# UN ESTUDIO DE LA PRESENTACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL EN LOS TEXTOS DE BACHILLERATO

Mercedes Valverde Marín

---

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

2017

# UN ESTUDIO DE LA PRESENTACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL EN LOS TEXTOS DE BACHILLERATO

Mercedes Valverde Marín

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

2017

Dirigido por: Carmen Batanero y Mª Magdalena Gea

Agradecimientos: Este trabajo se financia con el proyecto EDU2016-74848-P. A mi tutora Carmen, por su paciencia. A Antonio y Carmela, por ayudarme llegar hasta aquí.

**RESUMEN**

El trabajo que se desarrolla en esta Memoria se centra en la distribución normal, una de las distribuciones más importantes en estadística, debido, por un lado, a las muchas variables que se pueden modelar con ella, y por otra al Teorema Central del Límite que permite aproximar por una distribución normal numerosas distribuciones muestrales. Más concretamente, realizaremos el análisis del tema en dos libros de texto de Bachillerato, en los cuales analizaremos la forma en que se presentan los diferentes objetos matemáticos relacionados con dicha distribución. Nos basamos en el Enfoque Onto-Semiótico de la cognición e instrucción matemática y seguiremos el método propuesto en otras investigaciones similares realizadas en el mismo grupo de investigación.

**ABSTRACT**

In this report we focus on the normal distribution, one of the most important distributions in statistics, due, on the one hand, to the many variables that can be modelled with this distribution, and on the other to the Central Limit Theorem that is used to approximate by a normal distribution numerous sampling distributions. More specifically, we analyse the subject in two high school textbooks, in which we will study the way in which the different mathematical objects related to this distribution are presented. We rely on the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction and will follow the method proposed in previous research conducted in the same research group.

Índice

# INTRODUCCIÓN

El Trabajo Fin de Máster que se desarrolla en esta Memoria se centra en la distribución normal, una de las distribuciones más importantes en estadística, debido, por un lado, a las muchas variables que se pueden modelar con ella, y por otra al Teorema Central del Límite que permite aproximar por una distribución normal numerosas distribuciones muestrales.

Nos basamos en el Enfoque Onto-Semiótico de la cognición e instrucción matemática y seguiremos el método propuesto en otras investigaciones similares realizadas en el mismo grupo de investigación, por ejemplo, en los trabajos de Gea (2012) y Tauber (2001).

Más concretamente, realizaremos el análisis del tema en dos libros de texto de Bachillerato, en los cuales analizaremos la forma en que se presentan los diferentes objetos matemáticos relacionados con dicha distribución. El libro de texto es uno de los recursos didácticos fundamentales, pues constituye una ayuda importante, tanto para el alumno como para el profesor, al concretizar el currículo fijado en las directrices curriculares (Escolano, 2009).

La consideración de estos puntos conduce a la elaboración de un trabajo de investigación. Por tanto, el presente documento supone la Memoria del trabajo y, su propósito es presentar de manera sintetizada el estudio realizado. A continuación, se presenta una síntesis de cada uno de los capítulos que configuran dicha Memoria.

El primer capítulo presenta el problema de investigación, mostrándose la importancia de la Educación estadística en general y la inferencia estadística en particular. Se analiza el concepto de distribución normal desde diversos puntos de vista (origen histórico, importancia en estadística, etc.), justificando su interés tanto para el avance de la investigación en el tema, como para la formación de los estudiantes. Se realiza un recorrido por el currículum de la Educación Secundaria vigente, focalizándose en aquella etapa en la que se introduce el concepto de distribución normal. Se finaliza con el análisis del marco teórico asociado.

En el segundo capítulo se presenta una revisión y síntesis de la investigación previa sobre la distribución normal, papel del ordenador en la enseñanza y aprendizaje de la estadística y otros puntos que conectan con el presente estudio y permiten su fundamentación. Se verá que son muy pocos los estudios relativos a la distribución normal, además de haber sido enfocados haciendo uso de muy diferentes teorías y metodologías.

En el Capítulo 3 se incluye la metodología utilizada en el estudio y se analiza la presentación de la distribución normal en una muestra de dos libros de texto de Matemáticas dirigidos respectivamente a estudiantes de 1º y 2º curso de Bachillerato en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, estudiándose los objetos matemáticos primarios definidos en el Enfoque Onto-Semiótico.

Finalmente, en el Capítulo 4, se exponen las conclusiones generales del estudio, sobre los objetivos, limitaciones del estudio y futuras líneas de investigación.

# CAPÍTULO 1.
# EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

## 1.1. Introducción

En este capítulo se presenta el problema de investigación que desarrollamos en esta Tesis de Máster, justificándose su importancia en la Educación Estadística, donde la investigación sobre la distribución normal ha sido escasamente tratada.

En primer lugar se realiza una descripción de la distribución normal, describiendo su origen histórico y resaltando su importancia en el método estadístico, donde se utiliza tanto en el cálculo de probabilidades, como en la inferencia, así como para la formación del estudiante de Bachillerato.

Seguidamente se analiza la presencia de la inferencia estadística, y en particular la forma en que se considera la distribución normal, en el currículum de Matemáticas vigente en Bachillerato.

Para finalizar, se presenta el marco teórico que soporta el estudio, que es el enfoque ontosemiótico, del cual se describen los elementos utilizados en el trabajo. Con todos estos fundamentos en la sección final se proponen los objetivos del trabajo.

## 1.2. La distribución normal

En la aplicación del cálculo de probabilidades a temas diversos cobran una gran importancia los modelos de distribuciones que permiten resolver una multitud de problemas, sin tener que deducir en cada ocasión las expresiones algebraicas de las funciones de densidad (en el caso de variables continuas) o de las distribuciones de probabilidad (para variables discretas) correspondientes (Batanero y Borovcnik, 2016).

Uno de estos modelos es la distribución normal, de gran relevancia en estadística debido a que permite describir variables aleatorias continuas que aparecen muchos fenómenos físicos, biológicos, psicológicos o sociológicos, como, por ejemplo, tiempo de reacción, temperatura, peso y altura o cociente de inteligencia. La función de densidad de una variable aleatoria normal está definida por su función de densidad, que depende de dos parámetros $\mu$ y $\sigma$, que son su media y su desviación típica y tiene la siguiente expresión, donde x varía desde - $\infty$ a $\infty$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}$$

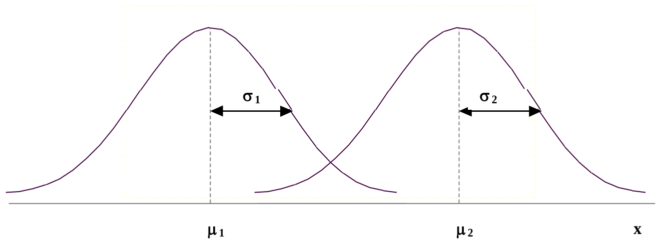



Figura 1.1. Distribuciones normales con la misma desviación típica y diferente media (Batanero y Díaz, 2007, p. 141)

Entre sus propiedades más simples se encuentra la de tener una asíntota horizontal (Eje X) y estar centrada en su media, siendo simétrica, con forma acampanada, pues los valores cercanos a la media son los más probables (Ver Figura 1.1). Otras propiedades se estudiarán en el Capítulo 3.

A continuación se describen brevemente los orígenes de la noción de distribución normal y su importancia actual en estadística.

### 1.2.1. Origen histórico

La distribución normal, también conocida como distribución acampanada o gaussiana, se desarrolló en los siglos XVI y XVII, a partir de su aplicación a dos campos muy diferenciados de la Ciencia: como modelo que permite describir la distribución de los errores en el trabajo experimental y como aplicación en el cálculo de problemas de probabilidad a partir de los teoremas de límite (Másmela y Serrato, 2009).

En torno a estos dos aspectos y a lo largo de casi dos siglos, algunos matemáticos intentaron, por diferentes caminos encontrar una expresión funcional para la distribución de densidad. No fue hasta principios del siglo XIX cuando el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) la definió de forma rigurosa. A continuación se hará un breve repaso por los distintos intentos de formalización que se hicieron a lo largo de los años.

Masmela y Serrato (2009) sitúan la primera detección de la existencia de esta distribución en el siglo XVII, cuando Galileo, realizando mediciones de errores en sus observaciones astronómicas, observó que dichos errores eran simétricos y que los errores pequeños eran más frecuentes que los errores grandes. Por tanto la distribución de los errores tenía la forma acampanada típica que ahora reconocemos en la curva normal

Según Quesada (2016), el origen de la distribución sin embargo, se asocia a Abraham de Moivre (1667-1754). Éste, en sus investigaciones en el campo de la

Probabilidad, comenzó a observar que, tras un cierto número n de observaciones al lanzar una moneda, la probabilidad de obtener un cierto número de caras o cruces (que ahora conocemos como distribución binomial B (n, 0.5)) podía aproximarse mediante una curva cada vez más suave según aumentaba el número de repeticiones del experimento. Es decir, se trataría de una versión muy preliminar e intuitiva de lo que hoy conocemos como el Teorema Central del Límite, que aproxima la suma de variables aleatorias mediante la distribución normal.

De Moivre explicó que si se encontrase una ecuación para dicha curva, se optimizaría la forma de calcular la probabilidad de obtener un número dado de caras o cruces lanzando n veces una moneda. En 1733 determinó y presentó en un artículo (incluido en la segunda edición de su "*The Doctrine of Chances*" en 1738) un par de aproximaciones para realizar este cálculo que incluyen la función exponencial natural (la binomial).

Usando dicha distribución, a mediados del siglo XVIII, el matemático británico Thomas Simpson, calculó la probabilidad de que el error en la medida de varias observaciones de un mismo experimento no excediera una determinada cota. En la segunda mitad del mismo siglo, el astrónomo, matemático y físico Pierre Simon Laplace, bajo este supuesto de errores acotados, propuso dos curvas para describirlos sin éxito, considerándose, especialmente la segunda, un retroceso en la búsqueda de la distribución de errores. En 1777, Daniel Bernoulli, planteó como curva una semielipse y tras una serie de argumentos lógicos posteriores, propuso como curva un semicírculo.

Desde 1794, Carl Friedrich Gauss llevó a cabo investigaciones más profundas y, basándose en el método de mínimos cuadrados, desarrolló la expresión de la función de densidad normal, si bien, no fue hasta 1809 que lo justificara rigurosamente. Es por este motivo, por el que esta distribución es también conocida por el nombre de "Campana de Gauss".

Las aplicaciones de esta distribución crecen enormemente a partir del desarrollo del Teorema Central del Límite (Alvarado y Batanero, 2006), donde diversos matemáticos demuestran que la suma de variables aleatorias sigue una distribución normal en condiciones muy generales, Puesto que la distribución de la media de la muestra y de otros estadísticos de las muestras se definen a partir de suma de variables aleatorias, las aplicaciones de la distribución normal en la inferencia estadística son muy grandes (Tauber, 2001).

### 1.2.2 Importancia en el método estadístico

La inferencia estadística proporciona un conjunto de herramientas que facilitan la generalización de conclusiones obtenidas de una muestra a la población de donde se ha recogido dicha muestra. Según Batanero y Díaz (2015), las técnicas de inferencia se desarrollaron para fundamentar las formas de obtener un conocimiento general a partir del análisis de casos particulares, las cuales adquieren una gran importancia en las ciencias empíricas. Es en este contexto donde cobra más importancia la distribución normal, puesto que la aplicación del análisis de varianza y muchos contrastes estadísticos requieren la normalidad de los datos (Batanero, Tauber y Sánchez, 2001).

Pero su importancia no se restringe a la inferencia. Gauss ya calificó esta distribución como la aplicación más importante de las matemáticas a la filosofía natural (entendida como ciencias naturales), teniendo en cuenta las aplicaciones que tenía en aquella época. A día de hoy, se pueden dar muchos argumentos para defender que es una de las distribuciones s más importantes; sin embargo nos centraremos en las tres que propone DeGroot (1998):

- Desde un punto de vista matemático resulta conveniente suponer que la distribución de una población de donde se ha extraído una muestra aleatoria sigue una distribución normal, ya que entonces se pueden obtener las distribuciones de varias funciones importantes de las observaciones muestrales, como la media o la mediana, que además resultan tener una forma sencilla.
- Desde un punto de vista científico, la distribución normal aproxima en muchas ocasiones los valores obtenidos para variables que se miden con errores, que no son sistemáticos, sino aleatorios. Por ejemplo, se ha observado que muchas características físicas frecuentemente tienen distribuciones que son aproximadamente normales, como estaturas o pesos de los individuos, beneficios medios de las empresas, la duración de un producto perecedero, el tiempo necesario para llevar a cabo un trabajo, etc.
- La última razón es la existencia del Teorema Central del Límite. Cuando se dispone de una muestra aleatoria grande, aunque presente una distribución no normal e incluso para distribuciones típicas de variables aleatorias discretas, la distribución de la media y de otros estadísticos pueden tratarse aproximadamente como distribuciones normales (Alvarado, 2007).

Por otro lado Tauber (2001) nos recuerda que la distribución normal describe bien muchas variables biológicas, psicológicas y sociales, además de servir de aproximación a otras distribuciones, como la binomial o Poisson o bien la *t* de Student. Todo ello explica que su estudio se incluya en el Bachillerato y en la mayoría de los estudios universitarios.

### 1.2.3 Importancia para el estudiante

Los motivos que hemos señalado sirven para afirmar la importancia de que el estudiante de Bachillerato, que es el nivel educativo en que nos centramos, llegue a comprender, al menos de una forma intuitiva, las bases de la distribución normal, reconozca su forma y las situaciones en que puede ser aplicada y adquiera una habilidades mínimas para llegar a calcular o al menos estimar probabilidades para resolver estos problemas.

La distribución normal, como veremos, se incluye en el primer curso de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales y en el segundo curso del Bachillerato de Ciencias. El estudiante debe, por tanto aprender el tema para superar con éxito estos cursos, pero, además, en el segundo curso de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales tendrá que tener competencia suficiente para abordar el estudio de la inferencia. Asímismo, en muchas especialidades universitaria, tanto en pregrado como en posgrado los estudiantes realizan un curso de inferencia. En estas situaciones deben utilizar la distribución normal para:

- Determinar las distribuciones muestrales de la media y la proporción, entre otros estadísticos;
- Calcular intervalos de confianza de la proporción y la media cuando la muestra tiene un tamaño suficiente;
- Realizar contrastes de hipótesis en las mismas situaciones, tanto para una muestra como para comparar dos o varias muestra.

Es por ello que un fallo en la comprensión o la falta de competencia de aplicación de la distribución normal arrastrará una serie de errores en la comprensión y aplicación de la inferencia. De ahí la importancia de asegurar una adecuada idoneidad didáctica del tema en los libros de texto.

### 1.3 Orientaciones curriculares

Tal y como reza la legislación vigente al respecto (MECD, 2005), las matemáticas son un instrumento indispensable para interpretar la realidad y expresar los fenómenos sociales, científicos y técnicos de un mundo cada vez más complejo. Así, la modelización de determinados fenómenos físicos, biológicos, psicológicos o sociológicos, es fundamental en estadística y en la investigación empírica. En particular, la estadística es hoy día una herramienta básica en muchas de las actividades humanas como, la ciencia, la gestión y la política. Asumiendo esta importancia, las directrices curriculares de distintos países (e.g., CCSSI, 2010; NCTM, 2000; entre otros) han incluido desde los primeros años de escolarización los temas de estadística y probabilidad.

En el análisis realizado por Batanero, Gea, Arteaga y Contreras (2014) se concluye que en la Educación Secundaria Obligatoria se sigue contemplando la organización de los datos y gráficos, iniciada en la Educación Primaria, realizando ligeras ampliaciones y se introduce la probabilidad, para pasar a la inferencia en el Bachillerato de Ciencias Sociales. Así se puede observar:

- Introducción del significado frecuencial de la probabilidad de forma gradual: desde el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria, donde se consideran los conceptos de frecuencia absoluta y relativa, así como nociones de muestreo, incluyéndose además el diseño de experiencias para el análisis de conjeturas relacionadas con un fenómeno aleatorio.
- Introducción del significado clásico de probabilidad y refuerzo del enfoque frecuencial: desde el tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria se considera la representatividad en el muestreo, se incluye el cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace, así como la estimación de las mismas mediante simulación y experimentación.
- Ampliación de contenidos: en el cuarto curso de la etapa educativa para la modalidad B (dirigida a futuros estudiantes de bachillerato) se incluye el análisis crítico de tablas y gráficos, la detección de falacias y profundización en la representatividad de funciones y distribuciones.

Atendiendo al concepto de distribución normal, éste tema se incluye en España en el primer curso de Bachillerato en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales (Consejería de Educación, 2016, donde se fijan los siguientes contenidos: “Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal. Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.” Consejería de Educación2016, p. 154). De manera similar se incluye en el nuevo currículo para el bachillerato de la modalidad de Ciencias (Consejería de Educación 2016, p. 164). Dichos contenidos se amplían en curso de Bachillerato en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, incluyéndose: “Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida.” (Consejería de Educación 2016, p. 156).

Tabla 1.1. Contenidos relacionados con la distribución normal en el 1º Curso del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales

| Contenidos | Criterios de evaluación | Estándares de aprendizaje |
|---|---|---|
| - Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal.<br>- Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal. | - Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados. | - Distingue fenómenos que pueden modelizarse mediante una distribución normal, y valora su importancia en las ciencias sociales.<br>- Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica, y las aplica en diversas situaciones.<br>- Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida. |

Tabla 1.2. Contenidos relacionados con la distribución normal en el 2º Curso del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales

| Contenidos | Criterios de evaluación | Estándares de aprendizaje |
|---|---|---|
| - Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida. | - Describir procedimientos estadísticos que permiten estimar parámetros desconocidos de una población con una fiabilidad o un error prefijados, calculando el tamaño muestral necesario y construyendo el intervalo de confianza para la media de una población normal con desviación típica conocida y para la media y proporción poblacional cuando el tamaño muestral es suficientemente grande. | - Calcula probabilidades asociadas a la distribución de la media muestral y de la proporción muestral, aproximándolas por la distribución normal de parámetros adecuados a cada situación, y lo aplica a problemas de situaciones reales.<br>- Construye, en contextos reales, un intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida. |

Se pueden ver en detalle los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje asociados a la distribución normal en los nuevos currículos de bachillerato

(MECD, 2015), en las Tablas 1.1, 1.2 y 1.3. Tal currículo es muy ambicioso, pero, a pesar de los esfuerzos realizados por la inclusión de temas de probabilidad y estadística desde edades tempranas, son muchos los estudiantes que finalizan los cursos de estadística sin comprender correctamente o ser capaces de aplicar los conceptos y procedimientos estadísticos (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013).

