Capítulo 1

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II: Exámenes de Selectividad 2006

El objeto de las presentes notas es dar a conocer algunas formas de resolver los modelos de exámenes de **Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales** que se propusieron en los procesos selectivos para el acceso a la Universidad del año 2006 en Andalucía. El modelo 3 fue propuesto para el examen de junio y el modelo 2 para el control de septiembre.

En los ejercicios que siguen utilizamos, sin demostración, los siguientes intervalos de confianza. También indicamos el error E admisible y si éste está acotado superiormente, el menor tamaño muestral que hay que tomar para conseguir que la muestra no sobrepase este error.

- Intervalo de confianza para la media muestral:

$$I.C. = \left]\, \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,\right[, \qquad E = \frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{\sqrt{n}}, \qquad n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{E} \right)^2$$

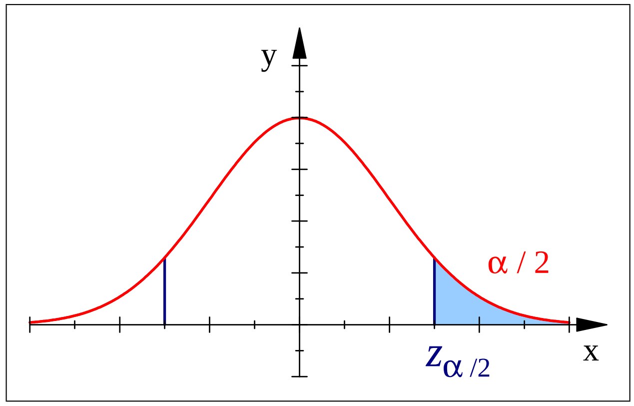
- Intervalo de confianza para proporciones:

$$\left]\, \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} \,\right[, \qquad E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}, \qquad n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2\ \hat{p}\,(1-\hat{p})}{E^2}.$$

Para un *nivel de confianza* p, o lo que es lo mismo, un *nivel de significación* $\alpha = 1 - p$, llamaremos *valor crítico* (y lo denotaremos por $z_{\alpha/2}$) al número real no negativo que deja a su derecha una probabilidad de $\alpha/2$ en la distribución normal estándar $\mathcal{N}\,(0,1)$, como se aprecia en la siguiente figura:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2},$$

$$p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$



Los valores críticos más utilizados son los siguientes (escribimos también el valor $1-\alpha/2 = (1+p)/2$ que se debe buscar en la tabla de la distribución normal $\mathcal{N}(0,1)$):

p	90 %	92 %	93 %	95 %	96 %	97 %	98 %	99 %	99'5 %
$1-\alpha/2$	0'95	0'96	0'965	0'975	0'98	0'985	0'99	0'995	0'9975
$z_{\alpha/2}$	1'645	1'75	1'81	1'96	2'055	2'17	2'325	2'575	2'81

1.1. Modelo 1

1.1.1. Opción A

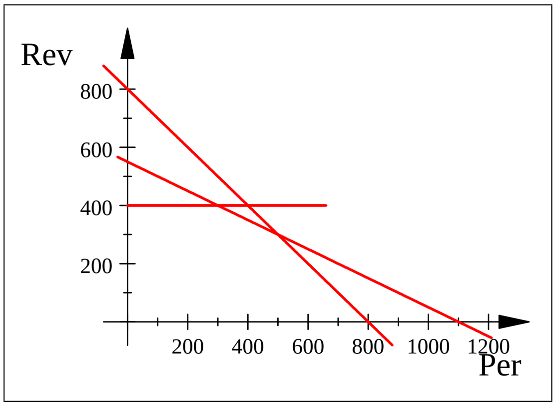
Ejercicio 1 *(**3 puntos**)* Una imprenta local edita periódicos y revistas. Para cada periódico necesita un cartucho de tinta negra y otro de color, y para cada revista uno de tinta negra y dos de color. Si sólo dispone de 800 cartuchos de tinta negra y 1100 de color, y si no puede imprimir más de 400 revistas, ¿cuánto dinero podrá ingresar como máximo, si vende cada periódico a 0'9 euros y cada revista a 1'2 euros?

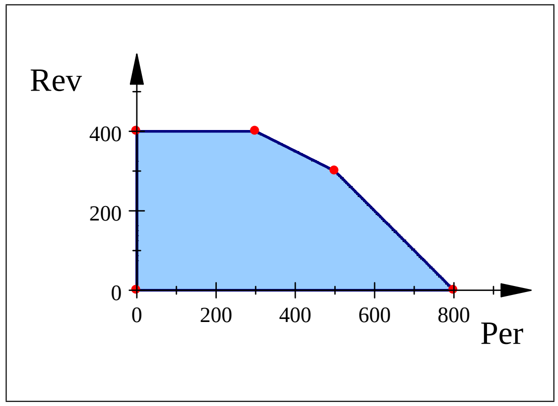
Solución: Llamemos x al número de periódicos que se pueden fabricar y llamemos y al número de revistas. Las condiciones del problema nos indican las siguientes restricciones:

	Cartucho		
	Negro	Color	Precio
Periódico	1	1	0'9 €
Revista	1	2	1'2 €
	800	1100	

$$\begin{cases} x, y \geq 0, \\ x + y \leq 800, \\ x + 2y \leq 1100, \\ y \leq 400. \end{cases}$$

Representamos gráficamente estas condiciones:





y calculamos sus vértices:

$$(0,0)\,, \quad (0,400)\,, \quad (300,400)\,, \quad (500,300)\,, \quad (800,0)\,.$$

Dado que la función que indica la recaudación es $F(x,y) = 0'9x + 1'2y$, buscamos un máximo de esta función en la región anterior. De existir, el *Teorema Fundamental de la Programación Lineal* nos dice que éste se sitúa en un vértice, por lo que evaluamos:

$$F(0,0) = 0, \quad F(0,400) = 480, \quad F(300,400) = 750, \quad F(500,300) = 810, \quad F(800,0) = 720.$$

Así, el dinero máximo que se puede recaudar es de 810 € (que se consigue fabricando y vendiendo 500 periódicos y 300 revistas). ■

Ejercicio 2 Sean las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = 2x - x^2$.

a) *(**2 puntos**)* Determine, para cada una de ellas, los puntos de corte con los ejes, el vértice y la curvatura. Represéntelas gráficamente.

b) *(**1 punto**)* Determine el valor de x para el que se hace mínima la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

SOLUCIÓN : Los puntos de corte con los ejes son sencillos de calcular

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} \notin \mathbb{R},$$

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(2-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Como $f(0) = 6$ y $g(0) = 0$, ya tenemos todos los puntos de corte con los ejes:

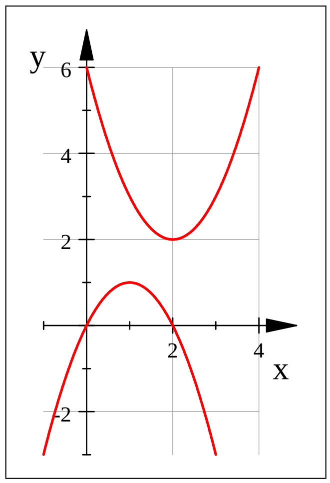
$$f : \begin{cases} \text{No corta al eje } OX, \\ OY \to (0,6)\,. \end{cases} \qquad g : \begin{cases} OX \to (0,0)\,,\ (2,0)\,, \\ OY \to (0,0)\,. \end{cases}$$

El vértice de una parábola se calcula directamente sabiendo que su primera coordenada es $x_v = -b/(2a)$. Así

$$f: \quad x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2, \quad y_v = f(x_v) = 2, \qquad V_f(2,2);$$

$$g: \quad x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad y_v = g(x_v) = 1, \qquad V_g(1,1).$$

Finalmente, sabemos que la parábola f es convexa, porque su coeficiente líder es positivo, y la parábola g es cóncava. Con estos datos, las representamos fácilmente.



Consideremos ahora la función $h(x) = f(x) - g(x) = \left(x^2 - 4x + 6\right) - \left(2x - x^2\right) = 2x^2 - 6x + 6$. Se trata de una parábola convexa que posee un único mínimo, estando éste situado en su vértice, que es

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Así $x = 3/2$ es el punto en el que se hace mínima la distancia (¡en vertical!) entre f y g. ■

Ejercicio 3 Sean A y B dos sucesos tales que $p\left(A^C\right) = 0'60$, $p(B) = 0'25$ y $p(A \cup B) = 0'55$.

a) ***(1 punto)*** Razone si A y B son independientes.

b) ***(1 punto)*** Calcule $p\left(A^C \cup B^C\right)$.

Solución : Es claro que $p(A) = 1 - p\left(A^C\right) = 0'4$. Además

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0'4 + 0'25 - 0'55 = 0'1,$$

$$p(A) \cdot p(B) = 0'4 \cdot 0'25 = 0'1.$$

Como $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$, los sucesos A y B son independientes. Por otro lado, aplicando las *leyes de De Morgan*, se tiene que

$$p\left(A^C \cup B^C\right) = p\left((A \cap B)^C\right) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0'1 = 0'9.$$

■

Ejercicio 4 *(***2 puntos***)* De 500 encuestados en una población, 350 se mostraron favorables a la retransmisión de debates televisivos en tiempos de elecciones. Calcule un intervalo de confianza, al 99'5 %, para la proporción de personas favorables a estas retransmisiones.

Solución: La proporción de personas favorables en la muestra (de tamaño $n = 500 \geq 30$) es $\hat{p} = 350/500 = 0'7$. Como $n \cdot \hat{p} = 350 \geq 5$ y $n \cdot \hat{q} = n \cdot (1 - \hat{p}) = 150 \geq 5$, podemos utilizar el intervalo de confianza

$$\left] \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

para estimar la proporción de personas de la población favorables a estas retransmiesiones. Dado que $p = 1 - \alpha = 0'995$, entonces buscamos en la tabla de la normal estándar el valor crítico:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+p}{2} = 0'9975 \quad \Rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 2'81.$$

Así, el intervalo de confianza buscado es:

$$I.C. = \left] \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[= \left] 0'7 \pm 2'81 \sqrt{\frac{0'7 \cdot 0'3}{500}} \right[=$$

$$= \left] \ 0'7 \pm 0'0576 \ \right[= \left] \ 0'6424, 0'7576 \ \right[.$$

Este intervalo significa que en la población hay, al nivel de confianza del 99'5 %, entre el 68'24 y el 75'74 % de personas favorables a la retransmisión de debates televisivos en tiempos de elecciones.

■

1.1.2. Opción B

Ejercicio 1 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) *(***1'5 puntos***)* Calcule $A^{-1} \cdot (2B + 3I_2)$.

b) *(***1'5 puntos***)* Determine la matriz X para que $X \cdot A = A + I_2$.

