Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas II Andalucía – Junio de 2010

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

Miércoles, 16 de junio de 2010

Opción A

Ejercicio 1 **Sea f la función definida como** $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{a-x}$ **para $x \neq a$.**

(a) **(1'5 puntos) Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(2,3)$ y tenga una asíntota oblícua con pendiente -4.**

(b) **(1 punto) Para el caso $a=2$, $b=3$, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.**

Solución: **Apartado (a).** Dado que el dominio de la función f es $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, si queremos que la gráfica de f pase por $(2,3)$, se tiene que cumplir que $2 \in \operatorname{dom} f$, es decir, $a \neq 2$, y además que $f(2) = 3$. Esta igualdad es equivalente a:

$$f(2) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4a+b}{a-2} = 3 \quad \Rightarrow \quad 4a+b = 3(a-2) \quad \Leftrightarrow \quad a+b = -6.$$

Por otro lado, si la recta $y = mx+n$ es una asíntota oblícua de la función f, el valor de su pendiente, que es m, debe obtenerse como:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{ax^2+b}{a-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2+b}{ax-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a+\frac{b}{x^2}}{\frac{a}{x}-1} = \frac{a}{-1} = -a.$$

Para que esta pendiente valga -4, debemos imponer que $-a = m = -4$, es decir, que $a = 4$. Ahora de la ecuación $a+b=-6$ despejamos $b = -6-a = -6-4 = -10$. Por consiguiente, para que se cumplan las condiciones dadas, los parámetro a y b deben valer:

$$\boxed{a = 4 \quad \text{y} \quad b = -10.}$$

* Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/index.html

Apartado (b). Si suponemos que $a = 2$ y $b = 3$, entonces la función f es:

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{a - x} = \frac{2x^2 + 3}{2 - x}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Claramente, f es continua y derivable en su dominio, y su primera derivada es, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$f'(x) = \frac{4x(2 - x) - \left(2x^2 + 3\right)(-1)}{(2 - x)^2} = \frac{8x - 4x^2 + 2x^2 + 3}{(2 - x)^2} = \frac{-2x^2 + 8x + 3}{(2 - x)^2}.$$

Evaluamos f y f' en el punto $x_0 = 1$, encontrando los valores:

$$f(x_0) = f(1) = \frac{2 + 3}{2 - 1} = 5, \quad f'(x_0) = f'(1) = \frac{-2 + 8 + 3}{(2 - 1)^2} = 9.$$

Entonces la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x_0 = 1$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y - 5 = 9(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = 9x - 4.}$$

■

Ejercicio 2 (2'5 puntos) Calcula $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\, dx$. **Sugerencia: Efectúa el cambio** $\sqrt{x} = t$.

Solución: En primer lugar, encontramos una primitiva de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ utilizando el cambio de variable sugerido. Si $\sqrt{x} = t$, entonces $x = t^2$, de donde

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \Rightarrow \quad dx = 2t\ dt.$$

De esta manera:

$$\int \operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) dx = \int \operatorname{sen}(t) \cdot 2t\ dt = 2 \int t \operatorname{sen} t\, dt.$$

Ahora calculamos esta integral utilizando *integración por partes*, donde tomaremos $u = t$. De esta manera:

$$\int t \operatorname{sen} t\, dt = \left\| \begin{array}{lll} u = t & \Rightarrow & du = dt \\ dv = \operatorname{sen} t\ dt & \Rightarrow & v = -\cos t \end{array} \right\| = -t\cos t - \int (-\cos t)\, dt =$$

$$= -t\cos t + \int \cos t\ dt = -t\cos t + \operatorname{sen} t + C = \operatorname{sen} t - t\cos t + C.$$

Deshacemos ahora el cambio de variable y encontramos que:

$$\int \operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) dx = 2 \int t \operatorname{sen} t\, dt = 2\left(\operatorname{sen} t - t\cos t + C\right) = 2\left(\operatorname{sen}\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right) + C'.$$

