Resolución del examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de Selectividad Andalucía – Junio de 2006

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

21 de junio de 2006

Opción A

Ejercicio 1 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) *(**1 punto**)* Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.

b) *(**1 punto**)* Igualmente para que $A - I_2 = B^{-1}$.

c) *(**1 punto**)* Determine x para que $A \cdot B = I_2$.

SOLUCIÓN : Para el primer apartado debe verificarse que

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = A = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

por lo que $B^2 = A$ únicamente cuando $x = 1$. La matriz inversa de B es

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \operatorname{adj}\left(B^T\right) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B^{-1} = A - I_2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix},$$

* Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

y podemos afirmar que $A - I_2 = B^{-1}$ si, y sólo si, $x = 0$. Finalmente, $A \cdot B = I_2$ si, y sólo si, $A = B^{-1}$, por lo que

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = A = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

lo que ocurre solamente cuando $x = -1$. ■

Ejercicio 2 a) *(**1'5 puntos**)* Halle los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$ pase por el punto $(1, -3)$ y tenga un punto de inflexión en $x = -1$.

b) *(**1'5 puntos**)* Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

Solución: Las dos primeras derivadas de f son $f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5$ y $f''(x) = 6ax + 6$. Entonces traducimos las dos condiciones dadas en dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$f \text{ pasa por } (1,-3) \quad \Leftrightarrow \quad f(1) = -3 \quad \Leftrightarrow \quad a + 3 - 5 + b = -3 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = -1,$$

$$\text{P.I. en } x = -1 \quad \Rightarrow \quad f''(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6a + 6 = 0.$$

Por tanto $a = 1$ y $b = -2$.

Por otro lado, si $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$, su primera derivada es $g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, lo que indica que los puntos críticos son $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$. Analizamos el signo de g' en la siguiente tabla, y sacamos las conclusiones oportunas:

g'	$+$	Máx	$-$	Mín	$+$
g	$\nearrow$	0	$\searrow$	2	$\nearrow$

$$\text{Monotonía} \begin{cases} f \text{ decreciente en }]0, 2[\,, \\ f \text{ creciente en }]-\infty, 0[\, \cup \,]2, +\infty[\,. \end{cases}$$

$$\text{Extremos} \begin{cases} \text{máximo relativo en } (0, 7)\,, \\ \text{mínimo relativo en } (2, 3)\,. \end{cases}$$

■

Ejercicio 3 En un aula de dibujo hay 40 sillas, 30 con respaldo y 10 sin él. Entre las sillas sin respaldo hay 3 nuevas y entre las sillas con respaldo hay 7 nuevas.

a) *(**1 punto**)* Tomada una silla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea nueva?

b) *(**1 punto**)* Si se coge una silla que no es nueva, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga respaldo?

Solución: [**con los teoremas de probabilidad**] Llamemos R al suceso "elegida una silla al azar, ésta tiene respaldo" y N al suceso "elegida una silla al azar, ésta es nueva". Como hay 30 sillas con respaldo en una clase de 40, se sabe que

$$p(R) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}, \qquad p\left(R^C\right) = \frac{1}{4}.$$

De entre las sillas sin respaldo, que son 10, hay 3 que son nuevas, por lo que

$$p\left(\frac{N}{R^C}\right) = \frac{3}{10}, \qquad p\left(\frac{N^C}{R^C}\right) = \frac{7}{10}.$$

Igualmente, de entre las sillas con respaldo, que son 30, hay 7 que son nuevas, por lo que

$$p\left(\frac{N}{R}\right) = \frac{7}{30}, \qquad p\left(\frac{N^C}{R}\right) = \frac{23}{30}.$$

Entonces el *teorema de la probabilidad total* nos dice que la probabilidad de tomar una silla nueva al azar es

$$p(N) = p(R) \cdot p\left(\frac{N}{R}\right) + p\left(R^C\right) \cdot p\left(\frac{N}{R^C}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{30} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{4}.$$

Por otro lado, para calcular la probabilidad de que una silla que no es nueva no tenga respaldo es

$$p\left(\frac{R^C}{N^C}\right) = \frac{p\left(R^C \cap N^C\right)}{p\left(N^C\right)} = \frac{p\left(R^C\right) \cdot p\left(\frac{N^C}{R^C}\right)}{1 - p(N)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{7}{30}.$$