Tabla 1.3. Contenidos relacionados con la distribución normal en el 2º Curso del Bachillerato de Ciencias

| Contenidos | Criterios de evaluación | Estándares de aprendizaje |
|---|---|---|
| - Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal.<br>- Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal. | - Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados. | - Distingue fenómenos que pueden modelizarse mediante una distribución normal, y valora su importancia en las ciencias sociales.<br>- Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica, y las aplica en diversas situaciones.<br>- Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida. |

La necesidad de reorientar el currículum de estadística en la Educación Secundaria y Bachillerato es evidente desde hace muchos años. Shaughnessy (2007) sugiere que todos los programas educativos necesitan concentrarse en proporcionar a todos los estudiantes de habilidades ligadas al razonamiento y sentido estadístico. Pero hacer realidad estas propuestas pasa por la identificación de las ideas fundamentales, la elección del nivel conveniente de formalización, y sobre todo por la formación del profesorado que será responsable de esta enseñanza (Batanero, Arteaga y Contreras, 2011).

### 1.4. Marco teórico

El marco teórico que se sigue en la realización de este estudio y que sustenta las ideas teóricas que en el mismo aparecen, se corresponde con el Enfoque Onto-Semiótico (en adelante EOS) sobre el conocimiento y la instrucción matemática desarrollado por Godino y colaboradores (Godino, 2002; Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007).

### 1.4.1 Objeto, práctica y significado

El EOS entiende como *objeto matemático* cualquier idea abstracta que interviene en la actividad matemática realizada en los procesos de enseñanza-aprendizaje (D'Amore, Font y Godino, 2007). Son considerados objetos, por tanto, los problemas planteados durante una actividad de matematización, así como los procedimientos, proposiciones, notación y argumentos necesarios para su resolución, entre otros.

Dichos objetos matemáticos se ven manipulados, representados y detallados a través de las prácticas asociadas (Godino y Batanero, 1994), definiéndose *práctica matemática* como "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Según este enfoque, las prácticas pueden ser personales o institucionales, entendiéndose éstas últimas como el conjunto de prácticas compartidas en el seno de la institución, dependientes de los instrumentos de las que ésta dispone así como sus reglas y modos de funcionamiento (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007). Una institución es un conjunto de personas implicadas en una misma actividad; por ejemplo, puede ser una institución un centro educativo.

Debido a la dificultad de determinar el concepto de *significado*, el EOS realiza una clasificación de lo que considera unidades básicas de significado que constituyen los elementos matemáticos primarios a partir de los cuales diseñar actividades didácticas (Figura 1). Éstas son:

- *Situación-problema:* actividad, tarea o ejercicio planteado una persona (en la enseñanza al alumno) que origina una actividad matemática. Se suele tender a su agrupación en tipos o clases. En el estudio que se aborda en el presente documento, la problemática se localiza en torno a las actividades propuestas en los libros de texto en las que interviene la distribución normal. Tauber (2001) cita, entre otros, la aproximación de distribuciones discretas, o la obtención de distribuciones muestrales como campos de problemas asociados a la distribución normal.
- *Lenguaje*: términos, expresiones, notaciones y/o gráficos que se utilizan en la representación y solución de una situación-problema. Ejemplos propios de nuestro estudio son los utilizados al trabajar con la distribución normal (variable, función de densidad, media, desviación típica, tipificación), así como sus representaciones específicas (representación gráfica de la función de densidad o de áreas bajo la curva normal).

- *Conceptos-definición:* objetos matemáticos a los que alude el alumno de forma implícita o explícita para resolver una cuestión matemática. En nuestro estudio, son conceptos los de variable, distribución o probabilidad.
- *Proposiciones, atributos o propiedades*: enunciados que se realizan sobre el objeto matemático empleado. Son ejemplos que la curva normal tiene una asíntota horizontal o que las áreas comprendidas por debajo y por encima de la media son iguales.
- *Procedimientos*: algoritmos, operaciones y técnicas de cálculo que permiten solventar la cuestión planteada. Ejemplos en nuestro estudio serían la tipificación o la obtención de valores de probabilidad normal a partir de la tabla o la calculadora..
- *Argumentos*: Enunciados utilizados para explicar los resultados, propiedades o teoremas obtenidos y/o utilizados a lo largo de la actividad.

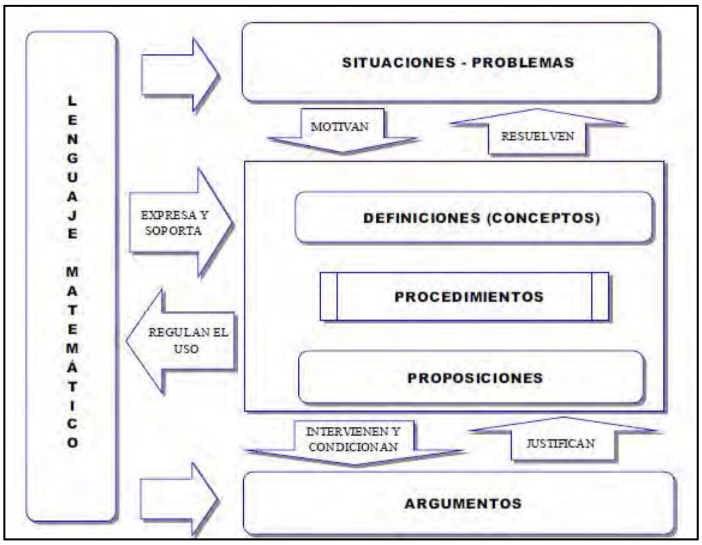



Figura 1.1. Configuración de objetos primarios (Godino y Batanero, 2009, p.7)

En este enfoque, estos objetos matemáticos están relacionados entre sí, formando *configuraciones* (Ver Figura 1.1), distinguiéndose a su vez dos tipo de configuraciones:

- La configuración epistémica alude a objetos matemáticos institucionales que actúan en la resolución de problemas. Esta configuración se subdivide a su vez en; configuración epistémica previa (objetos que el alumno conoce previamente) y configuración emergente (objetos que el alumno aprenderá).

- La configuración cognitiva alude a objetos matemáticos personales que actúan en la resolución de problemas, en la que el estudiante puede hacer una configuración distinta a la configuración institucional.

### 1.4.2 Facetas duales del conocimiento matemático

Existen perspectivas distintas y contrapuestas desde las que pueden ser interpretados los objetos matemáticos anteriormente citados. A continuación se detallarán estas facetas de significado, que serán tenidas en cuenta a lo largo del presente estudio.

#### Faceta institucional y personal

En Godino, Batanero y Font (2007) se entiende como *significado personal* de un objeto matemático cuando éste surge del sistema de prácticas que realiza una persona. Así mismo, se distinguen los siguientes subtipos de significado (Figura 1.2):

- *Global*: sistema de prácticas que un alumno es capaz de realizar alrededor de un objeto matemático concreto.
- *Declarado*: sistema de prácticas que un alumno desarrolla ante una evaluación propuesta por la institución.
- *Logrado*: sistema de prácticas que un alumno desempeña de forma acorde a lo que dicta la institución (los no acordes son considerados errores de aprendizaje).

Por otro lado, en la misma fuente se entiende como significado institucional de un objeto matemático a aquel que se realiza en el seno de una institución. Al igual que en el caso anterior, existen subtipos de significado (Figura 1.2):

- *Referencial*: sistema de prácticas fruto del estudio (libros de texto, diseños curriculares, etc.) y posterior delimitación del objeto matemático a trabajar en el aula.
- *Pretendido*: sistema de prácticas integradas dentro de la programación curricular de aula asociadas al proceso de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático en cuestión.
- *Implementado*: sistema de prácticas que se lleva finalmente a cabo en el grupo clase durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

- *Evaluado*: sistema de prácticas seleccionadas (tareas, cuestiones, observaciones, problemas, etc.) para la evaluación del aprendizaje de dicho objeto.

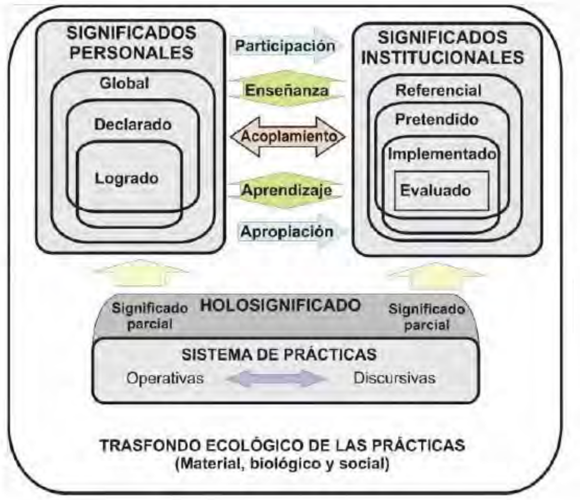



Figura 1.2. Tipos de significado (Godino, 2003, p.140)

### Faceta ostensiva y no ostensiva

En Godino (2002, p.142) se indica que la faceta no obstensiva de un objeto matemática se refiere a la posibilidad de "*pensar e imaginar uno de estos objetos sin necesidad de mostrarlo externamente*". Sin embargo, un objeto matemático cualquiera que se puede mostrar, nombrar o representar atiende a la faceta ostensiva del mismo. Es decir, usamos representaciones (gráficos, palabras símbolos) para representar los objetos matemáticos, pero no hay que confundir los símbolos con dichos objetos.

### Faceta expresión y contenido

Todos los objetos matemáticos intervinientes en un sistema de práctica se relacionan entre sí a través de funciones semióticas. Según Godino, Batanero y Font (2007), el EOS facilita el análisis ontológico-semiótico como instrumento de identificación de dichas relaciones entre objetos y sus procesos interpretativos en la actividad matemática.

Dicha relación se establece entre un objeto antecedente y uno consecuente, y la determina un sujeto en base a algún criterio concreto. De esta forma, uno de los objetos adquiere el estatus de significante y el otro de significado (Godino y Font, 2007), o lo que es lo mismo; uno de expresión y otro de contenido. Por ejemplo, cuando decimos "la curva normal" el antecedente es la expresión verbal y el consecuente el objeto matemático curva normal.

### Faceta extensiva e intensiva

Un objeto matemático de un sistema de prácticas puede ser considerado como algo concreto y particular de una situación determinada, o bien como una clase más general y abstracta de objetos producto de su generalización. Esta característica fundamental de la actividad matemática se entiende como dualidad extensiva e intensiva. Por ejemplo, podemos tener la curva normal N (0,1) o bien la familia de curvas normales N (0, σ).

### Faceta unitario y sistémico

Un objeto matemático de un sistema de prácticas puede ser considerado como una entidad o elemento simple, entendiéndose como unidad básica de significado completo que se utilizan como herramienta vehicular en la práctica que se desarrolla. Así mismo, este mismo objeto puede descomponerse para su estudio, estableciéndose relaciones entre otros objetos unitarios, y ofreciendo un carácter sistémico del mismo. Así la curva normal que es un objeto unitario la podemos descomponer en su rango, función de densidad, simetría, media, etc.

En la figura mostrada a continuación se puede observar un resumen de las facetas expuestas anteriormente, reflejándose los procesos que intervienen en cada una.

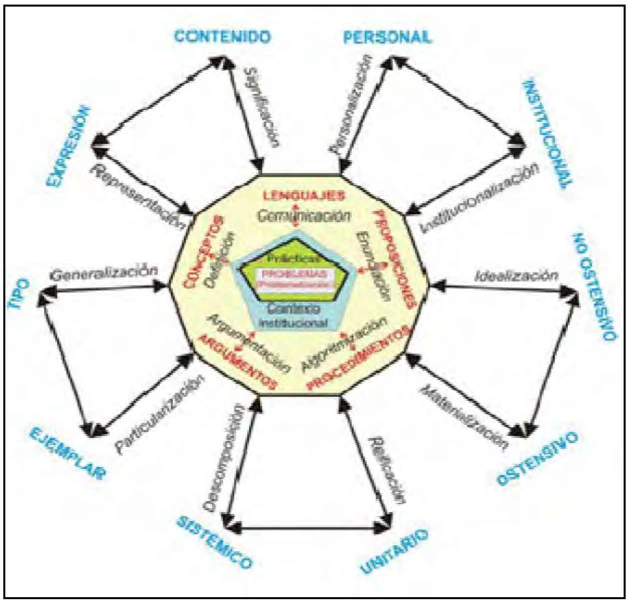



Figura 3. Configuración de objetos y procesos (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 10)

### 1.4.3 La instrucción matemática

El significado personal del alumno está directamente influenciado por la instrucción matemática, uno de cuyos elementos es el libro de texto que es el objeto de nuestro análisis. Así mismo, el significado institucional implementado también está estrechamente relacionado a la instrucción, al ser el resultado de la interrelación existente entre docente, discente, conocimiento y contexto.

El EOS proporciona herramientas de análisis de los procesos de instrucción matemática, tales como las configuraciones, las trayectorias y la idoneidad didácticas.

#### Configuraciones didácticas

Se puede entender configuración didáctica como el conjunto de estados interconectados que se crean entre el docente, el discente, los recursos y la propia situación, durante la resolución de una tarea en una determinada situación-problema. Godino, Batanero y Font (2007) distinguen cuatro tipos de configuraciones didácticas:

- *Configuración magistral*: el docente presenta el significado de los objetos matemáticos implicados y propone al estudiante distintos ejercicios, ejemplos y/o aplicaciones prácticas para que puedan dar sentido a los mismos bajo su responsabilidad.
- *Configuración a-didáctica*: el discente realiza la formulación, validación e institucionalización de los objetos matemáticos, dejando al profesor y el conocimiento pretendido como parte del entorno en el que se desarrolla la práctica.
- *Configuración dialógica*: el docente realiza la formulación y validación de los objetos, dando oportunidad al discente de la exploración de los mismos. La institucionalización se realiza mediante un diálogo contextualizado entre ambos.
- Configuración personal: el discente realiza la resolución de una situación-problema para el que está capacitado, sin requerir la intervención directa del docente.

#### Trayectorias didácticas

Puesto que en un proceso de instrucción es necesario adaptar continuamente la enseñanza pretendida al grupo clase en cuestión, el EOS considera que éste puede modelizarse mediante un proceso estocástico. De esta forma, las configuraciones didácticas estarían conectadas mediante trayectorias dependientes del tiempo. Godino, Contreras y Font (2006) describen seis tipos de trayectorias didácticas:

- *Epistémica*: significado implementado dentro de la institución a lo largo del tiempo.
- *Docente*: funciones del profesor a lo largo del proceso de instrucción.
- *Discente*: funciones del alumno a lo largo del proceso de instrucción.
- *Mediacional*: recursos utilizados a lo largo del proceso de instrucción.
- *Cognitiva*: estados de los significados personales a lo largo del proceso de instrucción.
- *Emocional*: actitudes, predisposición, emociones, etc. Del alumnado ante el estudio de las matemáticas a lo largo del proceso de instrucción.

### 1.4.4 Idoneidad didáctica

*"*La noción de idoneidad didáctica, puede aportar elementos originales y significativos para elaborar una teoría de diseño instruccional, apropiada para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*"* (Godino, 2011, p.4). Según Godino, Contreras y Font (2006) la idoneidad didáctica no es más que una herramienta que permite el paso de la didáctica descriptica a la didáctica focalizada en una intervención eficaz en el grupo. Esta cuenta con seis componentes que se pueden visualizar en la Figura 4 y que deben articularse de forma coherente:

- *Idoneidad epistémica*: grado de representatividad de los significados institucionales implementados o pretendidos con respecto al significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*: grado en el que los significados implementados o pretendidos se acercan a los significados logrados por los alumnos.
- *Idoneidad interaccional*: grado en el que las configuraciones didácticas identifican conflictos semióticos (antes o durante la instrucción) y los resuelven.
- *Idoneidad mediacional*: grado en el que los recursos materiales y la temporalización de su uso en el proceso de enseñanza y aprendizaje, están disponibles y se adecuan al mismo.
- *Idoneidad afectiva*: grado de interés y motivación del alumnado en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- *Idoneidad ecológica*: grado en el que el proceso de enseñanza y aprendizaje se adapta al contexto en el que se desarrolla (centro, sistema educativo, sociedad,…).

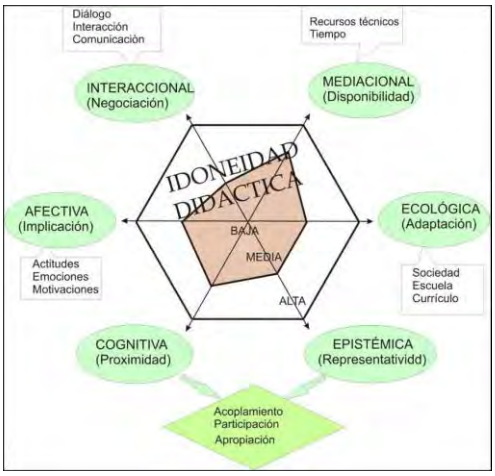



Figura 4. Idoneidad didáctica (Godino, 2011, p.6)

### 1.5 Objetivos del trabajo

Un libro de texto es un medio físico en el que se almacena conocimiento, en el caso que nos ocupa, conocimiento matemático. Es una fase importante que transforma el currículo propuesto en las directrices curriculares (significado institucional pretendido) antes de llegar al implementado en el aula (significado institucional implementado) (Herbel, 2007). Suele ser además una herramienta eficaz para el discente a la hora de seguir las explicaciones proporcionadas por el profesor en base a algún objetivo matemático planteado en la instrucción (Ortiz, 2002). Por tanto, es importante que el profesor sea consciente de la información que presentan los libros de texto utilizados en el aula, de cara a evitar errores conceptuales o la presentación de un significado sesgado. El estudio que se presenta permitirá evidenciar las diferencias existentes asociadas a un objeto matemático, en los libros de texto de una misma editorial para los cursos académicos de 1º y 2º de bachillerato respectivamente.

Este estudio está fundamentado en el marco teórico definido en el epígrafe anterior y da continuidad a las investigaciones previas revisadas en el Capítulo 2. Se complementa el estudio del tema en dos libros de texto (Capítulo 3). De esta forma, los objetivos de esta Memoria son los siguientes:

- O1: *Analizar los contenidos curriculares que sobre distribución normal se sugieren para el 1º y 2º curso de Bachillerato para identificar los objetos matemáticos específicos en los que se enfocará el estudio*. Este objetivo se aborda al comienzo del presente capítulo.

- O2: *Revisar la bibliografía sobre la investigación específica relacionada con el tema*. Este análisis se recoge en el Capítulo 2 y permitirá familiarizarse con el campo de investigación.
- O3: *Realizar un análisis del contenido que se incluye en dos libros de texto, de 1º y 2º curso de Bachillerato respectivamente, sobre la distribución normal*. Este análisis se realiza en el Capítulo 3 haciéndose uso de elementos de nuestro marco teórico y estudiando la evaluación de los contenidos en los dos cursos Matemáticas 1 y 2 de Ciencias Sociales *de una misma editorial*.

# CAPÍTULO 2.
# INVESTIGACIONES PREVIAS

## 2.1. Introducción

En este capítulo constituye una síntesis de investigaciones más relevantes sobre la distribución normal, que nos servirá como base para nuestro propio trabajo y para situarlo en un contexto más amplio. En primer lugar se realiza un breve resumen de las investigaciones que reseñan la importancia del libro de texto como recurso didáctico y guía de la enseñanza, tanto para alumnos como para profesores, describiéndose algunas asociadas a la presentación de la probabilidad y estadística en los textos de secundaria.