Solución : La matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \ \operatorname{adj}\left(A^T\right) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Así, la matriz pedida es

$$A^{-1} \cdot (2B + 3I_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, la matriz X es

$$X = (A + I_2) \cdot A^{-1} = AA^{-1} + I_2 A^{-1} = I_2 + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

■

Ejercicio 2 Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) *(**1 punto**)* $f(x) = \dfrac{1-3x}{x} + (5x-2)^3.$

b) *(**1 punto**)* $g(x) = \left(x^2+2\right) \cdot \ln\left(x^2+2\right).$

c) *(**1 punto**)* $h(x) = 3^{5x} + e^x.$

Solución : Sólo hay que aplicar las reglas elementales de derivación.

$$f'(x) = \frac{-3x - (1-3x)}{x^2} + 3 \cdot (5x-2)^2 \cdot 5 = -\frac{1}{x^2} + 15 \cdot (5x-2)^2\,;$$

$$g'(x) = 2x \ln\left(x^2+2\right) + \left(x^2+2\right) \cdot \frac{2x}{x^2+2} = 2x\left(\ \ln\left(x^2+2\right) + 1\ \right);$$

$$h'(x) = 3^{5x} \cdot \ln 3 \cdot 5 + e^x = 5 \ln 3 \cdot 3^{5x} + e^x.$$

■

Ejercicio 3 Una urna contiene tres bolas azules y cuatro rojas. Se extraen al azar tres bolas sucesivamente con reemplazamiento.

a) *(**1 punto**)* Calcule la probabilidad de que las tres sean del mismo color.

b) *(**1 punto**)* calcule la probabilidad de que dos sean azules y una roja.

Solución : Llamemos A_i al suceso "la i-ésima bola extraída es azul" y R_i al suceso "la i-ésima bola extraída es roja". Dado que hay reemplazamiento, la extracción de las bolas es independiente de manera que la probabilidad de que salga un color no depende del color que haya salido en el experimento anterior.

$$p\left(A_i\right)=p\left(\frac{A_i}{A_{i-1}}\right)=p\left(\frac{A_i}{R_{i-1}}\right)=\frac{3}{7}, \qquad p\left(R_i\right)=p\left(\frac{R_i}{A_{i-1}}\right)=p\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)=\frac{4}{7}.$$

Por tanto,

$$p\left(\text{ "tres bolas del mismo color" }\right)=p\left(A_1\cap A_2\cap A_3\right)+p\left(R_1\cap R_2\cap R_3\right)=$$

$$=p\left(A_1\right)\cdot p\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\cdot p\left(\frac{A_3}{A_1\cap A_2}\right)+p\left(R_1\right)\cdot p\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot p\left(\frac{R_3}{R_1\cap R_2}\right)=$$

$$=p\left(A_1\right)\cdot p\left(A_2\right)\cdot p\left(A_3\right)+p\left(R_1\right)\cdot p\left(R_2\right)\cdot p\left(R_3\right)=p\left(A_1\right)^3+p\left(R_1\right)^3=$$

$$=\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^3=\frac{13}{49}.$$

Para que dos bolas sean azules y una roja, la roja puede ocupar una de las tres posiciones, por lo que

$$p\left(\text{ "dos azules y una roja" }\right)=p\left(R_1\cap A_2\cap A_3\right)+p\left(A_1\cap R_2\cap A_3\right)+p\left(A_1\cap A_2\cap R_3\right)=$$

$$=3\ p\left(R_1\right)\ p\left(A_1\right)^2=3\ \frac{4}{7}\ \left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{108}{343}.$$

■

Ejercicio 4 El gasto anual, en videojuegos, de los jóvenes de una ciudad sigue una ley Normal de media desconocida μ y desviación típica 18 euros. Elegida al azar, una muestra de 144 jóvenes se ha obtenido un gasto medio de 120 euros.

a) *(**0'5 puntos**)* Indique la distribución de las medias de las muestras de tamaño 144.

b) *(**0'75 puntos**)* Determine un intervalo de confianza, al $99\ \%$, para el gasto medio en videojuegos de los jóvenes de esa ciudad.

c) *(**0'75 puntos**)* ¿Qué tamaño muestral mínimo deberíamos tomar para, con la misma confianza, obtener un error menor que $1'9$?

Solución : Los datos que tenemos son $n=144$, $\sigma=18$ y $\bar{x}=120$ €. La distribución de las medias muestrales de tamaño 144 es

$$\bar{X}_{144}\hookrightarrow\mathcal{N}\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\mathcal{N}\left(\mu,\frac{18}{12}\right)=\mathcal{N}\left(\mu,1'5\right),$$

donde μ es la media de la población (que es desconocida). Para un nivel de confianza $p = 0'99$, tenemos el nivel crítico

$$1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+p}{2} = 0'995 \quad \Rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 2'575,$$

de donde el intervalo de confianza para el gasto medio, redondeando a los céntimos, es

$$I.C. = \left] \, \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, \right[= \left] \, 120 \pm 2'575\frac{18}{12} \, \right[= \left] \, 120 \pm 3'8625 \, \right[\approx$$
$$\approx \left] \, 116'14, 123'86 \, \right[.$$

Finalmente, si queremos que el error sea menor o igual que $1'90$ €, debemos tomar un tamaño no menor de:

$$1'9 = E_0 \leq E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{E_0}\right)^2 = \left(\frac{2'575 \cdot 18}{1'9}\right)^2 \approx 595'1.$$

Así, debemos elegir una muestra de, al menos, 596 jóvenes. ■

1.2. Modelo 2: Septiembre

1.2.1. Opción A

Ejercicio 1 a) *(**1'5 puntos**)* Representa gráficamente el recinto delimitado por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \geq 3\,(\,y - 3\,) \ ; \quad 2x + 3y \leq 36 \ ; \quad x \leq 15 \ ; \quad x \geq 0 \ ; \quad y \geq 0.$$

b) *(**1 punto**)* Calcule los vértices del recinto.

c) *(**0'5 puntos**)* Obtenga el valor máximo de la función $F(x, y) = 8x + 12y$ en este recinto e indique dónde se alcanza.

Solución : La primera desigualdad es

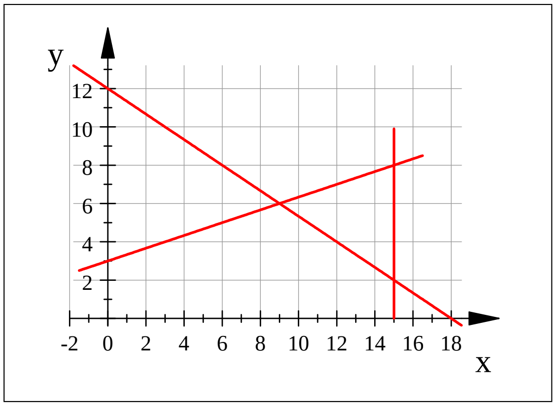
$$x \geq 3\,(\,y - 3\,) \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 3y - 9 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3y \geq -9.$$

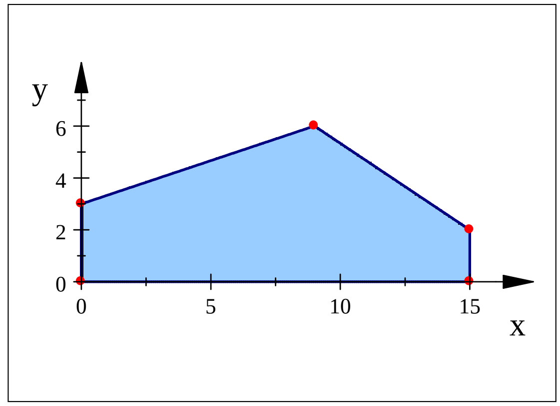
Veamos dónde se cortan las rectas:

$$\left\{ \begin{array}{c} x - 3y = -9 \\ 2x + 3y = 36 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} x - 3y = -9 \\ x = 15 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} 2x + 3y = 36 \\ x = 15 \end{array} \right.$$

$$x = 9,\ y = 6 \qquad\qquad x = 15,\ y = 8 \qquad\qquad x = 15,\ y = 2$$

Con esta información y sabiendo dónde cortan las rectas a los ejes coordenados, es posible dibujarlas.





Por tanto, los vértices son

$$(0,0)\,, \quad (0,3)\,, \quad (9,6)\,, \quad (15,2)\,, \quad (15,0)\,.$$

El *Teorema Fundamental de la Programación Lineal* afirma que la función $F(x,y) = 8x + 12y$ alcanza máximo (y mínimo) en la región anterior, y que éste debe estar situado en un vértice, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

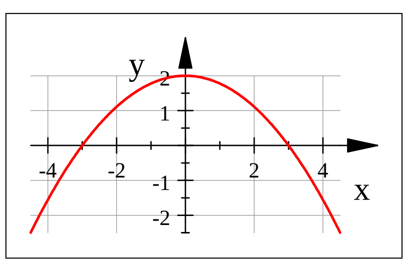
$$F(0,0) = 0, \quad F(0,3) = 36, \quad F(9,6) = 144, \quad F(15,2) = 144, \quad F(15,0) = 120.$$

Esto concluye que el máximo de la función F en el recinto dibujado es 144, y se alcanza en todos los puntos del segmento cerrado de extremos $(9,6)$ y $(15,2)$. ■

Ejercicio 2 a) ***(1'5 puntos)*** La gráfica de la función derivada de una función f es la parábola de vértice $(0,2)$ que corta al eje de abscisas en los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$. A partir de dicha gráfica, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) ***(1'5 puntos)*** Calcule los extremos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x$.

Solución: Hacemos un boceto de la función derivada f', pues se trata de una parábola muy sencilla:



Hay que tener muy claro que ésta no es f, sino su derivada f'. No obstante, sabemos que el signo de la función f' es lo que determina la monotonía de f, por lo que sabemos que

f'	$-$	Mín	$+$	Máx	$-$
f	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$

$$\begin{cases} f \text{ creciente en }]-3,3[\,, \\ f \text{ decreciente en }]-\infty,-3[\,\cup\,]3,+\infty[\,. \end{cases}$$

Para el segundo apartado, calculamos los puntos en los que se anula la primera derivada de g:

$$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x-1)(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Con la segunda derivada, $g''(x) = 6x$, confirmamos que se tratan de extremos relativos, y los clasificamos:

$$\begin{aligned} g''(-1) &= -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad (-1, g(-1)) = (-1, 2) \text{ es un máximo relativo,} \\ g''(1) &= 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad (1, g(1)) = (1, -2) \text{ es un mínimo relativo.} \end{aligned}$$

Por tanto, $(-1, 2)$ y $(1, -2)$ son los únicos extremos relativos de g. ■

Ejercicio 3 Laura tiene un dado con tres caras pintadas de azul y las otras tres de rojo. María tiene otro dado con tres caras pintadas de rojo, dos de verde y una de azul. Cada una tira su dado una vez y observan el color.

a) *(**1 punto**)* Describa el espacio muestral asociado y las probabilidades de los sucesos elementales.

b) *(**1 punto**)* Si salen los dos colores iguales gana Laura; y si sale el color verde, gana María. Calcule la probabilidad que tiene cada una de ganar.