Ahora sólo hay que utilizar la *regla de Barrow* para obtener el valor exacto de la integral:

$$\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) dx = 2\left(\operatorname{sen}\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\ \right]_{x=0}^{x=\pi^2} = 2\left[\ (\operatorname{sen}\pi - \pi\cos\pi) - (\operatorname{sen} 0 - 0\cdot\cos 0)\ \right] =$$

$$= 2\ \left[\ 0 - \pi\,(-1) - 0\ \right] = 2\pi.$$

$$\boxed{\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) dx = 2\pi.}$$

■

Ejercicio 3 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}\ , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{y} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) **(0'5 puntos) Indica los valores de m para los que A es invertible.**

(b) **(2 puntos) Resuelve la ecuación matricial $XA - B^t = C$ para $m = 0$ (B^t es la matriz traspuesta de B).**

Solución: **Apartado (a).** Calculamos el determinante de la matriz A utilizando la *regla de Sarrus* y encontramos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = \left(-m^2 + 0 + 0\right) - (-4m + 0 + 3) = -m^2 + 4m - 3.$$

Buscamos en qué puntos se anula este determinante resolviendo la ecuación:

$$\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 4m + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad m \in \{1, 3\}.$$

Dado que sabemos que una matriz cuadrada es invertible si, y sólo si, su determinante es distinto de cero, podemos asegurar que:

$$\boxed{A \text{ es invertible si, y sólo si, } m \in \mathbb{R}\diagdown\{1, 3\}.}$$

Apartado (b). Si $m = 0$, la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y su determinante vale} \quad \det A = -m^2 + 4m - 3\Big|_{m=0} = -3.$$

Como A posee determinante no nulo, sabemos que es invertible, y su matriz inversa se calcula con el siguiente proceso:

$$\text{matriz de menores de } A \quad \to \quad \begin{pmatrix} -3 & -12 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{matriz adjunta de } A \quad \to \quad \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(\operatorname{adj} A)^t = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora despejamos X de la ecuación matricial:

$$XA - B^t = C \quad \Leftrightarrow \quad XA = C + B^t \quad \Leftrightarrow \quad X = \left(C + B^t\right) A^{-1}.$$

Calculamos:

$$C + B^t = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$X = \left(C + B^t\right) A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 18 & 9 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concluimos, pues, que la matriz buscada es:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

■

Ejercicio 4 **Considera las rectas r y s de ecuaciones:**

$$x - 1 = y = 1 - z \qquad \textbf{y} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = -1, \\ y + z = 1. \end{array} \right.$$

(a) **(0'75 puntos) Determina su punto de corte.**

(b) **(1 punto) Halla el ángulo que forman r y s.**

(c) **(0'75 puntos) Determina la ecuación del plano que contiene a r y a s.**

Solución : **Apartado (a).** La recta r puede expresarse en forma continua como:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-1},$$

por lo que un punto de la recta r es $A_r\,(1,0,1)$ y un posible vector director de r es $\overrightarrow{u_r}\,(1,1,-1)$. Por otro lado, en la recta s, si llamamos $m = z$, resulta que:

$$y = 1 - z = 1 - m, \qquad x = 2y - 1 = 2\,(1-m) - 1 = 1 - 2m.$$

Por consiguiente, todos los puntos de la recta s son de la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2m \\ 1-m \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } m \in \mathbb{R}.$$

De aquí deducimos que un punto de la recta s es $A_s\,(1,1,0)$ y un posible vector director de s es $\overrightarrow{u_s}\,(-2,-1,1)$. Si un punto $P_s\,(1-2m, 1-m, m)$ de la recta s pertenece a la recta r, entonces debe verificar:

$$x - 1 = y \quad \Leftrightarrow \quad (1-2m) - 1 = 1 - m \quad \Leftrightarrow \quad -m = 1 \quad \Leftrightarrow \quad m = -1.$$