Seguidamente se analizan las investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la distribución normal, así como distintos estudios asociados que se han ocupado igualmente del tema. Dentro de este apartado consideramos la comprensión de propiedades de la distribución normal, la del teorema central del límite, las que describen el papel del ordenador en el aprendizaje de la distribución normal y las que describen experimentos e enseñanza de este tema.

## 2.2. Análisis de libros de texto

Puesto que el presente estudio se centra en el análisis de libros de texto, se incluye a continuación un breve resumen de algunos trabajos que destacan su importancia e investigaciones específicas sobre la presentación de la probabilidad y estadística en los libros de texto.

### 2.2.1. El libro de texto como recurso didáctico

La importancia de los libros de texto como recurso didáctico se deriva de su amplio uso, tanto por parte de los estudiantes como de los profesores. Estos libros adaptan los objetivos y contenidos fijados por las orientaciones curriculares legislativas (significado institucional pretendido), constituyendo en sí mismos una adaptación curricular previa a su implementación (significado institucional implementado) en el aula (Herbel, 2007). En ellos, se recoge una selección representativa de los conocimientos científicos y culturales a transmitir al alumnado, dentro de un contexto histórico, con unos valores e ideología concreta (Braga y Belver, 2016).

Desde el punto de vista del docente, el libro de texto constituye en sí mismo un recurso básico para las diferentes áreas de aprendizaje, al ser un apoyo fundamental en la preparación de las clases (Cordero y Flores, 2007). Simultáneamente, tal y como indica Ortiz (2002), son una fuente de datos y actividades para el aula, resultado de un gran esfuerzo de planificación y síntesis. Esto último ya lo apuntó Rico (1990, p.22) al afirmar que el desarrollo de los mismos para su autor *"supone un gran esfuerzo de síntesis, planificación, estructuración y acomodación de contenidos "*.

Desde el punto de vista pedagógico, el libro de texto constituye un recurso didáctico inherente al proceso de instrucción, cuyo objetivo básico es facilitar el aprendizaje a través de un lenguaje que garantice la consolidación del conocimiento (Pellicer, 2007). De esta forma, su uso transmite seguridad y continuidad en los contenidos, ya que se accede a ellos con facilidad requiriendo únicamente su asimilación (Rico, 1990). Asimismo, el libro de texto introduce los objetos matemáticos en distintos contextos, permitiendo apreciar diversas aplicaciones de la matemática y la explotación de diferentes ideas por parte del alumnado, facilitando su aprendizaje (Reys, Reys y Chavez, 2004).

En base a una revisión de la literatura, Ortiz (1999) enumera los siguientes puntos que justifican la importancia del análisis de libros de texto:

- Son una fuente de datos y actividades para el aula de matemáticas; por tanto apoya al profesor en la preparación de sus clases.
- Resultan de un gran esfuerzo de planificación y síntesis, por parte de los autores, que han de resumir y secuenciar una gran cantidad de material.
- Se asumen como un conocimiento que hay que transmitir.
- El alumno lo considera como una fuente para obtener conocimiento fiable y como una guía de su aprendizaje.

El mismo autor añade que, además de las anteriores razones, su importancia se deriva del hecho de que los libros de texto son considerados como un segundo nivel de transposición didáctica (cambios que experimenta el saber matemático al ser adaptado para su enseñanza), después de las directrices curriculares y programas oficiales de estudio.

Sobre el análisis de texto, Fernández y Mejía (2010) afirman que son un recurso básico en la construcción de conocimiento de contenidos matemáticos, ya que organiza los contenidos a trabajar y presenta actividades y sugerencias pedagógicas que pueden ser útiles para la comprensión de cada tema, Por ello opinan que no es una tarea exclusiva de las editoriales, sino también del profesor del aula, al hacer uso de dicho recurso para diseñar sus situaciones-problemas para el aula. Por tanto, se puede concluir que el análisis de los libros de texto es útil a la hora de identificar el currículo de matemática real que se implementa en las aulas. Ello explica el gran número de investigaciones que en los últimos años se centran en el estudio de los libros de texto de matemáticas .En el presente estudio se analizan dos libros de texto de una editorial de gran tradición en Andalucía para el bachillerato. A continuación resumimos algunos trabajos que analizan temas de estadística y probabilidad en los libros de texto.

### 2.2.2 Estudios sobre la presentación de la estadística y probabilidad en libros de texto

A pesar de la importancia del análisis de los libros de texto definido en el epígrafe anterior, la investigación sobre la presentación de la estadística y probabilidad en los mismos es muy escasa en todos los niveles educativos. A nivel universitario y de forma cronológica, se subrayan los estudios de Tauber (2001) acerca de la distribución normal, Alvarado (2007) acerca del teorema central del límite y el de Olivo (2008) acerca de intervalos de confianza. A continuación se resumen las más significativas a nivel de Educación Secundaria relacionadas con las medidas de tendencia central y probabilidad. Por razones de espacio no reseñamos los estudios relacionados con la correlación y regresión entre ellos los de Sánchez-Cobo (1999) y Gea (2012).

#### Medidas de tendencia central

Se han localizado sólo dos estudios realizados al respecto; uno realizado sobre libros de texto españoles (Cobo, 2003) y otro sobre libros de texto mexicanos (Mayén, 2009). Vemos a continuación los datos más representativos de ambos.

En el estudio de Cobo se escoge una muestra de 22 libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria (en adelante E.S.O.); concretamente 14 libros de 3º E.S.O. y 8 libros de 4º E.S.O. Tras analizarse los elementos de significado más representativos contenidos en los mismos, el estudio concluye lo siguiente:

- Campos de problemas: no se tratan todos los tipos posibles, obviándose por ejemplo "*estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas en presencia de errores*" a pesar de ser la forma en la que históricamente surge la idea de media o "*estimar el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población para una variable con distribución aproximadamente simétrica*" a pesar de ser una de las principales aplicaciones de la media.

- Contextos: son muy variados y con porcentaje elevado de aparición de todos los contemplados en el informe PISA.
- Algoritmos de resolución: no se tratan todos los métodos de resolución posibles, como el cálculo gráfico de la media y mediana por citar alguno.
- Definiciones y propiedades: gran diversidad de acepciones de los conceptos de media, moda y mediana, prestándose especial atención al cálculo de la misma sin tratarse con rigor ni profundidad sus propiedades.

Consecuencias posibles asociadas a estas conclusiones son, la falta de una visión completa del concepto de media y sus posibilidades, así como un sesgo en el contexto de aplicación de la misma. En el estudio de Mayén, la muestra consta de 2 libros de texto y un cuaderno de prácticas de Matemáticas de tercer grado de Educación Secundaria. Tras analizarse los elementos de significado más representativos contenidos en los mismos, el estudio concluye que:

- Campos de problemas: no se tratan todos los tipos posibles, obviándose "*estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas en presencia de errores*" por citar alguno; así mismo, se incluye algún tipo no presente en los libros españoles analizados por Cobo como "*comparación de dos distribuciones de datos con variables numéricas*".
- Contextos: no son muy variados, aunque sí son familiares para el alumnado.
- Algoritmos de resolución: tampoco se tratan todos los métodos de resolución posibles en los libros mexicanos analizados.
- Definiciones y propiedades: sin diferencias importantes con respecto a la gran variedad de acepciones y la pobreza en el rigor y profundidad en las propiedades, encontrada en el estudio de Cobo.

**Probabilidad**

Uno de los estudios más antiguos fue realizado por Ortiz (1999). En dicho estudio, la muestra consta de 11 libros de texto del primer curso de bachillerato. Tras analizarse los elementos de significado más representativos contenidos en los mismos, el estudio concluye que:

- Campos de problemas: existe escasez de problemas asociados a conceptos básicos (por ejemplo referidos a aleatoriedad y experimentos aleatorios), así como una falta destacada de ejercicios interpretativos y analíticos (reduciéndose los mismos al cálculo).
- Contextos: se aprecia una restricción importante (habitualmente se presentan los conceptos y actividades a través de un contexto de juego de azar).
- Algoritmos de resolución: tampoco se tratan todos los métodos de resolución posibles (por ejemplo es prácticamente inexistente el uso del diagrama de árbol), haciéndose en algunos casos un sobreuso de alguno de los mismos (como por ejemplo la regla de Laplace en la asignación de probabilidades).
- Definiciones y propiedades: si bien las concepciones clásicas de variable aleatoria, probabilidad, frecuencia y espacio muestral son tratadas en casi la totalidad de los libros estudiados, la profundidad de las mismas presentando otras concepciones y propiedades es rotundamente inadecuada. Se detecta alguna confusión en las definiciones (por ejemplo en la relativa a suceso condicionado). Además, en general se hace un uso excesivo de la presentación de la información en forma verbal.

Un estudio más reciente es el de Gómez (2014) quien con el mismo método utilizado por las anteriores autoras y el mismo marco teórico que los anteriores, compara los contenidos de probabilidad en dos series de libros de texto de 1º a 6º de Educación Primaria. La novedad de su estudio es que clasifica todos los objetos matemáticos identificados (campos de problemas, definiciones, propiedades, lenguaje, procedimiento y argumentos) en relación a los diferentes significados de la probabilidad: intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo. Los compara por curso y editorial, así como con las directrices curriculares.

### 2.3. La distribución normal

El segundo punto de nuestros antecedentes se centra en la distribución normal. Comparándolos con estudios realizados sobre otros conceptos matemáticos, son pocas las investigaciones previas centradas en la distribución normal de forma específica. De hecho, tal y como se verá a continuación, los estudios que se han localizado al respecto, se focalizan en puntos aislados de la distribución, desde teorías y metodologías diversas (como estudios relacionados con el teorema del límite o con la comprensión de conceptos de inferencia estadística), con pocos estudios pormenorizados desde una visión global y unificada de la misma.

### 2.3.1. Comprensión de propiedades de la distribución normal

En los epígrafes siguientes se hará una descripción de los estudios encontrados relacionados con estudiantes de secundaria y/o primeros cursos universitarios, si bien no queremos dejar de mencionar el primer antecedente relacionado, realizado por Piaget e Inhelder (1951) sobre la evolución del razonamiento probabilístico desde la infancia hasta la adolescencia. En dicho trabajo, se estudia si los niños perciben la regularidad en la forma de la distribución que se forma (observando la simetría de las trayectorias posibles) de unos granos de arena dejados caer desde un pequeño orificio (aparato de Galton o reloj de arena). En estos trabajos se pide a los niños predecir la distribución final, apuntada en el centro y simétrica. Así, la identificación de la regularidad, simetría y dispersión, así como la repetición del experimento en la regularidad final, se traduce en una distribución acampanada (normal). Estos investigadores describen varias etapas en el razonamiento hasta llegar a predecir de forma aproximada la forma de esta distribución.

En otros trabajos, ya realizados con estudiantes universitarios, se ha investigado la comprensión de la operación de tipificación en una curva normal. Entre ellos encontramos el de Huck (1986) que indican un error frecuente, que consiste en pensar que la distribución normal tipificada solo toma valores acotados entre -3 y +3; aunque estos valores son los más frecuentes, en teoría puede tomar valores en un rango infinito.

Otra dificultad detectada por Hawkins Joliffe y Glickman (1992), se produce errores cuando los estudiantes usan la distribución normal como una aproximación de la distribución binomial. En este caso, los estudiantes fallan en reconocer los casos en que puede y no puede aplicarse la aproximación; además, también se olvidan de aplicar la corrección de continuidad y no entienden el porqué de la misma.

### 2.3.2 Comprensión del Teorema Central del Límite

Como ya se ha destacado en epígrafes anteriores de esta Memoria, una de las aplicaciones más relevantes de la distribución normal es su uso en el Teorema Central del Límite. Dicho teorema es uno de los más destacados en estadística por su aplicabilidad en el campo de la inferencia, ya que, en condiciones muy generales la media de una muestra aleatoria se distribuye con distribución normal aproximada para muestras grandes. Es por ello que resulte necesario para el trabajo que nos ocupa, revisar la literatura asociada a estudios relacionados con su comprensión.

El primer estudio a destacar es el realizado por Méndez (1991), quien compara la comprensión del teorema central del límite en estudiantes de primer curso en la universidad y estudiantes de doctorado. Su estudio persigue tres propósitos fundamentales:

- Obtener datos para representar las concepciones del teorema fundamental de límite que tienen los sujetos de estudio.
- Identificar y clasificar los errores más comunes.
- Observar si las creencias de los estudiantes cambiaban en los dos grupos.

El objetivo general era observar el grado de comprensión, por parte de los sujetos de la muestra, del teorema central del límite y de cuatro propiedades básicas que se verán a continuación. Dichas propiedades son fundamentales para adquirir una comprensión sólida del teorema. Méndez las obtuvo tras realizar un estudio de 10 libros de texto de estadística básica y las resumió de la siguiente forma:

1. La media de la distribución muestral es igual a la media de la población, e igual a la media de una muestra cuando el tamaño de la muestra tiende al infinito.
2. La varianza de la distribución muestral es menor que la de la población (cuando $n > 1$).
3. La forma de la distribución muestral tiende a ser acampanada a medida que se incrementa el tamaño muestral, y aproximadamente normal, independientemente de la forma de la distribución en la población.
4. La forma de la distribución muestral crece en altura y decrece en dispersión a medida que el tamaño muestral crece.

Méndez, una vez estableció el marco de referencia a partir del cual realizar su investigación, elaboró dos cuestionarios que pasó a los sujetos de la muestra. El primer cuestionario constaba de ítems de elección múltiple, con problemas clásicos extraídos de los libros de texto analizados. En el segundo se exponían 23 preguntas relacionadas con distintas acepciones y formas de representación de diversos conceptos estadísticos relacionados con la distribución normal. Como complemento a estos test, se realizaron entrevistas clínicas a un subgrupo de sujetos de la muestra. A partir de la información obtenida en los test y las entrevistas, Méndez definió dos niveles de comprensión:

1. Nivel básico: Consta de las habilidades y conocimientos necesarios para resolver los ejercicios incluidos en los libros de texto.
2. Nivel avanzado: Consta de las habilidades y conocimientos necesarios para alcanzar conocimiento adicional que no está incluido habitualmente en los libros de texto.

Además de definir estos dos niveles de comprensión, obtuvo la siguiente información relevante en cuanto a la comprensión de los estudiantes sobre el Teorema Central del Límite:

- Los estudiantes expertos demostraron contar con una buena comprensión del teorema y de sus elementos implícitos; sin embargo dicha comprensión era excesivamente formal sin mostrar una comprensión profunda. Las explicaciones a sus respuestas se basaban generalmente en los axiomas de probabilidad, presentando una falta de conocimiento en la utilización de expresiones cualitativas e intuitivas.
- Los estudiantes noveles demostraron tener una comprensión más pobre del teorema, usando los datos disponibles sin tener en cuenta la población de la que provenían y sin considerar el tamaño de muestra.
- Ninguno de los grupos demostró un conocimiento profundo en el uso del vocabulario técnico.

Otro autor que investiga el teorema central del límite es Alvarado (2007), que comienza con el estudio de la historia de la evolución del teorema central del límite y un estudio de 16 libros de textos dirigido a estudiantes de ingeniería. Con esta base diseña un experimento de enseñanza que incorpora el uso de la hoja Excel y el programa estadístico @risk para simular distribuciones de probabilidad y el comportamiento del teorema. Como resultado de este experimento de enseñanza indica que los estudiantes mostraron una buena comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. Tampoco tuvo mayor dificultad el lenguaje simbólico, con algunas excepciones en los problemas algebraicos abiertos. El procedimiento algebraico y la tipificación fueron los mejor utilizados en general, así como la simulación con apoyo de Excel. Algunas dificultades que se observaron fueron: errores de estandarización, confundir la suma de variables aleatorias con el promedio, no aplicar la corrección de continuidad. Asimismo, los estudiantes erróneamente lo extrapolan a situaciones inadecuadas.

### 2.3.3 Investigaciones sobre la enseñanza de la distribución normal

Si bien en todos los decretos curriculares de Educación Primaria y Secundaria se incorporan contenidos estadísticos, la realidad es que estos no se tratan en su totalidad ni en la profundidad que requieren. Habitualmente dichos contenidos se dejan para el final, no abordándose en caso de falta de tiempo, o explicándose con un nivel muy básico. Como consecuencia, el alumnado de los cursos introductorios a la universidad no cuenta con una formación matemática sólida para afrontar un estudio formal de inferencia.

Tomando conciencia de ello, Tauber (2001) desarrolló un estudio global de la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal en un curso introductorio universitario de estadística aplicada, con el objetivo de identificar las principales dificultades y errores de compresión de la distribución normal del alumnado que no han seguido un bachillerato científico (pues estos cuentan con una formación matemática más sólida que constituye una ventaja a la hora de hacer la transición del análisis de datos a la inferencia). Haciendo uso del Enfoque Onto-Semiótico como marco teórico sobre el significado institucional y personal de los objetos matemáticos (Godino, 1996; Godino y Batanero, 1998), organizó su estudio en dos fases:

1. Estudio epistémico de la distribución normal basado en el análisis de libros de texto universitarios, identificando los elementos de significado más prototípicos que aparecen y definiendo éste significado institucional de referencia.
2. Estudio de la secuencia de enseñanza diseñada (significado institucional pretendido) sobre la distribución normal experimentado a lo largo de dos cursos académicos, así como el análisis de la observación realizada (significado institucional implementado) y el trabajo realizado por el alumnado durante el proceso.

En la primera fase, la muestra consistió en 13 libros de texto de distintas editoriales, seleccionados bien por el prestigio de su autor, por el número de ediciones del mismo, los idiomas a los que ha sido traducido, por contar con un enfoque actual del tema o por estar destinados a alumnado con escasa base matemática. En dichos libros se estudiaron los capítulos referidos a la distribución normal y a su uso o aplicación, identificándose los elementos de significado más comunes. De acuerdo al marco teórico elegido, realizó la clasificación de dichos elementos en las distintas categorías posibles, lo que se puede ver en la Tabla 2.1, donde hemos adaptado los tipos de objetos a nuestra terminología.

