativo. Se mencionaron investigaciones que describen variables de estudio en líneas de investigación y se han detallado resultados particulares al respecto.

Al inicio se han mencionaron resultados sobre los niveles de lectura de un gráfico, así como también los procesos asociados a su interpretación. Se destacan los niveles de lectura propuestos por Friel et al. (2001) y los cuales serán utilizados en nuestra investigación. Así mismo, se analizan los factores críticos que intervienen en la complejidad semiótica y los tipos de tarea utilizados en actividades con gráficos estadísticos, como los propuestos en Arteaga (2009) y Batanero et al. (2009). Estas variables, aunadas a otros aspectos considerados en Díaz-Levicoy (2014), constituyen los elementos principales del estudio del uso de gráficos en el currículo y los libros de texto en Costa Rica. Para ello se agregan las variables de *propósito* y *contexto* en el cual se llevan a cabo las incursiones de gráficos en los libros de texto de los editoriales que se estudiarán más adelante en el Capítulo 4.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS CURRICULAR

1.12. INTRODUCCIÓN

Para poder situar el estudio de los libros de texto, conviene presentar las orientaciones curriculares en Costa Rica, comparando estas con las españolas. Nuestra síntesis abarca también la educación secundaria, pues es nuestra intención continuar el estudio actual con el análisis de libros de texto en educación secundaria, como parte de una futura tesis doctoral.

Antes de la reforma educativa matemática implementada en Costa Rica en el año 2012, la educación estadística era incluida de manera tímida y superficial en el currículo matemático de secundaria y omitida de la educación primaria (M.E.P, 2005). A partir de la importancia que revierte esta materia en la formación ciudadana en la actualidad, la nueva reforma educativa de matemática incluye la educación estadística desde la formación básica en primaria y hasta la educación secundaria, siguiendo las recomendaciones internacionales emitidas en los Principios y Estándares para la Matemática Escolar del National Council o Teachers of Mathematics (NCTM, 2014, p. 4), en su apartado de *Análisis de Datos y Probabilidad*, donde se resalta la importancia del razonamiento estadístico como esencial para una formación crítica y reflexiva de la realidad, ante la serie de datos e información suministradas en los medios de comunicación.

Esta historia se presenta de manera similar en el sistema educativo español, donde se ha reconocido la importancia de la educación estadística desde edades tempranas en los estudiantes y se ha planteado las modificaciones curriculares pertinentes para brindar una educación estadística de calidad que promueva las habilidades propuestas por la NTCM.

Ante esta situación, en este capítulo se exploran las diferencias y semejanzas de la educación estadística que reciben los estudiantes del sistema educativo costarricense y español, considerando que la estadística que se enseña hoy día en los sistemas educativos, es fundamental para la vida personal y profesional, por ende la organización y metodología utilizada en distintos países puede ser muy valiosa de analizar (Batanero, Contreras y Roa, 2013).

1.13. EL SISTEMA EDUCATIVO EN COSTA RICA Y ESPAÑA

En ambos países, Costa Rica y España, se cuenta con un sistema educativo que es muy similar en su estructura; es decir, tanto en Costa Rica como España, la educación general básica está organizada en diferentes ciclos o cursos que inician desde los 0 años y llega hasta los 18 años aproximadamente, reflejando su mayor diferencia en el aspecto curricular como se mostrará más adelante en este documento.

Como se observa en las tablas 3.1 y 3.2, los sistemas educativos analizados en este documento inician con la educación infantil o preescolar desde los cero años y básicamente cuentan con la misma organización hasta los 15 años, donde el sistema educativo costarricense termina su III ciclo de la Educación General Básica, la cual es gratuita y obligatoria por ley constitucional. En el caso de España, además de ser gratuita, es obligatoria hasta los 16 años, es decir dos años más que en Costa Rica, donde el IV ciclo es gratuito, pero no obligatorio.

Tabla 3.1. *Estructura de la educación general básica en Costa Rica*

Educación Preescolar	Educación Primaria						Educación Secundaria						
	Materno Infantil Y Transición		I Ciclo (7 a 9 años)	II Ciclo (9 a 12 años)	III Ciclo (13 a 15 años)	IV Ciclo o Diversificada (13 a 17 años)							
Grado.	0 a 5,5 años	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º

Nota: Elaboración propia a partir de los datos obtenidos de (C.S.E., 2016)

Tabla 3.2. *Estructura de la educación general básica en España*

Educación Infantil	Educación Primaria						Educación Secundaria Obligatoria (ESO)		Post-Obligatoria (16 a 18 años)					
	0 a 3 años	1 Ciclo (6 a 7 años)	II Ciclo (8 a 9 años)	III Ciclo (10 a 11 años)	I Ciclo (12 a 15 años)	II Ciclo (16 años)	Bachille- rato	Formación Profesional de Grado Media						
Cursos	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	1 ^a	2 ^a	1 ^º	2 ^º

Nota: Elaboración propia a partir de los datos obtenidos en (Batanero et al., 2014; Martínez, 2014).

En el sistema educativo costarricense, los estudiantes que llegan al 10º nivel, eligen una ciencia (entre física, química o biología) y entre un idioma (inglés o francés) en la que darán énfasis en el V nivel, donde realizarán el bachillerato al final de la aprobación del nivel correspondiente (esto es el caso de la modalidad académica). Para quienes deciden seguir una modalidad, técnica, cursarán V y VI nivel donde realizarán el bachillerato al finalizar su VI año.

En el caso del sistema educativo español, es en los dos últimos cursos de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) que los estudiantes orientan sus intereses vocacionales para seguir estudios académicos o bien para seguir una formación profesional. Esta seguirá en la etapa de educación secundaria post-obligatoria, donde el estudiante que haya elegido continuar estudios académicos sigue un proceso formativo para realizar el bachillerato y aspirar estudios universitarios o bien, lleva unos cursos de formación profesional, donde podrán especializarse en artes plásticas y diseño o en deportes, para quienes deseen orientarse hacia el trabajo (Batanero, Gea, Arteaga y Contreras, 2014, p. 3).

Como se indica en C.S.E.(2016), el sistema educativo costarricense está regido por el Consejo Superior de Educación (CSE), que es el Órgano Constitucional, creado para orientar y dirigir la enseñanza oficial, exceptuando la Educación Universitaria. Sin embargo, es el Ministerio de Educación Pública, el ente que centraliza y administra todo el sistema educativo en el país a través de 28 Direcciones Regionales Educativas ubicadas en todo el país. Ellas son las encargadas de dar el seguimiento curricular, administrativo y de supervisión a los diferentes centros educativos locales. Los cuales siguen las normativas aprobadas por el CSE, dentro de las cuales se encuentran los planes y programas curriculares que se llevan en todo el país en el mismo orden y en los mismos tiempos.

Por su lado en España, el sistema educativo es más flexible, pues las orientaciones curriculares son promulgadas, tanto a nivel estatal como en la comunidad autónoma donde se ejecute, dando cierta autonomía a los centros educativos para realizar adaptaciones, siempre que se respeten las restricciones que suponen la existencia de evaluaciones externas de los alumnos (Batanero et al., 2014). En ambos países, se sigue una metodología de enseñanza y aprendizaje, que permite al estudiante de una comunidad, seguir estudios sin ningún contratiempo, si se traslada de lugar de residencia, pues todos los centros educativos, siguen un ordenamiento establecido a nivel central.

Con relación al mapa curricular que compone la estructura básica del sistema educativo de ambos países, esta presenta varias diferencias, las cuales se muestran en la Tabla 3.3. En ella se observa una marcada diferencia en asignaturas que componen cada sistema educativo, así como también, una orientación y preparación diferente, principalmente motivada hacia el bachillerato, sucedida en el IV ciclo de la educación costarricense y el II ciclo de la ESO en el caso de España.

Tabla 3.3. *Mapa curricular básica del sistema educativo en Costa Rica y España*

Costa Rica		España	
Educación Primaria	Asignaturas del Currículo básico	Asignaturas del Currículo básico	
	Troncales y Específicas Obligatorias	Materias específicas a elección	
	Español	Ciencias de la naturaleza	Educación artística
	Estudios Sociales	Segunda lengua extranjera	
	Educación Científica	Ciencias Sociales	Religión (si no se eligió anteriormente)
	Matemática	Lengua Castellana	
	Educación Agrícola	y Literatura	Valores Sociales y Cívicos (si no se eligió anteriormente)
	Educación Musical	Matemáticas	
	Educación Física	Primera lengua extranjera	
	Educación Religiosa	Educación Física	
Educación Secundaria	Educación para el Hogar	Religión o Valores	
	Lengua extranjera	Sociales y Cívicos	
	Artes Industriales	Artes Plásticas	
	III Ciclo	I Ciclo	II Ciclo
	Educación Diversificada		Opción Académica Opción Profesional
	Matemática	Biología y Geología (1º)	Geografía e Historia
	Español	Estudios Física y Química (2º)	Lengua Castellana y Literatura
	Estudios Sociales	Física	Geografía e Historia (1º y 2º)
	Ciencias	Química	Matemáticas
	Inglés	Biología	Francés Orientadas a las Enseñanza
	Francés	Psicología	Orientadas a las Enseñanza profesional
	Educación Cívica	Filosofía	Primera Académicas
	Educación Musical	Lengua Extranjera	Lengua
	Educación Física	Educación Cívica	Extranjera Asignaturas
	Artes Industriales	Educación Musical	de opción: Ciencias
	Educación para el Hogar	Educación Religiosa	de opción: Biología y Aplicadas a la geología Actividad
		Educación Física	Economía Profesional
		Lengua C. y L. (3º)	Física y Iniciación a la química Actividad
		1º Lengua Extranjera (3º)	Latín Emprendedora
		Matemática A o B (3º)*	y Empresarial
		Asignaturas específicas:	Tecnología
		Educación Física	
		Religión o Valores Éticos.	

Nota: Elaboración propia a partir de (Francis, 2010; Martínez, 2014)

De manera más específica, seguidamente se analizará la orientación curricular que ofrece ambos sistemas educativos en el campo de la educación matemática, concentrándose en la educación estadística en la educación primaria y secundaria de los

dos países, pero tomando como referencia la comunidad autónoma de Andalucía para evitar la diversidad que podría suceder en toda España.

1.14. EDUCACIÓN ESTADÍSTICA EN COSTA RICA Y ESPAÑA: DIFERENCIAS Y SEMEJANZAS

La educación matemática ofrecida para los niveles educativos de primaria y secundaria del sistema educativo costarricense ha carecido, desde hace muchos años, de la profundidad en temas claves del currículo como: estadística y probabilidad, entre otros (Ruiz, Chavarría y Mora, 2003, p. 191). Más recientemente, en la nueva reforma educativa impulsada desde el año 2012, estos contenidos han sido incluidos con mayor relevancia, atendiendo una necesidad que demanda la sociedad actual y que en muchos países del mundo se ha reconocido como una necesidad impostergable.

En el plano internacional, los Principios y Estándares para la Matemática Escolar del National Council o Teachers of Mathematics (NCTM, 2014), en su apartado de *Análisis de Datos y Probabilidad*, señalan la importancia del razonamiento estadístico como un elemento esencial para desempeñarse como ciudadano crítico e informado, capaz de analizar datos y de realizar inferencias y predicciones sobre ellos. Esto se muestra en la Figura 3.1, donde se aprecia la importancia del tema de análisis de datos y probabilidad en los diferentes niveles del sistema escolar.

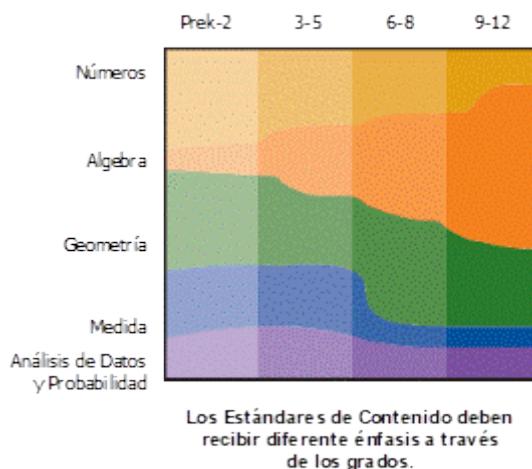


Figura 3.1. Importancia del análisis de datos y probabilidad, según NCTM (2014)

En la actualidad, el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), está apostando a una nueva reforma educativa en el campo de la matemática, dando énfasis a la resolución de problemas, a la contextualización activa como un componente pedagógico especial, al uso eficaz de la tecnología, a la potenciación de actitudes y

creencias positivas en torno a las matemáticas y a la integración de la historia de la matemática como ejes transversales, que promuevan un proceso de enseñanza y aprendizaje más efectivo de esta disciplina (M.E.P, 2012, p. 35), donde además, se fortalece y brinda mayor relevancia a los temas de estadística y probabilidad desde la primaria hasta el bachillerato en secundaria como se observa en la Figura 3.2. Así mismo, se considera fundamental que los niños y jóvenes adquieran una actitud crítica y reflexiva en relación a la información estadística que comúnmente encontramos publicada en los diferentes medios de comunicación (Arteaga, Batanero, Díaz y Contreras, 2009, p. 94), por lo que se ha dado un lugar relevante a la Estadística y Probabilidad en todos los niveles del sistema educativo costarricense.

Es importante indicar que, dadas las orientaciones curriculares establecidas en los nuevos programas de estudio, la estadística y probabilidad se ajustan muy bien al enfoque de resolución de problemas y la aplicación en otros contextos, integrando ejes transversales como las tecnologías y la potenciación de actitudes y creencias positivas sobre las matemáticas. Estos programas son ejecutados en la educación primaria, por maestros o docentes que carecen generalmente de una especialidad en matemática, siendo considerados al igual que en el sistema español, como maestros generalistas que asumen por afinidad el reto de la enseñanza de la matemática escolar.

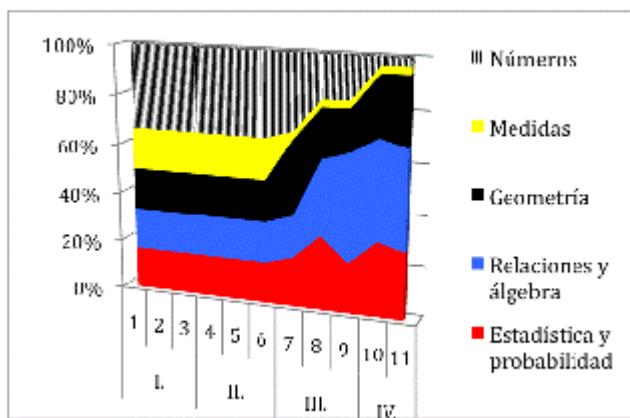


Figura 3.2. Áreas de matemática en el currículo escolar en Costa Rica, tomado de (Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, 2013, p. 34)

Por su parte, los docentes de la educación media, son profesionales de la educación, que han sido graduados de las carreras de enseñanza de la matemática y cuentan con una formación aceptable, sobre todos aquellos que provienen de titulaciones ofrecidas por las universidades estatales (Programa Estado de la Nación, 2015, p. 275).