Solución : Llamemos A_L y R_L a los sucesos "Laura tira su dado y sale azul" o "sale rojo", respectivamente. Igualmente, María tiene los sucesos R_M, V_M y A_M, según si sale rojo, verde o azul. Las probabilidades son claras:

$$p(A_L) = p(R_L) = \frac{1}{2}, \quad p(R_M) = \frac{1}{2}, \quad p(V_M) = \frac{1}{3}, \quad p(A_M) = \frac{1}{6}.$$

Entonces el experimento que consiste en lanzar los dos dados y mirar los colores que salen tiene como espacio muestral el producto de estos dos espacios muestrales elementales:

$$E = E_L \times E_M = \{A_L, R_L\} \times \{R_M, V_M, A_M\}.$$

Si establecemos el criterio de que la primera componente corresponde al dado de Laura y la segunda al dado de María, podemos quitar los subíndices, quedando el espacio muestral

$$E = \{ \ (A,R), \ (A,V), \ (A,A), \ (R,R), \ (R,V), \ (R,A) \ \}.$$

Como el color del dado de una es independiente del color del dado de la otra, tenemos la probabilidad

$$p(A,R) = p(A_L) \cdot p(R_M) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Así, multiplicando, se calculan todas las probabilidades del espacio muestral, resultando

$$p(A,R) = \frac{1}{4}, \quad p(A,V) = \frac{1}{6}, \quad p(A,A) = \frac{1}{12},$$

$$p(R,R) = \frac{1}{4}, \quad p(R,V) = \frac{1}{6}, \quad p(A,A) = \frac{1}{12}.$$

Calculemos las probabilidades solicitadas:

$$p\,(\text{ ``gana Laura'' }) = p\,(\text{ ``mismo color'' }) = p\,(A,A) + p\,(R,R) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3},$$

$$p\,(\text{ ``gana María'' }) = p\,(\text{ ``sale verde'' }) = p\,(A,V) + p\,(R,V) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, el juego es equitativo. ■

Ejercicio 4 a) *(**1 punto**)* Los valores:

$$52, \quad 61, \quad 58, \quad 49, \quad 53, \quad 60, \quad 68, \quad 50, \quad 53,$$

constituyen una muestra aleatoria de una variable aleatoria Normal, con desviación típica 6. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población, con un nivel de confianza del 92 %.

b) *(**1 punto**)* Se desea estimar la media poblacional de otra variable aleatoria Normal, con varianza 49, mediante la media de una muestra aleatoria. Obtenga el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo de la estimación, mediante un intervalo de confianza al 97 %, sea menor o igual que 2.

Solución : Como la variable de partida sigue una distribución normal, entonces cualquier media muestral sigue una distribución normal. En particular, sabemos que $\bar{x} = 56$ para la muestra considerada, siendo de tamaño $n = 9$. Como $\sigma = 6$, el intervalo de confianza para la media de la población es

$$I.C. = \left]\ \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right[= \left]\ 56 \pm 1'75\ \frac{6}{\sqrt{9}}\ \right[= \left]\ 56 \pm 3'5\ \right[= \left]\ 52'5, 59'5\ \right[.$$

Si para otra variable se tiene que $\sigma^2 = 49$ (cuidado: $\sigma = 7$), y queremos un error menor o igual que $E = 2$, debemos tomar una muestra de tamaño, al menos,

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'17 \cdot 7}{2}\right)^2 \approx 57'684,$$

por lo que tomaremos una muestra de tamaño, al menos, 58. ■

1.2.2. Opción B

Ejercicio 1 *(**3 puntos**)* El cajero de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes. El número de billetes de 10 euros que nos ha dado es el doble del de 20 euros. Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero.

Solución : Llamemos x, y y z al número de billetes de 10, 20 y 50 €, respectivamente, que nos ha dado el cajero. Puesto que nos ha entregado 8 billetes, sabemos que $x+y+z=8$. Como nos ha entregado 290 €, se tiene $10x+20y+50z=290$ (que es equivalente a $x+2y+5z=29$). Finalmente, $x=2y$ porque hay doble número de billetes de 10 € que de 20 €. Resolvemos el sistema por el *método de Gauss-Jordan*:

$$\begin{cases} x-2y=0, \\ x+y+z=8, \\ x+2y+5z=29. \end{cases} \quad \left\|\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 29 \end{array}\right\| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 5 & 29 \end{array}\left\| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 11 & 55 \end{array}\right\|$$

De aquí, $z=5$, $y=1$ y $x=2$, por lo que el cajero nos ha entregado dos billetes de 10 €, un billete de 20 € y cinco billetes de 50 €. ■

Ejercicio 2 Considera la función $f(x)=\dfrac{3-x}{2-x}$.

a) *(**1 punto**)* Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x=1$.

b) *(**1 punto**)* Estudie su monotonía.

c) *(**1 punto**)* Calcule sus asíntotas.

Solución : Necesitamos calcular la primera derivada de f:

$$f'(x)=\frac{-(2-x)-(3-x)(-1)}{(2-x)^2}=\frac{1}{(2-x)^2}.$$

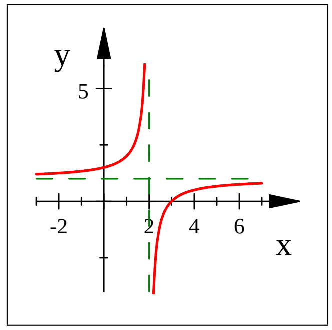
Entonces en el punto $x=1$ se tiene que $f(1)=\frac{2}{1}=2$ y que $f'(x)=1/1=1$. Así la ecuación de la recta tangente a f en el punto de abscisa $x=1$ es

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y-2=1(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y=x+1.$$

Dado que $f'>0$ en todo su dominio, la función f es estrictamente creciente. Además sus asíntotas son:

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} f(x)=\lim_{x\to 2^{\pm}}\frac{3-x}{2-x}=\mp\infty \quad \Rightarrow \quad \text{A.V. la recta } x=2,$$
$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{3-x}{2-x}=\frac{-1}{-1}=1 \quad \Rightarrow \quad \text{A.H. la recta } y=1.$$

En efecto, si dibujamos la función observamos estas dos asíntotas:



■

Ejercicio 3 De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: En el $23\,\%$ de los casos no se llevaba puesto el cinturón de seguridad, en el $65\,\%$ no se respetaron los límites de velocidad permitidos y en el $30\,\%$ de los casos se cumplían ambas normas, es decir, llevaban puesto el cinturón y respetaban los límites de velocidad.

a) *(**1 punto**)* Calcule la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, no se haya cumplido alguna de las dos normas.

b) *(**1 punto**)* Razone si son independientes los sucesos "llevar puesto el cinturón" y "respetar los límites de velocidad".

Solución: Llamemos S al suceso "en el momento del accidente, llevaba puesto el cinturón de seguridad" y V al suceso "en el momento del accidente, respetaba los límites de velocidad". Los datos del problema nos dicen que

$$p\left(S^C\right) = 0'23, \quad p\left(V^C\right) = 0'65, \quad p\left(S \cap L\right) = 0'3.$$

De aquí se deduce que $p\left(S\right) = 1 - p\left(S^C\right) = 0'77$, por lo que la probabilidad de no cumplir alguna de las dos normas es, aplicando las *leyes de De Morgan*:

$$p\left(\text{ ``no cumplir alguna norma'' }\right) = p\left(S^C \cup V^C\right) = p\left(\left(S \cap V\right)^C\right) = 1 - p\left(S \cap L\right) = 0'7.$$

Por otro lado,

$$p\left(S\right) \cdot p\left(V\right) = 0'77 \cdot 0'35 = 0'2695,$$

mientras que $p\left(S \cap L\right) = 0'3$. Como $p\left(S \cap L\right) \neq p\left(S\right) \cdot p\left(V\right)$, los sucesos "llevar puesto el cinturón" y "respetar los límites de velocidad" no son independientes. ■

Ejercicio 4 *(**2 puntos**)* En una muestra aleatoria de 1000 personas de una ciudad, 400 votan a un determinado partido político. Calcule un intervalo de confianza al $96\,\%$ para la proporción de votantes de ese partido en la ciudad.

Solución : La proporción de votantes de ese partido en la muestra de tamaño $n = 1000 \geq 30$ es $\hat{p} = 400/1000 = 0'4$. Como $n \cdot \hat{p} = 400 \geq 5$ y $n \cdot \hat{q} = 600 \geq 5$, podemos utilizar la fórmula usual para encontrar el intervalo de confianza para la proporción poblacional. Para el nivel de confianza $p = 1-\alpha = 0'96$, el valor crítico correspondiente es $z_{\alpha/2} = 2'055$. Entonces el intervalo de confianza es

$$I.C. = \left] \; 0'4 \pm 2'055 \sqrt{\frac{0'4 \cdot 0'6}{1000}} \; \right[\approx \left] \; 0'4 \pm 0'0318 \; \right[= \left] \; 0'3682, 0'4318 \; \right[.$$

Esto significa que, según el estudio, dicho partido político obtendrá, al nivel de confianza del 96 %, entre el $36'82$ % y el $43'18$ % de los votos. ■

1.3. Modelo 3: JUNIO

1.3.1. Opción A

Ejercicio 1 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) *(**1 punto**)* Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.

b) *(**1 punto**)* Igualmente para que $A - I_2 = B^{-1}$.

c) *(**1 punto**)* Determine x para que $A \cdot B = I_2$.

Solución : Para el primer apartado debe verificarse que

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = A = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

por lo que $B^2 = A$ únicamente cuando $x = 1$. La matriz inversa de B es

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \operatorname{adj}\left(B^T\right) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B^{-1} = A - I_2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix},$$

y podemos afirmar que $A - I_2 = B^{-1}$ si, y sólo si, $x = 0$. Finalmente, $A \cdot B = I_2$ si, y sólo si, $A = B^{-1}$, por lo que

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = A = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

lo que ocurre solamente cuando $x = -1$. ■

Ejercicio 2 a) *(**1'5 puntos**)* Halle los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$ pase por el punto $(1, -3)$ y tenga un punto de inflexión en $x = -1$.

b) *(**1'5 puntos**)* Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

SOLUCIÓN: Las dos primeras derivadas de f son $f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5$ y $f''(x) = 6ax + 6$. Entonces traducimos las dos condiciones dadas en dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$f \text{ pasa por } (1,-3) \quad \Leftrightarrow \quad f(1) = -3 \quad \Leftrightarrow \quad a + 3 - 5 + b = -3 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = -1,$$

$$\text{P.I. en } x = -1 \quad \Rightarrow \quad f''(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6a + 6 = 0.$$

Por tanto $a = 1$ y $b = -2$.

Por otro lado, si $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$, su primera derivada es $g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, lo que indica que los puntos críticos son $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$. Analizamos el signo de g' en la siguiente tabla, y sacamos las conclusiones oportunas:

g'	$+$	Máx	$-$	Mín	$+$
g	$\nearrow$	0	$\searrow$	2	$\nearrow$

$$\text{Monotonía} \begin{cases} f \text{ decreciente en }]0,2[\,, \\ f \text{ creciente en }]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[\,. \end{cases}$$

$$\text{Extremos} \begin{cases} \text{máximo relativo en } (0,7)\,, \\ \text{mínimo relativo en } (2,3)\,. \end{cases}$$

■

Ejercicio 3 En un aula de dibujo hay 40 sillas, 30 con respaldo y 10 sin él. Entre las sillas sin respaldo hay 3 nuevas y entre las sillas con respaldo hay 7 nuevas.

a) *(**1 punto**)* Tomada una silla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea nueva?

b) *(**1 punto**)* Si se coge una silla que no es nueva, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga respaldo?