Tabla 2.1. Elementos de significado específicos de la distribución normal en los libros de texto seleccionados

| Campos de problema | Procedimientos | Argumentos |
|---|---|---|
| Ajuste (aproximación al histograma)<br>Aproximación de distribuciones discretas<br>Distribución exacta en el muestreo<br>Distribución asintótica en el muestreo<br>Estimación por intervalos<br>Contraste de hipótesis | Estudio descriptivo de datos para ajustar una curva<br>Tipificación<br>Cálculo de probabilidades y valores críticos con tablas<br>Obtención de límites de intervalos centrales. Comparación de puntuaciones | Representación gráfica<br>Comprobación de casos particulares<br>Demostraciones informales<br>Demostraciones deductivas<br>Análisis<br>Generalización<br>Síntesis |

| Propiedades | Representaciones |
|---|---|
| Área total bajo la curva normal<br>Asíntota horizontal<br>Curtosis en la normal<br>Curva de densidad, curva normal<br>Distribución normal, distribución normal típica o estándar<br>Distribuciones discreta y continua de probabilidad<br>Distribución original y transformada<br>Distribución de casos en relación a la d. típica<br>Ejes: de simetría en la distribución normal<br>Función de densidad, aproximación al histograma y polígono de frecuencia<br>Función de distribución. Modelo<br>Parámetros y estadísticos; parámetros de la distribución normal<br>Posición relativa de media, mediana y moda<br>Probabilidad de valores en un intervalo; probabilidad en los intervalos centrales<br>Punto de inflexión. Punto de ordenada máxima. Simetría<br>Teorema central del límite<br>Transformaciones algebraicas<br>Unimodalidad<br>Variable aleatoria, cuantitativa, continua, discreta | Gráficas:<br>Curva de densidad (gráfica)<br>Curva de distribución (gráfica)<br>Representación de áreas bajo la curva de densidad<br><br>Numéricas:<br>Tablas de la N(0,1). Tablas de cola, Tablas centrales<br><br>Verbales y Simbólicas:<br>"Campana de Gauss", "Densidad normal", "Distribución gausiana"<br>$\mu$, $\sigma$, $\sigma 2$, $\bar{\xi}$, $\sigma$<br>$N(\mu,\sigma)$, $N(\mu_x, \sigma_x)$,<br>$\mu - k.\sigma < X \leq \mu + k.\sigma$, $(\mu - k.\sigma, \mu + k.\sigma)$, $\mu \pm k.\sigma$<br>$\bar{x} \pm k.s$, $(\bar{x} - k.s, x + k.s)$<br>$P(a < z < b) = P(z < b) - P(z<b)$<br>$P(z > a) = 1 - P(z < a)$;<br>$P(x_i) \geq 0$ para todo $x_i$ o $f(x) \geq 0$<br>$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ |

En la segunda fase, diseñó, llevó a cabo y finalmente analizó una experiencia didáctica sobre la distribución normal en dos cursos sucesivos (1998-1999 y 199-2000) participando un total de 117 alumnos. Para desarrollar dicha experiencia, realizó una selección de los elementos de significado básicos que quería presentar al alumnado del curso introductorio a la universidad donde se iba a realizar la experiencia, así como las relaciones entre los mismos que debieran alcanzar al finalizar el proceso. En la Tabla 2.2 y 2.3 se muestran dichos elementos y las sesiones donde se usaron.

Tabla 2.3. Elementos de significado institucional específicos de la distribución normal observados

| Campos de problemas | T1 | P1 | T2 | T3 | P2 | T4 | P3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ajuste de un modelo (aproximación al histograma) | X | X | X | | | X | X |
| Aproximación de distribuciones discretas | | | X | X | X | | |
| Representaciones | | | | | | | |
| Representaciones gráficas | | | | | | | |
| Gráfica de la función de densidad normal | X | X | X | X | X | X | X |
| Histograma y función de densidad superpuestos | X | X | X | X | X | X | X |
| Gráfica de la función de distribución | | | X | X | X | | X |
| Gráficas superpuestas de funciones de densidad o de distribución | | | X | X | | | X |
| NORMAL PROBABILITY PLOT | | | | | | | |
| Gráfico de puntos | | | | | | | |
| Representación de áreas o de intervalos bajo la curva normal | | | | | | | |
| Representaciones numéricas | | | | | | | |
| Áreas de cola Valores críticos | X | | X | X | X | | X |
| DISTRIBUTION FITTING | | | | X | | | X |
| Representaciones simbólicas | | | | | | | |
| Z, X, N(μ, ó), N(x; μ, ó) | X | X | X | | X | X | |
| z = (X - μ) / ó, X = z.ó + μ | X | X | X | | X | X | |
| μ- k.ó < X < μ + k.ó , (μ - k.ó, μ + k.ó), μ ± | X | | X | | | X | |
| k.ó | | | X | | | X | |
| μx ± k.s, (μx – k.s , x + k.s) | | | | | | | |
| P (μ - k.σ < X < μ + k.σ) P($x_1$ < X < $x_2$) | | | X | | | | |
| P($x_i$) ≥ 0 para todo $x_i$ o f(x) ≥ 0 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ | X | | X | | | | |

| Procedimientos | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Estimación de probabilidades a partir de tablas de frecuencia | X | X | | | | | |
| Ajuste de una curva y estudio descriptivo de datos | X | X | X | X | X | | |
| Cálculo de áreas, probabilidades y valores críticos (con lápiz y papel) | X | | X | X | | X | |
| Cálculo de áreas o probabilidades en la curva normal y de valores críticos (con ordenador) | | X | | X | X | | X |
| Contraste de ajuste visual | X | X | X | X | X | | X |
| Obtención de límites en intervalos centrales | X | X | X | X | X | X | |
| Representación gráfica de datos | X | X | X | X | X | X | X |
| Tipificación: cálculo de valores tipificados o sus inversos | | | | | | X | |

En cada actividad planteada se hizo uso de varios elementos de significado de forma que se forzara al alumnado a obtener conclusiones consistentes sobre los campos de problemas realizados, de forma que fueran capaces de establecer relaciones entre dichos elementos dando forma al significado personal de la distribución normal progresivamente. Destacar además que, tras el análisis de los resultados de la experiencia durante el primer curso académico, se realizó una modificación de la didáctica planteada, mejorando sustancialmente la misma para facilitar la consecución de los objetivos del estudio.

Posteriormente, realizó un análisis y comparación entre el significado institucional previsto y el realmente observado, identificando además la evolución del significado personal de los elementos construido por el alumnado, así como los desajustes y dificultades más comunes entre otros. Para ello, hizo uso de la toma de notas de las interacciones entre alumnos (gran parte de las actividades se resolvían bien en parejas o en grupos), así como las preguntas y dudas realizadas en cada sesión.

Tabla 2.2. Elementos de significado institucional específicos de la distribución normal observados

| Propiedades | T1 | P1 | T2 | T3 | P2 | T4 | P3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Área bajo la curva normal, áreas de cola, valores críticos | | | X | X | X | X | X |
| Desviación típica (como parámetro) | X | | X | X | | X | X |
| Distribución normal tipificada, d. original y transformada | | | | | | X | |
| Función de densidad normal, función de distribución | X | X | X | X | X | X | X |
| Media como parámetro | X | | X | X | | | X |
| Parámetros de la distribución normal | X | | X | X | X | | X |
| Posición relativa de media, mediana y moda en la d. normal | X | | X | | X | | |
| Probabilidad de valores en un intervalo en la d. normal | | | X | X | X | X | |
| Propiedad de los intervalos centrales | X | X | X | | X | X | |
| Sumetria | X | X | | X | X | X | X |
| Curtosis | | X | | X | X | X | |
| Unimodalidad | X | X | | X | X | | X |
| **Argumentos** | | | | | | | |
| Análisis | | X | | | X | | X |
| Aplicación de una propiedad | X | X | X | X | X | X | X |
| Comprobación de casos particulares o de propiedades | X | X | X | X | X | X | X |
| Generalización de una propiedad | X | | | | | X | X |
| Representación gráfica | X | X | X | X | X | X | X |
| Síntesis | | X | | | X | | X |
| Simulación con ordenador | X | X | X | X | X | | X |

En cuanto a las conclusiones obtenidas sobre el significado institucional observado, se pueden destacar:

- Existencia de una notable dificultad en las tareas propuestas durante la primera sesión, pues se referían a conceptos tratados en temas anteriores que el alumnado no tenía adquiridos correctamente, siendo necesario insistir y recordarlos (conceptos como la simetría o el significado del área en los histogramas entre otros).

- Progresivamente la dificultad de las tareas va en disminución para el alumnado en las siguientes sesiones, aplicando correctamente los conceptos previos, relacionándolos entre sí, y demostrando un dominio básico de los nuevos conceptos y propiedades.

Según Batanero, Tauber y Sánchez (2001), los elementos de significado relacionados específicamente con la distribución normal, que constituyen una mayor dificultad de comprensión para el alumnado detectados en el estudio son, entre otros:

- Interpretación de áreas en histogramas de frecuencia y problemas en el cálculo del área dentro de un intervalo, cuando ello implica el cambio de los extremos de los intervalos.
- Dificultad en discriminar los casos en que una variable cuantitativa discreta puede y no puede ser aproximada por una distribución continua y las implicaciones que esta aproximación tiene.
- Dificultad en recordar y aplicar correctamente los convenios de interpretación de los coeficientes de asimetría y curtosis.
- Dificultad en recordar y aplicar correctamente los convenios de lectura de los elementos constitutivos de un gráfico estadístico.
- Escasa capacidad de argumentación, sobre todo de análisis y síntesis.

## 2.4. Conclusiones del estudio de los antecedentes

En la síntesis realizada hemos observado que prácticamente todas las investigaciones sobre la distribución normal se han realizado con estudiantes universitarios, exceptuando los trabajos sobre desarrollo cognitivo de la idea de distribución; trabajos que no profundizan en las propiedades de la distribución normal.

Sin embargo, actualmente se enseña esta distribución en 1º cuso de Bachillerato y 2º curso para el Bachillerto de Ciencias Sociales. Además estos últimos estudiantes tienen forzosamente que aplicar el tema en la Prueba de Acceso a la Universidad donde uno de los cuatro problemas propuestos se basa en la distribución normal. Si los estudiantes no han adquirido correctamente la comprensión de las diferentes propiedades de la distribución y sus campos de problemas, así como de los procedimientos asociados fallarán en el cálculo de probabilidades, la tipificación o la determinación de valores críticos e intervalos de confianza.

Dada la importancia que hemos destacado del libro de texto como recurso didáctico, tanto para profesores, como para estudiantes, nos parece importante iniciar una línea de investigación sobre la forma en que se presenta el tema en los textos Bachillerato. Ello nos ha movido a elegir este tema e iniciarnos en este análisis aunque sea con sólo dos textos y con carácter exploratorio. Dicha investigación podría continuarse en el futuro con el análisis de otros libros de texto o profundizando en los resultados que en esta Memoria presentamos.

Pensamos que nuestro análisis proporcionará información a los profesores y puede servir para fundamentar trabajos futuros, tanto sobre el análisis de la distribución normal en los libros de texto, como sobre la enseñanza en nivel de Bachillerato.

# CAPÍTULO 3.
# ANÁLISIS DE TEXTOS

## 3.1. Introducción

En este capítulo resumimos la investigación realizada acerca de la presentación de las nociones relacionadas con la distribución normal en dos libros de texto actuales de una misma editorial, uno de ellos dirigido a los estudiantes de 1º curso de Bachillerato de Ciencias Sociales y el otro a los de 2º curso de la misma especialidad. Cada uno de ellos consta de dos tomos, teoría y problemas. Se han elegido esta especialidad de Bachillerato por ser la única en donde aparece este tema en los dos cursos; en 1º curso como objeto de estudio en sí mismo y en segundo como instrumento para el cálculo de probabilidades y valores críticos en el estudio de la inferencia.

En primer lugar se describen los libros utilizados y la metodología seguida para el análisis de los mismos. A continuación se estudian con detalle los tipos de objetos matemáticos definidos en el enfoque ontosemiótico: campos de problema, lenguaje matemático y sus tipos, definiciones (conceptos) propiedades, procedimientos y argumentos, identificando las principales categorías en cada uno de ellos que se introducen en estos libros y mostrando ejemplos de las mismas tomados de los textos. También se comparan los dos textos para ver la forma en que se distribuye el tema en los dos cursos.

Finalmente se aportan las conclusiones de nuestro estudio.

## 3.2. Metodología de análisis

Puesto que se trata de un estudio exploratorio y cualitativo, se ha optado por una muestra muy reducida de libros, que se examinarán con mayor profundidad, en lugar de realizar un estudio más superficial de más libros.

Los textos que se van a analizar corresponden a una misma editorial y se han elegido por el prestigio de la misma y su amplia difusión en España. Además, se han editado recientemente, lo que asegura que están adaptados al currículo actual (MECD, 2015). La forma en que se seleccionaron los libros de texto fue mediante un muestreo dirigido, es decir, de acuerdo a determinadas características que interesaban para el trabajo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Cada libro consta de dos tomos: uno de teoría y otro de problemas, lo que en realidad implica la revisión de cuatro libros diferentes, dos teóricos y dos prácticos. Estos textos son los siguientes

- T1: Cardona, S. y Rey, J.A. (2015), Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. 1º de Bachillerato. Madrid: Edelvives Bachillerato. Libro de Teoría
- T1: Cardona, S. y Rey, J.A. (2015), Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. 1º de Bachillerato. Madrid: Edelvives Bachillerato. Libro de práctica
- T2: Rey, J.A. y Cardona, S. (2015). Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. 2º de Bachillerato: Madrid: Edelvives Bachillerato. Libro de Teoría
- T2: Rey, J.A. y Cardona, S. (2015). Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. 2º de Bachillerato: Madrid: Edelvives Bachillerato. Libro de práctica

El análisis de libros de texto que se presenta en este capítulo adapta la metodología usada en otras investigaciones del grupo de educación estadística de la Universidad de Granada, como, por ejemplo, las de Cobo (2003) o Gea (2012). Esta metodología se basa en el análisis de contenido, descrito por Porta y Silva como "una técnica objetiva, sistemática, cualitativa y cuantitativa que trabaja con materiales representativos, marcada por la exhaustividad y con posibilidades de generalización" (p. 8). En nuestro caso consta de los siguientes pasos:

- Identificación de los objetos matemáticos que se quieren analizar en los textos. (situaciones problema, elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos). En nuestro caso partimos del significado de referencia de la distribución normal descrito en Batanero, Tauber y Sánchez (2001) y Tauber (2001), en su análisis de libros de texto (Tabla 2.1), que posteriormente utilizaron para diseñar un experimento de enseñanza con estudiantes de la Facultad de Educación, añadiendo nuevas categorías cuando encontramos alguna no definida por la citada autora.
- Identificar si es posible estos objetos en los temas relacionados con la distribución normal en los dos textos. Para ello se realiza una lectura cuidadosa del tema comparando cada ejemplo, problema o apartado con la definición de las categorías realizada por Tauber (2001), Sí aparece alguno nuevo se incluye en una nueva lista.
- Selección de ejemplos para ilustrar los objetos matemáticos presentes en el libro de texto. Estos ejemplos se reproducen y analizan en este capítulo para ilustrar la descripción de la categoría. Indicamos mediante Lxt la parte teórica del libro x y mediante Lxp la parte práctica, que aparecen encuadernadas por separado, para indicar el número de la página donde se toma el ejemplo.

- Elaboración de tablas que resumen los contenidos en los dos libros de texto (tanto en su parte teórica como práctica), indicando la presencia de cada categoría en las diferentes variables; en algunos casos se indica la presencia de aparición.
- Obtención de conclusiones a partir de dichas tablas que permitan orientar a los autores de los libros para mejorar la idoneidad epistémica de la presentación de la distribución normal en los textos.

A continuación presentamos los resultados del análisis, organizados según los tipos de objetos matemáticos considerados en el marco teórico.

### 3.3. Análisis de situaciones-problemas

Como se ha comentado en la descripción del marco teórico en el que se basa este estudio, una actividad-problema es todo ejercicio, problema o situación que origina una actividad matemática. Precisamente son las prácticas matemáticas realizadas para resolver estos problemas las que posteriormente originan, tanto históricamente, como en el aprendizaje del alumno, la necesidad de los diferentes objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994), en nuestro caso, la distribución normal. Es por ello que sean estos los primeros elementos a analizar. Así, se han considerado cuatro de las seis situaciones que se usan para hacer surgir la idea de distribución normal propuestas en Tauber (2001) (Tabla 2.1), que son las siguientes y donde hemos variado ligeramente la primera categoría:

*P1. La distribución normal como modelo teórico que describe un fenómeno de la vida real.* Este campo se presenta cuando se pide resolver un problema donde la distribución normal se usa como modelo, bien, a partir de unos datos recogidos en algún estudio o simplemente cuando se describe una aplicación de la curva normal. Precisamente fue una de las primeras aplicaciones de la distribución, para describir los errores de medida por Galileo, Gauss y otros autores, como se describe en Masmela y Serrato (2009). En la Figura 3.3.1 se incluye un ejemplo, en el que la distribución normal se usa como modelo que describe la cantidad de emisiones de sustancias tóxicas en una marca de automóviles. No aparece explícitamente en Tauber (2001) pues ella trabajó siempre con datos empíricos, pero sería una modificación del que ella define como *Ajuste de una curva al histograma o polígono de frecuencias en una distribución de datos empíricos o a partir de la descripción de un problema como modelo teórico aproximado.*

SUSTANCIAS CONTAMINANTES

Un estudio sobre sustancias contaminantes analiza la cantidad de óxido de nitrógeno emitida por los vehículos de cierto modelo y establece que las emisiones siguen una distribución normal cuya media es de 1,6 y que tiene una desviación típica de 0,4.

1. Calcula la probabilidad de que, al elegir un coche de ese modelo al azar, emita una cantidad de óxido de nitrógeno menor que 1,8.
2. Halla la probabilidad de que la concentración de óxido de nitrógeno esté entre 1,2 y 1,4.
3. Determina la concentración de óxido de nitrógeno, *c*, tal que la probabilidad de que un vehículo emita una concentración inferior a ella sea de 0,990 1.

Figura 3.3.1. Ejemplo de campo de problemas P1 (L1p, p. 175).

*P2. Aproximación de distribuciones de variables aleatorias discretas con un número grande de valores*. Este campo se da cuando se incrementa el número de veces que observamos un fenómeno en una distribución de variable discreta, de forma que el diagrama de barras se acerca a la curva de densidad de la normal, que se utilizaría como aproximación de la distribución discreta, problema estudiando entre otros por de Moivre y Gauss (Alvarado y Batanero, 2006). Tauber (2001) indica que la aproximación de una variable discreta por una continua puede realizarse si se sustituye el diagrama de barras por el histograma de frecuencias cuyos intervalos tienen base de amplitud unitaria. Un ejemplo típico es el de la distribución binomial para valores grandes del parámetro *n*. En la Figura 3.3.2 se incluye un ejemplo, en el que, además, se recuerdan las condiciones en que la distribución binomial se puede aproximar mediante la normal. El libro omite explicar la corrección de continuidad, por lo que el cálculo realizado tiene un pequeño error de aproximación:

EJEMPLO 1

Si se lanza una moneda al aire 50 veces, halla la probabilidad de obtener más de 30 caras.

Es una distribución binomial B (50 ; 0,5), ya que se repite el experimento 50 veces y la probabilidad de éxito, obtener cara, es 0,5.