Tabla 3.4. Contenidos de estadística y probabilidad de educación primaria en Costa Rica y España

Costa Rica	España
I Ciclo: Estadística: El dato (Uso, Datos cuantitativos, Datos cualitativos), La variabilidad de los datos, Recolección de información (Observación, Interrogación), Representación (Tabular: cuadros de frecuencia, gráficos), Medidas de resumen (Moda, máximo y, mínimo). Probabilidad: Situaciones o experimentos (Aleatorias, Seguras), Eventos (Seguro, Probable, Imposible, Más probable, igualmente probable y menos probable)	I Ciclo: Estadística: Gráficos estadísticos: Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos. Utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos. Azar y probabilidad: Carácter aleatorio de algunas experiencias. Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.
II Ciclo: Estadística: Población y muestra, Datos (Uso, Tipos de datos cuantitativos Por conteo, Por medición), El cuestionario y Fuentes de error en los datos. Recolección de información (Experimentación por medición), Porcentajes (Frecuencias porcentuales, comparación entre grupos), Representación (Gráfica: diagramas de puntos, circulares), Medidas de posición (Moda, Media aritmética), Máximo, Mínimo, Medidas de variabilidad (El recorrido). Diagramas lineales y Planteamiento y resolución de problemas. Probabilidad: Situaciones o eventos aleatorios, Eventos (Resultados a favor de un evento), Representación de eventos (Eventos más probables, igualmente, probables y eventos menos probables) Probabilidades (Definición clásica o laplaciana de probabilidad), Propiedades de las probabilidades (La probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1 inclusive), (La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0).	II Ciclo: Estadística: Gráficos y tablas: Tablas de datos. Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento de datos. Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana. Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares. Azar y probabilidad: Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar.
	III Ciclo: Estadística: Gráficos y parámetros estadísticos: Recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos. La media aritmética, la moda y el rango, aplicación a situaciones familiares. Azar y probabilidad: Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.

Nota: Datos obtenidos de (Batanero et al., 2014; M.E.P, 2012)

Como se puede observar en la Tabla 3.4, la estadística y la probabilidad están incorporadas desde el primer año de primaria y al igual que en el sistema educativo español, tiene una fuerte presencia en las nuevas disposiciones curriculares, pues constituye uno de los bloques de contenidos obligatorios, según se muestra en la Figura 3.2 y en (Batanero et al., 2014). Ambos sistemas educativos incluyen temas como: gráficos y parámetros estadísticos, tablas y distintas formas de representar la información, recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición, análisis crítico de las informaciones que se presentan a través

de gráficos estadísticos y tablas, así como la importancia de las medidas de posición central, en un contexto de aplicación a situaciones familiares.

Tabla 3.5. Contenidos de estadística y probabilidad de educación secundaria en Costa Rica y España

Costa Rica	España
<p>III Ciclo: Estadística: Conocimientos básicos (Unidad estadística, Características, Datos u observaciones, Población, Muestra, Variabilidad de los datos, Variables cuantitativas y cualitativas, discretas y continuas), Recolección de información (La experimentación, Interrogación), Frecuencia (Absoluta, porcentual), Representación (Tabular: cuadros de frecuencia absoluta y porcentual), Gráficas (barras, lineales, circulares y diagramas de puntos), Medidas de posición (Moda, Media aritmética, Mínimo, Máximo, Recorrido), Distribuciones de frecuencia (Clases o intervalos, Frecuencia absoluta, Frecuencia relativa y porcentual), Representación tabular, Representación gráfica (Histogramas, Polígonos de frecuencia). Probabilidad: El azar (Aleatoriedad, Determinismo), Espacio muestral (Espacio muestral, puntos muestrales y su representación), Eventos (Resultados favorables a un evento, Eventos simples y compuestos, Evento seguro, evento probable, evento imposible), Probabilidad (Eventos más probables, menos probables e igualmente probables, Definición clásica (o laplaciana)), Reglas básicas de probabilidad</p>	<p>Primer Curso (12 años): Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Segundo curso (13 años): Frecuencias absolutas y relativas, ordinarias y acumuladas. Diagramas estadísticos. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos. Medidas de centralización: media, mediana y moda. Significado, estimación y cálculo. Utilización de las propiedades de la media para resolver problemas. Utilización de la media, la mediana y la moda para realizar comparaciones y valoraciones. Utilización de la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados. Tercer Curso (14 años): Necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra. Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales. Atributos y variables discretas y continuas. Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias. Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado. Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones. Análisis de la dispersión: rango y desviación típica. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Actitud crítica ante la información de índole estadística. Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas. Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación.</p>
<p>IV Ciclo: Estadística: Representaciones tabulares y gráficas. Medidas de posición (Moda, Media aritmética, Mediana, Cuartiles, Extremos, Máximo, Mínimo), Media aritmética ponderada. Medidas de variabilidad (Recorrido intercuartílico, Variancia, Desviación, estándar Representación gráfica, Diagrama de cajas. Probabilidad: Eventos (Relaciones entre eventos, Unión e Intersección, Complemento, Eventos mutuamente excluyentes)</p>	<p>Cuarto curso (15 años): Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico. Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas. Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias. Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada.</p> <p>* Para quienes desean seguir estudios de bachillerato, agregar: Representatividad de una distribución por su media y desviación típica o por otras medidas ante la presencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. Valoración de la mejor representatividad en función de la existencia o no de valores atípicos. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.</p>

Nota: Datos obtenidos de (Batanero et al., 2014; M.E.P, 2012)

Es importante indicar que los contenidos, son básicamente los mismos, con pequeñas variaciones que se van atendiendo de acuerdo con el nivel educativo del niño y donde se va profundizando su estudio conforme se avanza hasta el último nivel educativo de primaria.

En el caso de secundaria o la ESO para los casos de Costa Rica y España respectivamente, las diferencias y semejanzas se pueden observar en la Tabla 3.5, donde los sistemas educativos para estos niveles, muestran una diferencia significativa de la organización, la cual está compuesta por dos ciclos en la educación secundaria en Costa Rica (III y IV Ciclo) y dos ciclos en España, los cuales están divididos en cuatro cursos con uno preparativo para la realización del bachillerato. En este sentido, se observan los contenidos abordados en ambos modelos educativos, donde los temas del III ciclo en Costa Rica – los cuales mantienen una correspondencia con los tres primeros cursos de la ESO en España -, presentan una leve diferencia en extensión y profundidad que los del sistema educativo español.

En España, los temas de estadística abarcan conceptos que van desde conocimientos básicos, pasando por la recolección, organización y manipulación de datos, hasta la graficación y utilización de representaciones tabulares, medidas de tendencia central y dispersión. Estos conceptos manejados con una mayor profundidad que en el caso de Costa Rica donde, por ejemplo, la única medida de dispersión utilizada es el recorrido y donde la desviación estándar no se incorpora, dentro del esquema de III ciclo o bien del I ciclo de la ESO, para el caso de España. De igualmente forma, se desprende de la Tabla 3.5, un énfasis en la comprensión y análisis de gráficos y una mayor profundidad al analizar las medidas de tendencia central en los contenidos españoles, que en el caso del sistema educativo costarricense.

Por otro lado, en el IV ciclo (también llamado ciclo diversificado) del sistema costarricense, se observa una equivalencia relativa de los conceptos abordados en estadística, con los cursos 3 y 4 de la ESO.

Por último, en el caso de los conceptos y conocimientos de probabilidad que se incorporan en ambos sistemas educativos, se puede observar, una correspondencia casi directa de los contenidos, los cuales incluyen sucesos y espacios muestrales, cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y la formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.

1.15. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LAS ORIENTACIONES CURRICULARES PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA EN COSTA RICA

Dada la importancia que tienen las normativas gubernamentales en la educación matemática y en particular el área de la *Estadística y Probabilidad*, para nuestros estudios, en este apartado se mencionan las orientaciones curriculares generales de la educación estadística y en particular del uso de los gráficos dentro de los programas de estudio de la educación primaria en Costa Rica.

1.15.1. CONTEXTO DE LAS ORIENTACIONES CURRICULARES

Con la nueva propuesta educativa para la enseñanza de la matemática iniciada en el año 2012, se incluyen aspectos de organización y planeamiento de la lección matemática que son importantes de referenciar. En este sentido, se incorpora la resolución de problemas y su contextualización activa como uno de los ejes fundamentales de la actividad matemática que debe llevarse a cabo en todo el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Adicionalmente, se plantea la necesidad de incorporar el uso de las tecnologías digitales para potenciar el pensamiento matemático y fortalecer ambientes de experimentación y búsqueda de soluciones a situaciones del entorno y contexto del estudiante.

Lo anterior debe ser articulado con una estrategia para promover un ambiente de motivación e interés, donde se cultiven actitudes y creencias positivas hacia la matemática y su aprendizaje. En este sentido, las orientaciones curriculares descritas en (M.E.P, 2012, p. 42), enfatizan en la importancia de acercar la matemática al entorno estudiantil, a través cambios en las metodologías de enseñanza. Para ello propone una organización y planificación de las lecciones en las que se proponen cuatro pasos o momentos centrales(M.E.P, 2012, p. 42):

- *Propuesta de un problema:* se trata de contextualizar los conceptos que se discutirán, generando un desafío y provocando el interés en el tema por aprender.
- *Trabajo estudiantil independiente (no hay intervención directa del docente):* en esta etapa los estudiantes realizan un trabajo colaborativo para apropiarse del problema, formular estrategias de solución y buscar una solución a la situación planteada originalmente.
- *Discusión interactiva y comunicativa:* con la guía del docente, se plantea una discusión, valorando y contrastando los resultados obtenidos en los diferentes

subgrupos formados, lo que permite promover la argumentación y comunicación de resultados.

- *Clausura o cierre*: en esta fase final de la clase, se finaliza el tema o los contenidos abordados, por lo que la intervención del docente es fundamental para llegar a una puesta en común, sobre los conceptos analizados en la clase.

1.15.2. ORIENTACIONES GENERALES SOBRE LAS MATEMÁTICAS

En cuanto a las orientaciones del nuevo currículo sobre las áreas de las matemáticas, es importante indicar que ellas siguen lo propuesto por la NCTM (2014), donde se incorporan los temas de Números, Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra y Estadística y Probabilidad para todos los niveles del sistema educativo costarricense, abordándose con diferente intensidad según el nivel en que se encuentre, como se muestra en la Figura 3.2.

Como se ha indicado, el tema de estadística y probabilidad se incluye desde primaria como una de las novedades más destacadas de la reforma educativa, lo cual también plantea una serie de retos por desarrollar y llevar a cabo. Esta debe ser introducida de manera intuitiva a través del análisis de la información y resolución de problemas y no como un fin en sí mismo.

Esta disciplina permite modelar y representar fenómenos a través de los datos y ellos a su vez, pueden ser comparados con otros, para descubrir comportamientos y tendencias que facilitan tener mejor criterio sobre una problemática particular. Además, hoy en día la variabilidad de los datos puede ser estudiada y modelizada a través de herramientas informáticas de análisis y graficación de datos, que adecuadamente aprendidas, puede hacer del futuro ciudadano, una persona con capacidades de toma de decisiones acertadas.

En este contexto se plantea para el primer ciclo (1°, 2° y 3° grado), una enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad centrada en la recolección de datos, con el propósito de adquirir capacidades básicas en los procesos de recolección, representación y análisis de información. De igual manera, la capacidad para identificar y manejar eventos aleatorios dentro de su contexto estudiantil.

Para el segundo ciclo de la educación primaria (4°, 5° y 6° grado), se profundizan los conceptos y habilidades propuestas para el primer ciclo, integrando los cinco temas que conforman el currículo de matemática, es decir, medidas (obtención de datos), números y relaciones numéricas (creación de tablas) y geometría (gráficos estadísticos).

Es importante indicar que, tanto para el primer ciclo como para el segundo, los cinco temas matemáticos que se incluyen en el currículo, deben de desarrollarse de manera incremental por periodo lectivo (trimestre) y vinculándose uno con otro a través de la contextualización y modelación.

1.15.3. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS Y SUS ORIENTACIONES CURRICULARES

Los gráficos estadísticos se incluyen en el currículo costarricense a partir del segundo grado (segundo año), pues en el primer grado se aborda los conceptos de datos cuantitativos y cualitativos, los cuales se facilitan a través de estrategias de trabajo en equipo y el estudio de ejemplos donde se clasifican los datos en cuantitativos y cualitativos. Dentro de las recomendaciones que se hacen para ir introduciendo la representación de datos, se encuentra el resumir un grupo de datos y plantear interrogantes como el dato más o menos frecuente, entre otras características. De la misma forma, la probabilidad se incorpora al currículo, a través de eventos aleatorios y seguros, sin llegar a una representación gráfica de ellos (M.E.P, 2012).

En el segundo año, si bien no se aborda la elaboración de gráficos, se incluyen para efectos de interpretar información, utilizando dibujos, diagramas, cuadros y gráficos, que representan situaciones vinculadas con el contexto estudiantil. El objetivo principal es que el estudiante haga una lectura simple de la información y se genere la capacidad de extraer información de esas representaciones.

En esta etapa también es importante estudiar la variabilidad de los datos, por lo que se propone sistematizar la información recolectada, en cuadros o tablas donde se representan la totalidad de los individuos que participaron en el estudio. Igualmente, se incorpora para este grado, el concepto de moda como el dato más común o de mayor frecuencia en el conjunto de datos. Por su parte, en el campo de la probabilidad, las recomendaciones se concentran en introducir los conceptos de “situaciones posibles e imposibles” como preámbulo del estudio del concepto “probable”.

Para el tercer año escolar, la propuesta curricular se concentra en la resolución de problemas, donde se espera que el estudiante adquiera la capacidad de formular interrogantes y proponer estrategias para la recolección y el resumen de los datos. Se hace énfasis en situaciones puntuales que el docente puede presentar a los estudiantes para que realicen el estudio y organicen los datos en cuadros de frecuencia absoluta o bien en gráficos barras. Estas representaciones gráficas incluyen un eje coordenado, lo

que se integra con otros temas de Números y Relaciones y Álgebra, también vistos en el periodo lectivo, por lo que se sugiere que los gráficos conserven la escala utilizada e inicien de cero en el eje. En el campo de la probabilidad, se inicia con los eventos igualmente probables de forma intuitiva, pues será hasta en el Segundo Ciclo que se fortalezcan estos conceptos.

En cuanto al contexto en que se desarrolla la resolución de problemas y la representación gráfica, se propone que estos sean del contexto escolar, familiar o comunal, de manera que el estudiante se interese y motive más por la situación.

En el aspecto de la evaluación propuesta para las representaciones gráficas en el Primer Ciclo de la educación en Costa Rica, el M.E.P (2012) considera que el énfasis de la evaluación debe estar orientado a la identificación de variables cuantitativas y cualitativas y al análisis e interpretación contextualizada de los datos, principalmente representados en cuadros de frecuencia o gráficos de barras.

Para el Segundo Ciclo, las orientaciones curriculares proponen profundizar los conceptos y habilidades desarrolladas en el Primer Ciclo, lo que plantea métodos y procedimientos más sofisticados en la recolección de datos (conteo y medición) y el uso de frecuencias absolutas y relativas en cuadros y gráficos.

En el cuarto año, el M.E.P (2012), establece habilidades específicas que se deben alcanzar para interpretar información que ha sido resumida en diagramas de puntos, cuadros y gráficos. En este sentido, también se espera que el estudiante sea capaz de identificar posibles errores en los datos recolectados. Adicionalmente, se incorporan las medidas de tendencia central como la media aritmética, la moda, el máximo y el mínimo, así como el recorrido de los datos como medida de dispersión. Además, en este año se hace explícita la propuesta para incorporar la tecnología como herramienta de apoyo en el cálculo y las representaciones gráficas con hojas de cálculo.

En el quinto año se profundiza en los conceptos de población y muestra, así como también, se reconoce la importancia que tiene el muestreo en el análisis de datos. En este mismo sentido, se hace énfasis en los mecanismos para recolección de datos por medio de encuestas, la elaboración de cuadros y gráficos con frecuencias absolutas y el cálculo de medidas de posición y de variabilidad.

En este nivel se incluyen por primera vez los gráficos circulares, aunque se recomienda su uso sólo para que el estudiante desarrolle la capacidad de una lectura crítica de la información y no para su construcción manual (M.E.P, 2012, p. 267).