Por tanto, el punto que está en las dos rectas es:

$$P_s\,(1-2m, 1-m, m)\big|_{m=-1} = (3,2,-1)\,.$$

Efectivamente, este punto cumple tanto las ecuaciones de r como de s.

$$\boxed{\text{El punto de corte entre } r \text{ y } s \text{ es } (3,2,-1)\,.}$$

Apartado (b). Para calcular el ángulo que forman las rectas r y s determinamos el ángulo α que forman los vectores directores $\overrightarrow{u_r}\,(1,1,-1)$ y $\overrightarrow{u_s}\,(-2,-1,1)$, sabiendo que

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = |\overrightarrow{u_r}|\,|\overrightarrow{u_s}|\cos\alpha.$$

Como:

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = (1,1,-1)\cdot(-2,-1,1) = -4, \quad |\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}, \quad |\overrightarrow{u_s}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6},$$

encontramos que:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}|\,|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{-4}{\sqrt{3}\,\sqrt{6}} = \frac{-4}{\sqrt{18}} = \frac{-4}{3\sqrt{2}} = \frac{-4\sqrt{2}}{6} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}.$$

De esta forma, el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ es:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right) \approx 160^\circ\ 61'\ 44''.$$

Como este ángulo es obtuso, el ángulo que forman las rectas r y s es su ángulo suplementario. Por consiguiente:

$$\measuredangle\,(r,s) = 180^\circ - \alpha \approx 19^\circ\ 28'\ 16''.$$

$$\boxed{\text{El ángulo que forman las rectas } r \text{ y } s \text{ es, aproximadamente,} \quad 19^\circ\ 28'\ 16''.}$$

Apartado (c). El plano que contiene a las rectas r y s debe contener al punto $A_r\,(1,0,1)$ y su dirección está determinanda por los vectores $\overrightarrow{u_r}\,(1,1,-1)$ y $\overrightarrow{u_s}\,(-2,-1,1)$. Entonces, una forma sencilla de encontrar una ecuación general para dicho plano es la siguiente:

$$0 = \det\left(\ \overrightarrow{A_rX},\ \overrightarrow{u_r},\ \overrightarrow{u_s}\ \right) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y & 1 & -1 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= [(x-1)+2y-(z-1)] - [(x-1)+y-2\,(z-1)] =$$

$$= x-1+2y-z+1-x+1-y+2z-2 = y+z-1.$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\text{una ecuación general del plano que contiene a } r \text{ y a } s \text{ es} \quad y+z=1.}$$

■

Opción B

Ejercicio 1 (2'5 puntos) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$.

SOLUCIÓN: Llamemos L al límite propuesto en el enunciado. Si tratamos de sustituir x por 0, encontramos una indeterminación de tipo $0/0$.

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2} = \left[\text{ Indet. } \frac{0}{0}\ \right].$$

Como las funciones que hay en el numerador y en el denominador son continuas y derivables en $\mathbb{R}$ (en especial, en un entorno reducido de $x=0$), intentamos aplicar la *regla de L'Hôpital*, que nos lleva a calcular el siguiente límite:

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{[\,e^x - e^{\operatorname{sen} x}\,]'}{[\,x^2\,]'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x}{2x} = \left[\text{ Indet. } \frac{0}{0}\ \right].$$

Nuevamente nos encontramos con una indeterminación de tipo 0/0 y razonamos de manera similar, buscando el siguiente límite:

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\left[\, e^x - e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \,\right]'}{\left[\, 2x \,\right]'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \left(e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos^2 x + e^{\operatorname{sen} x} \cdot (-\operatorname{sen} x)\right)}{2} =$$

$$= \frac{1 - (1 \cdot 1 + 1 \cdot 0)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Como el límte L_2 existe y es finito, la *regla de L'Hôpital* nos asegura que el límite L_1 también existe y vale $L_1 = L_2 = 0$. Razonando de la misma forma, como el límte L_1 existe y es finito, la *regla de L'Hôpital* nos asegura que el límite L también existe y vale $L = L_1 = 0$. Concluimos, pues, que límite buscado existe y vale cero.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2} = 0.}$$