Así pues, hay que hallar la probabilidad de obtener más de 30 éxitos, es decir, P (n.º de éxitos > 30). Según lo explicado hasta ahora, se debería calcular:

P (obtener más de 30 éxitos) = P (obtener 31 éxitos) + P (obtener 32 éxitos) + P (obtener 33 éxitos) + ... + P (obtener 50 éxitos)

En total habría 20 casos en los que aplicar la fórmula. Para evitar esto:

- Se comprueba si es posible aproximar esta distribución binomial a una normal:

$$n \cdot p = 50 \cdot 0{,}5 = 25 \geq 5 \text{ y } n \cdot (1 - p) = 50 \cdot 0{,}5 = 25 \geq 5$$

- Se constata que ambas desigualdades se cumplen, por lo que esta distribución binomial se aproxima a la normal $N(50 \cdot 0{,}5 ; \sqrt{50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5})$; luego, se trata de una distribución normal N (25 ; 3,54).

Hallar la probabilidad de obtener más de 30 caras supone calcular P (X > 30).

Se define la variable Z, como $Z = \frac{X - 25}{3{,}54}$, que sigue una distribución N (0 , 1).

Para hallar P (X > 30), se aplica la tipificación $P(X > 30) = P\left(Z > \frac{30 - 25}{3{,}54}\right) = P(Z > 1{,}41)$.

Si se dibuja el área que se quiere hallar, se constata que se encuentra determinada por complementarios; luego, P (Z > 1,41) = 1 − F (1,41) = 1 − 0,9207 = 0,0793.

Figura 3.3.2. Ejemplo de campo de problemas P1 (L1t, p. 197).

*P3. Obtención de distribuciones muestrales de la media y otros estadísticos de poblaciones normales o no necesariamente normales para muestras grandes.* Tauber (2001) divide en dos este campo de problemas, según se trate de la distribución muestral exacta o asintótica, pero nosotros las hemos unido. Este campo se presenta cuando la media muestral tiende al valor de la media poblacional, lo que puede ocurrir si la distribución de partida es normal y se conoce su desviación típica o aunque la población desde la que se realiza el muestreo no sea normal, cuando crece considerablemente el tamaño de la muestra, debido al Teorema Central del Límite (Batanero y Borovcnik, 2016). En la Figura 3.3.3 se incluye un ejemplo de la primera de estas situaciones. Tauber (2001) diferencia los dos casos, que nosotros hemos unido en uno pues no hay demasiados problemas de este tipo en los libros.

EJEMPLO 1

El peso de los bebes de una guardería sigue una distribución normal cuya media es 5 kg y que tiene una desviación típica de 1 kg. Si se toman muestras de 4 bebes, ¿qué distribución seguirán las medias muestrales obtenidas?

Al ser muestras de tamaño 4, $n = 4$; por tanto, las medias muestrales, $\overline{X}$, se aproximan a una distribución normal $N\left(5, \frac{1}{\sqrt{4}}\right) = N(5\,;\,0{,}5)$.

Figura 3.3.3. Ejemplo de campo de problemas P1 (L1t, p. 197).

*P4. Estimación por intervalos de confianza.* Este campo se presenta cuando dada la distribución muestral del estadístico que sigue la ley Normal, se pueden obtener los intervalos de confianza para el parámetro de interés. En la Figura 3.3.4 se incluye un ejemplo donde la distribución se utiliza para calcular el intervalo de confianza para la media de una población:

EJEMPLO 2

Halla un intervalo de confianza al 95 % para la altura media de una población con una desviación de 5 cm y en la que una muestra de 16 personas mantiene una media de 170 cm.

Como el nivel de confianza es del 0,95, el valor crítico se ha hallado ya en el ejemplo anterior, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

Si se aplica la fórmula:

$$IC = \left(\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

se tiene que:

$$IC = \left(170 - 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{16}}, 170 + 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{16}}\right) =$$
$$= (170 - 2{,}45\,;\,170 + 2{,}45) = (167{,}55\,;\,172{,}45)$$

Figura 3.3.4. Ejemplo de campo de problemas P1 (L1t, p. 197).

En la Tabla 3.3.1 presenta los resultados del análisis de los campos de problemas en los libros de texto que han sido objeto de estudio. Los dos textos tratan la totalidad de los problemas considerados, si bien es cierto que se distribuyen atendiendo a los contenidos incluidos en el currículo en cada curso. Así, en el correspondiente a 1º curso de bachillerato, se encuentran problemas de los dos primeros tipos exclusivamente, pues aún no se ha entrado en conceptos relacionados con la inferencia. Por el contrario, en el texto relativo a 2º de bachillerato, encontramos problemas de todos los tipos contemplados.

Tabla 3.3.1. Campos de problemas en los libros de texto

| Situación-problema | Tipo | L1 | L2 | Total |
|---|---|---|---|---|
| P1. La distribución normal como modelo teórico que describe un fenómeno de la vida real. | Teoría | p.198(2), p.199(3,4), p.201(6,8,9,16,17,18). | | 34 |
| | Práctica | p.170(9), p.171(12,13), p.173(26,27,30,32), p.174(35,37,38,45,46,47,49), p.175(3,4). | p.145(4,5), p.146(9,10), p.148(4,5,6,7,8). | |
| P2. Aproximación de distribuciones de variables aleatorias discretas con un número grande de valores. | Teoría | p.197(1,2), p.199(4), p.201(14,15). | | 20 |
| | Práctica | p.171(10,11), p.172(15), p.173(22,31,33), p.174(42,43,44). | p.145(7), p.148(10,12,13), p.149(14,25). | |
| P3. Obtención de distribuciones muestrales de la media y otros estadísticos de poblaciones normales o no necesariamente normales para muestras grandes. | Teoría | | p.177(1), p.180(1), p.181(2), p.182(3), p.183(4), p.188(1), p.191(8,12,13). | 22 |
| | Práctica | | p.146(10), p.147(12), p.149(15,19,20,21,22,23,24,25,26), p.152(48,49). | |
| P4. Estimación por intervalos de confianza. | Teoría | | p.185(1,2,3), p.187(1,2), p.189(2,3,4), p.191.(14,15,16,17). | 44 |
| | Práctica | | p.146(11), p.147(12,13,14), p.150(27,28, 29,30,31,32,33,34,35), p.151(36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46), p.152(47,50,53,54,55,56,57,58). | |

Centrándonos en la tipología del problema y haciendo uso del resumen realizado en la tabla, se puede observar que son más comunes los problemas tipo 1 y tipo 4 frente a los tipo 2 y tipo 3. Esto se debe quizá, a la versatilidad en la presentación del concepto de distribución normal (para los problemas tipo 1) y las posibilidades de aplicación (para los problemas de tipo 4). Vemos que se incluyen todos los campos de problemas descritos por Tauber (2001) para la enseñanza universitaria, excepto el de contraste de hipótesis, pues este tema se ha suprimido del currículo actual de Bachillerato (MECD, 2015).

**Contextos de los problemas**

El contexto de una tarea es el fenómeno del mundo real que se modeliza (Roth, 1996) y permite hacer las matemáticas significativas para el estudiante. Teniendo en cuenta su importancia, se han analizado teniendo en cuenta los descritos en la evaluación PISA (OECD, 2015), como contextos personales, laborales, sociales y científicos. Atendiendo a estos contextos de aplicación, se han clasificado los problemas en seis grupos y recogido en la Tabla 3.3.2 mostrada a continuación. Se incluye una última categoría denominada “descontextualizados, es decir, los enunciados redactados sobre situaciones matemáticas abstractas y en los que no se incluye ninguna aplicación a la vida real y que no tienen en cuenta la importancia del contexto.

Tabla 3.3.2. Contextos de problemas en los libros de texto

| Contextos | Tipo | L1 | L2 | Total |
|---|---|---|---|---|
| Social | Teoría | p.199(4), p.201(9) | p.185(3), p.189(2,3) | 23 |
| | Práctica | p.174(44), p.175(4) | p.149(21,22), p.150(28,30,31,32,33,35), p.151(36,39,40,42,43), p.152(53,57,58) | |
| Laboral | Teoría | p.198(2), p.199(3), p.201(8,16,18) | p.188(1), p.191(12,13,14,15,16), | 29 |
| | Práctica | p.171(10), p.173(22), p.174(35,46,47,49), p.175(3) | p.147(13), p.149(23,25), p.150(29,34), p.151(37,38,41), p.152(49,50,55) | |
| Científico | Teoría | p.201(6,17) | p.177(1), p.180(1), p.181(2), p.191(8), | 13 |
| | Práctica | p.171(12) | p.149(15,19,24,26), p.151(44), p.152(56) | |
| Personal | Teoría | p.201(15) | p.182(3), p.183(4), p.187(1,2), p.189(4), p.191(17) | 14 |
| | Práctica | p.173(32), p.174(37,42,43,45) | p.147(14), p.152(47) | |
| Descontextualizado | Teoría | p.197(1,2), p.201(14) | p.185(1,2) | 24 |
| | Práctica | p.170(9), p.171(11,13), p.172(15), p.173(26,27,30,32,33), p.174(38) | p.146(10,11), p.147(12), p.149(20), p.150(27), p.151(45,46), p.152(48,54) | |

### 3.4. Análisis del lenguaje

El lenguaje constituye otro elemento de significado relevante en el Enfoque Onto-Semiótico, pues para realizar las prácticas necesarias para la resolución de los problemas descritos, se deben utilizar representaciones de los objetos matemáticos, ya que estos son inmateriales (Godino, Batanero y Font, 2007). Por tanto, se debe analizar su presencia en los textos, pues su conocimiento por parte del alumno irá ligado al de la comprensión de enunciados y problemas, así como a su correcta resolución, ya que el lenguaje no solo sirve para representar los conceptos, sino permite operar con ellos. Las representaciones o tipos de lenguaje consideradas en este estudio han sido las siguientes: verbales, simbólicas, tabulares y gráficas.

#### 3.4.1. Lenguaje verbal

Incluye las expresiones verbales relacionadas con la distribución normal. Hablamos de términos asociados a la distribución normal refiriéndonos tanto a los necesarios para la introducción y comprensión de dicho concepto, como a los utilizados en su aplicación.

Así, destacamos términos como aproximación de la binomial a la normal, área de la región delimitada, desviación típica, distribución de probabilidad, distribución muestral de medias o media muestral, distribución muestral de proporciones, distribución normal de medidas, distribución normal de proporciones, distribución normal estándar, espacio muestral, error de precisión, error máximo, estadístico, estimación de intervalos, experimento de Bernouilli, función de densidad, función de probabilidad, función o campana de Gauss, histograma, individuo, inferencia, intervalo, intervalo de confianza, media, muestra, muestreo, nivel de confianza, nivel de riesgo, normal, parámetro, población, polígono de frecuencias, probabilidad, tabla normal, tamaño muestral, tipificación de la variable, valor crítico, variable aleatoria continua, variable estadística.

En estos términos se incluyen algunos usados en temas anteriores, como desviación típica, espacio muestral, histograma, población o probabilidad, pero otros como estadístico, inferencia, intervalo de confianza, tabla normal o tipificación de la variable son nuevos. Detrás de cada uno de ellos hay implícitos objetos matemáticos, por lo que la riqueza asociada del lenguaje muestra la complejidad del tema que nos ocupa. Tauber (2001) no analiza las expresiones verbales ligadas al tema, por lo que este es un punto original de nuestro trabajo.

Además, encontramos expresiones compuestas con estos términos y otras palabras, como, por ejemplo; “ajusta la distribución a una normal”, “el error de estimación no supera *x unidades*”, “el intervalo de confianza es del 95%”, “el valor del parámetro sigue una distribución normal”, “halla el tamaño mínimo de la muestra”, “la tabla muestra la función de probabilidad”, “una variable aleatoria sigue una distribución normal”, “se toma una muestra al azar” o “se extraen muestras aleatorias de tamaño *n*”.

### 3.4.2. Lenguaje simbólico

El segundo tipo de lenguaje analizado son los símbolos que, de acuerdo a Skemp (1980) en matemáticas permiten la comunicación de soluciones o ideas, definición de conceptos, explicación o demostración y a mostrar estructuras matemáticas. Los podemos clasificar en los siguientes tipos:

- *Notación simbólica de la distribución normal*: N(μ,σ).
- *Notación simbólica de la distribución normal típica*: N(0,1).
- *Expresión algebraica de la función de Gauss o función de densidad distribución normal*: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}$ , $x \in (-\infty,+\infty)$:
- *Función de densidad de la distribución normal estándar*: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{1/2z^2}$ , $x \in (-\infty,+\infty)$:
- *Fórmula de tipificación*: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$
- *Expresiones de cálculo de la probabilidad en un intervalo*: las formas más representativas de las expresiones localizadas son las siguientes:
  - Probabilidad para valores menores o menores o iguales que un valor *z* dado, con $z \geq 0$: $P(X<z)$ ó $P(X \leq z)$.
  - Probabilidad para valores mayores o mayores o iguales que un valor *z* dado, con $z \geq 0$: $P(X>z)$ ó $P(X \geq z)$.
  - Probabilidad para valores menores o menores o iguales que un valor *z* dado, con $z<0$: $P(X>-z)$ ó $P(X \geq -z)$.
  - Probabilidad de un intervalo comprendido entre dos valores a y b dados, con $a,b \geq 0$: $P(a<X<b)$ó $P(a \leq X \leq b)$.

- *Expresiones de la aproximación de la binomial a la normal*: se ha encontrado la siguiente expresión:

$$B(n,p) \approx N(np, \sqrt{np(1-p)}$$

- *Símbolos que representan los parámetros y estadísticos*: la simbología utilizada en los libros de texto es: Media poblacional*:* $\mu$*,* media muestral: $\bar{x}$*,* desviación típica poblacional: σ, desviación típica muestral: *s;* media muestral como variable aleatoria (distribución muestral de medias): $\bar{X}$*;* proporción muestral como variable aleatoria (distribución muestral de proporciones): $\hat{P}$; nivel de confianza: $p/100$; nivel de riesgo: $\alpha$; valor crítico: $Z_{\frac{\propto}{2}}$.
- *Expresiones para la representación de intervalos para la media poblacional y el error máximo de estimación*: la representación utilizada para el intervalo de confianza, ha sido:

$$\mu = (\bar{X} - Z_{\frac{\sigma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\frac{\sigma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$E: error\ máximo = Z_{\frac{\sigma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = |\mu - \bar{x}|$$

- *Expresiones para la representación de intervalos para la proporción poblacional*: la representación utilizada para el intervalo de confianza, ha sido:

$$p = (\hat{P} - Z_{\frac{\sigma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{P} \cdot \left(1 - \hat{P}\right)}{n}}, \hat{P} + Z_{\frac{\sigma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{P} \cdot (1 - \hat{P})}{n}})$$

En resumen, encontramos expresiones algebraicas muy complejas, que describen operaciones con los parámetros y estadísticos, funciones y desigualdades. Se incluyen también subíndices y superíndices indicando incluso operaciones. Esta notación tiene un gran nivel de dificultad puesto que se maneja simultáneamente los tres niveles de distribución citados por Harradine, Batanero y Rossman (2011): distribución de una variable en la población, distribución de la misma variable en una muestra y distribución muestral de un estadístico.

### 3.4.3. Representación tabular

La representación tabular en estadística combina diferente tipo de información y presenta no sólo información numérica, sino relaciones entre sus elementos (Gea, 2012). La única representación tabular utilizada en los libros analizados, son las tablas de cálculo de probabilidades de la distribución binomial y normal. En la tabla de la distribución normal se representan valores de la distribución de probabilidad para valores igualmente espaciados de la variable; mientras que el caso de la distribución binomial la tabla de la distribución representa en cada fila los valores posibles de la variable y en las columnas las probabilidades asociadas.

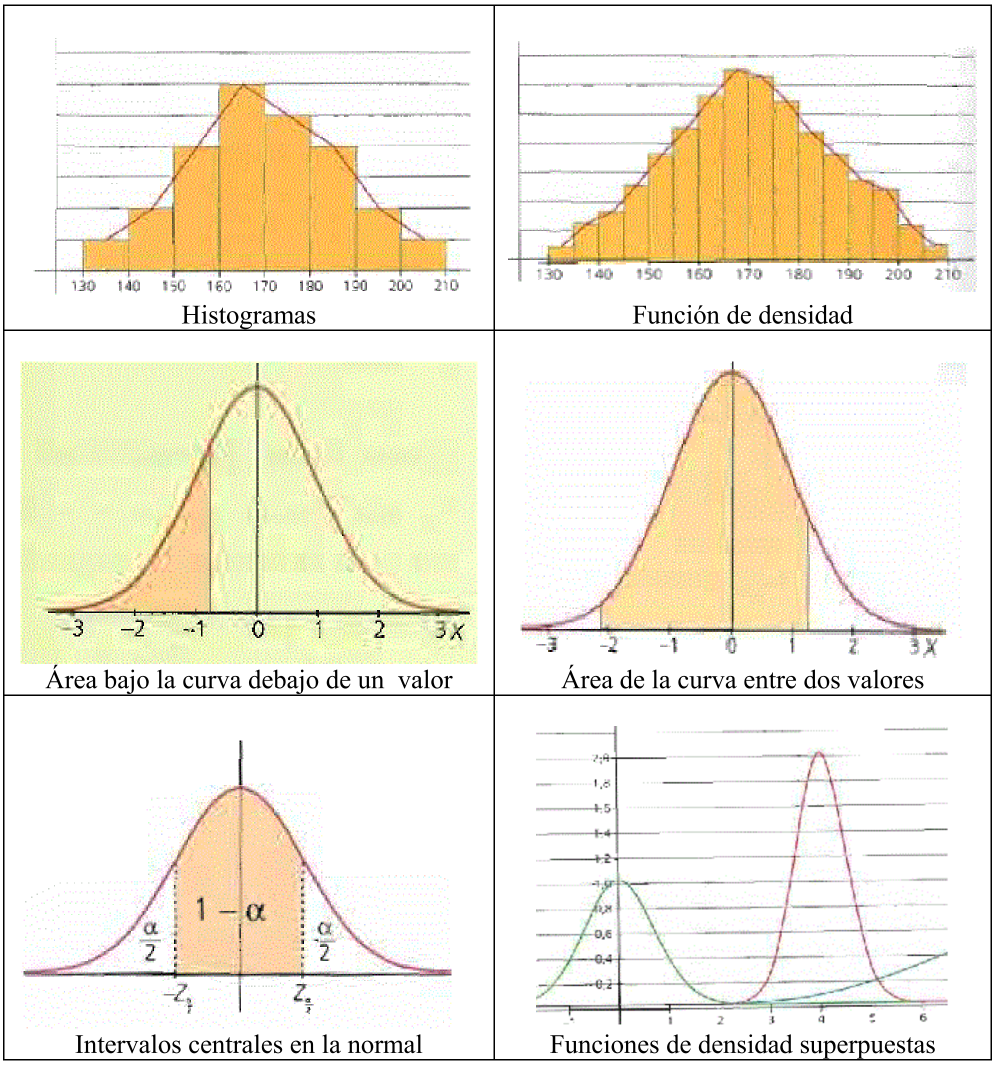
Ajenas a las tablas de cálculo de probabilidad, y de forma puntual en los ejercicios de los textos estudiados, se hace uso en los distintos enunciados, de una tabla para representar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.