■

Solución: [**con una tabla de contingencia**] Podemos resumir la información que nos da el problema en la siguiente tabla de contingencia, que completamos fácilmente

	N	N^C	
R	7		30
R^C	3		10
			40

$\Rightarrow$

	N	N^C	
R	7	23	30
R^C	3	7	10
	10	30	40

Así, la probabilidad de elegir una silla nueva al azar es

$$p(N) = \frac{\text{número de sillas nuevas}}{\text{número total de sillas}} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4},$$

y si hemos tomado una silla que no es nueva, la probabilidad de que no tenga respaldo es

$$p\left(\frac{R^C}{N^C}\right) = \frac{\text{número de sillas sin respaldo y no nuevas}}{\text{número de sillas que no son nuevas}} = \frac{7}{30}.$$

Este segundo método no requiere de ningún teorema, sino del sentido común. ■

Ejercicio 4 ***(2 puntos)*** En una población, una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 9. ¿De qué tamaño, como mínimo, debe ser la muestra con la cual se estime la media poblacional con un nivel de confianza del 97 % y con un error máximo admisible igual a 3?

Solución : Sabemos que $\sigma = 9$, $E \leq 3$ y al nivel de confianza $p = 0'97$ se tiene el valor crítico $z_{\alpha/2} = 2'17$. Entonces

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'17 \cdot 9}{3}\right)^2 \approx 42'38.$$

Por tanto, debemos tomar una muestra de tamaño, al menos, 43 individuos. ■

Opción B

Ejercicio 1

a) *(**2 puntos**)* Representa la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x \geq 0\ ; \quad y \geq 0\ ; \quad -x + 2y \leq 6\ ; \quad x + y \leq 6\ ; \quad x \leq 4.$$

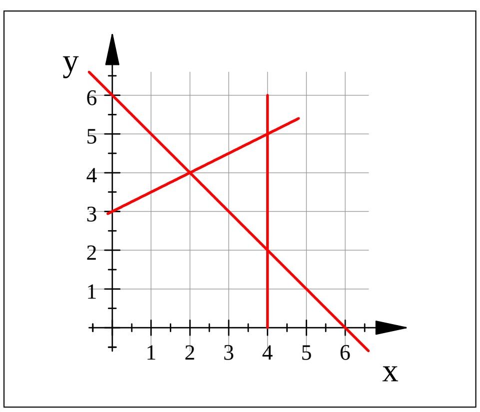
b) *(**1 punto**)* Calcule el máximo de la función $F(x, y) = 2x + 2y + 1$ en la región anterior e indique dónde se alcanza.

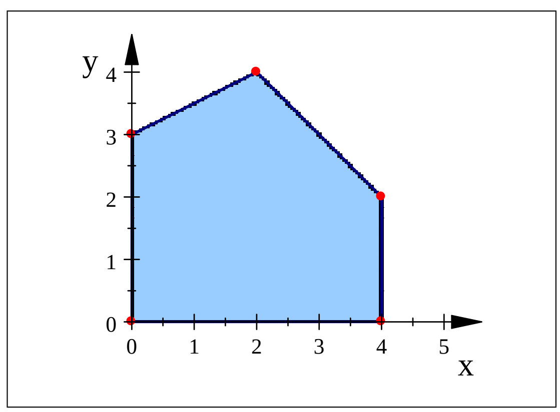
Solución : Calculamos dónde se cortan las rectas distintas de los ejes coordenados:

$$\left\{\begin{array}{c} -x + 2y = 6 \\ x + y = 6 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} -x + 2y = 6 \\ x = 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} x + y = 6 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

$$x = 2,\ y = 4 \qquad\qquad x = 4,\ y = 5 \qquad\qquad x = 4,\ y = 2$$

Con esta información y sabiendo dónde cortan las rectas a los ejes coordenados, es posible dibujarlas.