Para el sexto y último año de la educación primaria, las orientaciones curriculares en el uso de los gráficos estadísticos contemplan el uso de frecuencias porcentuales para evitar errores en la comparación entre dos o más grupos de datos. De igual forma, se propone la incorporación de diagramas lineales para visualizar tendencias en series de tiempo. Por último, se hace énfasis en el planeamiento y resolución de problemas, poniendo en práctica las habilidades en la recolección, análisis y representación de datos de su contexto, evidenciando la relación estrecha entre la Estadística, Relaciones y Álgebra (plano cartesiano) y las Ciencias Sociales.

Con respecto al contexto en el que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje de los gráficos en el Segundo Ciclo de la educación primaria en Costa Rica, es importante indicar que ellos son recomendados para tratar temas de carácter social y del contexto cercano al estudiante, de manera que también sirvan como medio para abordar los ejes transversales que se desarrollan en la educación costarricense.

En cuanto a los mecanismos de evaluación para el Segundo Ciclo, la propuesta del M.E.P (2012), es establecer estrategias para cuantificar las diferentes actividades que involucran las técnicas de recolección de datos, así como su ordenamiento y representación en la forma más adecuada. Sin embargo, se debe tener en cuenta que lo más importante es evaluar la forma en que los estudiantes interpretan la información que se comunica en los gráficos propuestos, así como su capacidad para comunicar sus ideas en función de la problemática estudiada.

En términos generales, la propuesta curricular del uso de los gráficos en la educación primaria, consiste en llevar al estudiante de las nociones básicas al desarrollo de habilidades en la recolección, resumen y análisis de datos, a través de actividades vinculadas con realidades cercanas a las vivencias de los estudiantes.

Aunque la construcción de gráficos es abordada con diagramas de puntos en cuarto año y más formalmente a partir del quinto grado, se enfatiza que ellos son únicamente utilizados para suministrar información de la forma más simple, cuyo objetivo es que los estudiantes tengan una mejor lectura y comprensión de la información. Adicionalmente, se hacen recomendaciones para que los cuadros y gráficos utilizados, lleven títulos y etiquetas suficientemente explícitas que permita una fácil comprensión, razón por la cual también se sugiere evitar los gráficos tridimensionales.

1.16. CONCLUSIONES

Como se observó en las diferentes representaciones de los sistemas educativos de Costa Rica y España, la educación estadística sigue una cierta línea de similitud, donde la educación secundaria continúa el aprendizaje de los mismos conceptos vistos en primaria, pero con un grado mayor de intensidad y profundidad; se incluyen conceptos diversos como: tipos de frecuencias, agrupación de datos e incremento en el estudio de medias de tendencia central. Además, se incluye explícitamente la adquisición de una actitud crítica y de análisis de datos, para el uso e interpretación de la información.

De igual forma, ambos sistemas educativos incluyen el azar y la probabilidad como temas relevantes desde la primaria hasta la secundaria, donde la educación secundaria continúa el estudio de la probabilidad, de un modo más formal para llegar al estudio de experimentos compuestos sencillos donde se recomienda el uso del diagrama en árbol para facilitar el cálculo e interpretación.

Es importante indicar que ambos sistemas educativos proponen una serie de ejes transversales que se abordan durante todos los procesos educativos desde la primaria hasta la conclusión de la secundaria, como lo son: la resolución de problemas, el uso de la tecnología y una dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas.

En cuanto a las recomendaciones curriculares del uso de los gráficos propuestas por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica en la educación primaria, es importante indicar que ellas se resumen en el aprendizaje de nociones estadísticas básicas que se abordan de manera incremental en profundidad y extensión, orientadas a la recolección, organización y el análisis de datos a través de actividades contextualizadas a través de cuadros y gráficos estadísticos cuyo propósito es comunicar la información de manera fácil y sencilla.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE GRÁFICOS EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN COSTA RICA

1.17. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se detalla la investigación realizada sobre el análisis de los gráficos en los libros de texto utilizados con más frecuencia en la educación primaria en Costa Rica.

Se comienza describiendo la muestra de textos utilizada y la metodología. Posteriormente, se definen los aspectos que son estudiados para describir los gráficos estadísticos en los editoriales elegidos, contemplando para ello las variables independientes: editorial y año escolar del libro. Con ellas se relacionan las variables dependientes de tipo, nivel de lectura y complejidad semiótica del gráfico, así como también, tipo de tarea, propósito y contexto en el cual se usan los gráficos dentro de los libros de texto.

Realizado el estudio de frecuencias y relaciones entre las variables, se detallan los principales resultados, comparándolas con las orientaciones curriculares en Costa Rica, España y Chile y otros estudios realizados en este campo, como el descrito en (Díaz-Levicoy, 2014).

Por último, se mencionan las conclusiones generales del estudio, en las que se resaltan coincidencias con resultados de otros estudios y seguimiento en algunos aspectos, a las orientaciones ministeriales de parte de los libros de texto.

1.18. MUESTRA DE TEXTOS UTILIZADOS

Para este estudio se han seleccionado las dos series de libros de texto más utilizadas en la educación primaria de Costa Rica; Asociación Libros para Todos del Grupo Nación y Editorial Santillana. Esta selección corresponde más al interés por profundizar en algunas características del uso de los gráficos estadísticos en los libros de texto dentro de la educación primaria en Costa Rica, que a establecer relaciones entre ellos, por lo que la selección de la muestra es considerada dirigida o no probabilística (Sampieri, Collado y Baptista, 2010), del tipo opinático, referido al conocimiento que

tiene el investigador de la situación o contexto en el que se aplican los libros de texto (Andreú, 2002).

Los libros de la serie “Asociación Libros para Todos” son más frecuentemente utilizados en la educación pública rural, pues en su mayoría son donados a los centros educativos de zonas marginales, no así, los libros de la editorial Santillana, que están muy difundidos en las zonas urbanas y la educación privada. Las series de libros corresponden a las ediciones más actualizadas y atienden a las nuevas políticas curriculares de la reforma matemática implementada por el Ministerio de Educación Pública en todo el país, a partir del año 2012. Estas se listan a continuación, junto con un código que usaremos para referirnos a ellos:

Serie 1: Asociación Libros para Todos (GN)

- A1. Asociación Libros para Todos. (2017). *Matemática 1.* (Y. Calderón Quesada, Ed.) (5th ed.). San José, Costa Rica: GN Impresos.
- A2. Asociación Libros para Todos. (2017). *Matemática 2.* (Y. Calderón Quesada, Ed.) (5th ed.). San José, Costa Rica: GN Impresos.
- A3. Asociación Libros para Todos. (2017). *Matemática 3.* (Y. Calderón Quesada, Ed.) (5th ed.). San José, Costa Rica: GN Impresos.
- A4. Asociación Libros para Todos. (2017). *Matemática 4.* (Y. Calderón Quesada, Ed.) (5th ed.). San José, Costa Rica: GN Impresos.
- A5. Asociación Libros para Todos. (2017). *Matemática 5.* (Y. Calderón Quesada, Ed.) (5th ed.). San José, Costa Rica: GN Impresos.
- A6. Asociación Libros para Todos. (2017). *Matemática 6.* (Y. Calderón Quesada, Ed.) (5th ed.). San José, Costa Rica: GN Impresos.

Serie 2: Editorial Santillana Serie Casa del Saber (Santillana)

- S1. Santillana. (2016). *Matemática 1.* (Editorial Santillana, Ed.) (1st ed.). San José, Costa Rica.
- S2. Santillana. (2016). *Matemática 2.* (Editorial Santillana, Ed.) (1st ed.). San José, Costa Rica.
- S3. Santillana. (2016). *Matemática 3.* (Editorial Santillana, Ed.) (1st ed.). San José, Costa Rica.
- S4. Santillana. (2016). *Matemática 4.* (Editorial Santillana, Ed.) (1st ed.). San José, Costa Rica.
- S5. Santillana. (2016). *Matemática 5.* (Editorial Santillana, Ed.) (1st ed.). San José, Costa Rica.
- S6. Santillana. (2016). *Matemática 6.* (Editorial Santillana, Ed.) (1st ed.). San José, Costa Rica.

1.19. VARIABLES ANALIZADAS Y TIPO DE ANÁLISIS

Esta investigación responde a un estudio cualitativo, exploratorio y descriptivo, pues como se menciona en Sampieri et al. (2010), el tema que se aborda no ha sido estudiado

en el contexto de la educación costarricense y además, se concentra en la descripción de las características que plantea la incorporación de los gráficos estadísticos utilizados en los libros de texto en la educación primaria de Costa Rica.

Para este estudio, se ha seguido la metodología cualitativa de análisis de contenido, la cual, Hoslti (1969, p. 5) la define como, “una técnica de investigación para formular inferencias identificando de manera sistemática y objetiva ciertas características específicas dentro de un texto”. Posteriormente, Krippendorff (1990) incorpora la importancia de establecer relaciones con el contexto donde se aplica el análisis del contenido, definiéndolo como “una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproductibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto” (p. 28). En este sentido, el análisis de contenido se lleva a cabo a través de un proceso mediante el cual se realizan las siguientes fases (Andreú, 2002):

Determinar el objeto o tema de análisis: se refiere a tener claridad en los objetivos e hipótesis del problema a investigar. Así mismo es importante tener los referentes teóricos de los objetos o temas por analizar, de manera que haya objetividad para realizar el estudio. En nuestro caso, se refiere al análisis de los gráficos estadísticos empleados en los libros de texto de educación primaria en el contexto costarricense. Para realizar un estudio más preciso, se define la unidad de análisis, siguiendo a Krippendorff (1990), quien plantea tres tipos de unidades de análisis: unidades de muestreo, unidades de registro y unidades de contexto. Las unidades de muestreo se refieren los elementos del universo que serán observados. En nuestro caso, la unidad de muestreo, corresponde a la selección de las dos series de libros mencionadas en el apartado anterior.

Las unidades de registro, son aquellas que se consideran parte de la unidad de muestreo en donde es posible analizar la información de forma aislada como segmentos específicos de contenido. En nuestro caso, la unidad de registro la constituye aquella actividad que incorporan gráficos estadísticos para su enseñanza. Por último, la unidad de contexto, se entiende como la parte de la unidad de muestreo que tiene que ser examinada para poder caracterizar una unidad de registro. En este sentido, la unidad de contexto, se refiere a la sección de cada libro de texto relacionada con el tema de “Estadística y Probabilidad” y del cual se estudiarán a las actividades que incorporan gráficos estadísticos.

Determinar las reglas de codificación: este proceso consiste en definir las reglas y los códigos a utilizar para trabajar con los datos brutos. En este estudio, se eligen y

codifican las unidades de análisis que serán tomadas en cuenta para investigar las características asociadas a los referentes teóricos descritos en los capítulos 1 y 2. Es decir, aquellas que cuentan con la presencia, frecuencia, intensidad, etc., de las variables de estudio.

Determinar el sistema de categorías: se procede a identificar las categorías en las que se agrupan las características de estudio presentes en las unidades de registro. En este caso se parte de los referentes teóricos sobre tipo de gráfico, complejidad semiótica, tareas propuestas en los libros de texto, propósitos y contexto, lo cual permite tener una categorización de aspectos a evaluar *a priori* y que ya se han sometido a validación por diversos estudios. Cada una de estas variables se describe con mayor detalle en la sección posterior.

Comprobar la fiabilidad del sistema de codificación-categorización: consiste en garantizar que los datos analizados hayan sido obtenidos de manera científica, independiente del problema, instrumento o persona que los registra. La fiabilidad plantea la constancia de los datos independientemente de quien los registra, por lo que se propone que dos o más personas puedan codificar y analizar las unidades de registro para encontrar las similitudes y diferencias en el registro de datos. Si los registros son similares en su mayoría de casos, la fiabilidad del proceso es alto, de lo contrario, la fiabilidad tiende a ser nula (Andreú, 2002).

Inferencias: esta es la fase del proceso en el que se extraen las conclusiones o inferencias del análisis realizado en las unidades de contexto. Consiste en extraer todas aquellas inferencias contenidas de manera explícita o implícita en el mismo texto analizado.

1.19.1. VARIABLES INDEPENDIENTES

Para el estudio se han establecido, al igual que en el trabajo de Díaz-Levicoy (2014) dos variables independientes:

Editorial: En esta variable se registran dos posibles valores: (1) Asociación Libros para Todos (GN) y (2) Editorial Santillana (Santillana), que corresponden a las editoriales de los libros de texto que se utilizarán en el estudio en sus ediciones más actualizadas al momento del estudio.

Nivel educativo: Esta variable indica el nivel educativo al cual pertenece el libro de texto en el cual aparece el gráfico estadístico que se analiza. En este estudio, se

analizarán los libros de texto de los niveles educativos de primaria, comprendidos del primero al sexto (1º al 6º) grado o año escolar.

1.19.2. VARIABLES DEPENDIENTES

Son aquellas variables que queremos determinar y analizar en función de las variables independientes anteriormente descritas: Además del tipo de gráfico, nivel de lectura, nivel de complejidad semiótica y actividad requerida del niño, consideradas por Díaz-Levicoy (2014) hemos añadido el contexto y propósito del gráfico. A continuación, se describen estas variables:

Tipo de gráfico: Esta variable se refiere al tipo de gráfico encontrado en la unidad de contexto, el cual se puede clasificar según los aportes de investigaciones (Arteaga, Batanero, Cañas y Contreras, 2011; Díaz-Levicoy, 2014; Friel, Curcio y Bright, 2001), por lo que para efectos de la investigación se establecen *a priori*, los siguientes tipos: gráfico de barras, pictograma, gráfico de sectores, histograma, gráfico de líneas, gráfico de líneas acumulado, gráfico de puntos, gráfico de dispersión y pirámide de población, los cuáles serán depurados conforme se analizan los textos.

Nivel de lectura: Esta variable corresponde a la clasificación descrita por autores como Curcio (1987), Friel et al. (2001), Shaughnessy, Garfield y Greer (1996) y Wainer (1992) donde se consideran cuatro niveles de lectura en un gráfico estadístico: N 1: leer los datos; N 2: leer dentro de los datos; N 3: leer más allá de los datos y N 4: leer detrás de los datos.

Aunque se ha mencionado que los gráficos estadísticos pueden ser incorporados desde la educación preescolar, dicha introducción al currículo costarricense, se realiza de manera paulatina y siguiendo el proceso de desarrollo cognitivo de los estudiantes, por lo que para este efecto se estima que el N4 podría no alcanzarse en su totalidad en la educación primaria.

Nivel de complejidad semiótica: Esta variable se clasifica según los niveles establecidos en Batanero, Arteaga y Ruiz (2009) y explicados en el Capítulo 2 de este trabajo, es decir:

N 1. Representa solo sus resultados individuales:

N 2. Representación de un conjunto de datos uno a uno:

N 3. Producción de gráficos separados para cada distribución:

N 4. Representación de dos distribuciones sobre un mismo gráfico:

Cada una de las unidades de registro se analiza y se clasifica según estos niveles expuestos en Batanero, Arteaga y Ruiz (2009).

Tipo de tarea requerida. Esta variable se evaluará considerando la actividad propuesta en la unidad de registro que será sujeta de análisis. Estas pueden ser del tipo: leer, calcular, construir, comparar, ejemplo, traducir, pasar a tabla, completar, describir variable o inventar problema. Esta clasificación ha sido establecida siguiendo algunas recomendaciones de los estudios de Castellanos (2013) y Díaz-Levicoy (2014).

Propósito del gráfico. Según Kosslyn (1985), el gráfico es un recurso que se utiliza para diferentes fines:

- *P1. Propósito de análisis:* En este tipo se consideran los gráficos cuyo contexto represente una finalidad en el uso del gráfico para descubrir o identificar características del gráfico.
- *P2. Propósito de comunicación:* Los gráficos clasificados en este tipo son aquellos utilizados con el fin de transmitir información sobre números y relaciones entre ellos.
- *P3. Propósito de construcción:* Adicionalmente a lo establecido en Kosslyn, (1985), se plantea el propósito constructivo, pues desde el punto de vista de la enseñanza tradicional, el interés está centrado más en la construcción del gráfico que en el análisis o la comunicación de información, por lo que para esta investigación se considerará este tercer tipo de propósito.