### 3.4.4. Representación gráfica

La representación gráfica tiene un papel primordial en estadística, tanto para resumir las distribuciones (bien distribuciones estadísticas de datos o distribuciones de las variables aleatorias e incluso las distribuciones muestrales), como para facilitar el cálculo de las probabilidades (Batanero y Borovcnik, 2016). En este trabajo hablamos de representaciones gráficas asociadas a la distribución normal refiriéndonos tanto a las necesarias para la representación de datos e introducción de dicho concepto, como a los utilizados en su explicación y aplicación.

Así, destacamos representaciones como histogramas, polígonos de frecuencia, funciones de densidad, representaciones del área bajo la curva normal para valores menores o mayores o iguales que un valor dado, representaciones del área bajo la curva normal para valores comprendidos entre dos valores dados, representación de los intervalos centrales en una curva normal y representaciones de funciones de densidad de la curva normal superpuestas. Algunos ejemplos se presentan en la Figura 3.4.1.

Presentamos en la Tabla 3.3.3 el resumen de los tipos de lenguaje encontrados en los textos analizados. Observamos que ambos libros hacen uso de un lenguaje similar para el tema de la distribución normal e inferencia. No obstante, y tal como se ha detallado en el epígrafe, el uso de tablas y gráficos en general es bastante pobre, reduciéndose prácticamente a las tablas de las distribuciones binomial y normal y su aplicación en el cálculo de probabilidades. Destacar además, que el lenguaje más utilizado ha sido el verbal y simbólico, contando ambos con una relevancia especial en los dos textos analizados. El uso de los gráficos se considera escaso para el tema que nos ocupa, debiéndosele otorgar una mayor importancia de cara a una mayor y más completa comprensión de los conceptos por parte del alumnado. Aparecen todos los tipos considerados por Tauber (2001) (Tabla 2.1),



Histogramas — Función de densidad

Área bajo la curva debajo de un valor — Área de la curva entre dos valores

Intervalos centrales en la normal — Funciones de densidad superpuestas

Figura 3.4.1. Ejemplos de representaciones gráficas en el tema

Tabla 3.3.3. Lenguaje en los libros de texto

| Lenguaje | Tipo | L1 | L2 |
|---|---|---|---|
| Verbal | Teoría | x | x |
| | Práctica | x | x |
| Simbólico | Teoría | x | x |
| | Práctica | x | x |
| Tabular | Teoría | x | |
| | Práctica | x | x |
| Gráfico | Teoría | x | x |
| | Práctica | x | x |

### 3.5. Análisis de las definiciones (conceptos)

Tal y como se define en el Capítulo 1, los conceptos están caracterizados por su definición, que es utilizada por el alumno para resolver una situación-problema. La importancia de las definiciones de los conceptos ha sido analizada por Zazkis y Leikin

(2008), que resaltan la necesidad de determinar las que se usarán en la enseñanza y la forma en que se presentan a los estudiantes. A continuación analizamos las definiciones de conceptos encontradas en los dos textos.

### Variable aleatoria

La inferencia estadística y con ella la distribución normal parten, entre otros, del concepto de variable aleatoria, clave en todo estudio estadístico. Al tratarse de libros de 1º y 2º de bachillerato, la definición de este concepto se presenta sólo en el primero de los textos de la forma en que se muestra en la Figura 3.5.1. Observamos que la definición tiene un alto grado de formalidad, utilizando la idea de espacio muestral, así como conceptos tales como infinito numerable cuya definición se recuerda. Desde nuestro punto de vista sería preferible una definición intuitiva de la variable aleatoria como variable cuyo valor depende de un experimento aleatorio, al igual que utilizan Alvarado (2007) o Tauber (2001). Además, esta definición se completa con la diferenciación entre variable aleatoria discreta y continua, siendo esa última descripción confusa. La definición se acompaña de distintos ejemplos para cada uno de los tipos de variable, que permiten al alumnado adquirir de una manera más profunda su concepto asociado.

> Se denomina **variable aleatoria** a la función que asigna a cada elemento del espacio muestral un número real. Si los resultados que puede tomar esta variable son finitos o infinitos numerables (resultados que, a pesar de tener infinitos valores, pueden numerarse), la variable aleatoria se denomina **discreta**. Si los resultados son infinitos, la variable aleatoria recibe el nombre de **continua**.

Figura 3.5.1. Ejemplo de definición de variable aleatoria (Lt1, p.188).

### Función de probabilidad

A cada variable aleatoria le corresponde una función de probabilidad, que se define en los textos para la variable aleatoria discreta a continuación de introducir el concepto de la propia variable aleatoria, como vemos en la Figura 3.5.2. No se acompaña de ejemplos aclaratorios, como vemos en la figura, que también es una definición muy formal, reduciéndose a una expresión algebraica.

> Las variables aleatorias discretas, $X$, tienen asociada una función de probabilidad, $f$, que asigna a cada valor de la variable la probabilidad que este tiene de ser obtenido: $f(x_i) = P(X = x_i)$.

Figura 3.5.2. Ejemplo de definición de función de probabilidad (Lt1, p.188).

**Distribución de probabilidad**

La distribución normal es un tipo de distribución de probabilidad, por tanto, parece lógico que se presente este concepto antes de presentar el de la distribución normal. En nuestro estudio, sólo se presenta dicha definición, y de forma muy básica, en el primero de los textos, habiéndose prescindido de ello en el segundo. Se muestra dicha definición en la Figura 3.5.3. En este caso tampoco se contempla ningún ejemplo que pueda aclarar o ampliar la definición. Como vemos no se diferencia entre función de probabilidad y distribución de probabilidad, que incluiría no sólo el valor de la probabilidad, sino los diferentes valores de la variable.

> Las **distribuciones de probabilidad** son funciones a partir de las cuales a cada suceso del espacio muestral se le asigna una probabilidad. Estas distribuciones pueden ser discretas o continuas.

Figura 3.5.3. Ejemplo de definición de distribución de probabilidad (Lt1, p.188).

**Función de densidad**

Su definición precede a la de distribución normal en el libro de texto de 1º de bachillerato, no apareciendo en el de 2º pues la definición que se da de la distribución normal es más sencilla y directa. Se muestra dicha definición en la Figura 3.5.4, que en este caso es más intuitiva puesto que hace referencia a la convergencia del histograma a una curva cuando se disminuye la anchura del intervalo. También se indica su utilidad para el cálculo de probabilidad de que la variable caiga dentro de un intervalo.

> Se puede comprobar que, a medida que los intervalos son más pequeños y el tamaño de la muestra es mayor, el polígono de frecuencias se aproxima más a una curva. La función cuya gráfica corresponde a esa curva que forma el polígono de frecuencias es la denominada **función de densidad** de la variable X.
>
> Esta función de densidad, **f (*x*)**, permitirá calcular la probabilidad de que la variable aleatoria X pueda tomar unos valores u otros. Para calcular la probabilidad de que la variable continua X tome un valor del intervalo (a , b), habrá que hallar el área de la región delimitada por la gráfica de la función de densidad, f (*x*), el eje *X* y las rectas verticales *x* = a y *x* = b. Es decir:
>
> **P(a < X < b) = área delimitada por f (*x*) y el eje *X* en el intervalo (a , b)**

Figura 3.5.4. Ejemplo de definición de función de densidad (Lt1, p.192).

**Distribución normal**

Tras haber estudiado las definiciones de distribución normal propuestas en Batanero, Tauber y Sánchez (2001), se concluye que en los libros de texto estudiados se ha hecho uso de algunas incluidas en su tipología de definición para la introducción de la distribución normal, esto es, la primera de las seis a las que hacen referencia y que se corresponde con *D1. Definición de la distribución normal a partir de la fórmula de la función densidad y de sus propiedades*, aunque para la definición contemplada en el texto de 1º de bachillerato, más completa que la incluida en el de 2º de bachillerato, se mezcla con la definición D5 citada por estos autores como *Definición de la distribución normal enunciada en forma intuitiva como límite de un histograma* (en realidad un polígono de frecuencias).

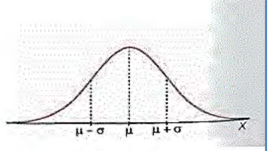
Así, en el primer texto analizado (por citar la definición más completa) se define la distribución haciendo uso del polígono de frecuencias con intervalos cada vez más pequeños, como aproximación a la función de densidad de la variable aleatoria discreta. A partir de ahí se define la variable aleatoria normal como aquella cuya función de densidad que viene dada por una fórmula concreta, expresada en términos de sus parámetros asociados (media y desviación típica. En la Figura 3.5.5 se incluye un ejemplo, donde se describen también su dominio y propiedades de simetría, asíntota horizontal, moda, área bajo la curva y puntos de inflexión, aunque ninguna de estas propiedades se demuestra:

Una variable aleatoria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ y se expresa por N (μ , σ) si se cumplen las siguientes condiciones:

- La variable puede tomar cualquier valor real, es decir, $x \in (-\infty, \infty)$.
- La función de densidad, f (x), de la distribución normal es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Esta función se conoce con el nombre de **función de Gauss**, y su gráfica, con el de **campana de Gauss**.




A su vez, esta función de densidad cumple que:

- Su dominio es ℝ.
- Es simétrica respecto de la recta $x = \mu$.
- No corta al eje $X$, pero sí al eje $Y$.
- Presenta una asíntota horizontal en $y = 0$.
- Tiene un máximo en $x = \mu$.
- Tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = \mu - \sigma$ y otro en $x = \mu + \sigma$.
- El área delimitada entre la gráfica de f (x) y el eje $X$ es igual a una unidad.

Figura 3.5.5. Ejemplo de definición de distribución normal (Lt1, p.192 y193).

## Parámetros de la distribución normal

Es habitual encontrar la explicación del significado de los parámetros de la distribución normal y las consecuencias en la curva de sus variaciones, aunque no se usa el término parámetro explícitamente (Figura 3.5.6).

La forma de la campana de Gauss depende de los valores de μ y σ.

- La media, μ, determina la situación del centro de la distribución.
- La desviación típica, σ, expresa la concentración o dispersión de los datos alrededor de la media.

Es evidente que, para cada valor de μ y σ, existirá una función distinta. Así pues, cuando la desviación típica es mayor, aumenta la dispersión y la campana queda más abierta. Si, por el contrario, la desviación es menor, disminuye la dispersión y la campana se «estrecha» en torno a la media, ya que los datos se hallan más concentrados.

Figura 3.5.6. Ejemplo de propiedades de los parámetros de la distribución normal (Lt1, p.192 y193).

### Distribución normal estándar

Para facilitar el cálculo de probabilidades y puesto que sólo se dispone de la tabla de la distribución normal N(0,1) se suele introducir este concepto, aunque hoy día ya no tiene tanto interés, puesto que el cálculo de probabilidades se puede lograr directamente sin necesidad de tipificar con una calculadora u ordenador, aunque los libros no incluyen instrucciones en este sentido. No obstante, otra utilidad de la distribución normal estándar citada por Tauber (2001) es comparar medidas de diferentes magnitudes; por ejemplo, las calificaciones de un estudiante en diferentes asignaturas.

En el primer libro de texto analizado, referente al curso de 1º de bachillerato, se amplía la información relacionada con la definición de distribución normal, haciéndose una particularización que no se hace en el segundo libro estudiado, por tratarse de un curso más avanzado en el que presupone dicho conocimiento. De esta forma, a partir de la definición de distribución normal se particulariza el caso en el que la media vale cero y la desviación típica vale uno, definiendo así la distribución normal estándar facilitando su función de densidad con los datos ya actualizados de $\mu$ y $\sigma$. En la Figura 3.5.7 se incluye un ejemplo:

> De todas las distribuciones normales, N ($\mu$ , $\sigma$), la que tiene mayor interés es la distribución N (0 , 1), es decir, la que tiene de media $\mu = 0$ y de desviación típica $\sigma = 1$.
>
> A esta distribución se la denomina **distribución normal estándar.** (En el gráfico de arriba, es la curva de color verde).
>
> La función de densidad de la distribución normal estándar es:
>
> $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Figura 3.5.7. Ejemplo de definición de distribución normal estándar (Lt1, p.193).

### Inferencia

Introduciendo el tema del mismo nombre, se define en el texto analizado del curso de 2º de bachillerato. Esta definición está contemplada en la Figura 3.5.8, que no es muy explícita ni completa, pues mediante la inferencia no sólo se estudia la fiabilidad de los resultados, sino que se proporciona procedimientos para extender las conclusiones de las muestras a las poblaciones (Batanero y Borovcnik, 2016).

La **inferencia** es la parte de la estadística que estudia la fiabilidad de los resultados a partir del tamaño de una muestra.

Figura 3.5.8. Ejemplo de definición de inferencia (Lt2, p.174).

**Conceptos asociados a un estudio estadístico**

Es necesario definir distintos conceptos a la hora de abordar un estudio estadístico, en particular los de población, individuo, o muestra. En la Figura 3.5.9 se incluyen los contemplados en el libro de texto referente a 2º de bachillerato. Estas definiciones vienen acompañadas de un ejemplo textual así como una representación gráfica para facilitar su comprensión al alumnado.

Conceptos y definiciones a partir de los cuales se realiza un estudio estadístico:

**Población (o universo o colectivo).** Es el conjunto de personas, animales o cosas que cumplen una determinada propiedad, y sobre el cual se va a realizar un estudio.

**Individuo (o unidad estadística).** Es cada uno de los elementos de la población.

**Muestra.** La constituye un subconjunto de la población. El número de individuos que forman la muestra es el **tamaño muestral.**

**Carácter estadístico.** Es la característica o cualidad que se observa o se mide en los individuos.

**Modalidad.** Son los posibles resultados o respuestas de un carácter estadístico. Si es numérica, el carácter es **cuantitativo,** y si no es numérica, **cualitativo.**

Figura 3.5.9. Ejemplo de definición de conceptos asociados a un estudio estadístico (Lt2, p.174).

**Distribución muestral de medias**

La media de la población es uno de los parámetros de una población estadística, pero la media de la muestra es una variable aleatoria (Harradine, Batanero y Rossman, 2011). Al considerar todos los posibles valores de las medias de las infinitas muestras del mismo tamaño en una población, se obtiene la distribución muestral. La definición incluida en el 2º curso es algo confusa, pues se hace referencia al estadístico media muestral, pero se dice que es una variable estadística (y no una variable aleatoria). No obstante se dan los valores de los parámetros de su distribución y además va acompañada de un ejemplo para facilitar su correcta asimilación. Dicha definición se muestra en la Figura 3.5.10.

> Se define el estadístico $\overline{X}$ como la variable estadística que toma los valores $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \ldots, \overline{x_n}$, que siguen una distribución denominada **distribución muestral de medias,** cuyos parámetros cumplen que:
>
> - La media de $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \ldots$, es $\mu_{\overline{x}} = \mu$.
> - La desviación típica de $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \ldots$, es $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Figura 3.5.10. Ejemplo de definición de distribución muestral de medias (Lt2, p.176).

Como resumen de los conceptos introducidos en este tema relativo a la distribución normal y su aplicación en la inferencia estadística en los libros de texto analizados, se presenta la Tabla 3.3.4. Las definiciones encontradas en los libros seleccionados son en general acordes a los niveles educativos asociados, si bien hay algunas confusas y con alto grado de formalidad que puede dificultar su comprensión. Casualmente en éstas últimas, se detecta así mismo una carencia en la presencia de ejemplos asociados que puedan facilitar su asimilación por parte del alumnado. En este sentido citamos a Skemp (1993) quien indica que los conceptos no pueden ser comunicados simplemente a través de una definición sino que es necesario proporcionar una colección apropiada de ejemplos, apoyados en otros conceptos que ya se conocen para facilitar su comprensión.

Tabla 3.3.4. Conceptos en los libros de texto

| Concepto | L1 | L2 |
|---|---|---|
| Variable aleatoria | x | x |
| Función de probabilidad | x | |
| Distribución de probabilidad | x | |
| Función de densidad | x | |
| Distribución normal | x | x |
| Parámetros de distribución normal | x | |
| Distribución normal estándar | x | |
| Inferencia | | x |
| Conceptos asociados a un estudio estadístico | | x |
| Distribución muestral de medias | | x |

## 3.6. Análisis de las proposiciones

Los libros de texto suelen presentar proposiciones, que describen propiedades de los conceptos matemáticos, que enriquecen el significado del objeto, y se constituyen en objetos explícitos de enseñanza (Godino, Contreras y Font, 2006). La clasificación de las propiedades de la distribución normal que aparecen en los libros de texto es la siguiente:

- *Caracterización de la variable aleatoria discreta o continua*, explicando la diferencia entre estos dos tipos, en base a que el conjunto de valores que toman sea discreto o continuo (Ver Figura 3.5.1). Además a la variable aleatoria discreta se le asocia la distribución de probabilidad y a la continua la función de densidad.
- *Propiedades relacionadas con parámetros de la distribución normal,* que permiten al alumno comprender de una forma intuitiva el significado de estos parámetros. Entre estas propiedades encontramos la relación existente entre la desviación típica con los puntos de inflexión de la curva, significado geométrico de los parámetros o variación de la gráfica al modificar dichos parámetros (Véanse las Figuras 3.5.4 y 3.5.5). Todas ellas aparecen en el trabajo de Tauber (2001).
- *Propiedades estadísticas:* son aquellas que relacionan la distribución normal con la predicción de valores y el cálculo de probabilidades y se utilizan para posteriormente justificar diferentes procedimientos. Se han encontrado las siguientes: a) propiedades que se usan en el cálculo de probabilidades, como aditividad del área bajo la curva, probabilidades dadas por áreas parciales bajo la curva normal, probabilidad total bajo la curva; b) distribución de casos en relación con la desviación típica y media, que se obtiene aplicando el teorema de Tchebycheff en forma aproximada y da los intervalos en que se encuentran el 95% y 99% de casos en la normal; c) propiedades de la distribución muestral, como valor esperado de la media muestral, distribución muestral de medias y proporciones, intervalos de confianza para media y proporción.

En la Tabla 3.3.5 se presenta como resumen, las propiedades presentes en los textos analizados, donde vemos la gran cantidad de propiedades que se introducen en este tema, lo que es otro signo de su complejidad.

Tabla 3.3.5. Proposiciones en los libros de texto

| Proposiciones | L1 | L2 |
|---|---|---|
| Caracterización de variable discreta o continua | x | |
| Relación entre desviación típica y puntos de inflexión de la curva | x | x |
| Significado geométrico de los parámetros | x | x |
| Variación de la gráfica al modificar los parámetros | x | |
| Cálculo de probabilidades | | x |
| Probabilidades por áreas parciales bajo la curva | x | x |
| Probabilidad total bajo la curva | x | x |
| Distribución de casos en intervalos centrales | x | |
| Valor esperado de la media muestral | | x |
| Distribución muestral de medias y proporciones | | x |
| Intervalos de confianza para media y proporción | | x |

## 3.7. Análisis de los procedimientos

Para resolver una situación-problema, el estudiante aplica diversas operaciones, algoritmos, o técnicas de cálculo, que llegan a automatizarse y son específicas del tipo de problema. Por este motivo, se constituyen en objetos de enseñanza (Gea, 2012). Son muchas los algoritmos y técnicas de cálculo relacionadas directa o indirectamente con la distribución normal. Sin embargo, partiendo de las propuestas en Batanero, Tauber y Sánchez (2001) y haciendo mención a las utilizadas en los libros de texto analizados para la resolución de problemas del tema en cuestión, las técnicas concretas son las siguientes:

*Pr1. Estudio descriptivo de datos para ajustar una curva.* Se basa en el estudio de los datos de forma descriptiva, incluyendo la representación gráfica de los mismos, comprobación de simetría y valores típicos, cálculo de parámetros, etc. Si bien es un tipo importante de procedimiento en el estudio de Tauber, no se han localizado ejemplos asociados al mismo en los libros de texto analizados.