Así, los vértices del recinto R son

$$(0, 0)\,, \quad (0, 3)\,, \quad (2, 4)\,, \quad (4, 2)\,, \quad (4, 0)\,.$$

El *Teorema Fundamental de la Programación Lineal* afirma que la función $F(x, y) = 2x + 2y + 1$ alcanza máximo en la región anterior, y que éste debe estar situado en un vértice, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

$$F(0, 0) = 1, \quad F(0, 3) = 7, \quad F(2, 4) = 13, \quad F(4, 2) = 13, \quad F(4, 0) = 9.$$

Esto concluye que el máximo de la función F en el recinto R es 13, y se alcanza en todos los puntos del segmento cerrado de extremos $(2,4)$ y $(4,2)$. ■

Ejercicio 2 Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x-1}, & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$

a) *(**2 puntos**)* Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

b) *(**1 punto**)* Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución: La función f es continua y derivable en $\mathbb{R}^-$ porque en este intervalo abierto es una función racional (sin ceros del denominador), y es continua y derivable en $\mathbb{R}^+$ porque en este intervalo es una función polinómica. Nos queda por analizar la continuidad y derivabilidad en $x = 0$. Calculamos los límites laterales de f en $x = 0$:

$$f(0) = f\left(0^-\right) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{2x-1} = 0,$$

$$f\left(0^+\right) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 + x\right) = 0.$$

Como estos límites laterales coinciden entre sí y coinciden con el valor $f(0) = 0$, la función f es continua en $x = 0$, y así deducimos que f es continua en todo su dominio. Para estudiar la derivabilidad, primero derivamos el primer trozo:

$$x < 0, \quad \left[\frac{x}{2x-1}\right]' = \frac{(2x-1) - 2x}{(2x-1)^2} = \frac{-1}{(2x-1)^2}.$$

Entonces la primera derivada de f es, al menos,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(2x-1)^2}, & \text{si } x < 0, \\ 2x + 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Estudiamos los límites laterales de f' en $x = 0$:

$$f'\left(0^-\right) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{(2x-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$f'\left(0^+\right) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x+1) = 1.$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, la función f no es derivable en $x = 0$. Resumiendo, f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para calcular la recta tangente en $x = 1$, sólo necesitamos dos datos:

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2, \qquad f'(1) = 2 + 1 = 3.$$

Entonces la recta tangente a f en $x = 1$ es

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y - 2 = 3(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x - 1.$$

■

Ejercicio 3 Sean los sucesos A y B independientes. La probabilidad de que ocurra el suceso B es $0'6$. Sabemos también que $p(A/B) = 0'3$.

a) *(**1 punto**)* Calcule la probabilidad de que suceda al menos uno de los dos sucesos.

b) *(**1 punto**)* Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso A pero no el B.

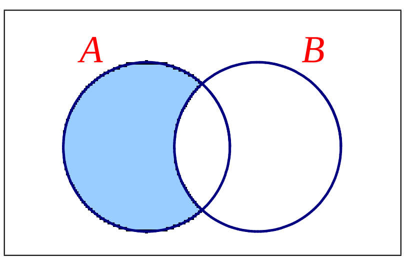
Solución: Como los sucesos son independientes, se sabe que

$$p(A) = p\left(\frac{A}{B}\right) = 0'3, \qquad p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0'3 \cdot 0'6 = 0'18.$$

Entonces la probabilidad de que suceda al menos uno de los dos sucesos es

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'3 + 0'6 - 0'18 = 0'72.$$

Por otro lado, la probabilidad de que ocurra A pero no B es



$$p\left(A \cap B^C\right) = p(A) - p(A \cap B) = 0'3 - 0'18 = 0'12.$$

■

Ejercicio 4 *(**2 puntos**)* Se ha lanzado un dado 400 veces y se ha obtenido 80 veces el valor cinco. Estime, mediante un intervalo de confianza al 95 %, el valor de la probabilidad de obtener un cinco.

Solución: La proporción de cincos obtenida, al lanzar $n = 400$ veces el dado, es $\hat{p} = 80/400 = 0'2$. Como $n \cdot \hat{p} = 80 \geq 5$ y $n \cdot \hat{q} = 320 \geq 5$, podemos utilizar la fórmula usual para estimar la proporción (poblacional) de apariciones del cinco. Al nivel de confianza $p = 1 - \alpha = 0'95$, el valor crítico correspondiente es $z_{\alpha/2} = 1'96$. Entonces el intervalo solicitado es:

$$I.C. = \left] \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[= \left] 0'2 \pm 1'96\sqrt{\frac{0'2 \cdot 0'8}{400}} \right[=$$
$$= \left] 0'2 \pm 0'0392 \right[= \left] 0'1608, 0'2392 \right[.$$

■