Contexto en el que se desarrolla el gráfico. Esta variable responde a la clasificación establecida en los estudios PISA y que se describe en OECD (2016), donde se sugiere que el rendimiento matemático (i.e. estadístico) de un individuo puede ser influenciada por el contexto en el que desarrolle su situación problema. En este sentido la relación es aplicada al campo de los gráficos estadísticos, donde el contexto en el cual se circunscriban la recolección, organización y representación de los datos, puede afectar la comprensión del mismo. Esta clasificación contempla los siguientes contextos:

- *C1. Personal:* corresponden a situaciones problema en el ámbito de actividades personales, de su familia o grupo de iguales. Pueden involucrar actividades como compras, juegos, salud personal, etc.
- *C2. Social:* corresponden a los problemas del ámbito social tales como: sistemas de votación, transporte público, gobierno, políticas públicas, demografía, publicidad, estadísticas nacionales y economía.

- *C3. Ocupacional o escolar:* consisten en aquellas situaciones problema centradas en el contexto laboral (escolar) que se encuentren cercanos a la madurez del estudiante.
- *C4. Científico:* este contexto se relaciona con problemáticas del ámbito de la ciencia y la tecnología, e incluye aspectos como: el clima, ecología, medicina, ciencia espacial, genética, medición y el mundo de las matemáticas en sí.

Las variables descritas anteriormente se registrarán en un formato digital que se utilizará para realizar un análisis descriptivo a través del software de análisis estadístico SPSS y cuyos resultados se exponen a continuación.

1.20. RESULTADOS

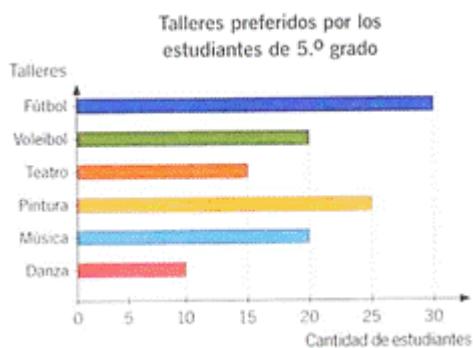
En esta sección se muestran los principales resultados obtenidos de los datos, al analizar las unidades de registro seleccionadas. Se organizan en varios apartados: los tipos de gráficos considerados, nivel de lectura, complejidad semiótica, tipo de tarea, propósitos y contextos de los gráficos.

1.20.1. TIPOS DE GRÁFICO CONSIDERADOS

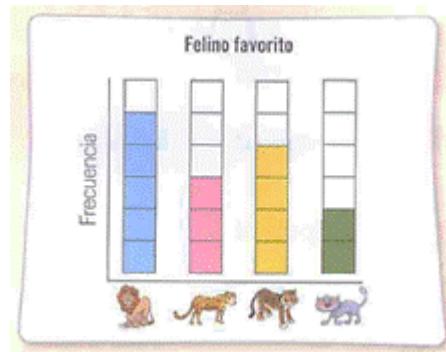
En este apartado se establecen *a priori* los tipos de gráficos de acuerdo con las investigaciones previas en temas afines con este estudio. A partir de esta primera clasificación, se analizan los gráficos encontrados en los libros de texto y se refina la clasificación para obtener los siguientes tipos:

Gráficos de barras: son aquellas representaciones de barras, verticales u horizontales y de un mismo ancho en las que aparecen datos cualitativos o cuantitativos discretos. Están dispuestos en el primer cuadrante de un sistema cartesiano, en el cual se registra el valor numérico (absoluto o relativo) o bien las frecuencias con que aparecen las variables observadas. La altura de la barra (regularmente registrada en el eje Y) se establece proporcionalmente de acuerdo con la frecuencia relativa o absoluta o el valor de las variables en cuestión y en las etiquetas de las variables pueden aparecer nombre o imágenes que representan la categoría en observación, como se observa en la Figura 4.1.

Dentro de los libros de texto analizados también se encuentran variantes del tipo de gráficos de barras simples, como lo son los gráficos de barras dobles o adosadas. Estas se incluyen dentro de este mismo tipo, aunque su diferenciación se establece en el análisis de la complejidad semiótica del gráfico.



(a)



(b)

Figura 4.1. Gráficos de barras, tomado de (S2, p. 231) y (S1, p. 313)

Gráfico de líneas: es el gráfico en el que por lo general se utilizan puntos para representar la correspondencia entre la altura y la frecuencia de una variable en una serie de datos aislados y que se unen por medio de una línea (Arteaga, 2011). Un ejemplo de este tipo se puede observar en la Figura 4.2. Igual que en el caso anterior, este tipo de gráfico incluye gráficos de líneas múltiples que representan el comportamiento de dos o más variables a la vez, situación que será contemplada para el análisis de su complejidad semiótica.

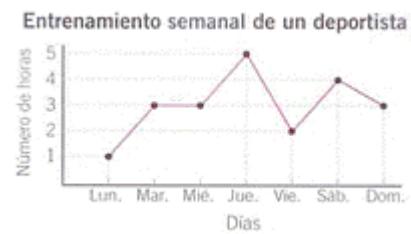


Figura 4.2. Ejemplo de gráfico de líneas 4º año, tomado de (S4, p. 278)

Pictograma: es un gráfico que utiliza íconos o imágenes del mismo tamaño, ordenados (horizontal o verticalmente) formando una especie de gráfico de barras, en las que las figuras alusivas al dato, representan una cantidad determinada de unidades (Quintana, 1983). Un ejemplo del uso de pictogramas, lo encontramos en la Figura 4.4, donde cada imagen representa una caja equivalente a 3 kilogramos de cartón recolectados por la sección (grupo) de segundo grado respectivo.

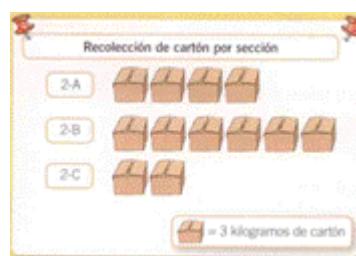


Figura 4.4. Ejemplo de pictograma 2º año, tomado de (S2, p. 182)

Diagramas de puntos: estos se pueden considerar un tipo particular de pictograma en los que los íconos o imágenes utilizadas para las frecuencias absolutas, corresponden a un punto, el cual se ubica sobre la columna (vertical u horizontal) tantas veces como lo indique la frecuencia de dicha variable. Este se puede ver en la Figura 4.5



Figura 4.5. Ejemplo de diagramas de puntos utilizado en 4°, tomado de (A4, p. 68)

Gráfico de sectores o circulares: esta es una representación utilizada comúnmente para destacar las partes en que se divide un todo. Cada una de las partes en que se divide el todo, representa un sector circular de área, proporcional a la importancia relativa de la variable en ese sector (Hernández, 2009). Son utilizados principalmente con variables cualitativas en las que los datos tienen frecuencias altas y se desea destacar la participación relativa de ellas. Por el contrario, se recomienda no usar cuando las variables cualitativas son numerosas o bien son del tipo numéricas.

En el caso del currículo costarricense, este tipo de gráficos se recomienda en II Ciclo a partir del 5° y 6° grado de la educación primaria. En la Figura 4.6, se muestra un ejemplo del tipo de gráfico en mención, donde se pide al estudiante identificar las proporciones que mejor responden a las preguntas sobre la práctica del deporte en los estudiantes del grupo.



Figura 4.6. Ejemplo de gráfico circular 5° año, tomado de (A5, p. 152)

Gráficos de dispersión: corresponde a una representación gráfica en la que se representan pequeñas cantidades de datos. En el eje X se ubican las categorías (variables) y en el eje Y un punto a la altura proporcional a la frecuencia absoluta de su valor de incidencia que presenta la variable dentro del conjunto de datos. Para el análisis

de resultados en este estudio, se considera un tipo particular de diagrama de puntos. En la Figura 4.7 se muestra un ejemplo en el que se representa la realización del lanzamiento de una moneda para un número de veces determinado y el registro del suceso equiprobables (escudo o corona).

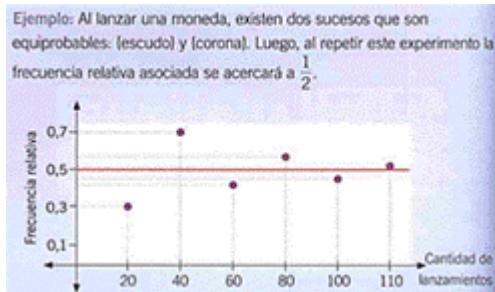


Figura 4.7. Ejemplo de gráfico de puntos 6º año, tomado de (S6, p. 276)

En la Tabla 4.1 se muestran las frecuencias (absolutas y relativas) de los tipos de gráficos que aparecen en las series de libros de texto analizados. En ella se observa cómo del total de 167 gráficos encontrados en la serie de libros del Grupo Nación (GN), el 55,4% corresponde a gráficos de barras y de manera muy similar, el 56,8% al editorial Santillana. De igual manera se puede observar que el segundo tipo de gráfico más utilizado en estos editoriales, corresponde a los pictogramas o diagramas de puntos, los cuales representan el 16,1% y 23,4% en GN y Santillana, respectivamente. En tercer lugar, se encuentran los gráficos de sectores o circulares, los que representan un 12,5% y un 7,2% en GN y Santillana, respectivamente. De manera general, también se puede observar que los tipos de gráficos menos utilizados en los libros de texto, corresponden a los tipos de líneas y barras dobles.

Tabla 4.1. *Frecuencia y porcentaje del tipo de gráficos por editorial analizado.*

Tipo de gráfico	Editorial					
	GN		Santillana		Total	
	N	%	N	%	N	%
Barras	31	55,4	63	56,8	94	56,3
Líneas	6	10,7	6	5,4	12	7,2
Pictogramas			17	15,3	17	10,2
Sectores o circulares	7	12,5	8	7,2	15	9,0
Diagrama de puntos	9	16,1	9	8,1	18	10,8
Líneas múltiples	2	3,6	1	0,9	3	1,8
Barras dobles	1	1,8	7	6,3	8	4,8
Total	56	100,0	111	100,0	167	100,0

Los datos anteriores, también concuerdan con las investigaciones realizadas en Díaz-Levicoy (2014), donde el predominio del uso de gráficos de barras en los textos

españoles representa el 46% de las actividades. No es el caso del segundo lugar, donde el 20% corresponde al uso de gráficos lineales, en contraposición de los utilizados en los libros costarricenses, donde el 21% corresponde a los pictogramas o diagramas de puntos. En el tercer lugar, nuevamente los contextos español y costarricense tienen similitud, donde el porcentaje de uso de los gráficos en los libros de texto corresponde a los gráficos de sectores, con 12,1% y 9% para ambos contextos, respectivamente.

Es importante indicar que tanto las orientaciones curriculares españolas (MECD, 2014), como las costarricenses (M.E.P, 2012), citan el uso de los gráficos de barras, pictogramas o diagramas de puntos y los gráficos de sectores, como las principales herramientas de representación gráfica en la educación primaria. Adicionalmente, el currículo básico español, incluye polígonos de frecuencias y la pirámide poblacional; recursos que no son utilizados en el contexto costarricense. En el caso de Chile, el currículo escolar de primaria (MINEDUC, 2012), incluye los gráficos de barras, pictogramas, líneas, sectores y diagramas de tallo y hojas. Estos últimos, no son incluidos en España y Costa Rica.

En cuanto a la distribución del tipo de gráfico según el año escolar, las series de libros analizadas muestran un comportamiento ascendente en la cantidad de tipos de gráficos utilizados conforme se avanza en el año escolar. En la Tabla 4.2, se muestra como en primer año, los gráficos utilizados en las actividades corresponden exclusivamente al tipo de gráfico de barras. En segundo y tercer año, se utilizan además los pictogramas. En cuarto año se agregan los gráficos de líneas; en quinto año se suman los gráficos circulares y en sexto año, se incluyen gráficos de barras dobles, líneas acumulado, puntos y líneas múltiples.

Se aprecia en la Tabla 4.2, como predomina el uso de gráficos de barras (y sus variantes) en los diferentes niveles educativos de primaria y cómo a partir del quinto año, se incluye el tipo de gráficos circular, finalizando en sexto año con la inclusión de otros tipos de gráficos como barras dobles, líneas múltiples, puntos y líneas acumulados.

Además, solo el 4,7% de las actividades analizadas se ubican en el primer año, en contraste con los niveles de segundo y cuarto año, donde se registran la mayor cantidad, es decir, el 26,3% y 19,7% respectivamente. De manera similar, los niveles de tercero, quinto y sexto, mantienen un registro equivalente de actividades con gráficos estadísticos, promediando cada uno, cerca del 16,3% de las actividades. Estos resultados son distintos a los obtenidos en Díaz-Levico (2014), donde la mayor cantidad de

actividades que involucran gráficos estadísticos se concentran a partir del tercer curso, promediando cerca del 22% de las actividades evaluadas. Adicionalmente, del tercer a quinto curso se incluyen los gráficos de línea como el segundo tipo de gráfico más frecuente, mientras que en los libros costarricenses esta representación gráfica se utiliza muy poco.

De manera similar al estudio español, en los niveles iniciales de primero, segundo y tercer curso, los gráficos predominantes corresponden a los de barras, dejando para los niveles superiores del cuarto curso en adelante, la introducción de otras variedades de gráficos. Un caso particular sucede con el gráfico de sectores, el cual es introducido por primera vez en los libros de texto costarricenses de quinto año, mientras que en el contexto español, se introducen en el cuarto curso.

Según el estudio realizado por Díaz-Levicoy (2014), los libros de texto analizados muestran la incorporación de gráficos de barras, líneas, pictogramas, sectores y otros, a partir del cuarto curso, mientras que en el caso del estudio de los gráficos en los libros de texto en Costa Rica, esta variedad de representaciones gráficas solo es encontrada en el sexto año.

Tabla 4.2. Distribución de gráficos por año escolar

Tipo de gráfico	Año						Total							
	1°		2°		3°			N	%					
Barras	8	100,0	30	68,2	25	96,2	10	30,3	20	71,4	1	3,6	94	56,3
Líneas							5	15,2			7	25,0	12	7,2
Pictogramas			14	31,8	1	3,8	2	6,1					17	10,2
Sectores o circulares									8	28,6	7	25,0	15	9,0
Diagramas de puntos							16	48,5	0	0	2	7,1	18	10,8
Líneas múltiples											3	10,7	3	1,8
Barras dobles											8	28,6	8	4,8
Total	8	100	44	100	26	100	33	100	28	100	28	100	167	100

1.20.2. NIVEL DE LECTURA DE LOS GRÁFICOS

Como se ha descrito anteriormente, el estudio de este aspecto se fundamenta en la clasificación realizada por Curcio (1987) y Shaughnessy, Garfield y Greer (1996), asumido por Friel, Curcio y Bright (2001) donde se consideran cuatro niveles de lectura en un gráfico estadístico:

N1. Leer los datos: Este nivel se refiere a la lectura literal de los datos dentro de un gráfico. Por lo general la actividad se concentra en responder a consultas sobre frecuencia o valor de una variable, sin llegar a establecer otras conexiones ni a realizar otros procedimientos con los datos. Un ejemplo de este tipo de lectura se muestra en la

Figura 4.8, donde se pide colorear un bloque del gráfico de acuerdo con la cantidad de objetos (previamente clasificados) que se muestran en una imagen. Se lee el dato y se colorea el bloque de acuerdo con la cantidad que representa.