SOLUCIÓN: [**con los teoremas de probabilidad**] Llamemos R al suceso "elegida una silla al azar, ésta tiene respaldo" y N al suceso "elegida una silla al azar, ésta es nueva". Como hay 30 sillas con respaldo en una clase de 40, se sabe que

$$p(R) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}, \qquad p\left(R^C\right) = \frac{1}{4}.$$

De entre las sillas sin respaldo, que son 10, hay 3 que son nuevas, por lo que

$$p\left(\frac{N}{R^C}\right) = \frac{3}{10}, \qquad p\left(\frac{N^C}{R^C}\right) = \frac{7}{10}.$$

Igualmente, de entre las sillas con respaldo, que son 30, hay 7 que son nuevas, por lo que

$$p\left(\frac{N}{R}\right)=\frac{7}{30}, \qquad p\left(\frac{N^C}{R}\right)=\frac{23}{30}.$$

Entonces el *teorema de la probabilidad total* nos dice que la probabilidad de tomar una silla nueva al azar es

$$p(N)=p(R)\cdot p\left(\frac{N}{R}\right)+p\left(R^C\right)\cdot p\left(\frac{N}{R^C}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{30}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{4}.$$

Por otro lado, para calcular la probabilidad de que una silla que no es nueva no tenga respaldo es

$$p\left(\frac{R^C}{N^C}\right)=\frac{p\left(R^C\cap N^C\right)}{p\left(N^C\right)}=\frac{p\left(R^C\right)\cdot p\left(\frac{N^C}{R^C}\right)}{1-p(N)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{7}{30}.$$

■

Solución : [**con una tabla de contingencia**] Podemos resumir la información que nos da el problema en la siguiente tabla de contingencia, que completamos fácilmente

	N	N^C	
R	7		30
R^C	3		10
			40

$\Rightarrow$

	N	N^C	
R	7	23	30
R^C	3	7	10
	10	30	40

Así, la probabilidad de elegir una silla nueva al azar es

$$p(N)=\frac{\text{número de sillas nuevas}}{\text{número total de sillas}}=\frac{10}{40}=\frac{1}{4},$$

y si hemos tomado una silla que no es nueva, la probabilidad de que no tenga respaldo es

$$p\left(\frac{R^C}{N^C}\right)=\frac{\text{número de sillas sin respaldo y no nuevas}}{\text{número de sillas que no son nuevas}}=\frac{7}{30}.$$

Este segundo método no requiere de ningún teorema, sino del sentido común. ■

Ejercicio 4 *(***2 puntos***)* En una población, una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 9. ¿De qué tamaño, como mínimo, debe ser la muestra con la cual se estime la media poblacional con un nivel de confianza del 97 % y con un error máximo admisible igual a 3?

Solución : Sabemos que $\sigma=9$, $E\leq 3$ y al nivel de confianza $p=0'97$ se tiene el valor crítico $z_{\alpha/2}=2'17$. Entonces

$$n\geq\left(\frac{z_{\alpha/2}\,\sigma}{E}\right)^2=\left(\frac{2'17\cdot 9}{3}\right)^2\approx 42'38.$$

Por tanto, debemos tomar una muestra de tamaño, al menos, 43. ■

1.3.2. Opción B

Ejercicio 1

a) *(**2 puntos**)* Representa la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

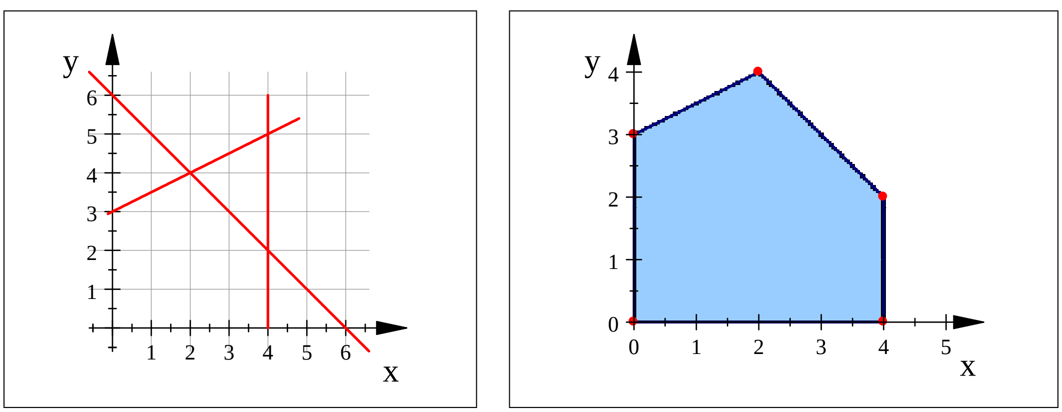
$$x \geq 0 \ ; \quad y \geq 0 \ ; \quad -x + 2y \leq 6 \ ; \quad x + y \leq 6 \ ; \quad x \leq 4.$$

b) *(**1 punto**)* Calcule el máximo de la función $F(x, y) = 2x + 2y + 1$ en la región anterior e indique dónde se alcanza.

Solución : Calculamos dónde se cortan las rectas distintas de los ejes coordenados:

$$\left\{\begin{array}{l} -x+2y=6 \\ x+y=6 \end{array}\right. \quad x=2,\ y=4 \qquad \left| \qquad \left\{\begin{array}{l} -x+2y=6 \\ x=4 \end{array}\right. \quad x=4,\ y=5 \qquad \right| \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y=6 \\ x=4 \end{array}\right. \quad x=4,\ y=2$$

Con esta información y sabiendo dónde cortan las rectas a los ejes coordenados, es posible dibujarlas.



Así, los vértices del recinto R son

$$(0,0)\,, \quad (0,3)\,, \quad (2,4)\,, \quad (4,2)\,, \quad (4,0)\,.$$

El *Teorema Fundamental de la Programación Lineal* afirma que la función $F(x, y) = 2x + 2y + 1$ alcanza máximo en la región anterior, y que éste debe estar situado en un vértice, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

$$F(0,0) = 1, \quad F(0,3) = 7, \quad F(2,4) = 13, \quad F(4,2) = 13, \quad F(4,0) = 9.$$

Esto concluye que el máximo de la función F en el recinto R es 13, y se alcanza en todos los puntos del segmento cerrado de extremos $(2,4)$ y $(4,2)$. ■

Ejercicio 2 Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x-1}, & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$

a) *(**2 puntos**)* Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

b) *(**1 punto**)* Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución : La función f es continua y derivable en $\mathbb{R}^-$ porque en este intervalo abierto es una función racional (sin ceros del denominador), y es continua y derivable en $\mathbb{R}^+$ porque en este intervalo es una función polinómica. Nos queda por analizar la continuidad y derivabilidad en $x = 0$. Calculamos los límites laterales de f en $x = 0$:

$$f(0) = f\left(0^-\right) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{2x-1} = 0,$$

$$f\left(0^+\right) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 + x\right) = 0.$$

Como estos límites laterales coinciden entre sí y coinciden con el valor $f(0) = 0$, la función f es continua en $x = 0$, y así deducimos que f es continua en todo su dominio. Para estudiar la derivabilidad, primero derivamos el primer trozo:

$$x < 0, \quad \left[\frac{x}{2x-1}\right]' = \frac{(2x-1) - 2x}{(2x-1)^2} = \frac{-1}{(2x-1)^2}.$$

Entonces la primera derivada de f es, al menos,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(2x-1)^2}, & \text{si } x < 0, \\ 2x + 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Estudiamos los límites laterales de f' en $x = 0$:

$$f'\left(0^-\right) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{(2x-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$f'\left(0^+\right) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1.$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, la función f no es derivable en $x = 0$. Resumiendo, f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para calcular la recta tangente en $x = 1$, sólo necesitamos dos datos:

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2, \qquad f'(1) = 2 + 1 = 3.$$

Entonces la recta tangente a f en $x = 1$ es

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y - 2 = 3(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x - 1.$$

■

Ejercicio 3 Sean los sucesos A y B independientes. La probabilidad de que ocurra el suceso B es $0'6$. Sabemos también que $p(A/B) = 0'3$.

a) *(**1 punto**)* Calcule la probabilidad de que suceda al menos uno de los dos sucesos.

b) *(**1 punto**)* Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso A pero no el B.

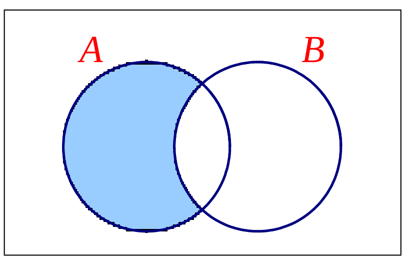
SOLUCIÓN : Como los sucesos son independientes, se sabe que

$$p(A) = p\left(\frac{A}{B}\right) = 0'3, \qquad p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0'3 \cdot 0'6 = 0'18.$$

Entonces la probabilidad de que suceda al menos uno de los dos sucesos es

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'3 + 0'6 - 0'18 = 0'72.$$

Por otro lado, la probabilidad de que ocurra A pero no B es



$$p\left(A \cap B^C\right) = p(A) - p(A \cap B) = 0'3 - 0'18 = 0'12.$$

■

Ejercicio 4 *(**2 puntos**)* Se ha lanzado un dado 400 veces y se ha obtenido 80 veces el valor cinco. Estime, mediante un intervalo de confianza al 95 %, el valor de la probabilidad de obtener un cinco.

SOLUCIÓN : La proporción de cincos obtenida, al lanzar $n = 400$ veces el dado, es $\hat{p} = 80/400 = 0'2$. Como $n \cdot \hat{p} = 80 \geq 5$ y $n \cdot \hat{q} = 320 \geq 5$, podemos utilizar la fórmula usual para estimar la proporción (poblacional) de apariciones del cinco. Al nivel de confianza $p = 1 - \alpha = 0'95$, el valor crítico correspondiente es $z_{\alpha/2} = 1'96$. Entonces el intervalo solicitado es:

$$I.C. = \left] \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[= \left] 0'2 \pm 1'96 \sqrt{\frac{0'2 \cdot 0'8}{400}} \right[=$$

$$= \left] 0'2 \pm 0'0392 \right[= \left] 0'1608, 0'2392 \right[.$$

■

1.4. Modelo 4

1.4.1. Opción A

Ejercicio 1

a) *(**1'5 puntos**)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule $A^{-1} \cdot (B - A^t)$.

b) *(**1'5 puntos**)* Resuelva y clasifique el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución : La matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \ \operatorname{adj}\left(A^T\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

por lo que la matriz que se pide es

$$A^{-1} \cdot \left(B - A^t\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, resolvemos el sistema por el *método de Gauss*:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Como el rango de la matriz del sistema coincide con el de la matriz ampliada (que es 2), el *teorema de Rouché-Fröbenius* nos garantiza que el sistema es compatible indeterminado (en este caso, uniparamétrico). Si llamamos $z = t$, tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 2, \\ y - z = 1, \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = z + 1 = t + 1, \\ x = -3y + 2 = -3\,(t + 1) + 2 = -3t - 1, \end{array} \right.$$

por lo que la solución del sistema es

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -3t - 1, \\ y = t + 1, \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t. \end{array} \right.$$

■

Ejercicio 2 Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si} \quad x \leq 1, \\ x - 1, & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$

a) *(***1 punto***)* Estudie su continuidad y derivabilidad

b) *(***1 punto***)* Determine la monotonía de f.

c) *(***1 punto***)* Represente gráficamente esta función.