*Pr2. Tipificación.* En los dos libros de texto analizados se realiza el cálculo de probabilidades a través de la distribución normal estándar, por tanto es necesario realizar un cambio de variable mediante el proceso de tipificación. Es importante tener en cuenta deshacer dicho cambio de variable al finalizar el ejercicio, para que los datos se correspondan con la auténtica solución del problema. Si bien es algo que dan por sentado en los libros de texto analizados, sin hacer mención al respecto. En la Figura 3.7.1 se incluye el procedimiento que describe el primer texto analizado.

> Por tanto, habrá que transformar la variable X, que sigue una distribución N (μ , σ), en otra variable, Z, que siga una distribución N (0 , 1). De este modo, ya será posible utilizar los datos de la tabla N (0 , 1) para calcular las probabilidades de la variable X. Este proceso por el cuál se transforman las variables se denomina tipificación de la variable X y consiste en hacer el cambio $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.
>
> Por tanto, para determinar $P(X \leq a)$, donde $X$ sigue una distribución $N(\mu , \sigma)$, se ha de hallar $P\left(Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right)$, donde Z sigue una distribución N (0 , 1). Solo queda buscar $\frac{a - \mu}{\sigma}$ en la tabla, tal como se explicó en la página anterior.

Figura 3.7.1. Procedimiento de tipificación Pr2 (L1t, p. 196).

*Pr3. Cálculo de probabilidades y valores críticos a partir de las tablas de la distribución normal tipificada o cálculo de los límites del espacio central que contiene una proporción dada de observaciones.* Tal y como se vio en el epígrafe 3 de este capítulo, existen cuatro situaciones-problema en las que se presentan distintos ejercicios que requieren el cálculo de probabilidades asociadas a la distribución normal atendiendo a distintos procedimientos o algoritmos de cálculo. En general y tal y como explican Batanero, Tauber y Sánchez (2001), la campana de Gauss o curva normal se aplica en la resolución de dos tipos de problemas:

1. Cálculo de probabilidades: Calcular la probabilidad de que la variable tome valores en intervalos determinados por uno o dos puntos dados.
2. Cálculo de valores críticos: Determinar los extremos del intervalo que comprenda una probabilidad dada.

En la Figura 3.7.2 se incluye el procedimiento para el cálculo de probabilidades. No se ha localizado en el primero de los textos analizados el detalle explícito del procedimiento para el cálculo de valores críticos. En la Figura 3.7.3 se presenta el procedimiento de cálculo de valores críticos a un nivel del *p*% o nivel de confianza de 1-$\alpha$.

1. **¿Cómo hallar $P(X \le z)$ o $P(X < z)$, con $z \ge 0$?**

Este es el caso en que el valor de la tabla, $F(z)$, coincide con la probabilidad pedida.

Ejemplo: $P(X \le 1{,}24) = F(1{,}24) = 0{,}8925$

En la primera columna se buscan las unidades y las décimas (1,2), y en la fila superior, la columna de las centésimas necesarias (0,04).

2. **¿Cómo hallar $P(X \ge z)$ o $P(X > z)$, con $z \ge 0$?**

En este caso se usarán complementarios. Se constata que el área en rojo coincide con la que estaba en blanco en el ejemplo anterior.

Ejemplo: $P(X \ge 1{,}24) = 1 - P(X < 1{,}24) = 1 - F(1{,}24) = 1 - 0{,}8925 = 0{,}1075$

3. **¿Cómo hallar probabilidades con $z < 0$, $P(X \le -z)$ o $P(X < -z)$?**

En este caso se aplican simetrías. El área de la derecha coincide con el de la izquierda; luego, $P(X \le -z) = P(X \ge z)$.

Ejemplo: $P(X \le -0{,}81) = P(X \ge 0{,}81) = 1 - P(X < 0{,}81) =$
$= 1 - F(0{,}81) = 1 - 0{,}7910 = 0{,}2090$

4. **¿Cómo hallar $P(a \le X \le b)$ o $P(a < X < b)$?**

Se observa aquí que $P(a \le X \le b) =$
$= P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$.

Ejemplo: $P(0{,}81 \le X \le 1{,}24) = P(X \le 1{,}24) - P(X \le 0{,}81) =$
$= F(1{,}24) - F(0{,}81) = 0{,}8925 - 0{,}7910 = 0{,}1015$

Figura 3.7.2. Procedimiento de cálculo de probabilidades Pr3 (L1t, p. 195).

Se trata de encontrar el valor de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$, sabiendo que el intervalo $\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}, Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ debe cumplir que $P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$.

Para poder encontrar el valor de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ en la tabla normal, se ha de buscar un intervalo de la forma $\left(-\infty, Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$, es decir, hay que localizar en la tabla una probabilidad del tipo $P\left(\overline{X} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

En la gráfica de abajo se puede observar que se cumple que $P\left(\overline{X} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{2}$.

Por tanto, para hallar $Z_{\frac{\alpha}{2}}$, se debe sumar $(1 - \alpha) + \frac{\alpha}{2}$ y determinar el valor resultante entre las probabilidades contenidas dentro de la tabla N (0 , 1). Si no se encuentra ese valor de forma exacta, se tomará el más próximo a él.

La fila y la columna de $z$ a las que pertenece dicha probabilidad son las que dan lugar al valor de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

Figura 3.7.3. Procedimiento de cálculo de valores críticos Pr3 (L2t, p. 184).

Como se puede observar en la Tabla 3.3.6 mostrada a continuación, los procedimientos tratados en los libros seleccionados son básicamente de dos tipos; aquellos basados en la tipificación de la distribución normal y los relacionados con el cálculo de probabilidades y valores críticos. Aunque aparentemente son pocos procedimientos, en realidad ocupan gran parte de los textos, pues dentro de cada uno de ellos hay muchos casos particulares; por ejemplo, se puede obtener valores críticos para el área debajo del valor o para un área central.

Tabla 3.3.6. Procedimientos los libros de texto

| Procedimientos | L1 | L2 |
|---|---|---|
| Estudio descriptivo de datos para ajustar una curva | | |
| Tipificación | x | x |
| Cálculo de probabilidades y valores críticos | x* | x |

**Sólo cálculo de probabilidades*

## 3.8. Argumentos

Los procesos de demostración son resaltados, tanto en la investigación en Didáctica de la Matemática, como en los decretos curriculares, donde para los alumnos de Bachillerato se indica la necesidad de que realicen procesos sencillos de demostración (MECD, 2015). Su papel en el aprendizaje se resalta en los estándares del NCTM (2000), que indican la necesidad de contemplarlos para desarrollar la capacidad de argumentación de los estudiantes. Estos argumentos no se reducen a las demostraciones formales deductivas, pues Godino y Recio (1997) señalan que dentro de la demostración se pueden incluir la explicación, prueba y justificación, que pueden tener como finalidad la verificación o incluso la comunicación de resultados. Por ello, siguiendo a estos autores y a Tauber (2001) describiremos diferentes tipos.

*Ar1. Argumentación a través de la representación gráfica.* Consiste en la validación visual de la verdad o falsedad de una afirmación o propiedad. Aunque es una forma considerablemente intuitiva de argumentar, apenas se ha encontrado su presencia en los libros de texto analizados. En la Figura 3.8.1 se incluye un ejemplo visual del cálculo de probabilidades entre dos valores dados de la curva normal.

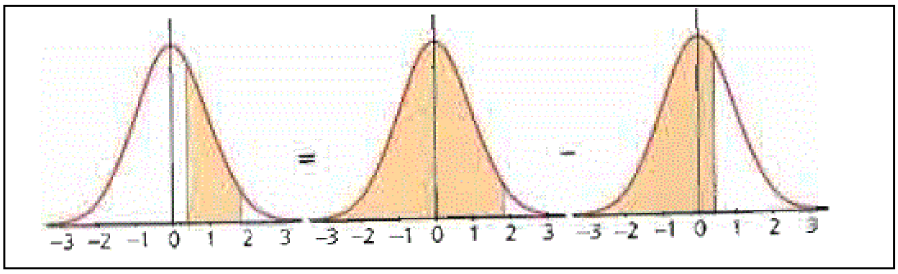
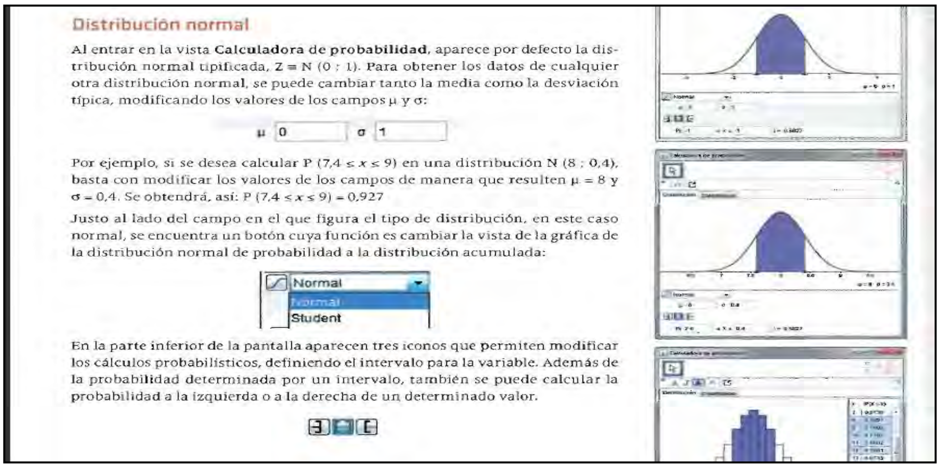



Figura 3.8.1. Argumentación por representación gráfica Ar1 (L1t, p. 195).

*Ar2. Argumentación a través de la comprobación de casos con ejemplos y contraejemplos.* Consiste en hacer uso de un ejemplo con datos concretos para validar una determinada afirmación o propiedad. Gea (2012) señala que el interés de este tipo de razonamiento es que ayuda a desarrollar el pensamiento inductivo. En la Figura 3.8.2 se incluye un caso donde se explica, mediante un ejemplo, como calcular probabilidades normales con ayuda de Geogebra.



**Distribución normal**

Al entrar en la vista **Calculadora de probabilidad**, aparece por defecto la distribución normal tipificada, Z = N (0 ; 1). Para obtener los datos de cualquier otra distribución normal, se puede cambiar tanto la media como la desviación típica, modificando los valores de los campos μ y σ:

μ 0 σ 1

Por ejemplo, si se desea calcular P (7,4 ≤ x ≤ 9) en una distribución N (8 ; 0,4), basta con modificar los valores de los campos de manera que resulten μ = 8 y σ = 0,4. Se obtendrá, así: P (7,4 ≤ x ≤ 9) = 0,927

Justo al lado del campo en el que figura el tipo de distribución, en este caso normal, se encuentra un botón cuya función es cambiar la vista de la gráfica de la distribución normal de probabilidad a la distribución acumulada:

Normal
Normal
Student

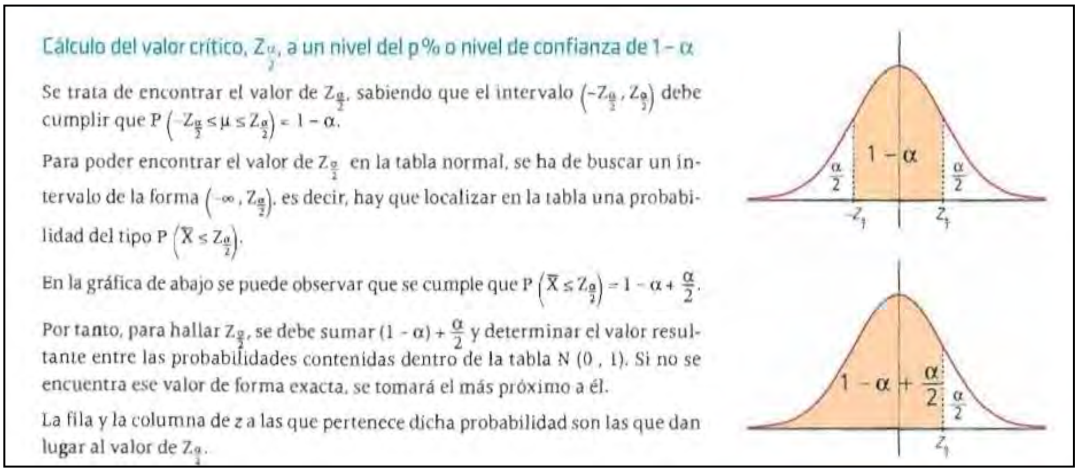
En la parte inferior de la pantalla aparecen tres iconos que permiten modificar los cálculos probabilísticos, definiendo el intervalo para la variable. Además de la probabilidad determinada por un intervalo, también se puede calcular la probabilidad a la izquierda o a la derecha de un determinado valor.

Figura 3.8.2. Argumentación por comprobación de casos Ar2 (L1p, p. 166).

*Ar3. Argumentación a través de la generalización.* Consiste en obtener a partir de demostraciones (formales o informales), conclusiones generales que pueden aplicarse a todos los casos posibles que cumplan unas determinadas condiciones de partida. No se han encontrado procedimientos teóricos ni ejercicios de aplicación en los libros analizados. En la Figura 3.8.3 se incluye un ejemplo, donde se muestra como al disminuir un poco el ancho del intervalo, el histograma se aproxima a una curva continua y luego se generaliza esta propiedad sin demostrarla o comprobarla para más casos.

Figura 3.8.3. Argumentación por generalización Ar3 (L1t, p. 192).

*Ar4. Argumentación a través del análisis-síntesis.* Consiste en obtener conclusiones o justificar un procedimiento, a partir del encadenamiento de una serie de características o propiedades de partida de una determinada situación-problema. En la Figura 3.8.4 se incluye un ejemplo donde se descompone en pasos el proceso de construcción de un intervalo de confianza. En cada paso se usan propiedades parciales que se encadenan para mediante una síntesis conseguir la justificación global.



Cálculo del valor crítico, $Z_{\frac{\alpha}{2}}$, a un nivel del p% o nivel de confianza de $1 - \alpha$

Se trata de encontrar el valor de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$, sabiendo que el intervalo $\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}, Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ debe cumplir que $P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$.

Para poder encontrar el valor de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ en la tabla normal, se ha de buscar un intervalo de la forma $\left(-\infty, Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$, es decir, hay que localizar en la tabla una probabilidad del tipo $P\left(\overline{X} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

En la gráfica de abajo se puede observar que se cumple que $P\left(\overline{X} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{2}$.

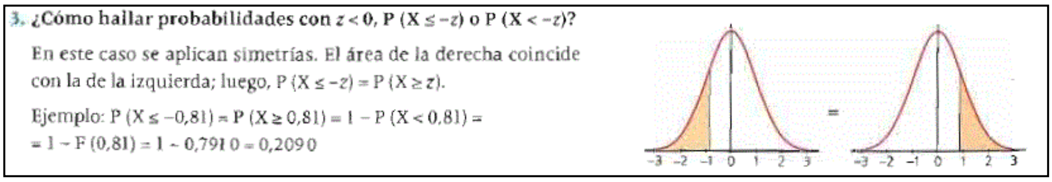
Por tanto, para hallar $Z_{\frac{\alpha}{2}}$, se debe sumar $(1 - \alpha) + \frac{\alpha}{2}$ y determinar el valor resultante entre las probabilidades contenidas dentro de la tabla N (0 , 1). Si no se encuentra ese valor de forma exacta, se tomará el más próximo a él.

La fila y la columna de *z* a las que pertenece dicha probabilidad son las que dan lugar al valor de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$.



Figura 3.8.4. Argumentación por análisis-síntesis Ar4 (L2t, p. 184).

*Ar5. Argumentación a través de demostraciones informales.* Consiste en la utilización conjunta de representaciones gráficas y comprobación de casos particulares para validad una afirmación o propiedad de forma intuitiva. Es la argumentación más utilizada en los libros de texto analizados, presentándose en la mayoría de procedimientos y conceptos introducidos. En la Figura 3.8.6 se incluye un ejemplo de argumentación de este tipo, en el que se puede ver cómo después de presentar un procedimiento de cálculo, acompañan de caso particular y su gráfico correspondiente.



**3. ¿Cómo hallar probabilidades con $z < 0$, $P(X \leq -z)$ o $P(X < -z)$?**

En este caso se aplican simetrías. El área de la derecha coincide con la de la izquierda; luego, $P(X \leq -z) = P(X \geq z)$.

Ejemplo: $P(X \leq -0{,}81) = P(X \geq 0{,}81) = 1 - P(X < 0{,}81) =$
$= 1 - F(0{,}81) = 1 - 0{,}7910 = 0{,}2090$



Figura 3.8.5. Argumentación por demostraciones informales Ar5 (L1t, p. 195).

*Ar6. Argumentación a través de razonamientos verbales deductivos.* Se demuestra una propiedad en forma deductiva utilizando propiedades, axiomas o teoremas que el alumno conoce previamente. Este tipo de argumentación es la más utilizada en los textos analizados, como ocurre en el trabajo de Sánchez Cobo (1999). Se trata, generalmente, de razonamientos poco formalizados que, de forma deductiva, justifican una propiedad utilizando principalmente el lenguaje verbal.

Una variable aleatoria, X, sigue una distribución normal. Se sabe que P (X < 15) = 0,969 y que P (X > 13) = 0,297. Calcula la media aritmética y la desviación típica de la variable X.

- La actividad solicita determinar los parámetros de la distribución normal X, que son desconocidos. Sin embargo, se conocen las siguientes probabilidades, que se asocian a la variable tipificada de esta forma:

$$P(X < 15) = P\left(Z \leq \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}969$$

En la tabla puede observarse que 0,969 puede ser considerada media aritmética entre las probabilidades de los valores 1,86 y 1,87; por tanto: $\frac{15-\mu}{\sigma} = 1{,}865$

Trabajando de manera análoga, se obtiene que:

$$P(X > 13) = 1 - P(X < 13) = 1 - 0{,}297 = 0{,}703 = P\left(Z \leq \frac{13-\mu}{\sigma}\right)$$

Haciendo uso de la tabla N (0 , 1), resulta: $\frac{13-\mu}{\sigma} = 0{,}535$

Resolviendo el siguiente sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, se hallan la media y la desviación típica:

$$\begin{cases} \frac{15-\mu}{\sigma} = 1{,}865 \\ \frac{13-\mu}{\sigma} = 0{,}535 \end{cases} \Rightarrow \mu = 12{,}2;\ \sigma = 1{,}5$$

Figura 3.8.6. Argumentación por razonamientos verbales deductivos Ar6 (L1p, p. 171).

