Resolución del examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de Selectividad
Andalucía – Septiembre de 2006

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

20 de septiembre de 2006

Opción A

Ejercicio 1 a) *(**1'5 puntos**)* Representa gráficamente el recinto delimitado por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \geq 3\,(\ y - 3\ )\ ; \quad 2x + 3y \leq 36\ ; \quad x \leq 15\ ; \quad x \geq 0\ ; \quad y \geq 0.$$

b) *(**1 punto**)* Calcule los vértices del recinto.

c) *(**0'5 puntos**)* Obtenga el valor máximo de la función $F(x, y) = 8x + 12y$ en este recinto e indique dónde se alcanza.

Solución : La primera desigualdad es

$$x \geq 3\,(\ y - 3\ ) \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 3y - 9 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3y \geq -9.$$

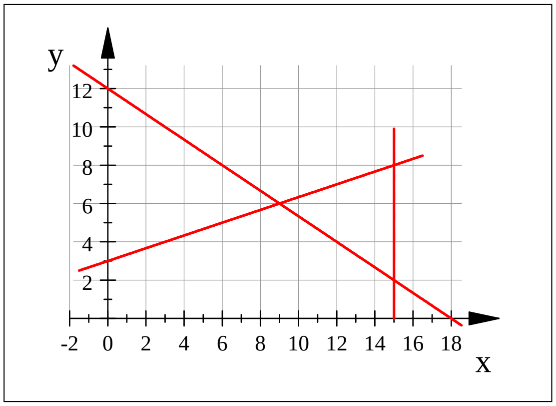
Veamos dónde se cortan las rectas:

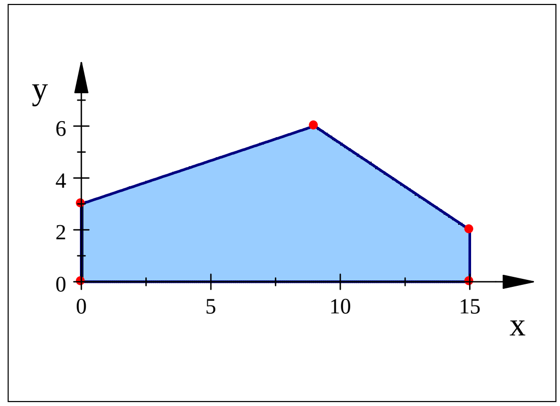
$$\left\{ \begin{array}{c} x - 3y = -9 \\ 2x + 3y = 36 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} x - 3y = -9 \\ x = 15 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} 2x + 3y = 36 \\ x = 15 \end{array} \right.$$

$$x = 9,\ y = 6 \qquad\qquad x = 15,\ y = 8 \qquad\qquad x = 15,\ y = 2$$

*Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

Con esta información y sabiendo dónde cortan las rectas a los ejes coordenados, es posible dibujarlas.





Por tanto, los vértices son

$$(0,0)\,, \quad (0,3)\,, \quad (9,6)\,, \quad (15,2)\,, \quad (15,0)\,.$$

El *Teorema Fundamental de la Programación Lineal* afirma que la función $F\,(x,y) = 8x + 12y$ alcanza máximo (y mínimo) en la región anterior, y que éste debe estar situado en un vértice, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

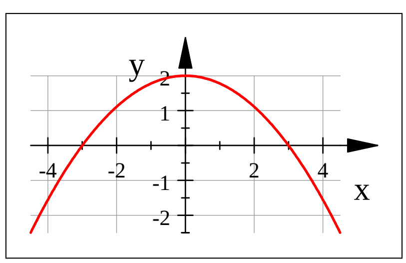
$$F\,(0,0) = 0, \quad F\,(0,3) = 36, \quad F\,(9,6) = 144, \quad F\,(15,2) = 144, \quad F\,(15,0) = 120.$$

Esto concluye que el máximo de la función F en el recinto dibujado es 144, y se alcanza en todos los puntos del segmento cerrado de extremos $(9,6)$ y $(15,2)$. ∎

Ejercicio 2 a) ***(1'5 puntos)*** La gráfica de la función derivada de una función f es la parábola de vértice $(0,2)$ que corta al eje de abscisas en los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$. A partir de dicha gráfica, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) ***(1'5 puntos)*** Calcule los extremos relativos de la función $g\,(x) = x^3 - 3x$.