SOLUCIÓN : Es claro que la función f es continua y derivable en los intervalos abiertos $]-\infty, 1[$ y $]1, +\infty[$, ya que en estos intervalos está definida como una función polinómica. Sólo nos queda estudiar el punto $x = 1$. En este punto se tiene que

$$f(1) = f\left(1^-\right) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(x^2 - 1\right) = 0,$$

$$f\left(1^+\right) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 1) = 0.$$

Por tanto, f es continua en todo $\mathbb{R}$. Su función derivada es, al menos,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad x < 1, \\ 1, & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Como

$$f'\left(1^-\right) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = 2, \qquad f'\left(1^+\right) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 1,$$

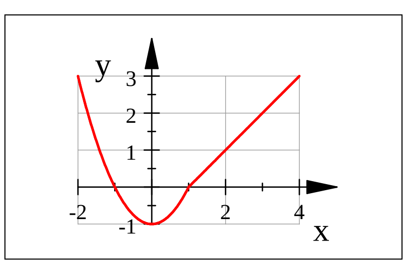
la función f no es derivable en $x = 1$. Resumiendo, f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Podemos estudiar la monotonía de f de dos formas distintas: en primer lugar, teniendo en cuenta que se trata de una función con un trozo de parábola convexa (decreciente en $\mathbb{R}^-$ y creciente en $]0, 1[$) y un trozo de recta creciente. Por tanto, f es decreciente en $\mathbb{R}^-$ y creciente en $\mathbb{R}^+$. En segundo lugar, también podemos hacer una tabla como la siguiente, en la que dividimos la recta real con los puntos críticos (el único punto donde se anula la primera derivada es $x = 0$) y los puntos donde f no es derivable (en este caso, sólo $x = 1$).

f'	$-$		$+$		$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$

Monotonía $\begin{cases} f \text{ decreciente en }]-\infty, 0\,[\,, \\ f \text{ creciente en }]0, +\infty\,[\,. \end{cases}$

Teniendo esta información es sencillo dibujar la función f.



■

Ejercicio 3 Una enfermedad afecta al 5 % de la población. Se aplica una prueba diagnóstica para detectar dicha enfermedad, obteniéndose el siguiente resultado: Aplicada a personas que padecen la enfermedad se obtiene un 96 % de resultados positivos, y aplicada a personas que no la padecen se obtiene un 2 % de resultados positivos. Elegida una persona, al alzar, y aplicada la prueba:

a) *(**1 punto**)* ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una resultado positivo?

b) *(**1 punto**)* Si se obtiene un resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona no padezca la enfermedad?

Solución : Llamemos E al suceso “elegido un individuo al azar, éste padece la enfermedad” y llamemos $+$ y $-$ a los sucesos “elegido un individuo al azar, éste ha dado positivo (respect., negativo) en la prueba”. Las probabilidades que nos da el enunciado son las siguientes.

$$\begin{array}{ccccc} & & & \overset{0'96}{\nearrow} & + \\ & & E & & \\ & \overset{0'05}{\nearrow} & & \underset{0'04}{\searrow} & - \\ \bullet & & & & \\ & \underset{0'95}{\searrow} & & \overset{0'02}{\nearrow} & + \\ & & E^C & & \\ & & & \underset{0'98}{\searrow} & - \end{array}$$

La probabilidad de obtener un resultado positivo es, según el *teorema de la probabilidad total*:

$$p(+) = p(E) \cdot p\left(\frac{+}{E}\right) + p\left(E^C\right) \cdot p\left(\frac{+}{E^C}\right) =$$

$$= 0'05 \cdot 0'96 + 0'95 \cdot 0'02 = 0'067.$$

Por otro lado, la probabilidad de que el individuo no tenga la enfermedad si ha dado positivo en la prueba es

$$p\left(\frac{E^C}{+}\right) = \frac{p\left(E^C\right) \cdot p\left(\frac{+}{E^C}\right)}{p(+)} = \frac{0'95 \cdot 0'02}{0'067} \approx 0'2836.$$

■

Ejercicio 4 **a)** *(**1'25 puntos**)* Sea la población $\{1, 5, 7\}$. Escriba todas las muestras de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple, y calcule la varianza de las medias muestrales.

b) *(**0'75 puntos**)* De una población de 300 hombres y 200 mujeres se desea seleccionar, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, una muestra de tamaño 30 distribuida en los dos estratos, ¿cuál será la composición de la muestra?

Solución : Todas las muestras de tamaño 2 son

$$\{\ (1,1),\ (1,5),\ (1,7),\ (5,1),\ (5,5),\ (5,7),\ (7,1),\ (7,5),\ (7,7)\ \}.$$

La media y la varianza de estos datos son

$$\bar{X} = \frac{1+5+7}{3} = \frac{13}{3}, \qquad \sigma_X^2 = \frac{1^2+5^2+7^2}{3} - \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{56}{9}$$

por lo que la media y la varianza de las muestras de tamaño $n = 2$ son

$$\bar{X}_2 = \bar{X} = \frac{13}{3}, \qquad \sigma_{X_2}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} = \frac{56/9}{2} = \frac{28}{9}.$$

En particular, la varianza de las medias muestrales de tamaño 2 es 28/9.

Por otro lado, una simple regla de tres nos dice que si entre 500 personas queremos seleccionar 30 de ellas, entre 300 hombres debemos elegir 18 hombres, y entre 200 mujeres debemos elegir a 12 de ellas.

300 hombres	$\rightarrow$	18 hombres
200 mujeres	$\rightarrow$	12 mujeres
500 personas		30 personas

Obsérvese que la afijación proporcional es

$$\frac{18}{300} = \frac{12}{200} = 0'06 = 6 \ \%,$$

ya que se toma un 6 % de cada estrato. ■

Nota 1 *Podemos calcular la media y la varianza de las medias muestrales de tamaño 2 con los datos concretos del problema. Por ejemplo, calculemos cada media*

(y_1, y_2)	$(1,1)$	$(1,5)$	$(1,7)$	$(5,1)$	$(5,5)$	$(5,7)$	$(7,1)$	$(7,5)$	$(7,7)$
$\bar{y}_i$	1	3	4	3	5	6	4	6	7

Agrupando en una tabla de frecuencias podemos calcular mejor sus parámetros estadísticos.

$\bar{y}_i$	n_i	$\bar{y}_i n_i$	$\bar{y}_i^2 n_i$
1	1	1	1
3	2	6	18
4	2	8	32
5	1	5	25
6	2	12	72
7	1	7	49
	9	39	197

$$\bar{X}_2 = \frac{39}{9} = \frac{13}{3} = \bar{X},$$

$$\sigma_{X_2}^2 = \frac{197}{9} - \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{28}{9} = \frac{56/9}{2} = \frac{\sigma_X^2}{n}.$$

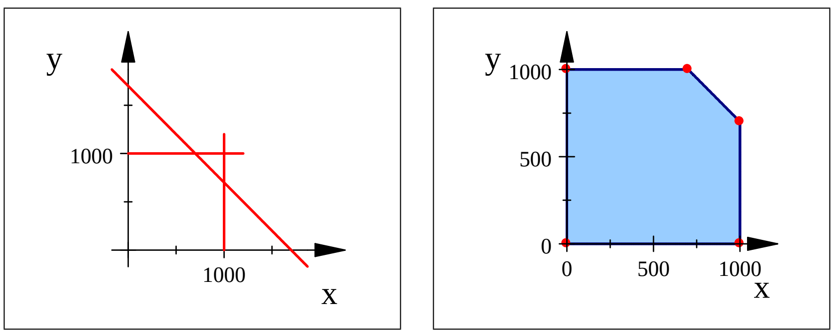
1.4.2. Opción B

Ejercicio 1 *(***3 puntos***)* Un laboratorio farmacéutico vende dos preparados, A y B, a razón de 40 y 20 euros el *kg*, respectivamente. Su producción máxima es de 1000 *kg* de cada preparado. Si su producción total no puede superar los 1700 *kg*, ¿cuál es la producción que maximiza sus ingresos? Calcule dichos ingresos máximos.

Solución: Llamemos x e y a las cantidades que se fabricarán de los preparados A y B, respectivamente. Los condicionantes del problema nos dicen que

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1000, \\ 0 \leq y \leq 1000, \\ x + y \leq 1700. \end{cases}$$

Representamos el recinto R que cumple todas estas posibilidades:



Sus vértices son

$$(0,0)\,, \quad (0,1000)\,, \quad (700,1000)\,, \quad (1000,700)\,, \quad (1000,0)\,.$$

La función que indica la recaudación según la cantidad vendida de cada preparado es $F(x,y) = 40x+20y$. El *teorema Fundamental de la Programación Lineal* afirma que el máximo de la función F en el recinto R está situado en un vértice, así que evaluamos F en los puntos anteriores.

$$F(0,0) = 0, \quad F(0,1000) = 20000, \quad F(700,1000) = 48000,$$
$$F(1000,700) = 54000, \quad F(1000,0) = 40000.$$

Por tanto, la recaudación máxima que se puede conseguir es de 54000 €, que se alcanza fabricando y vendiendo 1000 *kg* del preparado A y 700 *kg* del preparado B. ■

Ejercicio 2 a) *(**1'5 puntos**)* Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$g(x) = \frac{3x-2}{x+1}$$

en el punto de abscisa $x = 1$.

b) *(**1'5 puntos**)* Se considera la función $f(x) = ax^2 - bx + 4$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(1, 10)$.

SOLUCIÓN : Es claro que $g(1) = 1/2$. Además, su primera derivada es:

$$g'(x) = \frac{3(x+1) - (3x-2)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2},$$

por lo que $g'(1) = 5/4$. Así, la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es

$$y - \frac{1}{2} = \frac{5}{4}(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 4y - 2 = 5x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5x - 4y = 3.$$

Por otro lado, consideremos la función $f(x) = ax^2 - bx + 4$. Su primera derivada es $f'(x) = 2ax - b$. Entonces:

$$f \text{ pasa por } (1,10) \quad \Leftrightarrow \quad 10 = f(1) = a - b + 4 \quad \Leftrightarrow \quad a - b = 6,$$

$$\text{Extremo en } x = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a - b = 0.$$

La única solución de este sistema es $a = -6$ y $b = -12$. ■

Ejercicio 3 Una urna A contiene diez bolas numeradas del 1 al 10, y otra urna B contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8. Se escoge una urna al azar y se saca un bola.

a) *(**1 punto**)* ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída tenga el número 2?

b) *(**1 punto**)* Si el número de la bola extraída es impar, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

SOLUCIÓN : Llamemos U_A y U_B a los sucesos "se elige al azar la urna A (respect., B)" y para cada número k entre 1 y 10, denotamos por S_k el suceso "la bola extraída lleva el número k". Como el enunciado no indica otra cosa, suponemos que las urnas tienen la misma probabilidad de ser elegidas, por lo que $p(U_A) = p(U_B) = 1/2$. Igualmente, cada número dentro de la urna se selecciona al azar, por lo que

$$\begin{cases} p\left(\dfrac{S_k}{U_A}\right) = \dfrac{1}{10}, & 1 \leq k \leq 10, \\ p\left(\dfrac{S_k}{U_B}\right) = \dfrac{1}{8}, & 1 \leq k \leq 8, \end{cases}$$

Entonces, según el *teorema de la probabilidad total*, la probabilidad de sacar un 2 es:

$$p(S_2) = p(U_A) \cdot p\left(\frac{S_2}{U_A}\right) + p(U_B) \cdot p\left(\frac{S_2}{U_B}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{80}.$$

Sea ahora "Im" el suceso "salir un número impar". Dado que ambas urnas contienen la misma proporción de números pares que de impares (la mitad), sabemos que

$$p\left(\frac{\text{Im}}{U_A}\right) = p\left(\frac{\text{Im}}{U_B}\right) = \frac{1}{2}.$$

Por eso, la probabilidad de obtener un número impar es

$$p\,(\mathrm{Im}) = p\,(U_A) \cdot p\left(\frac{\mathrm{Im}}{U_A}\right) + p\,(U_B) \cdot p\left(\frac{\mathrm{Im}}{U_B}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Entonces, si el número extraído ha resultado ser impar, la probabilidad de que provenga de la urna B es

$$p\left(\frac{U_B}{\mathrm{Im}}\right) = \frac{p\,(U_B) \cdot p\left(\frac{\mathrm{Im}}{U_B}\right)}{p\,(\mathrm{Im})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

■

Ejercicio 4 Se han tomado las tallas de 16 bebés, elegidos al azar, de entre los nacidos en un cierto hospital, y se han obtenido los siguientes resultados, en centímetros:

$$51,\ 50,\ 53,\ 48,\ 49,\ 50,\ 51,\ 48,\ 50,\ 51,\ 50,\ 47,\ 51,\ 51,\ 49,\ 51.$$

La talla de los bebés sigue una ley Normal de desviación típica 2 centímetros y media desconocida.

a) *(**0'75 puntos**)* ¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras de tamaño 16?

b) *(**1'25 puntos**)* Determine un intervalo de confianza, al 97 %, para la media poblacional.