Figura 4.8. Ejemplo de nivel de lectura “leer los datos”, tomado de (S1, p. 298)

N2. Leer dentro de los datos: este nivel se presenta cuando para resolver una actividad, se realizan acciones más allá de la simple lectura de datos. Involucra identificar relaciones entre los datos explícitamente representadas, como las que se establecen en la Figura 4.9, donde se pide comparar datos entre las preferencias de los juegos que realizan los niños de la escuela. El estudiante debe analizar cuál fue el juego de mayor escogencia, el menos elegido o igualmente elegido y además debe realizar el conteo total de los datos.

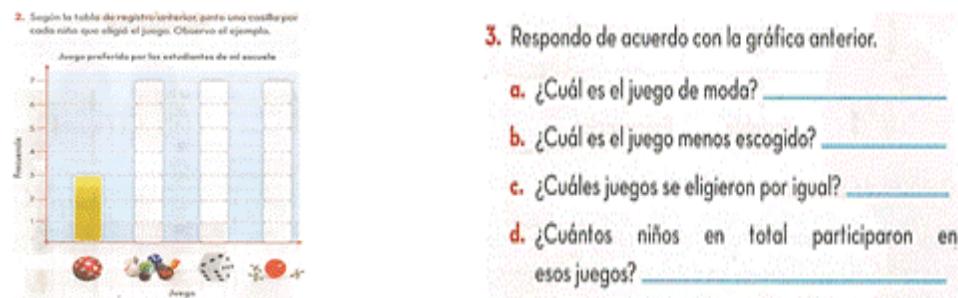


Figura 4.9. Ejemplo de lectura de gráfico de nivel 2 en 2º año, tomado de (A2, p. 179)

N3. Leer más allá de los datos: Este nivel de lectura se logra observar en actividades donde el gráfico representa datos de los cuales se pueden deducir u obtener otras conclusiones válidas no expresadas explícitamente dentro del gráfico. Por ejemplo, en la Figura 4.10 se observa cómo se plantea una situación hipotética, que parte del gusto de Tatiana por el clima lluvioso. En este caso se describe una situación de contexto para que el estudiante analice si a Tatiana le conviene visitar a Elisa, según los datos proporcionados por el gráfico. Igualmente, en la pregunta c) de la actividad propuesta

en este ejemplo, se plantea una modificación a la estructura de los datos representados en el gráfico, para que el estudiante infiera nueva información a partir de este cambio.

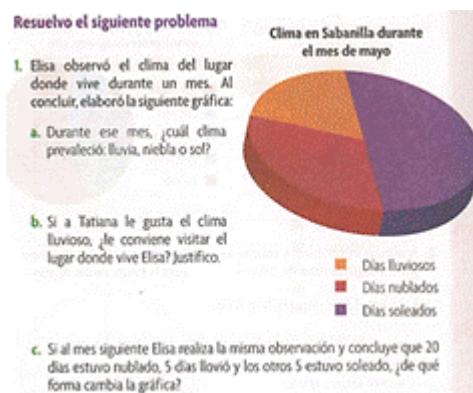
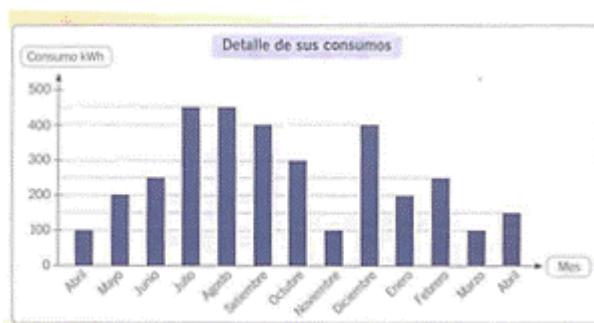


Figura 4.10. Ejemplo de N3 en un gráfico de 5º año tomado de (A5, p. 151)

N4. Leer detrás de los datos. Como se mencionó en el Capítulo 2, este nivel de lectura consiste en realizar una valoración crítica con respecto al método de recolección de datos, validez y fiabilidad, que permita justificar la confiabilidad de las conclusiones realizadas. Si bien este nivel de lectura no es común en la educación primaria, se considera el ejemplo descrito en la Figura 4.11, como una variante importante para este caso. En la ella se muestra el nivel de detalle de una cuenta de consumo eléctrico y una serie de preguntas al estudiante para que analice la idoneidad y validez de este tipo de representación gráfica.



Reflexione y comente:

- ¿Por qué cree que se incluye una gráfica de barras para representar la información en una cuenta?
- ¿Qué otro tipo de información nos entrega un recibo de electricidad?
- ¿Por qué cree que es importante que las personas tengan acceso a esta información? Reflexione con sus compañeros y compañeras.

Figura 4.11. Ejemplo de N4 en un gráfico de 4º año tomado de (S4, p. 299)

Del análisis descriptivo realizado en la categoría de nivel de lectura, se obtuvieron los datos que se muestran en la Tabla 4.3. En ella se observa que el nivel de lectura predominante en ambas editoriales corresponde al nivel 2 de “Leer dentro de los datos”, representando el 67,7% de las frecuencias de lectura realizadas. El siguiente nivel de lectura en que se clasificaron los gráficos registrados correspondió al nivel 1 de “Leer los datos”, con un 15,6%, muy similar al nivel 3 de “leer más allá de los datos”, con un 14,4% del total analizado. Este fenómeno, se presenta por cuanto en el editorial GN, el

segundo nivel de lectura más frecuente es el nivel 3, con un 14,3%, mientras en Santillana, es el nivel 1 que representa la segunda frecuencia más numerosa con un 19,8%. En general ambos editoriales, evidencian un interés en promover una lectura crítica de los datos presentados de un gráfico, al proponer actividades entre los niveles de lectura 1, 2 y 3 principalmente.

En el estudio de libros de texto españoles realizado por Díaz-Levicoy (2014), también resulta más frecuente el tipo de lectura *N2* de “leer dentro de los datos”, sin embargo, el porcentaje acumulado en los niveles *N3* y *N4* solo representa el 6,1% de las actividades analizadas, en comparación con lo reportado en este estudio, donde estos niveles representan un porcentaje acumulado del 16,8%, como se muestra en la Tabla 4.3. En cuanto al nivel de lectura por año escolar encontrado en el análisis de las unidades de registro, la Tabla 4.4 muestra como el nivel de lectura se va incrementando conforme se avanza en el nivel escolar. Se inicia con niveles 1 y 2 en primer año y se incorporan el nivel 3 de “leer más allá de los datos” desde el 2º al 6º año. En el sexto año, se suman actividades de nivel de lectura correspondientes al nivel 4, como se muestra en la Tabla 4.4. Cabe indicar que la única actividad clasificada de nivel 4 en cuarto año, corresponde a la descrita en la Figura 4.11.

Tabla 4.3. *Nivel de lectura y frecuencia en los libros de texto analizados*

Nivel de lectura	Editorial					
	GN		Santillana		Total	
	N	%	N	%	N	%
N1	4	7,1	22	19,8	26	15,6
N2	42	75,0	71	64,0	113	67,7
N3	8	14,3	16	14,4	24	14,4
N4	2	3,6	2	1,8	4	2,4
Total	56	100,0	111	100,0	167	100,0

Tabla 4.4. *Frecuencia y porcentaje de gráficos por nivel de lectura y año escolar*

Nivel de Lectura	Año Escolar							Total						
	1º		2º		3º		4º		5º		6º			
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%		
N1	2	25,0	14	31,8	7	21,2	3	10,7	26	15,6				
N2	6	75,0	24	54,5	25	96,2	19	57,6	20	71,4	19	67,9	113	67,7
N3			6	13,6	1	3,8	6	18,2	5	17,9	6	21,4	24	14,4
N4							1	3,0			3	10,7	4	2,4
Total	8	100,0	44	100,0	26	100,0	33	100,0	28	100,0	28	100,0	167	100,0

La aparición progresiva de los niveles de lectura también se refleja en los estudios realizados en Díaz-Levicoy (2014), donde los libros españoles muestran un incremento del nivel de lectura que va del nivel 1 de “leer los datos” en los primeros cursos del 1º al

3° y sube de nivel a partir del 4° curso. De igual manera, es importante indicar que en el contexto español, el máximo nivel de lectura se presenta en el 5° curso, mientras que en el caso de los libros de texto costarricenses, se presentan en 4° y 6° año, coincidiendo con las recomendaciones dadas en NCTM (2014) de promover la realización de inferencias y la obtención de predicciones a partir de los datos analizados.

1.20.3. COMPLEJIDAD SEMIÓTICA DE LOS GRÁFICOS

Como ha sido mencionado anteriormente, este aspecto se valora de acuerdo con la clasificación propuesta por Batanero, Arteaga y Ruiz (2009), tomando en cuenta los siguientes niveles:

N1. Representa solo sus resultados individuales: En este estudio no se han encontrado gráficos que representen el nivel de complejidad semiótica más bajo, es decir, que se enfoquen en datos individuales, por lo que no se presenta ningún ejemplo al respecto.

N2. Representación de un conjunto de datos uno a uno: en este nivel de complejidad no se forma la distribución de datos. Es posible la “extracción de datos” al visualizarse todos los valores de las variables, pero no lo suficiente para llegar a la “extracción de tendencias”. Este tipo de complejidad semiótica se encuentra en gráficos como los que se presentan en las Figuras 4.2 y 4.3 donde los datos son representados sin resumir su distribución.

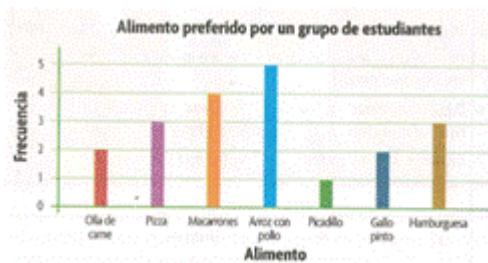


Figura 4.12. Ejemplo de complejidad semiótica al producir una distribución de datos en un gráfico de 5° año tomado de (A5, p. 146).

N3. Producción de gráficos separados para cada distribución: este nivel de complejidad semiótica, puede visualizarse en datos que resumen una sola distribución, como los que se presentan en gráficos de barras y polígonos de frecuencias, lo que permite identificar medidas de tendencia central como moda y mediana. Un ejemplo de este tipo de complejidad semiótica se puede observar en la Figura 4.9, donde es posible identificar la categoría más frecuente. Igualmente, la Figura 4.12, muestra la representación de la información recolectada al realizar la consulta a 20 estudiantes de

un grupo, sobre las preferencias de alimentos. En el gráfico se consigna la distribución de la serie de datos, clasificados en siete categorías, cada una de las cuales se relaciona con su frecuencia absoluta a través de las barras verticales de altura proporcional a la frecuencia.

N4. Representación de dos distribuciones sobre un mismo gráfico: este es el más alto nivel de complejidad semiótica establecido para un gráfico, según (Arteaga, 2009; Batanero et al., 2009). Este nivel contempla la posibilidad de la representación de distribuciones de dos variables dentro de un mismo gráfico, lo cual se representa como gráficos de doble barras o bien gráficos de líneas múltiples. Un ejemplo de este nivel de complejidad se muestra en la Figura 4.12, en la que se visualizan dos series de datos que representan los pasatiempos preferidos de niños y adultos.



Figura 4.13. Ejemplo de complejidad semiótica de más alto nivel ubicado en 6º año tomado (S6, p. 263).

Del análisis total de las actividades, se obtuvo que el nivel de complejidad semiótico más frecuente al analizar las dos series de libros de texto, es el nivel 3. Como se puede observar en la Tabla 4.5, el 67,7% de las actividades se concentraron en la “*producción de gráficos separados para cada distribución*”, un 24,0% se concentró en el nivel 2 y solo un 8,4% correspondió al nivel de complejidad semiótico más alto. En el caso del editorial Grupo Nación, el porcentaje de actividades de nivel 2 y nivel 4 fue de 10,7%, en contraste con un 78,6% de actividades clasificadas en el nivel 3. De manera similar, en el editorial Santillana, el 62,2% de las actividades fueron clasificadas de nivel 3 y de un 30,6% y 7,2% de nivel 2 y 4, respectivamente.

Nuevamente los datos generales coinciden con los resultados obtenidos del análisis semiótico de los gráficos en Díaz-Levicoy (2014) donde el 58,6% correspondió al nivel 3. Sin embargo, el segundo nivel semiótico más frecuente planteado en el estudio español, corresponde al nivel 4 con un 22,3%, mientras que en los libros de texto costarricense es el nivel 2 con un 24,0%. Esto contrasta con en ambos estudios, pues el

nivel de complejidad semiótico más alto (*N 4*), representa solo un 8,4% de los casos en el estudio de libros de texto en Costa Rica.

Tabla 4.5. *Frecuencia y porcentaje de gráficos por nivel de complejidad y editorial*

Nivel Complejidad	Editorial					
	GN		Santillana		Total	
	N	%	N	%	N	%
N 2	6	10,7	34	30,6	40	24,0
N 3	44	78,6	69	62,2	113	67,7
N 4	6	10,7	8	7,2	14	8,4
Total	56	100,0	111	100,0	167	100,0

En cuanto a la distribución de la complejidad semiótica por año escolar, la Tabla 4.6, muestra el incremento del nivel de complejidad conforme se avanza en el nivel escolar. En primer año solo se encontraron actividades del nivel 2, mientras que en sexto año se encontraron actividades de todos los niveles de complejidad. Por su parte, en los años escolares de 2° al 5°, se muestra el predominio de actividades del nivel 3 y solo en el 6° año las actividades de mayor frecuencia fueron las del nivel 4.

En el caso del estudio de Díaz-Levicoy (2014), destaca actividades de nivel de complejidad semiótica de nivel 4 a partir del segundo curso, predominando este tipo de actividades en el quinto y sexto curso. Esto representa una clara diferencia en la forma en que se abordan las actividades en los libros de texto españoles y costarricenses, donde las “representaciones de varias distribuciones sobre un mismo gráfico” son poco frecuentes en el caso de Costa Rica y prácticamente nulas en el currículo de primaria.

Tabla 4.6. *Frecuencia y porcentaje de gráficos por nivel de complejidad y año escolar*

Nivel de Complejidad	Año Escolar						Total	
	1°		2°		3°			
	N	%	N	%	N	%	N	%
N2	8	100,0	14	31,8	6	18,2	4	14,3
N3			30	68,2	25	75,8	24	85,7
N4					2	6,1	12	42,9
Total	8	100,0	44	100,0	26	100,0	33	100,0
							28	100,0
							167	100,0

1.20.4. TIPO DE TAREA REQUERIDA

Las tareas que se presentan en los libros de texto, corresponden principalmente a la actividad matemática que debe realizar el estudiante, a saber: leer, calcular, construir, comparar, ejemplificar, traducir, pasar a tabla, completar, describir variable o inventar problema, las cuales siguen algunas recomendaciones de los estudios de Castellanos (2013) y Díaz-Levicoy (2014). Estas se detallan a continuación.

Leer el gráfico: esta tarea consiste en responder a preguntas sobre los datos explícitamente representados en un gráfico; descripción de título, variables, escalas, valores de los datos, etc. Un ejemplo de este tipo de tarea se muestra en la Figura 4.1 (b), donde se pide al estudiante responder a preguntas como: ¿cuál es el felino menos gustado? y ¿cuántas preferencias tiene el tigre?



Figura 4.14. Ejemplo de tarea “leer y representar” ubicado en 2º año, tomado de (S2, p. 200)

Leer y completar: esta tarea consiste en la lectura de datos y la representación de ellos en el gráfico, que puede estar parcialmente construido. El estudiante es apoyado con ciertas orientaciones gráficas que le permiten completar la actividad, como se muestra en la Figura 4.14.