Como se puede observar en la Tabla 3.3.7, la argumentación formal tratada en los libros seleccionados es prácticamente inexistente. Las argumentaciones que más aparecen son las informales; esto es, basadas en la utilización de casos particulares y las representaciones gráficas. Esto puede deberse a la necesidad de facilitar la adquisición de los conceptos matemáticos al estudiante, el cual no cuenta aún con el conocimiento necesario para comprender otro tipo de argumentación más formal.

Tabla 3.3.7. Argumentos en los libros de texto

| Argumentos | L1 | L2 |
|---|---|---|
| Argumentación a través de la representación gráfica | x | x |
| Argumentación a través de la comprobación de casos | x | x |
| Argumentación a través de la generalización | x | |
| Argumentación a través del análisis-síntesis | | x |
| Argumentación a través de demostraciones informales | x | x |
| Argumentación a través de razonamientos verbales deductivos | x | x |

### 3.7. Conclusiones sobre el estudio de los libros de texto

En este capítulo se ha desarrollado un análisis de la presentación de la distribución normal en dos libros de texto de 1º y 2º Bachillerato respectivamente, cada uno de ellos constituido por dos tomos (teoría y problemas) con el objetivo de analizar la forma en que se presenta el tema en este nivel educativo.

El estudio detallado se ha llevado a cabo en libros de texto publicados el año siguiente a la publicación del Real Decreto de Enseñanzas Mínimas (MECD, 2015). Es decir, bajo normativa LOMCE.

El estudio contemplado en esta Memoria parte de la premisa inicial de que un objeto matemático cobra significado en el sujeto por medio de las prácticas significativas de las que éste forma parte. Estas prácticas muchas veces están relacionadas con las propuestas incluidas en los libros de texto. Nuestro marco teórico ha facilitado la descripción de estas nociones en los libros de texto, haciendo uso de la clasificación de elementos básicos de significado establecida en el EOS.

En nuestro análisis se han encontrado los principales objetos matemáticos asociados a la distribución normal en los libros de texto analizados, las situaciones-problemas, conceptos y una amplia lista de las propiedades, procedimientos y argumentos fundamentales relativos a la misma. De hecho aparecen así mismo la mayoría de objetos matemáticos analizados en la investigación de Tauber, quien definió un significado institucional pretendido para la distribución normal en su estudio, aunque dicho estudio se orientaba a primer curso de Universidad. Es por ello que se puede afirmar que los libros analizados cuentan con una alta idoneidad epistémica, aunque, teniendo en cuenta que los textos se dirigen a estudiantes de Bachillerato y no universitarios, la idoneidad cognitiva podría ser poco adecuada, debido a la complejidad de la presentación del tema.

Dicha complejidad se disminuye algo mediante el tipo de demostraciones utilizadas entre las que abundan las informales, las basadas en ejemplos y en visualizaciones que el estudiante puede comprender mejor.

En el capítulo siguiente se expondrán las principales conclusiones obtenidas, organizadas respecto a los objetivos específicos y a las hipótesis planteadas inicialmente.

# CAPÍTULO 4.
# CONCLUSIONES

## 4.1. Introducción

En esta Memoria se ha presentado un análisis de la presentación de los objetos matemáticos asociados a la distribución normal en dos libros de texto de Bachillerato de una misma editorial publicados recientemente. Los objetos estudiados son los que contempla el Enfoque Onto-Semiótico, habiéndose considerado como significado de referencia el determinado por Tauber (2001) en su tesis doctoral. El tema se eligió teniendo en cuenta la importancia de la distribución normal, tanto en la propia estadística, como en el aprendizaje del estudiante.

Para finalizar esta Memoria, se presentan las principales conclusiones obtenidas en el estudio respecto a cada uno de los objetivos planteados en el Capítulo 1.

A continuación se especifican las principales aportaciones o contribuciones útiles que el presente trabajo realiza en pro de la docencia e investigación didáctica de la Matemática, haciendo una valoración de su alcance y limitaciones.

Finalmente se presentan las posibles líneas de investigación futuras de cara a completar o continuar el presente estudio.

## 4.2. Conclusiones sobre los objetivos e hipótesis

Como se ha comentado en el epígrafe anterior, en el Capítulo 1 de esta Memoria se definieron unos objetivos iniciales específicos para nuestra investigación, en función de los cuales se van a describir las principales conclusiones alcanzadas:

- O1: *Analizar los contenidos curriculares que sobre distribución normal se sugieren para el 1º y 2º curso de Bachillerato* para identificar los objetos matemáticos específicos en los que se enfocará el estudio que ahora presentamos.

  Este objetivo se ha abordado en el Capítulo 1, donde se han analizado las orientaciones curriculares relacionadas con la distribución normal. Se ha podido constatar, mediante dicho estudio, que la introducción de los conceptos asociados a la distribución normal se inician, en el currículum vigente (MECD, 2005), en 1º curso de Bachillerato, tanto para los estudiantes de Ciencias, como para los de Humanidades y Ciencias Sociales, ampliándose para el 2º curso de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales mediante su aplicación en el estudio de la inferencia. Tras revisar la literatura asociada, se pudieron fijar los contenidos matemáticos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje, de acuerdo a dicha normativa, que los libros de texto objeto de estudio debían tratar. Este análisis curricular, junto con la información proporcionada por el marco teórico estudiado y presentado en el mismo capítulo, han sido de gran utilidad en la identificación de los objetos matemáticos detallados en el Capítulo 3.

- O2: *Revisar la bibliografía sobre la investigación específica relacionada con el tema*.

  Este objetivo se aborda en el Capítulo 2, donde hemos revisado investigaciones relacionadas con el análisis de libros de texto de probabilidad y estadística y con la comprensión de la distribución normal. La principal conclusión obtenida en referencia a este objetivo y recogida en dicho capítulo, es que la gran mayoría de investigaciones sobre la distribución normal están centradas en estudiantes universitarios, haciéndose por tanto un trabajo poco profundo en cuanto a la comprensión de las propiedades básicas, procedimientos y conceptos iniciales de la curva normal así como los relacionados con la base de la inferencia estadística y a su presentación en textos no universitarios.
- O3: *Realizar un análisis del contenido que se incluye en dos libros de texto, de 1º y 2º curso de Bachillerato respectivamente, sobre la distribución normal*.

  Este objetivo se abordó en el Capítulo 3, donde se analizaron con profundidad dos libros de texto, divididos cada uno en parte teórica y parte práctica. En ellos se describió la forma en que se presentan los diferentes objetos matemáticos considerados en nuestro marco teórico. Como se detallará en epígrafes siguientes de este capítulo, debido al número de textos analizados los resultados de este estudio es limitado, puesto que optamos por un análisis más profundo de unos pocos textos, frente a un estudio superficial de un número mayor. Esto implica que las conclusiones obtenidas deberían analizarse y confirmarse o refutarse en una muestra más amplia de libros.

  La primera de las conclusiones obtenidas respecto a este objetivo hace referencia a que los libros de texto de bachillerato analizados, incluyen todos los campos de problemas universitarios descritos por Tauber (2001) excepto los relativos al contraste de hipótesis.

Por otro lado, se ha observado una alta variedad en los contextos utilizados, que incluyen todos los considerados en el estudio PISA (OECD, 2015) si bien es demasiado alto el porcentaje de ejercicios y problemas descontextualizado, lo cual no favorece la adquisición de un razonamiento estadístico completo en los estudiantes, puesto que promueve preferentemente el pensamiento abstracto respecto al componente interpretativo de la resolución de los mismos.

Otra conclusión importante, relativa a las definiciones encontradas en los libros seleccionados, es que existe un elevado uso de definiciones confusas, con alto nivel de formalidad en su redacción, acompañadas además de la ausencia de ejemplos asociados, lo cual, de acuerdo a Skemp (1980) puede dificultar la comprensión y asimilación de las mismas por parte del alumnado. No se suelen incluir definiciones intuitivas de los conceptos, como las descritas para el caso de la variable aleatoria por Tauber (2001) o para la distribución muestral por Alvarado (2007).

Resaltamos la riqueza del lenguaje verbal, simbólico, tabular y gráfico, en especial los dos primeros; respecto al lenguaje gráfico aparecen todas las representaciones consideradas por Tauber (2001)

Por último, los mecanismos de validación que más aparecen en los textos analizados son de carácter informal, al igual que en el trabajo de Sánchez-Cobo (1999) y Gea (2012), basados en la utilización de casos particulares y representaciones gráficas, lo que a priori parece indicar un acercamiento al estudiante y a la necesidad de facilitarle la adquisición de los conceptos matemáticos.

Todas estas conclusiones apuntan a una alta *idoneidad epistémica* de los textos analizados, en cuanto que la red de objetos matemáticos presentada en el tema de la distribución normal es representativa del significado institucional descrito por Tauber (2001) sobre este tema. Además los objetos matemáticos se presentan contextualizados en los principales tipos de problemas relacionados. Un motivo de reflexión, no obstante es que el estudio de Tauber estaba orientado a estudiantes universitarios, por lo que debiera considerarse si es necesario que la enseñanza en Bachillerato pueda simplificarse un poco.

Es difícil poder juzgar el resto de los componentes de la idoneidad; en cuanto a la idoneidad cognitiva (si el tema está adecuadamente presentado para que sea adquirido con facilidad por los estudiantes) sería necesario una investigación para analizar su comprensión; sin embargo, el alto grado de complejidad y formalidad observadas nos hace sospechar que dicha idoneidad es sólo moderada.

La idoneidad mediacional (medios de trabajo requeridos, que se consiguen fácilmente) e interaccional (forma de organización del trabajo en el aula) se pueden conseguir con facilidad.

La idoneidad afectiva pensamos que es alta debido a la riqueza de contextos que permite al estudiante comprender sus aplicaciones y valorar el tema. Por último la idoneidad ecológica se alcanza en cuanto todos los contenidos incluidos en el currículo se contemplan en los textos y las muchas aplicaciones conectan el tema con la sociedad. Sería preciso un mayor componente de innovación, aunque en los textos hemos observado tareas para ser resueltas con Geogebra y con Excel.

### 4.3. Principales aportaciones del trabajo

Consideramos que éste es un trabajo novedoso por su ámbito de estudio, en tanto en cuanto a las investigaciones previas se refiere, pues no hemos encontrado ninguna sobre la distribución normal en el nivel de bachillerato, salvo por las relacionadas con el desarrollo cognitivo de la idea de distribución.

Por otro lado, los resultados obtenidos en cuanto a los objetos matemáticos contemplados o no en los libros de texto analizados, proporcionan cierto criterio para la mejora de los libros de texto y de la enseñanza del tema en general. Además, el análisis del currículo y de los libros de texto es el primer paso para realizar investigaciones sobre la comprensión de los estudiantes o para montar experiencias específicas de enseñanza del tema. En este sentido, nuestros resultados pueden ser base para nuevas investigaciones.

Otra aportación importante es la validación del significado de referencia determinado por Tauber (2001) para el nivel de bachillerato y no sólo para estudios universitarios.

Por último, la ampliación y categorización de las investigaciones previas, ha permitido desarrollar un completo estado de la cuestión, partiendo del de Tauber (2001). Éste evidencia las principales dificultades en la comprensión de la distribución normal e inferencia estadística y puede promover investigaciones futuras focalizadas en la realización de cambios en la enseñanza del tema.

Sin embargo, debido a la muestra tan reducida que se ha utilizado y tal como se comentaba en el epígrafe anterior, las conclusiones obtenidas en este estudio deben ser analizadas y confirmadas con estudios posteriores similares pero con una muestra mayor de libros de texto.

### 4.4. Líneas de investigación futuras

Las conclusiones obtenidas a través de nuestra investigación, sientan las bases para promover otras líneas de trabajo similares. A continuación se describen a grandes rasgos algunos temas en los cuales este trabajo puede ser utilizado como punto de partida, con el objetivo de orientar investigaciones futuras sobre el tópico en cuestión.

La primera línea de investigación a proponer, dada la relevancia que le hemos asignado al libro de texto como recurso didáctico y debido al carácter exploratorio de nuestro estudio, sería la de continuar el estudio profundizando en los resultados que se presentan en esta Memoria, realizando una ampliación de la muestra que permita confirmar o refutar las conclusiones del estudio.

Por otro lado y en la misma línea que la anterior, puesto que en nuestro estudio nos focalizamos en la presentación de la distribución normal para estudiantes de Bachillerato en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, otra línea de investigación podría consistir en la ampliación del mismo con los estudiantes de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Si bien ésta no cuenta con un currículo tan amplio, podría realizarse un ejercicio de comparación a la hora de introducir los conceptos comunes.

Un tema de gran relevancia consistiría en abrir una línea de investigación que evaluase el conocimiento, dificultades y conflictos semióticos del alumnado sobre el tema al finalizar la etapa educativa. A partir de los resultados que se obtuvieran se podrían realizar propuestas de mejora en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por último, sería interesante continuar la línea de investigación con un estudio sobre los conocimientos del profesor en relación con la distribución normal. Esto es, analizar los diversos componentes del conocimiento matemático asociado a la misma de los futuros profesores (la muestra de estudio podría tomarse de alumnos del Máster de Educación Secundaria y Bachillerato, especialidad de Matemáticas), con el objetivo primordial de identificar las carencias en su formación y poder hacer propuestas para paliarlas.

## REFERENCIAS


Alvarado, H. (2007). *Significados del teorema central del límite en la enseñanza de la estadística en ingeniería.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2006). El significado del teorema central del límite: Evolución histórica a partir de sus campos de problemas. En A. Contreras, L. Ordoñez y C. Batanero (Eds.), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas/Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 257-277). Universidad de Jaén.

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico. Componentes y desarrollo. En J. M. Contreras (Ed.), I *Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatori*a. Granada: SEIEM.

Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2011). El currículo de estadística: Reflexiones desde una perspectiva internacional. *UNO 59*, 9-17.

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school.* Rotterdam: Sense Publishers.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *EM-TEIA. Revista de Educaçao Matematica e Tecnologica Iberoamericana,* *2*(2). Recuperado de http://www.ugr.es/~jmcontreras/pages/Investigacion/articulos/2011EmTEia.pdf

Batanero, C. y Díaz, C. (2015). Aproximación informal al contraste de hipótesis. *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2,* 207-214.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M., y Roa, R. 2013. El sentido estadístico y su desarrollo. *Números, 83*, 7-18.

Batanero, C., Gea, M., Arteaga, P. y Contreras, J.M. (2014). La estadística en la educación obligatoria: Análisis del currículo español. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet* 14(2). Recuperado de: http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1663

Batanero, C., Tauber, L. y Meyer, R. (1999). From data analysis to inference: A research project on the teaching of normal distributions. *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-Second Session of the International Statistical Institute* (Tome LVIII, Book 1, pp. 57-58). Helsinki, Finlandia: International Statistical Institute.

Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, B. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso de análisis de datos. *Quadrante, 10*(1), 59-92.

Braga, G. y Belver, J. L. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación, 27*(1), 199-218.

CCSSI (Common Core State Standards Initiative), (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Recuperado de; http://www.corestandards.org/Math/

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2016). *ORDEN de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía*. Sevilla: Autor.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, XXVIII* (2), 49-77.

DeGroot, M.H. (1988). *Probabilidad y estadística*. Addison-Wesley Iberoamericana, México. Pirámide, Madrid.

Escolano, A. (2009). El manual escolar y la cultura profesional de los docentes. *Tendencias Pedagógicas, 14,* 169-180.

Fernández, E. y Mejía, M. (2010). Análisis de textos escolares para el diseño de situaciones de enseñanza. En G. García (Ed.), *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 61-68). Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

Gea, M. (2012). *Fundamento para un estudio sobre la didáctica de la correlación y regresión*. Tesis de fin de Máster. Universidad de Granada.

Godino, (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of XX Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 417-425). Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22* (2-3), 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J. D. y Batanero, C (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino y Batanero, (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A, Sierpinska (Ed.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identit*y (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer. ISBN- 0-7923-4599-1.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2009). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. Conferencia presentad en el *VI CIBEM*, Puerto Montt, Chile, Enero, 2009. Recuperado de www.ugr.es/~jgodino/.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 26*(1), 39-88.

Godino, J. D. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. Anexo al artículo: Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. En Godino, J. D. y Batanero, C (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino, J. D., & Recio, A. M. (1997). Meaning of proofs in mathematics education. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME conference* (Vol. 2, pp. 2-313). Lahti, Finlandia: PME Group.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Hawkins, A., Jolliffe, F. y Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts.* Essex: Longman.

Harradine, A., Batanero, C., & Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), Teaching statistics in school mathematics. *Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 235-246). New York: Springer.

Herbel, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education, 38* (4), 344-369.

Huck, S., Cross, T. y Clark, S. (1986). Overcoming misconceptions about z-scores. *Teaching Statistics, 8,* 38-40.

Másmela, L.A. y Serrato, J.C. (2009). Una aproximación histórica a la evolución de la curva normal. Trabajo presentado en el *Segundo Congreso Internaciona las matemáticas un lenguaje universal*, ALAMMI 2009. Asociación Colombiana de Maestros de Matemáticas. Recuperado de: http://www.alammi.info/2congreso/memorias/Documentos/miercoles/UnaAPROXIMACIONHISTORICA.pdf

Mayén, S. (2009). *Significados de las medidas de posición central para estudiantes mexicanos de Bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Méndez, H. (1991). *Understanding the central limit theorem*. Tesis Doctoral. Universidad de California. UMI 6369

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics. Reston*, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

OCDE (2015). PISA 2012 *Assessment and analytical framework: Mathematics, readings, science, problem solving and financial literacy.* París: OECD.

Olivo, E. (2008). *Significados de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Ortiz, J.J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Pellicer, A. (2007). Calidad de los textos escolares. En MINEDUC (Ed.), *Primer Seminario Internacional de Textos Escolares. SITE 2006* (pp. 279-285). Santiago: MINEDUC.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France. Quesada, L. (2016). *Variable aleatoria continua y distribución normal*. Tesis de fin de Máster Universidad de Granada.

Reys, B. J., Reys, R. E. y Chavez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership, 61*(5), 61–66.

Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática*, (pp. 17-62). Sevilla: Alfar. Rodríguez, J. (2006).

Roth, W. M. (1996). Teacher questioning in an open-inquiry learning environment: Interactions of context, content, and student responses. *Journal of Research in Science Teaching, 33*(7), 709-736.

Ruiz, B. (2013). *Análisis epistemológico de la variable aleatoria y comprensión de objetos matemáticos relacionados por estudiantes universitarios.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Sánchez Cobo, F. (1999), Significado de la regresión y correlación para estudiantes universitarios. Departamebto de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1010). Greenwich, CT: Information Age y NCTM.

Skemp, R. R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* (Vol. 15). Ediciones Morata.

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos.* Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008) Exemplifying definitions: a case of a square. Educational *Studies in Mathematics*, *69*, 131–148.