Solución : Sabemos que la variable aleatoria

$$X = \text{“ Talla de cada bebé ”} \hookrightarrow \mathcal{N}\,(\mu, 2)$$

sigue una distribución normal, por lo que cualquier variable que mida la distribución de las medias muestrales de cualquier tamaño también es normal. En particular, las medias muestrales de tamaño $n = 16$ sigue una distribución

$$\bar{X}_{16} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right) \approx \mathcal{N}\left(\mu, \frac{2}{4}\right) = \mathcal{N}\left(\mu, 0'5\right),$$

donde μ es la media de la población (que es desconocida).

Por otro lado, al nivel de confianza $p = 97\ \%$, el valor crítico correspondiente es $z_{\alpha/2} = 2'17$, por lo que el intervalo de confianza (para la media poblacional μ) solicitado es:

$$I.C. = \left]\ \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\ \right[= \left]\ 50 \pm 2'17 \cdot \frac{1}{2}\ \right[\approx \left]\ 48'9, 51'1\ \right[.$$

■

1.5. Modelo 5

1.5.1. Opción A

Ejercicio 1 Sea la región definida por las siguientes inecuaciones:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geq 1 \ ; \quad -x + 2y \geq 0 \ ; \quad y \leq 2.$$

a) *(**2 puntos**)* Representa gráficamente dicha región y calcule sus vértices.

b) *(**1 punto**)* Determine en qué puntos la función $F(x, y) = 3x - 6y + 4$ alcanza sus valores extremos y cuáles son éstos.

SOLUCIÓN: La primera inecuación es equivalente a

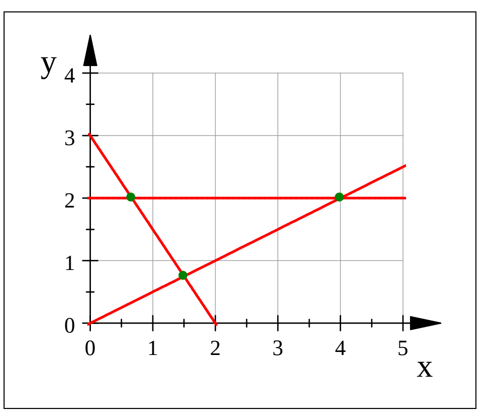
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2y \geq 6.$$

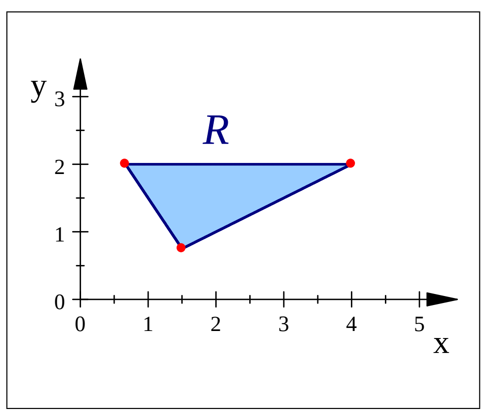
Calculamos dónde se cortan las rectas que delimitan los bordes del recinto R:

$$\left\{ \begin{array}{c} 3x + 2y = 6 \\ -x + 2y = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} 3x + 2y = 6 \\ y = 2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} -x + 2y = 0 \\ y = 2 \end{array} \right.$$

$$x = \frac{3}{2},\ y = \frac{3}{4} \qquad x = \frac{2}{3},\ y = 2 \qquad x = 4,\ y = 2$$

Con esta información y sabiendo dónde cortan las rectas a los ejes coordenados, es posible dibujarlas.





Por tanto, los vértices del recinto R son

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right), \quad \left(\frac{2}{3}, 2\right), \quad (4, 2).$$

El *Teorema Fundamental de la Programación Lineal* afirma que la función $F(x,y) = 3x - 6y + 4$ alcanza máximo y mínimo en la región R, y que ambos extremos están situados en sendos vértices. Por ello, evaluamos F en los vértices que hemos encontrado:

$$F\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right) = 4, \quad F\left(\frac{2}{3},2\right) = -6, \quad F(4,2) = 4.$$

Así, concluimos que el mínimo de la función F en el recinto R es -6, que se alcanza en $\left(\frac{2}{3},2\right)$, y el máximo es 4, que se alcanza en todos los puntos del segmento cerrado de extremos $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$ y $(4,2)$. ■

Ejercicio 2 El beneficio esperado de una empresa, en millones de euros, en los próximos ocho años viene dado por la función B definida por

$$B(t) = \begin{cases} -t^2 + 7t, & \text{si} \quad 0 \leq t < 5, \\ 10, & \text{si} \quad 5 \leq t \leq 8, \end{cases}$$

donde t indica el tiempo transcurrido en años.

a) *(**2 puntos**)* Represente gráficamente la función B y explique cómo es la evolución del beneficio esperado durante esos 8 años.

b) *(**1 punto**)* Calcule cuándo el beneficio esperado es de 11'25 millones de euros.

SOLUCIÓN : El vértice del primer trozo de la función B es

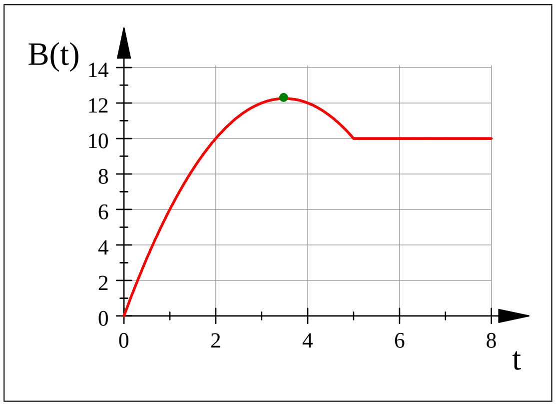
$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-7}{-2} = 3'5, \quad y_v = B(x_v) = -3'5^2 + 7 \cdot 3'5 = 12'25.$$

Comprobamos si la función es continua en $x = 5$:

$$B(5) = B\left(5^-\right) = \lim_{t \to 5^-} \left(-t^2 + 7t\right) = 10, \qquad B\left(5^+\right) = \lim_{t \to 5^+} 10 = 10.$$

Por tanto, B es continua en $x = 5$ y podemos asegurar que B es continua (en su dominio $[0,8]$). La representamos haciendo una tabla de valores y sabiendo que el primer trozo es una parábola cóncava con vértice en $(3'5, 12'25)$ y el segundo trozo es un segmento horizontal (y es continua).

t	0	1	2	3	$3'5$	4	5	6	7	8
$B(t)$	0	6	10	12	$12'25$	12	10	10	10	10



La interpretación de la gráfica es sencilla: la empresa prevé que su beneficio va a ir creciendo desde cero hasta $12'25$ millones, el cual se alcanzará a los $3'5$ años. Después el beneficio bajará hasta los 10 millones y entre el quinto y el octavo año, el beneficio se mantendrá en estos 10 millones.

Para responder a la segunda cuestión, nos preguntamos cuándo la función $B = B(t)$ toma el valor $11'25$, y para ello resolvemos la ecuación

$$B(t) = 11'25 \quad \Leftrightarrow \quad -t^2 + 7t = 11'25 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 7t + 11'25 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{7 \pm 2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \{\, t_1 = 2'5,\ t_2 = 4'5 \,\}.$$

Por tanto, el beneficio de $11'25$ millones se alcanzará en dos momentos distintos: a los dos años y medio y a los cuatro años y medio. ■

Ejercicio 3 Se dispone de dos urnas, A y B. En la urna A hay diez bolas, numeradas del 1 al 10 y en la urna B hay 3 bolas, numeradas del 1 al 3. Se lanza una moneda, si sale cara se extrae una bola de la urna A y si sale cruz se extrae de la urna B.

a) *(**0'5 puntos**)* Calcule la probabilidad de obtener cara y un cinco.

b) *(**0'5 puntos**)* Halle la probabilidad de obtener un 6.

c) *(**1 punto**)* Calcule la probabilidad de obtener un 3.

Solución: Llamemos c y $+$ a los sucesos "salir cara" y "salir cruz" en la moneda, U_A y U_B será los sucesos "elegir la urna A" y "elegir la urna B", y para cada $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, llamemos S_k al suceso "salir el número k en la bola extraída". El enunciado dice que se elige la urna A si sale cara, y la urna B si sale cruz, por lo que hay una igualdad de sucesos, $c = U_A$ y $+ = U_B$, siendo ambos sucesos equiprobables: $p(U_A) = p(U_B) = 1/2$. Por otro lado, tenemos las probabilidades:

$$\begin{cases} p\left(\dfrac{S_k}{U_A}\right) = \dfrac{1}{10}, & 1 \leq k \leq 10, \\ p\left(\dfrac{S_k}{U_B}\right) = \dfrac{1}{3}, & 1 \leq k \leq 3, \end{cases}$$

Por tanto, la probabilidad de sacar cara y un cinco es

$$p(c \cap S_5) = p(U_A \cap S_5) = p(U_A) \cdot p\left(\frac{S_5}{U_A}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}.$$

Dado que el seis sólo puede salir en la primera urna, sabemos que $p(S_6/U_B) = 0$, y así el *teorema de la probabilidad total* nos garantiza que la probabilidad de salir un seis es

$$p(S_6) = p(U_A) \cdot p\left(\frac{S_6}{U_A}\right) + p(U_B) \cdot p\left(\frac{S_6}{U_B}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{20}.$$

La cuestión es distinta a la hora de salir un tres, ya que este número sí está en la urna B, pero el argumento es el mismo:

$$p(S_3) = p(U_A) \cdot p\left(\frac{S_3}{U_A}\right) + p(U_B) \cdot p\left(\frac{S_3}{U_B}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{60}.$$

■

Ejercicio 4 Un fabricante produce tabletas de chocolate cuyo peso en gramos sigue una ley Normal de media 125 *gr* y desviación típica 4 *gr*.

a) *(**1 punto**)* Si las tabletas se empaquetan en lotes de 25, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de las tabletas de un lote se encuentre entre 124 y 126 *gr*?

b) *(**1 punto**)* Si los lotes fuesen de 64 tabletas, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de las tabletas del lote superase los 124 gramos?