Leer y calcular: en este tipo de tarea se clasifican todas aquellas actividades en las que el estudiante debe responder a preguntas sobre los datos literales, pero que además, requieran de algunos cálculos sencillos, como pueden ser: sumar o restar, calcular la media, moda, mediana y rango. Este tipo se puede observar en la Figura 4.1(a), donde se pide al estudiante indicar ¿qué taller fue preferido por 30 estudiantes?, ¿cuántos estudiantes menos prefirieron danza que fútbol?, entre otras. Otros ejemplos de este tipo de tarea los podemos encontrar en las Figuras 4.9 y 4.10.

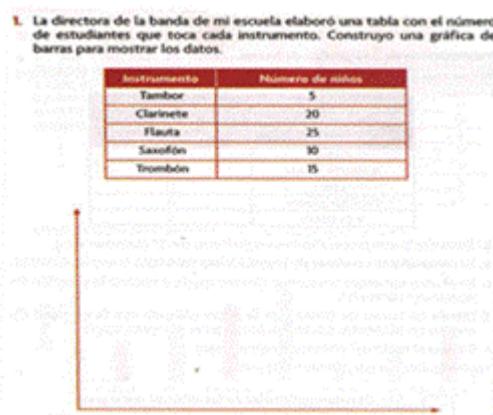


Figura 4.15. Ejemplo de construcción y lectura de gráfico ubicado en 5º año, tomado de (A5, p. 148)

Leer y construir: En este tipo de actividad, se le pide al estudiante que construya un gráfico con los datos que se les proporciona y además se les pide contestar algunas preguntas sobre el gráfico construido. Este tipo se muestra en la Figura 4.15, donde primeramente se construye el gráfico a partir de una tabla obtenida con el número de estudiantes que tocan un instrumento musical y posteriormente se realizan consultas sobre la totalidad de estudiantes que conforman la banda, cuál es el instrumento que más tocan, entre otras.

Gráfico Ejemplo: Este es el tipo de actividad del libro de texto, en la que se utiliza el gráfico para explicar conceptos o formas de construir un gráfico. En la Figura 4.16, se muestra cómo construir un gráfico identificando los elementos que intervienen en la construcción.

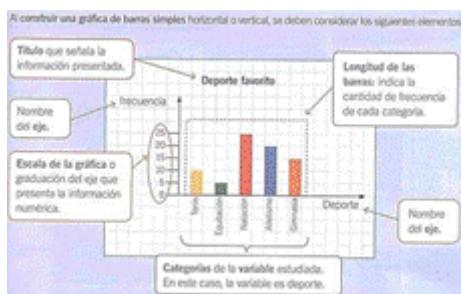


Figura 4.16. Gráfico de tipo Ejemplo ubicado en 3º año, tomado de (S3, p. 287)

Traducir a otro gráfico: Esta es una actividad que aparece muy poco en los libros de texto analizados, sin embargo, contempla la posibilidad de pasar de un tipo de gráfico a otro. En la Figura 4.17 se aprecia cómo se pasa de un pictograma al gráfico de barras.



Figura 4.17. Pasar de un tipo de gráfico a otro, ubicado en 3º año, tomado de (S3, p. 289)

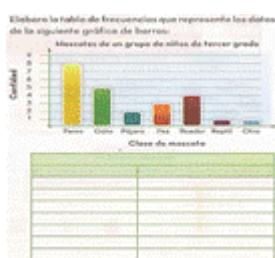


Figura 4.18. Traducir a tabla ubicado en 3º año, tomado de (A3, p. 158)

Traducir gráfico a tabla: Actividad en la que se solicita elaborar la tabla de frecuencias a la que corresponde los datos representados en un gráfico. Este tipo de actividad se muestra en la Figura 4.18, donde se cambia de la representación gráfica a la tabla.

Inventar problema: Este tipo corresponde a la actividad en donde se solicita explícitamente, plantear una nueva situación a partir de los datos de una representación gráfica, como la que se muestra en la Figura 4.19. En este caso se muestran las frecuencias absolutas de un tipo de pintura vendido en un día y se pide el planteamiento de una situación que sea representada con el gráfico descrito. En este caso el estudiante debe inventar una situación problemática que se represente el comportamiento de los datos expresados en el gráfico.



Figura 4.19. Actividad para inventar problema ubicado en 5º año, tomado de (S5, p. 238)

De manera general, en la Tabla 4.7, se muestra que el tipo de tarea que más se utiliza en las series de libros analizadas, corresponde al tipo de “leer y calcular”, la cual representa el 40,7% del total. De manera similar le siguen, las tareas de leer y completar, exemplificar, leer y construir y leer gráfico, los cuales representan el 17,4%, 16,2%, 12,6% y 9,6%, respectivamente. Las tareas que menos frecuencia acumulan son las de traducir a gráfico o a tabla y la invención de problemas, con un 1% y un 2% respectivamente.

Tabla 4.7. Frecuencia y porcentaje de gráficos por tipo de tarea y editorial

Tipo de Tarea	Editorial					
	GN		Santillana		Total	
	N	%	N	%	N	%
Leer el gráfico	5	8,9	11	9,9	16	9,6
Leer y completar	8	14,3	21	18,9	29	17,4
Leer y calcular	20	35,7	48	43,2	68	40,7
Leer y construir	11	19,6	10	9,0	21	12,6
Ejemplo	9	16,1	18	16,2	27	16,2
Traducir a otro gráfico			1	0,9	1	0,6
Traducir a tabla	1	1,8			1	0,6
Inventar problema	2	3,6	2	1,8	4	2,4
Total	56	100,0	111	100,0	167	100,0

Como se aprecia en la Tabla 4.8, la tarea de “ejemplificar”, representa una actividad frecuentemente utilizada en los niveles de segundo a sexto año, lo que también es destacado por Díaz-Levicoy (2014) en su estudio. Por otro lado, la tarea de “leer y construir” es también muy frecuente en tercero, cuarto y quinto año, donde estas actividades representan el 19,2%, 18,2% y 17,9% del total de actividades que se analizan, pero sin llegar a ser tan preponderante como en los libros españoles, donde estas representan el 25,5%, 28,4% y 26,7% respectivamente.

En relación al estudio realizado por Díaz-Levicoy (2014) se muestra una clara similitud con respecto al enfoque con que son tratadas las actividades o tareas en los libros de texto españoles, donde la lectura y cálculo en los gráficos representa el 44,6%, mientras que en los libros de texto costarricenses, esta variedad de tareas corresponde al 51,3%. De igual forma, en ambos contextos de investigación, la actividad de ejemplificar tiende a ser muy similar; un 16,7% en España y un 16,2% en Costa Rica, respectivamente.

Tabla 4.8. Frecuencia y porcentaje de gráficos por tipo de tarea y año escolar

Tipo de Tarea	Año Escolar													
	1°		2°		3°		4°		5°		6°		Total	
	N	%		N	%		N	%		N	%		N	%
Leer el grafico	2	25,0	2	4,5	1	3,8	2	6,1	4	14,3	5	17,9	16	9,6
Leer y completar	4	50,0	15	34,1	6	23,1	1	3,0	2	7,1	1	3,6	29	17,4
Leer y calcular	2	25,0	16	36,4	6	23,1	19	57,6	11	39,3	14	50,0	68	40,7
Leer y Construir			2	4,5	5	19,2	6	18,2	5	17,9	3	10,7	21	12,6
Ejemplo			9	20,5	5	19,2	5	15,2	4	14,3	4	14,3	27	16,2
Traducir a otro grafico					1	3,8							1	0,6
Traducir a tabla					1	3,8							1	0,6
Inventar problema					1	3,8			2	7,1	1	3,6	4	2,4
Total	8	100,0	44	100,0	26	100,0	33	100,0	28	100,0	28	100,0	167	100

La diferencia más significativa entre ambos estudios, corresponde a las actividades de tipo constructivas; en los libros españoles, construir, construir y leer y construir y comparar representan 28,0% mientras en los libros costarricenses, la actividad se limita a la lectura y construcción, representando solo un 12,6% de las actividades encontradas.

1.20.5. PROPÓSITO DEL GRÁFICO

El gráfico es considerado según Kosslyn (1985), como un recurso que se utiliza para: análisis, comunicación y en la enseñanza tradicional, para propósitos meramente

constructivos. Hemos tenido en cuenta estos usos al analizar esta variable, con las siguientes categorías

T1. Propósito de análisis: En este tipo se consideran los gráficos cuyo contexto represente una finalidad en el uso del gráfico para descubrir o identificar características del gráfico. Por ejemplo, en la Figura 4.20, donde se le pide al estudiante analizar el gráfico para identificar ciertas características solicitadas. En este caso, se le pide que indique cuál es el título, nombre de los ejes, cantidad de variables o barras, etc. En este caso el contexto en el cual se plantea el gráfico, tiene un propósito de indagar aspectos propios de la estructura del gráfico.

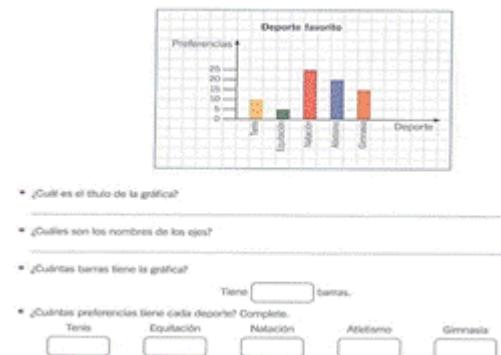


Figura 4.20. Ejemplo de propósito “análisis” ubicado en 3º año, tomado de (S3, p. 286)

T2. Propósito de comunicación: Los gráficos clasificados en este tipo son aquellos utilizados con el fin de transmitir información sobre los datos y sus relaciones. Este se exemplifica en la Figura 4.21, donde el propósito de la actividad es comunicar mediante un gráfico, los datos encontrados al consultar a los compañeros, sobre la mascota preferida. En este ejemplo se brindan las frecuencias absolutas de la consulta a los compañeros y se pide representar en una estructura gráfica ya predeterminada. Como se deduce, el propósito es comunicar las preferencias que tienen los compañeros sobre las mascotas.

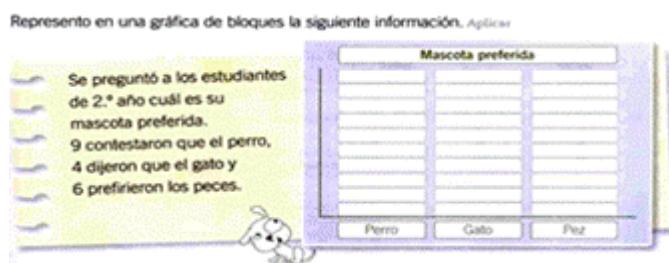


Figura 4.21. Ejemplo de propósito “comunicar” ubicado en 2º año, tomado de (S2, p. 173)

T3. Propósito de construcción: Adicionalmente a lo establecido en Kosslyn (1985), se plantea el propósito constructivo, pues desde el punto de vista de la enseñanza tradicional, el interés está centrado más en la construcción del gráfico que en el análisis

o la comunicación de información, por lo que para esta investigación se considerará el tercer tipo de propósito. Este propósito se visualiza en actividades como la que se muestra en la Figura 4.22, donde se le solicita al estudiante clasificar los animales y luego hacer la tabla de frecuencias y construir el gráfico. En este caso el contexto fija su objetivo en la construcción y no en el análisis o comunicación de información, por lo que se clasifica de propósito constructivo.

2. Las ilustraciones de abajo corresponden a los datos del animal que más les llamó la atención a un grupo de personas. Realiza las actividades según estos datos.



Figura 4.22. Ejemplo de propósito “constructivo” en 2º año, tomado de (A2, pp. 186–187)

De manera general, las actividades analizadas en los libros de texto muestran una tendencia a utilizar los gráficos con un propósito analítico y de comunicación, lo cual se observa en la Tabla 4.9, donde el 40,7% de las actividades analizadas se clasifican con un propósito de análisis y un 36,5% con propósito de comunicación. El propósito constructivo no parece ser muy relevante en el editorial Santillana, donde representa el 18,0% de las actividades, en contraste con el editorial GN, donde el aspecto constructivo alcanza un 32,1%, como segundo propósito más frecuente en este editorial.

Tabla 4.9. *Frecuencia y porcentaje de gráficos por tipo de propósito y editorial*

Tipo de propósito	Editorial					
	GN		Santillana		Total	
	N	%	N	%	N	%
Análisis	24	42,9	44	39,6	68	40,7
Comunicación	14	25,0	47	42,3	61	36,5
Construcción	18	32,1	20	18,0	38	22,8
Total	56	100,0	111	100,0	167	100,0

De igual forma, analizando los resultados mostrados en la Tabla 4.10, se deduce qué en primer y segundo año, la frecuencia del propósito del gráfico se concentra en la comunicación de información, donde se observa un 75% y 59% respectivamente. No es el caso del tercer año, donde por lo contrario el propósito constructivo domina a los demás, con un 42% de frecuencia relativa. En cuarto, quinto y sexto año, la diferencia

es muy marcada en favor del propósito de análisis, donde en los tres niveles, la frecuencia supera el 53% de actividades catalogadas de análisis de gráficos.

De igual forma, analizando los resultados mostrados en la Tabla 4.10, se deduce qué en primer y segundo año, la frecuencia del propósito del gráfico se concentra en la comunicación de información, donde se observa un 75,0% y 59,1% respectivamente. No es el caso del tercer año, donde por lo contrario el propósito constructivo domina a los demás, con un 42,3% de frecuencia relativa. En cuarto, quinto y sexto año, la diferencia es muy marcada en favor del propósito de análisis, donde en los tres niveles, la frecuencia supera el 53,6% de actividades catalogadas de análisis de gráficos. Esta variable no se tuvo en cuenta en las investigaciones previas.

Tabla 4.10. *Frecuencia y porcentaje de gráficos por tipo de propósito y año escolar*

Tipo de propósito	Año Escolar												Total	
	1°		2°		3°		4°		5°		6°			
	N	%		N	%		N	%		N	%		N	%
Análisis	2	25,0		8	18,2		9	34,6		18	54,5		15	53,6
Comunicación	6	75,0		26	59,1		6	23,1		9	27,3		6	21,4
Construcción				10	22,7		11	42,3		6	18,2		7	25,0
Total	8	100		44	100		26	100		33	100		28	100
													167	100

1.20.6. CONTEXTOS PRESENTADOS

Para el análisis del contexto presentado en las series de los libros de texto analizados, hemos contemplado las siguientes variables: tarea requerida en la unidad de registro, propósito del gráfico y contexto en el que se desarrolla. Por último, se hace una valoración del contexto en el que se ha organizado la utilización de los gráficos en la educación primaria, siguiendo la propuesta de OECD (2016), la cual considera los siguientes aspectos:

C1. Personal: corresponden a situaciones problema en el ámbito de actividades personales, de su familia o grupo de iguales. Un ejemplo de este caso es la Figura 4.11, donde el gráfico representa el consumo familiar de electricidad durante un periodo determinado y en donde se analizan aspectos de mayor o menor consumo en el seno familiar.

C2. Social: corresponden a los problemas donde se abordas aspectos del ámbito social, tal como se muestra en las Figura 4.13, donde se aplica una encuesta a niños, niñas y adultos sobre su pasatiempo preferido y se muestran los datos como conducta social de pasatiempos preferidos.

C3. Ocupacional (escolar): consisten en aquellas situaciones donde el problema aborda aspectos cercanos a la escuela. Este tipo de contexto se puede observar en la

Figura 4.12, donde se describe una situación en la que el docente de la clase “Vida cotidiana” consulta a 20 estudiantes sobre su comida preferida.

C4. Científico: este contexto se relaciona con problemáticas en las que se representan datos del ámbito de la ciencia, medio ambiente y la tecnología, como puede ser, el ejemplo de la Figura 4.23, donde se describen las áreas de conservación que tiene Costa Rica o el que se muestra en la Figura 4.5, donde se aprecia la cantidad de familias afectadas por los efectos de las sequías en la provincia de Guanacaste.