Solución: Hacemos un boceto de la función derivada f', pues se trata de una parábola muy sencilla:



Hay que tener muy claro que ésta no es f, sino su derivada f'. No obstante, sabemos que el signo de la función f' es lo que determina la monotonía de f, por lo que sabemos que

f'	$-$	Mín	$+$	Máx	$-$
f	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$

$$\begin{cases} f \text{ creciente en } \left]-3,3\right[\,, \\ f \text{ decreciente en } \left]-\infty,-3\right[\cup \left]3,+\infty\right[\,. \end{cases}$$

Para el segundo apartado, calculamos los puntos en los que se anula la primera derivada de g:

$$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x-1)(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Con la segunda derivada, $g''(x) = 6x$, confirmamos que se tratan de extremos relativos, y los clasificamos:

$$\begin{aligned} g''(-1) &= -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad (-1, g(-1)) = (-1, 2) \text{ es un máximo relativo,} \\ g''(1) &= 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad (1, g(1)) = (1, -2) \text{ es un mínimo relativo.} \end{aligned}$$

Por tanto, $(-1, 2)$ y $(1, -2)$ son los únicos extremos relativos de g. ■

Ejercicio 3 Laura tiene un dado con tres caras pintadas de azul y las otras tres de rojo. María tiene otro dado con tres caras pintadas de rojo, dos de verde y una de azul. Cada una tira su dado una vez y observan el color.

a) *(**1 punto**)* Describa el espacio muestral asociado y las probabilidades de los sucesos elementales.

b) *(**1 punto**)* Si salen los dos colores iguales gana Laura; y si sale el color verde, gana María. Calcule la probabilidad que tiene cada una de ganar.

Solución: Llamemos A_L y R_L a los sucesos "Laura tira su dado y sale azul" o "sale rojo", respectivamente. Igualmente, María tiene los sucesos R_M, V_M y A_M, según si sale rojo, verde o azul. Las probabilidades son claras:

$$p(A_L) = p(R_L) = \frac{1}{2}, \quad p(R_M) = \frac{1}{2}, \quad p(V_M) = \frac{1}{3}, \quad p(A_M) = \frac{1}{6}.$$

Entonces el experimento que consiste en lanzar los dos dados y mirar los colores que salen tiene como espacio muestral el producto de estos dos espacios muestrales elementales:

$$E = E_L \times E_M = \{A_L, R_L\} \times \{R_M, V_M, A_M\}.$$

Si establecemos el criterio de que la primera componente corresponde al dado de Laura y la segunda al dado de María, podemos quitar los subíndices, quedando el espacio muestral

$$E = \{\ (A,R),\ (A,V),\ (A,A),\ (R,R),\ (R,V),\ (R,A)\ \}.$$

Como el color del dado de una es independiente del color del dado de la otra, tenemos la probabilidad

$$p(A,R) = p(A_L) \cdot p(R_M) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Así, multiplicando, se calculan todas las probabilidades del espacio muestral, resultando

$$\begin{aligned} p(A,R) &= \frac{1}{4}, \quad p(A,V) = \frac{1}{6}, \quad p(A,A) = \frac{1}{12}, \\ p(R,R) &= \frac{1}{4}, \quad p(R,V) = \frac{1}{6}, \quad p(A,A) = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Calculemos las probabilidades solicitadas:

$$p\,(\text{ “gana Laura” }) = p\,(\text{ “mismo color” }) = p\,(A,A) + p\,(R,R) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3},$$

$$p\,(\text{ “gana María” }) = p\,(\text{ “sale verde” }) = p\,(A,V) + p\,(R,V) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, el juego es equitativo. ■

Ejercicio 4 a) *(**1 punto**)* Los valores:

$$52, \quad 61, \quad 58, \quad 49, \quad 53, \quad 60, \quad 68, \quad 50, \quad 53,$$

constituyen una muestra aleatoria de una variable aleatoria Normal, con desviación típica 6. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población, con un nivel de confianza del 92 %.

b) *(**1 punto**)* Se desea estimar la media poblacional de otra variable aleatoria Normal, con varianza 49, mediante la media de una muestra aleatoria. Obtenga el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo de la estimación, mediante un intervalo de confianza al 97 %, sea menor o igual que 2.

Solución : Como la variable de partida sigue una distribución normal, entonces cualquier media muestral sigue una distribución normal. En particular, sabemos que $\bar{x} = 56$ para la muestra considerada, siendo de tamaño $n = 9$. Como $\sigma = 6$, el intervalo de confianza para la media de la población es

$$I.C. = \left]\ \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right[= \left]\ 56 \pm 1'75\ \frac{6}{\sqrt{9}}\ \right[= \left]\ 56 \pm 3'5\ \right[= \left]\ 52'5, 59'5\ \right[.$$

Si para otra variable se tiene que $\sigma^2 = 49$ (cuidado: $\sigma = 7$), y queremos un error menor o igual que $E = 2$, debemos tomar una muestra de tamaño, al menos,

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'17 \cdot 7}{2}\right)^2 \approx 57'684,$$

por lo que tomaremos una muestra de tamaño, al menos, 58. ■

Opción B

Ejercicio 1 *(**3 puntos**)* El cajero de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes. El número de billetes de 10 euros que nos ha dado es el doble del de 20 euros. Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero.