Solución : Sea X la variable aleatoria que mide el peso de las tabletas de chocolate. Según los datos, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu = 125, \sigma = 4)$. Entonces la variable $\bar{X}_{25}$ que mide el peso medio de $n = 25$ tabletas (elegidas al azar) sigue una distribución

$$\bar{X}_{25} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(125, \frac{4}{5}\right) = \mathcal{N}(125, 0'8).$$

Así, la probabilidad de que el peso medio de 25 tabletas de chocolate esté entre 124 *gr* y 126 *gr* es, tipificando para poder utilizar la tabla de la normal estándar $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ de colas a la izquierda,

$$p\left(124<\bar{X}_{25}<126\right)=p\left(\frac{124-125}{0'8}<\frac{\bar{X}_{25}-125}{0'8}<\frac{126-125}{0'8}\right)=p\left(-1'25<Z<1'25\right)=$$

$$=p\left(Z<1'25\right)-p\left(Z<-1'25\right)=p\left(Z<1'25\right)-p\left(Z>1'25\right)=$$

$$=p\left(Z<1'25\right)-\left(1-p\left(Z<1'25\right)\right)=2p\left(Z<1'25\right)-1=$$

$$=2\cdot 0'8944-1=0'788\,8.$$

Igualmente, si se toma una muestra de $n=64$ tabletas de chocolate, la media sigue una distribución

$$\bar{X}_{64}\hookrightarrow\mathcal{N}\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\mathcal{N}\left(125,\frac{4}{8}\right)=\mathcal{N}\left(125,0'5\right).$$

Entonces

$$p\left(\bar{X}_{64}>124\right)=p\left(\frac{\bar{X}_{64}-125}{0'5}>\frac{124-125}{0'5}\right)=p\left(Z>-2\right)=p\left(Z<2\right)=0'9772.$$

■

1.5.2. Opción B

Ejercicio 1 *(**3 puntos**)* Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\;;\quad B=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\;;\quad C=\begin{pmatrix}-2\\-5\\2\end{pmatrix}\;;\quad D=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\;;\quad E=\begin{pmatrix}-2\\-5\\5\end{pmatrix}.$$

Calcule los valores de los números reales x, y, z, para que se verifique la siguiente igualdad entre matrices: $E-x\cdot A\cdot B=y\cdot C+z\cdot D$.

Solución : Sabiendo que

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix},$$

escribimos el sistema equivalente

$$E - x \cdot A \cdot B = y \cdot C + z \cdot D \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot A \cdot B + y \cdot C + z \cdot D = E \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + z = -2, \\ 3x - 5y + 2z = -5, \\ 4x + 2y - 3z = 5. \end{cases}$$

Resolvemos este sistema por el *método de triangulación de Gauss*:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & -7 & 13 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right\|$$

Por tanto, $z = 1$, de aquí $y = 2$ y finalmente $x = 1$, por lo que la única solución es $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$. ■

Ejercicio 2 Sea la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$.

a) *(**1'5 puntos**)* Determine la monotonía y los extremos relativos de f.

b) *(**0'75 puntos**)* Calcule su punto de inflexión.

c) *(**0'75 puntos**)* Teniendo en cuenta los apartados anteriores, represéntela.

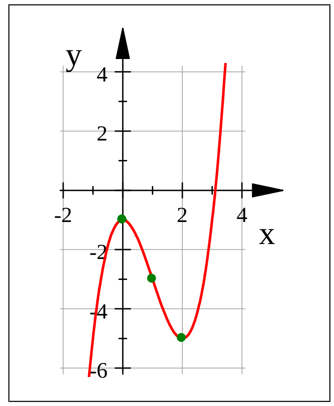
Solución : La primera derivada de f es $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ por lo que los únicos puntos críticos son $x = 0$ y $x = 2$. Estudiamos la monotonía y los extremos relativos de f en la siguiente tabla:

f'	$+$	Máx	$-$	Mín	$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	2	$\nearrow$

$$\text{Monotonía} \begin{cases} f \text{ decreciente en }]0, 2[\,, \\ f \text{ creciente en }]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[\,. \end{cases}$$

$$\text{Extremos} \begin{cases} \text{máximo relativo en } (0, -1)\,, \\ \text{mínimo relativo en } (2, -5)\,. \end{cases}$$

Su derivada segunda es $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$, que sólo se anula en $x = 1$. Como $f'''(1) = 6 \neq 0$, confirmamos que en $x = 1$ hay un punto de inflexión de f que es exactamente $(1, -3)$. Con estos datos, la representación gráfica de f es la adjunta.



■

Ejercicio 3 Se conocen los siguientes datos de un grupo de personas, relativos al consumo de un determinado producto:

	Consume	No consume
Hombre	10	30
Mujer	25	12

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcule la probabilidad de que:

a) *(**0'5 puntos**)* Sea mujer.

b) *(**0'75 puntos**)* Habiendo consumido el producto, se trate de una mujer.

c) *(**0'75 puntos**)* Sea mujer y no consuma el producto.

Solución: Completamos la tabla anterior con las sumas totales hasta obtener una tabla de contingencia:

	Consume	No consume	Total
Hombre	10	30	40
Mujer	25	12	37
Total	35	42	77

Llamemos M al suceso "elegida una persona al azar, ésta resulta ser mujer" y Co al suceso "elegida una persona al azar, ésta consume el producto". Entonces la probabilidad de ser mujer es:

$$p(M) = \frac{\text{número total de mujeres}}{\text{número total de personas}} = \frac{37}{77}.$$

La probabilidad de ser mujer sabiendo que consume el producto es:

$$p\left(\frac{M}{Co}\right) = \frac{p(M \cap Co)}{p(Co)} = \frac{\text{número total de mujeres que consumen}}{\text{número total de personas que consumen}} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}.$$

Finalmente, la probabilidad de encontrar una mujer que no consuma es:

$$p\left(M \cap Co^C\right) = \frac{\text{número total de mujeres que no consumen}}{\text{número total de personas}} = \frac{12}{77}.$$

■

Ejercicio 4 Una variable aleatoria sigue una ley Normal con media desconocida y desviación típica 2'4. Se quiere estimar la media poblacional, con un nivel de confianza del 93 %, para lo que se toman dos muestras de distintos tamaños.

a) *(**1 punto**)* Si una de las muestras tiene tamaño 16 y su media es 10'3, ¿cuál es el intervalo de confianza correspondiente?

b) *(**1 punto**)* Si con la otra muestra el intervalo de confianza es $(9'776, 11'224)$, ¿cuál es la media muestral? ¿Cuál es el tamaño de la muestra?

Solución : Sea X la variable aleatoria del problema, de la que sabemos que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma = 2'4)$, siendo la media μ desconocida. Para un nivel de confianza $p = 1 - \alpha = 0'93$, el valor crítico correspondiente es $z_{\alpha/2} = 1'81$. Si tomamos una muestra de tamaño $n = 16$ y media $\bar{x} = 10'3$, el correspondiente intervalo de confianza es:

$$I.C. = \left]\ \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right[= I.C. = \left]\ 10'3 \pm 1'81 \cdot \frac{2'4}{4}\ \right[= \left]\ 10'3 \pm 1'086\ \right[=$$

$$= \left]\ 9'214, 11'386\ \right[.$$

Si ahora el intervalo de confianza es $]\ 9'776, 11'224\ [$, la media de la muestra es

$$\bar{x} = \frac{9'776 + 11'224}{2} = 10'5.$$

Así, el error admitido es $E = 11'224 - 10'5 = 0'724$, y el tamaño de la muestra es

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'81 \cdot 2'4}{0'724}\right)^2 = 6^2 = 36.$$

Obsérvese que se obtiene el valor exacto de 36 individuos en la muestra. ■

1.6. Modelo 6

1.6.1. Opción A

Ejercicio 1 a) *(**2 puntos**)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$. Explique qué dimensión debe tener la matriz X para que tenga sentido la ecuación matricial $X \cdot A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Resuelva dicha ecuación.

b) *(**1 punto**)* Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones que permita encontrar la solución del siguiente problema: "En un examen de Matemáticas que constaba de tres problemas, un alumno obtuvo una calificación total de 7'2. La puntuación del primer problema fue un 40 % más que la del segundo problema, y la del tercero fue el doble que la suma de las puntuaciones del primero y el segundo. ¿Cuál fue la puntuación de cada problema?".

Solución: Dado que A tiene dos filas y dos columnas ($A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$) y B tiene una fila y dos columnas ($B \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$), para poder sumar $X \cdot A$ y $2B$ hace falta que estas matrices tengan la misma dimensión. Así, si $X \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se tendrá:

$$X \cdot A + 2B \quad \to \quad (m \times n) \cdot (2 \times 2) = (1 \times 2) \quad \to \quad m = 1,\ n = 2.$$

Así, $n = 2$ para que el número de columnas de X coincida con el número de filas de A (y se pueda efectuar el producto $X \cdot A$), mientras que $m = 1$ para que el resultado de $X \cdot A$ tenga una sola fila. Por tanto, X ha de tener una fila y dos columnas ($X \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$). Resolvemos esta ecuación:

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - 2B \right] \cdot A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 14 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observamos que, efectivamente, la matriz X tiene una fila y dos columnas.

Para la segunda parte, llamemos x, y y z a las puntuaciones del primer, el segundo y el tercer ejercicio, respectivamente. Si la calificación total ha sido de $7'2$ puntos, se debe tener que $x + y + z = 7'2$. Si la puntuación del primer problema fue un 40 % más que la del segundo problema, entonces $x = 1'4y$, ya que $1'4 = 1 + 0'4 = 100\ \% + 40\ \%$. Finalmente, si la calificación del tercer problema fue el doble que la suma de las puntuaciones del primero y el segundo, entonces $z = 2(x + y)$. Esto nos conduce al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 7'2, \\ x = 1'4y, \\ z = 2(x + y). \end{cases}$$

■

Aunque no se pide, la solución de este sistema es $\{\ x = 1'4\ ,\ y = 1\ ,\ z = 4'8\ \}$.

Ejercicio 2 a) *(**2 puntos**)* Dada la función $f(x) = a(x-1)^2 + bx$, calcule a y b para que la gráfica de esta función pase por el punto de coordenadas $(1, 2)$ y tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.

b) *(**1 punto**)* Calcule $g''(2)$ siendo $g(x) = \dfrac{1}{x} - x$.

Solución : Para que f pase por el punto $(1, 2)$ debe cumplirse que $f(1) = 2$, lo que significa que $b = 2$. Por otro lado, para que haya un extremo relativo en $x = 2$, debe cumplirse que $f'(2) = 0$. Como $f'(x) = 2a(x-1) + b$, esta condición se traduce en que $2a + b = 0$. Como $b = 2$, entonces $a = -1$. Así los valores de los parámetros han de ser $a = -1$ y $b = 2$.

Por otro lado, derivamos g dos veces:

$$g(x) = \frac{1}{x} - x = x^{-1} - x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -x^{-2} - 1 \quad \Rightarrow \quad g''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$

Por tanto, $g''(2) = 2/8 = 1/4$. ■

Ejercicio 3 En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes, A y B. Se sabe que $p(A \cap B) = 0'18$ y $p(A/B) = 0'30$.

a) *(**1 punto**)* Calcule las probabilidades de A y de B.

b) *(**1 punto**)* Calcule la probabilidad de que no ocurra ninguno de esos dos sucesos.