Los datos obtenidos del análisis de contexto se pueden observar en la Tabla 4.11, donde de manera general, se puede indicar que el contexto utilizado en las problemáticas planteadas, es primordialmente el “escolar”; en GN este aspecto representa el 48,2% de las actividades, mientras en Santillana, representa el 33,3%. De igual manera, el contexto “personal”, es utilizado en segunda instancia dentro del editorial Santillana, con un 33,3%, mientras que en GN, este aspecto es el menos abordado con un 3,5%. En el caso del contexto “social”, ambos editoriales apuntan fuertemente a la utilización de este aspecto dentro de sus actividades; en GN representa el 28,6% (el segundo mejor en este editorial) y en Santillana, el 18,9% (prácticamente igualando al segundo más utilizado en este editorial). En el campo de actividades de orden “científico”, ambos editoriales los utilizan, sin embargo, no con mucha frecuencia, 19,6% en el caso de GN y un 14,4% en Santillana.

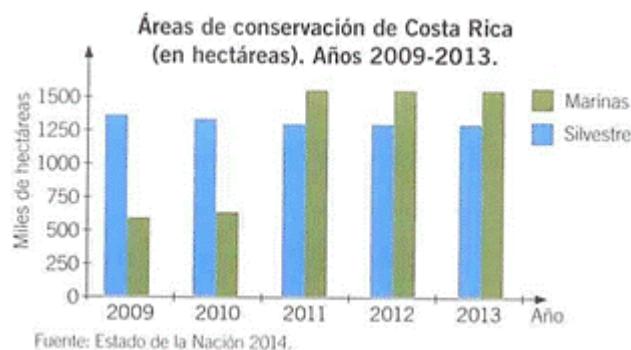


Figura 4.23. Ejemplo de contexto “científico” ubicado en 6º año, tomado de (S6, p. 262)

Tabla 4.11. Frecuencia y porcentaje de gráficos por tipo de contexto y editorial

Tipo de Contexto	Editorial					
	GN		Santillana		Total	
	N	%	N	%	N	%
Personal	2	3,6	37	33,3	39	23,4
Social	16	28,6	21	18,9	37	22,2
Escolar	27	48,2	37	33,3	64	38,3
Científico	11	19,6	16	14,4	27	16,2
Total	56	100,0	111	100,0	167	100,0

El contexto analizado en relación al uso dentro de cada nivel educativo, se muestra en la Tabla 4.12. Acá se puede observar como el contexto “escolar” domina los niveles del 2° al 5° año. En el primer año este aspecto es dominado por los ámbitos “personal o familiar” y el “social” con un 37,8%, mientras que el sexto año, el dominio lo comparten los aspectos “social” y “científico” con un 28,6%.

En primer y tercer año, se minimiza la utilización del contexto “científico” (0,0% y 3,8% respectivamente), mientras que en los restantes niveles escolares, su uso va en aumento, conforme se incrementa el nivel escolar, pasando del 11,4% en segundo año al 28,6% de las actividades registradas en sexto año. Llama la atención en quinto año, la diferencia tan marcada entre el contexto “escolar” y los demás aspectos, superando en más del 40%, lo escolar a lo personal, social y científico.

Tabla 4.12. Frecuencia y porcentaje de gráficos por tipo de contexto y año escolar

Tipo de contexto	Año Escolar												Total	
	1°		2°		3°		4°		5°		6°			
	N	%		N	%		N	%		N	%		N	%
Personal	3	37,8	14	31,8	7	26,9	7	21,2	2	7,1	6	21,4	39	23,4
Social	3	37,5	8	18,2	9	34,6	7	21,2	2	7,1	8	28,6	37	22,2
Escolar	2	25,0	17	38,6	9	34,6	12	36,4	18	64,3	6	21,4	64	38,3
Científico			5	11,4	1	3,8	7	21,2	6	21,4	8	28,6	27	16,2
Total	8	100	44	100	26	100	33	100	28	100	28	100	167	100

1.21. CONCLUSIONES SOBRE EL ESTUDIO DE LIBROS DE TEXTO

Como se ha descrito, el estudio sobre los gráficos estadísticos en los libros de texto en la educación primaria en Costa Rica, se aborda a través del grado escolar y el editorial como variables independientes, considerando los aspectos de tipo, nivel de lectura y complejidad semiótica del gráfico, así como también, el tipo de tarea, propósito y contexto en el cual se desarrolla la actividad donde se incluye el gráfico. El estudio se realiza mediante el análisis de contenido, revisando 167 unidades de registro distribuidas en dos series de libros de texto, cada una con seis niveles educativos.

Las dos series de libros de Grupo Nación y Santillana, concentran la representación gráfica en el tipo gráfico de barras, lo cual coincide con los estudios realizados por Díaz-Levicoy (2014) y con las recomendaciones establecidas en las orientaciones curriculares en Costa Rica, España y Chile (MEC, 2006; M.E.P, 2012; MINEDUC, 2012).

Adicionalmente, las editoriales analizadas incorporan diagramas de puntos y gráficos de sectores de manera paulatina, pasando del gráfico de barras, pictogramas y

diagramas de puntos en el primer ciclo, a gráficos circulares y de líneas o barras múltiples en el segundo ciclo de la educación primaria. Esta estrategia es coherente con las orientaciones curriculares costarricenses, sin embargo, no se promueve la incorporación de gráficos en el primer año, lo cual si sucede en los libros de texto.

En cuanto al nivel de lectura de los gráficos, se puede concluir que los editoriales analizados hacen uso frecuente de actividades donde se requiere un nivel 2 de lectura; es decir “leer dentro de los datos”, pero también de los niveles 1 y 3, lo que coincide con estimular el análisis e interpretación de la información que comunican los datos, propuesto en las orientaciones curriculares.

El hecho de que los libros de texto analizados en Costa Rica, le brinden un espacio importante a las actividades de nivel 3 de “leer más allá de los datos”, también refleja una diferencia importante con respecto a los resultados españoles obtenidos en Díaz-Levicoy (2014), donde este nivel de lectura es muy poco explotado en los libros de texto analizados.

Con respecto al nivel de complejidad semiótica de un gráfico, los resultados establecen con claridad que el nivel 3 de “representación de una distribución de datos” es la actividad más frecuente en las series de libros analizadas, lo que también coincide con los estudios en Díaz-Levicoy (2014). De igual forma, se concluye que el nivel semiótico de los gráficos avanza en complejidad conforme se progresan en los años escolares; siendo el nivel 2 el que predomina en los primeros dos años, pero el nivel 3, el más frecuente en tercer, cuarto y quinto año. Por su parte, el sexto año escolar, es el que presenta una distribución más homogénea de actividades con niveles de complejidad semiótica, pero con un predominio del nivel 4.

Con respecto al tipo de tarea en la que intervienen los gráficos analizados dentro de las series de libros del Grupo Nación y Santillana, se puede concluir que la tarea más común en ambos editoriales corresponde a leer, calcular y completar, lo que sucede en total apego a los lineamientos curriculares de promover el análisis e interpretación de la información reflejada en los gráficos. De igual forma sucede en Díaz-Levicoy (2014), donde la tarea más frecuente es leer o leer y calcular, que igualmente sigue las recomendaciones de la (NCTM, 2014) en cuanto a promover el análisis y reflexión en la búsqueda de inferencias y predicciones a través de los datos.

Si bien la introducción paulatina de los gráficos es promovida en las orientaciones curriculares en Costa Rica, la construcción o elaboración de ellos es propuesta formalmente a partir de cuarto año, lo cual no es seguido por las editoriales analizadas,

como se muestra de la Tabla 4.8., donde se introducen tareas del tipo “constructivas” desde el segundo año escolar.

Otro aspecto que no ha quedado reflejado en los tipos de tarea encontrados en las actividades propuestas por las editoriales, corresponde al interés ministerial de promover la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales como ejes transversales de las matemáticas; no se encontraron actividades que plantearan la resolución de problemas o bien la necesidad del uso de la tecnología como herramienta de apoyo en el cálculo y las representaciones gráficas. Así mismo, los lineamientos curriculares enfatizan en la necesidad de que el estudiante sea capaz de identificar posibles errores en los datos recolectados, tarea que no fue posible identificar en las dos series de libros analizadas.

En cuanto al propósito del gráfico estadístico involucrado en la unidad de registro de este estudio, se puede concluir que ambos editoriales asumen una línea de actividades del tipo de análisis y de comunicación, lo cual se alinea con los intereses del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, en promover el análisis e interpretación de la información a partir de los datos, sin embargo, al realizar el estudio por año escolar, actividades con un propósito constructivo aparecen desde el segundo año y constituyen el principal propósito en el tercer año, lo cual, como se mencionó anteriormente, no sigue las orientaciones curriculares en esta materia.

En el aspecto del contexto en el cual se incluyen los gráficos estadísticos de este trabajo, se concluye que el contexto escolar, es el más frecuente, reflejando ambas editoriales, coherencia con lo establecido en las recomendaciones curriculares dadas en (M.E.P, 2012), donde se indica la necesidad de realizar el estudio de los gráficos estadísticos con temas de carácter social y cercano al estudiante, que aborden los ejes transversales que se desarrollan en la educación costarricense . Por otro lado, el uso del contexto varía conforme se avanza en los niveles educativos; en primer año el contexto personal y social son los más frecuentes, pasando a ser lo “escolar” el contexto más frecuente de las actividades de segundo a quinto año con un incremento significativo del contexto “científico” de cuarto a sexto año, donde se conveniente en el tema más frecuente en este último nivel.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

1.22. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describen las conclusiones generales de la investigación realizada, tomando en cuenta los objetivos planteados y sus resultados obtenidos. De esta manera se detallan uno a uno los logros alcanzados en el estudio los libros de texto de la educación primaria en Costa Rica y su comparación en relación a los libros utilizados en el contexto español. Posteriormente, se realiza una valoración de idoneidad didáctica de los libros de texto analizados, para finalmente, ofrecer los principales aportes de la investigación y establecer algunas líneas de investigación futuras.

1.23. CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS E HIPÓTESIS

El primer objetivo específico del estudio fue *determinar el significado institucional pretendido para los gráficos estadísticos en el currículum de educación primaria en Costa Rica, contemplados en el tema de “Estadística y Probabilidad” de los planes de estudio en I y II Ciclo de la Educación en Costa Rica y su correspondencia con el significado pretendido en el contexto educativo español*. Ambos currículos destacan la importancia y necesidad de abordar la cultura estadística desde edades escolares, ofreciendo una serie de lineamientos didácticos para promover capacidades básicas en los procesos de recolección, representación y análisis de información desde los primeros años de la educación primaria.

De esta forma los gráficos estadísticos resultan de especial interés en el currículo costarricense, donde se incluyen a partir del segundo grado, pues en el primer grado se abordan los conceptos de datos cuantitativos y cualitativos, los cuales son tratados para resumir un grupo de datos y plantear interrogantes en la que los niños identifican características como el menor, mayor o bien el, más o menos frecuente, entre otros. En el caso español, además de lo anterior, se hace énfasis en iniciar desde el primer año con la utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos.

En ambos sistemas educativos, se destaca la importancia de utilizar técnicas para el análisis e interpretación de gráficos simples en contextos cercanos al estudiante, profundizando conforme se avanza en los niveles de escolaridad, tanto en la

complejidad gráfica, como en los contextos sociales o científicos de la información tratada. De igual forma, la construcción o elaboración de gráficos, si bien se aborda en los niveles superiores de la educación primaria, se hace con el interés de interpretar y analizar información, dejando los procesos constructivos relegados a un segundo plano proponiendo el uso de herramientas tecnológicas como recurso de apoyo para potenciar el pensamiento matemático y fortalecer ambientes de experimentación.

En cuanto a la metodología propuesta para la educación matemática y en particular de los gráficos estadísticos, se plantea la resolución de problemas como eje principal de la actividad en el aula, la cual debe operar en conjunción con la contextualización y la modelación matemática, para tratar ejes transversales que se desarrollan en todo el proceso educativo.

El segundo objetivo propuesto en esta investigación fue *analizar las principales variables que definen la implementación de actividades y ejemplos propuestos sobre gráficos estadísticos en los libros de texto de educación primaria de Costa Rica*. Para lograr este objetivo se han tomado como referentes distintos estudios en los que se han establecido las siguientes variables: tipo de gráfico, nivel de lectura, complejidad semiótica, tipo de tarea, propósito y contexto del gráfico (Arteaga, 2011; Batanero, Arteaga y Ruiz, 2009; Curcio, 1987; Díaz-Levico, 2014; Kosslyn 1985; OECD, 2016, Shaughnessy, Garfield y Green, 2006 y Wainer, 1992), respectivamente, las cuales se han correlacionado con las editoriales elegidas y el correspondiente libro de texto del año escolar.

El uso de los gráficos estadísticos en los libros de texto y el análisis de las variables antes mencionadas, ha dejado claro cómo los editoriales de la muestra elegida, tratan y desarrollan este tema en los diferentes niveles educativos de primaria. De esta manera, el análisis de los aspectos de tipo, nivel de lectura y la complejidad semiótica del gráfico, destacan un uso de los gráficos acorde con los lineamientos curriculares establecidos en el MEP, donde se promueve el uso de gráficos de barras o similares (pictogramas y diagramas de puntos y se utilizan en menor medida las representaciones lineales y circulares en niveles avanzados. De igual forma, los niveles de lectura y la complejidad semiótica analizados, responden al interés de generar capacidades de interpretación y análisis de datos en los estudiantes, necesarios para una cultura estadística que permita al ciudadano ser más crítico ante la saturación de información a la que se expone en la vida actual.

En cuanto al uso, propósito y contexto en el cual los editoriales analizados realizan

las actividades con gráficos, se puede indicar que éstas variables, reafirman las recomendaciones dadas en el currículo costarricense de promover la interpretación y el análisis de los gráficos, a través de actividades donde la tarea más común fue la lectura o el cálculo de valores, en la que se propone el análisis, la reflexión y la generación de inferencias a través de los datos. Este mismo comportamiento es presentado en actividades donde los gráficos estadísticos se incorporan con el propósito de analizar o de comunicar información, más que de construir como se mostró en el capítulo 4.

En relación con el contexto en el cual se llevan a cabo las actividades con gráficos dentro de los libros de texto, se destaca la presencia de ambientes escolares, aunque las actividades de tipo personales o sociales son también tomadas en cuenta. Adicional a lo anterior, conforme se avanza en los grados escolares, se plantean problemáticas científicas y sociales las cuales se ofrecen principalmente en el sexto año, cumpliendo con las recomendaciones curriculares de abordar temas transversales.

Por último, es importante destacar que en general, los gráficos utilizados dentro de las unidades de registro identificadas en los libros de texto, cumplen con las normativas curriculares establecidas en la educación matemática de Costa Rica, aunque los aspectos transversales de la resolución de problemas y el uso de las tecnologías para apoyar los procesos de enseñanza-aprendizaje, no son explotados con profundidad en los libros de texto analizados.

1.24. IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LOS TEXTOS ANALIZADOS

En cuanto al tercer objetivo de esta investigación en la que se propone *determinar la idoneidad del uso de los gráficos estadísticos utilizados en los libros de texto en la educación primaria en Costa Rica, de acuerdo con los componentes de la idoneidad didáctica propuesto por Godino (2013)*, se utilizarán los resultados obtenidos de la investigación, analizando cada uno de los componentes de la idoneidad didáctica:

Idoneidad epistémica: este componente se valora en términos del cumplimiento a las normativas establecidas por las orientaciones curriculares con respecto al tipo de gráficos y su propósito. Los gráficos que más se promueven son los de barras o afines (pictogramas y diagramas de puntos, incorporando paulatinamente las representaciones lineales y circulares en niveles avanzados, con el propósito de generar capacidades en la interpretación y el análisis de datos. En este sentido podemos indicar que la idoneidad epistémica es alta, pues la representatividad de los significados implementados o pretendidos en las editoriales analizadas, guardan una estrecha relación con el

seguimiento a las orientaciones curriculares establecidas por el MEP.