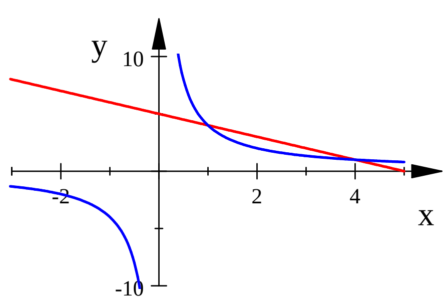
■

Ejercicio 2 Considera la función f dada por $f(x) = 5 - x$ **y la función g definida como** $g(x) = \dfrac{4}{x}$ **para $x \neq 0$.**

(a) **(1 punto) Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte.**

(b) **(1'5 puntos) Calcula el área de dicho recinto.**

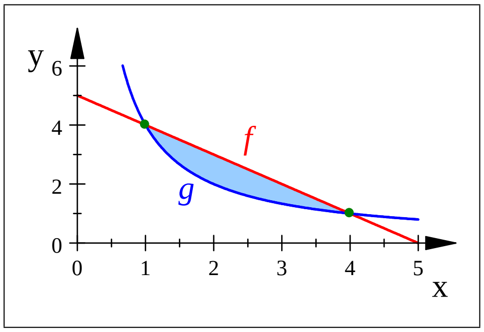
SOLUCIÓN: **Apartado (a).** Es claro que la gráfica de la función f es una recta decreciente y la de la función g es una hipérbola cuyas asíntotas están sobre los ejes de coordenadas. Con una sencilla tabla de valores podemos dibujarlas.



Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones (teniendo en cuenta que $x \neq 0$):

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 5 - x = \frac{4}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 5x - x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{1, 4\}.$$

Como $f(1) = g(1) = 4$ y $f(4) = g(4) = 1$, podemos precisar más detalladamente el recinto y los puntos de corte.



Las funciones f y g se cortan en los puntos $(1, 4)$ y $(4, 1)$.

Apartado (b). El área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f y g se calcula mediante la siguiente integral que, a su vez, se obtiene utilizando la *regla de Barrow*:

$$\mathcal{A} = \int_1^4 (f(x) - g(x))\,dx = \int_1^4 \left((5-x) - \frac{4}{x}\right) dx = \left(5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right]_{x=1}^{x=4} =$$

$$= (20 - 8 - 4\ln 4) - \left(5 - \frac{1}{2} - 4\ln 1\right) = 20 - 8 - 5 + \frac{1}{2} - 4\ln 4 + 4\underbrace{\ln 1}_{0} =$$

$$= \frac{15}{2} - 4\ln 4 = \frac{15}{2} - 8\ln 2 \approx 1'9548 \text{ u.c.s.}$$

El área comprendida entre f y g es de $\dfrac{15}{2} - 8\ln 2$ unidades cuadradas de superficie.

■

Ejercicio 3 Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & + & z & = & \lambda + 2 \\ 2x & - & \lambda y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & \lambda z & = & \lambda \end{array}\right\}$$

(a) **(1'75 puntos) Discútelo según los valores de λ. ¿Tiene siempre solución?**

(b) **(0'75 puntos) Resuelve el sistema para $\lambda = -1$.**

Solución: **Apartado (a).** Calculamos el determinante de la matriz del sistema (a la que llamamos A):

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \left(-\lambda^3 + 1 - 2\right) - (-\lambda + 2\lambda - \lambda) = -\lambda^3 - 1.$$

Buscamos todos los números reales que anulan a este determinante resolviendo la ecuación:

$$\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \sqrt[3]{-1} = -1.$$

Si $\lambda \neq -1$, el determinante de la matriz del sistema es distinto de cero, por lo que el sistema posee una única solución (es un *sistema de Cràmer* compatible determinado). Estudiamos el caso $\lambda = -1$ utilizando el *método de Gauss-Jordan* por filas:

$$\left\| \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \left\| \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y + z = \frac{4}{3}. \end{cases} \right.$$

En este caso, el sistema es compatible indeterminado, y llegamos a la siguiente solución.

$$\boxed{\begin{cases} \bullet \ \text{Si } \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \text{ el sistema es compatible determinado.} \\ \bullet \ \text{Si } \lambda = -1, \text{ el sistema es compatible indeterminado.} \end{cases}}$$

Por tanto, siempre tiene solución.