Solución : Llamemos x, y y z al número de billetes de 10, 20 y 50 €, respectivamente, que nos ha dado el cajero. Puesto que nos ha entregado 8 billetes, sabemos que $x+y+z=8$. Como nos ha entregado 290 €, se tiene $10x+20y+50z=290$ (que es equivalente a $x+2y+5z=29$). Finalmente, $x=2y$ porque hay doble número de billetes de 10 € que de 20 €. Resolvemos el sistema por el *método de Gauss-Jordan*:

$$\begin{cases} x-2y=0, \\ x+y+z=8, \\ x+2y+5z=29. \end{cases} \quad \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 29 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 5 & 29 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 11 & 55 \end{array} \right\|$$

De aquí, $z=5$, $y=1$ y $x=2$, por lo que el cajero nos ha entregado dos billetes de 10 €, un billete de 20 € y cinco billetes de 50 €. ■

Ejercicio 2 Considera la función $f(x)=\dfrac{3-x}{2-x}$.

a) *(**1 punto**)* Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x=1$.

b) *(**1 punto**)* Estudie su monotonía.

c) *(**1 punto**)* Calcule sus asíntotas.

Solución : Necesitamos calcular la primera derivada de f:

$$f'(x)=\frac{-(2-x)-(3-x)(-1)}{(2-x)^2}=\frac{1}{(2-x)^2}.$$

Entonces en el punto $x=1$ se tiene que $f(1)=\frac{2}{1}=2$ y que $f'(x)=1/1=1$. Así la ecuación de la recta tangente a f en el punto de abscisa $x=1$ es

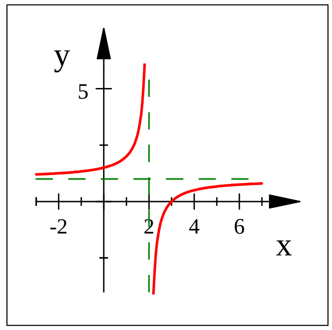
$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y-2=1(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y=x+1.$$

Dado que $f'>0$ en todo su dominio, la función f es estrictamente creciente. Además sus asíntotas son:

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} f(x)=\lim_{x\to 2^{\pm}}\frac{3-x}{2-x}=\mp\infty \quad \Rightarrow \quad \text{A.V. la recta } x=2,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-x}{2-x}=\frac{-1}{-1}=1 \quad \Rightarrow \quad \text{A.H. la recta } y=1.$$

En efecto, si dibujamos la función observamos estas dos asíntotas:



■

Ejercicio 3 De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: En el $23\,\%$ de los casos no se llevaba puesto el cinturón de seguridad, en el $65\,\%$ no se respetaron los límites de velocidad permitidos y en el $30\,\%$ de los casos se cumplían ambas normas, es decir, llevaban puesto el cinturón y respetaban los límites de velocidad.

a) *(**1 punto**)* Calcule la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, no se haya cumplido alguna de las dos normas.

b) *(**1 punto**)* Razone si son independientes los sucesos "llevar puesto el cinturón" y "respetar los límites de velocidad".

Solución : Llamemos S al suceso "en el momento del accidente, llevaba puesto el cinturón de seguridad" y V al suceso "en el momento del accidente, respetaba los límites de velocidad". Los datos del problema nos dicen que

$$p\left(S^C\right) = 0'23, \quad p\left(V^C\right) = 0'65, \quad p\left(S \cap L\right) = 0'3.$$

De aquí se deduce que $p\left(S\right) = 1 - p\left(S^C\right) = 0'77$, por lo que la probabilidad de no cumplir alguna de las dos normas es, aplicando las *leyes de De Morgan*:

$$p\left(\text{ “no cumplir alguna norma” }\right) = p\left(S^C \cup V^C\right) = p\left(\left(S \cap V\right)^C\right) = 1 - p\left(S \cap L\right) = 0'7.$$

Por otro lado,

$$p\left(S\right) \cdot p\left(V\right) = 0'77 \cdot 0'35 = 0'2695,$$

mientras que $p\left(S \cap L\right) = 0'3$. Como $p\left(S \cap L\right) \neq p\left(S\right) \cdot p\left(V\right)$, los sucesos "llevar puesto el cinturón" y "respetar los límites de velocidad" no son independientes. ■

Ejercicio 4 *(**2 puntos**)* En una muestra aleatoria de 1000 personas de una ciudad, 400 votan a un determinado partido político. Calcule un intervalo de confianza al $96\,\%$ para la proporción de votantes de ese partido en la ciudad.

Solución : La proporción de votantes de ese partido en la muestra de tamaño $n = 1000 \geq 30$ es $\hat{p} = 400/1000 = 0'4$. Como $n \cdot \hat{p} = 400 \geq 5$ y $n \cdot \hat{q} = 600 \geq 5$, podemos utilizar la fórmula usual para encontrar el intervalo de confianza para la proporción poblacional. Para el nivel de confianza $p = 1-\alpha = 0'96$, el valor crítico correspondiente es $z_{\alpha/2} = 2'055$. Entonces el intervalo de confianza es

$$I.C. = \left] \; 0'4 \pm 2'055 \sqrt{\frac{0'4 \cdot 0'6}{1000}} \; \right[\approx \left] \; 0'4 \pm 0'0318 \; \right[= \left] \; 0'3682, 0'4318 \; \right[.$$

Esto significa que, según el estudio, dicho partido político obtendrá, al nivel de confianza del 96 %, entre el $36'82$ % y el $43'18$ % de los votos. ■