Idoneidad cognitiva: este aspecto nuevamente confirma un apego a las normativas nacionales e internacionales en relación al uso progresivo de gráficos conforme se avanza en el grado escolar. Así mismo, los libros de texto realizan un abordaje de los significados que se desean transmitir, siguiendo niveles de lectura, complejidad semiótica, propósitos y contextos cercanos al estudiante, que favorecen los objetivos de aprendizaje propuestos en las orientaciones curriculares ministeriales.

Idoneidad interaccional: este aspecto depende de la planificación que el educador haga de las unidades de registro analizadas y propuestas en los libros de texto, sin embargo, por normativa el proceso interaccional dentro del aula se encuentra normada, de tal manera que el trabajo en clase debe cumplir los momentos propuestos de: planteo de una actividad problemática, trabajo estudiantil independiente, discusión interactiva y comunicativa y por último, clausura o cierre de clase. A pesar de lo anterior, las actividades propuestas en los libros de texto, no promueven la resolución de problemas como eje principal de la actividad matemática.

Idoneidad mediacional: la disponibilidad y pertinencia de los recursos se relacionan en este caso con la utilización de los libros de texto, los cuales como se ha visto en general, cumplen las orientaciones curriculares para la enseñanza y aprendizaje de los gráficos estadísticos, sin embargo, este material se puede retroalimentar, considerando actividades donde se promueva la resolución de problemas y el uso de la tecnología para apoyar los procesos constructivos, de experimentación y de análisis de los gráficos, tal y como es recomendado por las nuevas orientaciones para el uso de tecnologías digitales en el aula.

Idoneidad afectiva: la valoración en este componente es buena, pues las actividades sobre gráficos estadísticos propuestas en los libros de texto, están contextualizadas en ambientes cercanos a la vida y realidad del estudiante, es decir, se incluyen actividades mayoritariamente del medio escolar, personal o familiar y social. De igual forma, la diagramación gráfica de los libros de texto, incluyen formas y colores que son atractivos y podrían resultar emotivos para los estudiantes. Por otro lado, los aspectos afectivos se podrían mejorar con una adecuada intermediación docente; tarea que debe ser cuidadosamente realizada para causar interés y motivación en los estudiantes. Una mejora sustantiva en este caso, puede ser que el docente aplique estrategias para la enseñanza de los gráficos basada en proyectos; según (Batanero y Díaz, 2011, p. 21), “los proyectos estadísticos aumentan la motivación de los estudiantes”.

Idoneidad ecológica: este aspecto se refleja en el uso de los gráficos estadísticos para representar contextos cercanos al estudiante, en los que se abordan ejes transversales de la educación costarricense, como lo son: cultura ambiental para el desarrollo sostenible, educación para la salud y vivencia de los derechos humanos para la democracia y la paz, principalmente (M.E.P, 2012).

1.25. VALORACIÓN DE LAS HIPÓTESIS

La valoración general de los resultados nos permite responder a las dos hipótesis planteadas en este trabajo:

H1. Los libros de texto no siguen las disposiciones didácticas y metodológicas del Ministerio de Educación Pública en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad y particularmente, la incorporación y enseñanza de los gráficos estadísticos en la educación primaria costarricense.

En este sentido la hipótesis planteada es falsa, pues en términos generales los libros de texto siguen las recomendaciones emitidas por el Ministerio de Educación Pública y la nueva reforma de la enseñanza de la matemática y en particular de la enseñanza de la estadística. Solo se deben fortalecer los ejes principales de las actividades matemáticas en relación al planteamiento de actividades de resolución de problemas y el uso de las tecnologías digitales de apoyo.

H2. Los gráficos estadísticos propuestos en las diferentes actividades-problema de las series de libros estudiadas, no guardan relación con lo propuesto en el nivel escolar y los niveles de complejidad semiótica, según la clasificación establecida en las investigaciones de Batanero, Arteaga y Ruiz (2009).

Esta hipótesis también resultó ser falsa y por lo tanto es rechazada, pues de acuerdo con los resultados obtenidos y de su análisis posterior, se determinó que ambas editoriales cumplen con los criterios de tipo, nivel de lectura y complejidad semiótica de los gráficos de acuerdo con los niveles escolares y en correspondencia con las orientaciones curriculares emitidas por el MEP. Así mismo, se determinó una correspondencia directa con estudios preliminares, en especial el de Díaz-Levicoy (2014), así como con las recomendaciones brindadas por la NCTM (2014).

1.26. PRINCIPALES APORTACIONES DEL TRABAJO

El trabajo realizado ofrece a la comunidad científica de la didáctica de la matemática, un modelo de análisis de libros de texto, desde el punto de vista del enfoque ontosemiótico, lo cual que permite tener una valoración más precisa de la

idoneidad didáctica de este recurso de apoyo docente. Se han incorporado nuevas variables de estudio, que permiten contar con un espectro más amplio de la calidad, uso y propósito de los gráficos estadísticos utilizados en la educación primaria costarricense.

Además, se han establecido comparaciones con otros estudios internacionales sobre algunas variables comunes, lo que ha permitido determinar la semejanza y particularidad de la enseñanza y aprendizaje de la estadística y en particular de los gráficos estadísticos en otras partes del mundo.

Finalmente, el trabajo realizado ofrece a la comunidad docente de primaria, cuya especialidad no es la matemática pero que debe asumir la enseñanza de la estadística, una valoración sobre algunos recursos didácticos que pueden ser utilizados de manera efectiva y recomendada en la enseñanza y aprendizaje de los gráficos estadísticos, como lo son los libros de texto analizados en esta investigación.

1.27. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Si bien esta investigación ha tomado en cuenta las editoriales más utilizadas en la educación matemática de primaria en Costa Rica, puede ser ampliada y mejorada considerando otras que podrían reflejar más datos que confirmen o rechacen las tendencias encontradas respecto al uso de los gráficos estadísticos en los libros de texto estudiados para esta investigación. Uno de los temas que queremos abordar es el análisis de los libros de texto utilizados en la formación de los profesores.

De igual manera, la metodología del análisis de contenido sugiere la validación de instrumentos como valoración de la *fiabilidad del sistema de codificación-categorización* para analizar un contenido particular, lo cual no fue posible realizarlo por motivos de tiempo y recursos. En este aspecto se sugieren alianzas con otros investigadores que han realizado estudios similares para compartir los instrumentos y los datos y afinar un modelo que garantice la objetividad con que el investigador observa y registra los datos.

Por último, el estudio de gráficos estadísticos en los libros de texto es un campo abierto de investigación que podría enriquecerse con el análisis de libros de texto en otros contextos iberoamericanos. Así mismo, se pueden ampliar a otros niveles educativos como la secundaria, o bien, a recursos que empiezan a ser muy utilizados como apoyo docente, como los medios digitales.

REFERENCIAS

- Andreú, J. (2002). Las técnicas de Análisis de Contenido: una revisión actualizada. *Fundación Centro de Estudios Andaluces*, 1-34. <https://doi.org/10.2307/334486>
- Arteaga, P. (2009). *Análisis de gráficos estadísticos elaborados en un proyecto de análisis de datos*. Tesis de Máster. Universidad de Granada.
- Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números*, 76, 55-67.
- Arteaga, P., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2011). Gráficos estadísticos en la educación primaria y la formación de profesores. *Invisa: Boletín de Estudios e Investigación*, 12(1), 123-135.
- Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2012). Understanding statistical graphs: A research survey. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 28(3), 261-277.
- Arteaga, P., Batanero, C., Díaz, C. y Contreras, J. M. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. *Unión*, 18, 93-104.
- Batanero, C. (2000). ¿ Hacia dónde va la educación estadística ? *Biaix*, 15, 2–13.
- Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana*, 1(1), 27–37.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2009). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154.
- Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Batanero, C., Contreras, M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 87, 7-18.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf>
- Batanero, C., Gea, M., Arteaga, P. y Contreras, J. M. (2014). La estadística en la educación obligatoria : análisis del currículo español, *Matemática, Educación e Internet* 14(2), 1-14.
- Batanero, C. y Godino, J. (2005). Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. En R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 203-226). Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Ben-Zvi, D. y Friedlander, A. (1997). Statistical thinking in a technological environment. En J. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics* (pp. 54–64). Voorburg: International Statistical Institute.
- Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3–17). New York; Springer.
- Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2008). Introducing the emerging discipline of statistics education. *School Science and Mathematics*, 108(8), 355-361.
- Bertin, J. (1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars.

- Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, VII, 57-85.
- Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics - Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 57–69). Dordrecht: Springer.
- C.S.E. (2016). *Estructura del Sistema Educativo*. San José: Autor. Recuperado Enero 9, 2017, de <http://cse.go.cr/sistema-educativo>
- Castellanos, M. T. (2013). *Tablas y gráficos estadísticos en la prueba SABER - Colombia*. Tesis de Máster, Universidad de Granada.
- Cazorla, I. (2002). *A relação entre as habilidades viso-pictóricas eo domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tesis Doctoral. Universidad de Campinas.
- Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas. (2013). Reforma de la educación matemática en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8 (N. Especial).
- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.
- Curcio, F. R. (1991). *Developing graph comprehension : elementary and middle school activities*. Reston, VA: NCTM.
- DelMas, R. C. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 79–95). Dordrecht: Springer.
- Díaz-Levicoy, D. (2014). *Un estudio empírico de los gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria española*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2015). Análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria española. *Unión*, 44, 90–112.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *Bolema*, 30(55), 713-737. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a20>
- Díaz Levicoy, D., Giacomone, B., López Martín, M. M. y Piñeiro, J. L. (2016). Estudio sobre los gráficos estadísticos en libros de texto digitales de educación primaria española. *Profesorado*, 20(1), 133–156. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/recfpro/rev201ART8.pdf>
- Escolano, B. (2009). El manual escolar y la cultura profesional de los docentes. *Tendencias Pedagógicas*, 14, 169–180.
- Fernández, M. P. y Caballero, P. (2017). El libro de texto como objeto de estudio y recurso didáctico para el aprendizaje : fortalezas y debilidades. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 20(1), 201–217.
- Francis, S. (2010). *La estructura curricular en la secundaria costarricense (tercer ciclo y el ciclo diversificado): características principales y desafíos. III Informe del Estado de la Educación*. San José, Costa Rica: autor.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: a pre-k–12 curriculum framework*. American Statistical Association. <https://doi.org/10.3928/01484834-20140325-01>
- Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors

- influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158. Recuperado de <http://search.proquest.com/docview/223498519/C88CA8079644435FPQ/4?accountid=14542>.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22, 1-32.
- Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Universidad de Granada. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/>.
- Godino, J. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Godino, J. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 111-132.
- Godino, J. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas*. Granada: Autor. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf%5CnJuan
- Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J., Bencomo, D. y Font, V. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII(2), 1-25.
- Godino, J., Contreras, Á. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque Ontológico-Semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de Las Ciencias*, 27(1), 59-76.
- Hernández, O. (2009). *Estadística elemental para ciencias sociales* (3rd ed.). San José, Costa Rica: Universidad de Costa Rica.
- Hoslti, O. (1969). *Content analysis for the social sciences and humanities*. New York: Addison-Wesley .
- Kosslyn, S. M. (1985). Graphics and human information processing: A review of five books. *Journal of the American Statistical Association*, 80, 499-512.
- Kosslyn, S. M. (1994). Elements of graph design. New York: Freeman.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido : teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.
- Lee, C. y Meletiou-Mavrotheris, M. (2003). Some difficulties of learning histograms in introductory statistics. Trabajo presentado en el *Joint Statistical Meetings- Section on Statistical Education*. Michigan: American Statistical Association.
- M.E.P. (2005). *Programas de estudio matemática III ciclo*. San José, Costa Rica: Ministerio de Educación Pública.

- M.E.P. (2012). *Programa de estudio matemáticas, I, II y III Ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado*. San José, Costa Rica: Ministerio de Educación Pública.
- MEC. (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación primaria*. Madrid: Autor.
- MECD (2014a). La ley orgánica de la mejora de la calidad educativa (LOMCE). Madrid: Autor.
- MECD. (2014b). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria*. Madrid: Autor.
- MINEDUC. (2012). *Matemática educación básica. Bases curriculares*. Santiago: Autor.
- Monteiro, C. y Ainley, J. (2006). Student teachers interpreting media graphs. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Brazil: International Statistical Institute. Recuperado de https://iase-web.org/documents/papers/icots7/2G1_MONT.pdf.
- Monteiro, C. y Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(3), 188-207.
- Moore, D. S. (1998). Statistics among the liberal arts. *Journal of the American Statistical Association*, 93(444), 1253-1259. <https://doi.org/10.2307/2670040>
- NCTM (2014). *Executive summary: Principles for school mathematics. national council of teachers of mathematics*. Recuperado de http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/12752_exec_pssm.pdf
- OECD. (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematic and financial literacy*. Paris: OECD.
- Pereira-Mendoza, L. y Mellor, J. (1990). Student's concepts of bar graph: Some preliminary findings. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 150-157). Voorburg: International Statistical Institute. Recuperado de <https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/18/BOOK1/A2-5.pdf>
- Programa Estado de la Nación. (2015). Desigualdades en rendimiento en el sistema educativo costarricense. En *V Informe del Estado de la Educación* (pp. 249–294). San José, Costa Rica: Programa Estado de la Nación.
- Quintana, C. (1983). *Estadística elemental*. San José, Costa Rica:UECD.
- Rangecroft, M. (1994). Graphwork. Developing a progression. En D. Green (Ed.), *The best of teaching statistics* (pp. 7–12). Sheffield, England: The Teaching Statistics Trust.
- Reading, C. y Shaughnessy, M. (2004). Reasoning about variation. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 201-226). Dordrecht: Kluwer.
- Recio, A. y Godino, J. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 89–99.
- Ruiz, A., Chavarría, J. y Mora, F. (2003). Tendencias y retos de la educación matemática en Costa Rica. *UNICIENCIA*, 20(1), 183–191.
- Ruiz, N. (2014). La enseñanza de la Estadística en la Educación Primaria en América Latina. *REICE. Revista Iberoamericana Sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 13(1), 103–121.
- Sampieri, R., Collado, C. y Baptista, M. del P. (2010). *Metodología de la investigación*.

- México, D.F.: McGrawHill.
- Shaughnessy, J. M., Garfield, J. y Greer, B. (1996). Data handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 205-237). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Spence, I. y Lewandowsky, S. (1990). Graphical perception. En J. Fox y S. Long (Eds.), *Modern methods of data analysis* (pp. 13–57). Newbury Park, CA: Sage.
- UNESCO. (2005). *Aspects of literacy assessment: Topics and issues from the UNESCO Expert Meeting*. Paris. Recuperado de <http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001401/140125eo.pdf>
- Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 141–171). Dordrecht: Reidel.
- Vigo, J. M. (2016). *Comprensión de gráficos estadísticos por alumnos de formación profesional básica*. Tesis de Máster. Universidad de Granada.
- Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher*, 21(1), 14–23. <https://doi.org/10.3102/0013189X021001014>
- Watson, J. (2006). *Statistical literacy at school: growth and goals*. New York: Erlbaum.
- Wu, Y. (2004). Singapore secondary school students' understanding of statistical graphs. Trabajo presentado en el *10 Th. International Congress of Mathematic Education*. Copenhagen. Recuperado de <https://view.officeapps.live.com/op/view.aspx?src=https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/11/Yingkang.doc>.