Apartado (b). En el apartado anterior hemos resuelto el sistema cuando $\lambda = -1$. Llamando $m = z$, tenemos que $y = 4/3 - z = 4/3 - m$, por lo que la solución del sistema es la siguiente.

$$\boxed{\lambda = -1, \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}, \\ y = \dfrac{4}{3} - m, \\ z = m \end{cases} \quad \text{donde } m \in \mathbb{R} \text{ es arbitrario.}}$$

■

Ejercicio 4 Los puntos $P(2,0,0)$ y $Q(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta r de ecuación

$$\begin{cases} 4x + 3z = 33, \\ y = 0. \end{cases}$$

(a) **(1'5 puntos) Calcula las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a la recta que pasa por P y S.**

(b) **(1 punto) Comprueba si el triángulo es rectángulo.**

Solución : **Apartado (a).** Despejando z de la primera ecuación de r, encontramos que:

$$4x + 3z = 33 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{33 - 4x}{3} = 11 - \frac{4x}{3}.$$

Esto significa que todos los puntos de la recta r son de la forma:

$$(x, y, z) = \left(x, 0, 11 - \frac{4x}{3}\right) = (0, 0, 11) + x\left(1, 0, -\frac{4}{3}\right), \quad \text{donde } x \in \mathbb{R}.$$

En particular, el punto S debe adoptar esta forma y un posible vector director de la recta r es $\overrightarrow{u_r} = 3\left(1, 0, -\frac{4}{3}\right) = (3, 0, -4)$. El vector que une los puntos P y S es:

$$\overrightarrow{PS} = S - P = \left(x, 0, 11 - \frac{4x}{3}\right) - (2, 0, 0) = \left(x - 2, 0, 11 - \frac{4x}{3}\right), \quad \text{para algún } x \in \mathbb{R}.$$

Como la recta r es perpendicular a la recta que pasa por P y S, los vectores $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{PS}$ deben ser perpendiculares. En particular, su producto escalar debe valer cero, y así podemos calcular x:

$$0 = \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{PS} = (3, 0, -4) \cdot \left(x - 2, 0, 11 - \frac{4x}{3}\right) = 3(x-2) - 4\left(11 - \frac{4x}{3}\right) =$$
$$= 3x - 6 - 44 + \frac{16x}{3} = \frac{25x}{3} - 50 \quad \Rightarrow \quad 25x = 150 \quad \Rightarrow \quad x = 6.$$

Por consiguiente, el punto S es:

$$S = \left(x, 0, 11 - \frac{4x}{3}\right)\bigg|_{x=6} = (6, 0, 3). \qquad \boxed{S = (6, 0, 3).}$$

Apartado (b). Comprobamos si el triángulo es rectángulo en el vértice P, es decir, si los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PS}$ son perpendiculares. Para ello, calcularemos su producto escalar.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1, 12, 4) - (2, 0, 0) = (-3, 12, 4),$$
$$\overrightarrow{PS} = S - P = (6, 0, 3) - (2, 0, 0) = (4, 0, 3),$$
$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS} = (-3, 12, 4) \cdot (4, 0, 3) = -12 + 12 = 0.$$

Como este producto escalar vale cero, los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PS}$ son no nulos y ortogonales, y así podemos afirmar que:

$$\boxed{\text{el triángulo } PQS \text{ es rectángulo.}}$$

■

Nota 1 *Hay que aclarar que si el triángulo PQS no hubiese sido rectángulo en P, entonces hubiésemos continuado el ejercicio estudiando si es rectángulo en Q o en S.*