Solución : Como los sucesos son independientes, se sabe que $p(A) = p(A/B) = 0'3$ y además

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0'18}{0'30} = 0'6.$$

La probabilidad de que no ocurra ninguno de esos dos sucesos, utilizando las leyes de *De Morgan*, es

$$\begin{aligned} p\left(A^C \cap B^C\right) &= p\left((A \cup B)^C\right) = 1 - p(A \cup B) = 1 - [\ p(A) + p(B) - p(A \cap B)\ ] = \\ &= 1 - \left(0'3 + 0'6 - 0'18\right) = 0'28. \end{aligned}$$

■

Nota 2 *Hay otra forma de concluir el segundo apartado del ejercicio anterior, recordando que dos sucesos A y B son independientes si, y sólo si, sus complementarios, A^C y B^C, son independientes. Como en el ejercicio anterior A y B lo son, entonces sus complementarios verifican que*

$$p\left(A^C \cap B^C\right) = p\left(A^C\right) \cdot p\left(B^C\right) = 0'7 \cdot 0'4 = 0'28,$$

lo que coincide con el resultado obtenido anteriormente.

Ejercicio 4 De una población Normal, con media desconocida y varianza 36, se extrae una muestra aleatoria que resulta tener una media muestral de 173.

a) *(**1 punto**)* Obtenga un intervalo de confianza al 97 % para la media poblacional, si el tamaño de la muestra es 64.

b) *(**1 punto**)* ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra, si se desea que el error cometido al estimar la media poblacional sea inferior a 1'2, para un nivel de confianza del 95 %?

Solución : Dado que la varianza de la población es $\sigma^2 = 36$, su desviación típica es $\sigma = 6$. La media muestral es $\bar{x} = 173$. Para un nivel de confianza $p = 0'97$, su valor crítico correspondiente es $z_{\alpha/2} = 2'17$. Si la muestra tiene tamaño $n = 64$, el intervalo de confianza solicitado es

$$I.C. = \left] \, \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, \right[= \left] \, 173 \pm 2'17 \cdot \frac{6}{8} \, \right[= \left] \, 173 \pm 1'6275 \, \right[\approx \left] \, 171'37, 174'63 \, \right[.$$

Si deseamos acotar el error admisible, $E \leq E_0 = 1'2$, a un nivel de confianza $p = 0'95$ (con valor crítico asociado $z_{\alpha/2} = 1'96$), el tamaño muestral debe verificar:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{E_0}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 6}{1'2}\right)^2 = 96'04.$$

Así, habrá de elegirse una muestra de, al menos, 97 individuos. ■

1.6.2. Opción B

Ejercicio 1 Se considera el recinto definido por las inecuaciones:

$$y - x \leq 4 \ ; \quad x - y \leq 4 \ ; \quad x + y \leq 12 \ ; \quad x \geq 0 \ ; \quad y \geq 0.$$

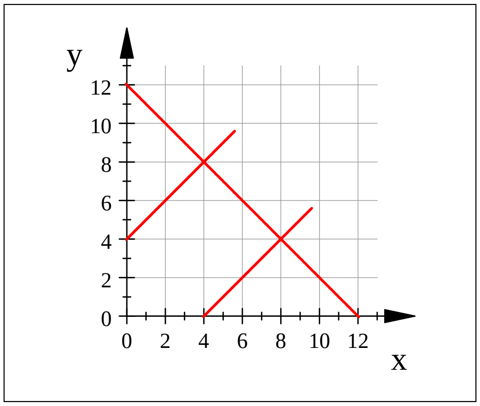
a) *(**2 puntos**)* Represente el recinto y calcule sus vértices.

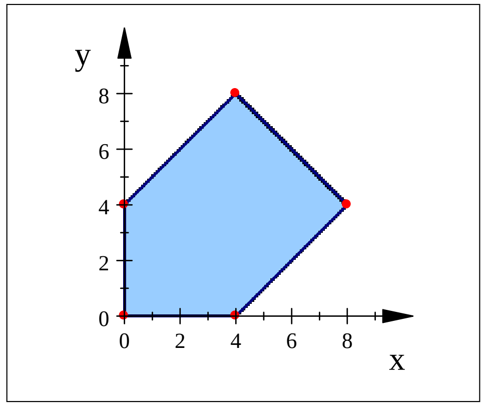
b) *(**1 punto**)* Dada la función objetivo $F(x, y) = \dfrac{2}{3}\ x - \dfrac{4}{5}\ y$, determine los valores máximo y mínimo de F y los puntos del recinto en los que los alcanzan.

Solución : Calculamos dónde se cortan las rectas que delimitan los bordes del recinto R:

$\begin{cases} y - x = 4 \\ x - y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} y - x = 4 \\ x + y = 12 \end{cases}$	$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 12 \end{cases}$
No hay solución, son $\parallel$	$x = 4,\ y = 8$	$x = 8,\ y = 4$

Con esta información y sabiendo dónde cortan las rectas a los ejes coordenados, es posible dibujarlas.





Por tanto, los vértices son

$$(0,0)\,,\quad (0,4)\,,\quad (4,8)\,,\quad (8,4)\,,\quad (4,0)\,.$$

El *Teorema Fundamental de la Programación Lineal* afirma que la función $F(x,y) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y$ alcanza máximo y mínimo en la región R, y que ambos extremos están situados en sendos vértices. Por ello, evaluamos F en los vértices que hemos encontrado:

$$F(0,0) = 0, \quad F(0,4) = -\frac{16}{5} = -3'2, \quad F(4,8) = -\frac{56}{15} = -3'7\widehat{3},$$
$$F(8,4) = \frac{32}{15} = 2'1\widehat{3}, \quad F(4,0) = \frac{8}{3} = 2'\widehat{6}.$$

Así, podemos concluir que el máximo de la función F en el recinto R es $8/3$, que se alcanza en $(4,0)$, y el mínimo es $-56/15$, que se alcanza en el punto $(4,8)$. ■

Ejercicio 2 a) *(**1'5 puntos**)* De una función f se sabe que la gráfica de su función derivada, f', es la recta de ecuación $y = -2x + 4$. Estudie razonadamente la monotonía de la función f, a la vista de la gráfica de la derivada.

b) *(**1'5 puntos**)* Dada la función $g(x) = \dfrac{4x-4}{x+4}$, calcule la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución: Como la derivada $f'(x) = -2x + 4$ está definida en $\mathbb{R}$, la función f también debe estar definida en $\mathbb{R}$. El único punto crítico de f es

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

Este dato es suficiente para decidir el signo de la función derivada y, por tanto, la monotonía de la función f.

f'	$+$	Máx	$-$
f	$\nearrow$	2	$\searrow$

Monotonía $\begin{cases} f \text{ creciente en }]-\infty, 2\,[\,, \\ f \text{ decreciente en }]0, +\infty\,[\,. \end{cases}$

Por otro lado, sabemos que $g(0) = -4/4 = -1$. Su primera derivada es

$$g'(x) = \frac{4(x+4) - (4x-4)}{(x+4)^2} = \frac{20}{(x+4)^2}.$$

Como $g'(0) = 20/16 = 5/4$, la ecuación de la recta tangente a g en el punto $x = 0$ es

$$y - (-1) = \frac{5}{4}(x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad 4y + 4 = 5x \quad \Leftrightarrow \quad 5x - 4y = 4.$$

■

Ejercicio 3 En una empresa, el 65 % de la plantilla son hombres; de ellos, el 80 % usan el ordenador. Se sabe que el 83'5 % de la plantilla usa el ordenador.

a) *(***1 punto***)* Calcule la probabilidad de que una persona de la empresa, elegida al azar, sea un hombre que no utiliza el ordenador.

b) *(***1 punto***)* Seleccionada una mujer de esa empresa, al azar, calcule la probabilidad de que utilice el ordenador.

Solución: Llamemos H y M a los sucesos "elegida una persona al azar, ésta resulta ser un hombre" o "ser una mujer". Igualmente, llamemos Or al suceso "elegida una persona al azar, ésta utiliza el ordenador". Las probabilidades que nos indica el enunciado se resumen así:

$$p(H) = 0'65, \quad p\left(\frac{Or}{H}\right) = 0'8, \quad p(Or) = 0'835.$$

De aquí, $p(M) = 0'35$ y $p\left(Or^C/H\right) = 0'2$. Entonces la probabilidad de que una persona de la empresa, elegida al azar, sea un hombre que no utiliza el ordenador es

$$p\left(H \cap Or^C\right) = p(H) \cdot p\left(\frac{Or^C}{H}\right) = 0'65 \cdot 0'2 = 0'13.$$

Llamemos ahora $x = p(Or/M)$ a la probabilidad de que una mujer utilice el ordenador. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \overset{0'8}{\nearrow} & Or \\
 & & H & & \\
 & \overset{0'65}{\nearrow} & & \underset{0'2}{\searrow} & Or^C \\
\bullet & & & & \\
 & \underset{0'35}{\searrow} & & \overset{x}{\nearrow} & Or \\
 & & M & & \\
 & & & \underset{1-x}{\searrow} & Or^C
\end{array}$$

Entonces tenemos, según el *teorema de la probabilidad total*:

$$p\left(Or\right)=p\left(H\right)\cdot p\left(\frac{Or}{H}\right)+p\left(M\right)\cdot p\left(\frac{Or}{M}\right)\quad\Leftrightarrow\quad 0'835=0'65\cdot 0'8+0'35\cdot x.$$

De aquí se deduce que la probabilidad de que, elegida una mujer, ésta utilice el ordenador, es $x=p\left(Or/M\right)=0'9$. ■

Ejercicio 4 Las calificaciones obtenidas por lo estudiantes de Matemáticas siguen una ley Normal de media desconocida y desviación típica 1'19. Para una muestra de esa población, se obtiene que $(6'801, 6'899)$ es un intervalo de confianza, al 92 %, para la media poblacional.

a) *(**0'5 puntos**)* Determine la media muestral.

b) *(**1'5 puntos**)* Determine el tamaño de la muestra.

Solución : Sea X la variable aleatoria que mide las calificaciones obtenidas por los estudiantes. Sabemos que $X\hookrightarrow\mathcal{N}\left(\mu,\sigma=1'19\right)$ siendo la media μ desconocida. Para un nivel de confianza $p=0'92$ (con nivel crítico asociado $z_{\alpha/2}=1'75$), el intervalo de confianza que se ha obtenido es $]6'801, 6'899[$. Entonces la media muestral es el punto medio (la media aritmética) entre los extremos de este intervalo:

$$\bar{x}=\frac{6'801+6'899}{2}=6'85.$$

De aquí, el error muestral que se ha cometido es $E=6'899-6'85=0'049$. Por tanto, el tamaño de la muestra debe cumplir

$$n\approx\left(\frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{E}\right)^2=\left(\frac{1'75\cdot 1'19}{0'049}\right)^2=42'5^2=1806'25,$$

lo que significa que la muestra contiene las calificaciones de 1806 ó 1807 estudiantes (en este caso, con los dos números se obtiene, redondeando, el mismo resultado para el intervalo de confianza). Obsérvese que no tomamos necesariamente el número natural inmediatamente superior a $1806'25$ porque no tenemos que acotar el error, sino que éste es calculado de manera exacta y luego en el redondeo es donde surgen las dos posibilidades. ■