Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas II Andalucía – Septiembre de 2009

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

16 de septiembre de 2009

Opción A

Ejercicio 1 (2'5 puntos) Se considera la función $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$$

Determina la asíntota de la gráfica de f.

Solución: Si $x \geq 1$, es claro que $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$. Por tanto, f está bien definida en $[1, +\infty)$, ya que el argumento de la raíz cuadrada no puede ser negativo. Además, f es continua en $[1, +\infty)$, por lo que no puede tener asíntotas verticales. Está claro que en $+\infty$ no tiene una asíntota horizontal, ya que el siguiente límite diverge sin presentar indeterminación:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2 - x} + x \right] = +\infty + \infty = +\infty.$$

Por consiguiente, f sólo puede poseer una asíntota oblícua a la derecha. Si suponemos que la recta de ecuación $y = mx + n$ es dicha asíntota oblicua, sus coeficientes son:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} + x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{\frac{x^2 - x}{x^2}} + 1 \right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 \right] =$$

$$= \sqrt{1 - 0} + 1 = 1 + 1 = 2;$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} + x - 2x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - x} - x \right)\left(\sqrt{x^2 - x} + x \right)}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2 - x} + x}{x}} = \frac{-1}{\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} + x}{x}} = [\text{ calculado arriba }] = \frac{-1}{2}.$$

* Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/index.html

Por consiguiente,

$$\boxed{\text{la única asíntota de } f \text{ es la recta } y = 2x - \frac{1}{2}.}$$

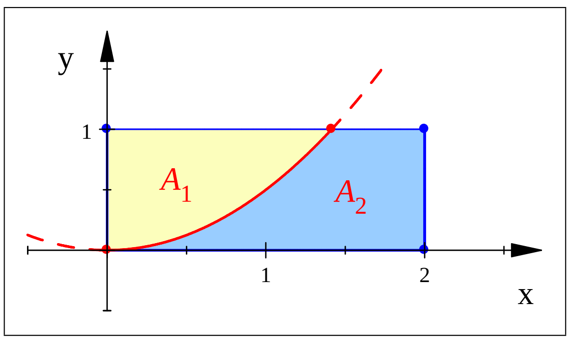
■

Ejercicio 2 La curva $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo de vértices $A = (0,0)$, $B = (2,0)$ y $C = (2,1)$ y $D = (0,1)$ en dos recintos.

(a) **(0'75 puntos)** Dibuja dichos recintos.

(b) **(1'75 puntos)** Halla el área de cada uno de ellos.

Solución: **Apartado (a).** Dibujamos el rectángulo junto con la parábola dada, y nos aparecen los dos recintos.



Aparatado (b). Calculamos el área A_1. Para ello, determinamos dónde la función f corta a la recta $y = 1$:

$$f(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Como sólo nos interesa la solución positiva, podemos calcular el área A_1 aplicando la *regla de Barrow*:

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{6}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}^3}{6}\right) - (0 - 0) = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{6} =$$
$$= \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{2}\,\frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0'9428.$$

Entonces al área A_2 se calcula como el área del rectángulo menos el área A_1, resultando:

$$A_2 = A_{\text{rect}} - A_1 = 2 \cdot 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{3} \approx 1'0572.$$

$$\boxed{\text{El área } A_1 \text{ mide } \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0'9428 \text{ u.c.s., y el área } A_2,\ \frac{6-2\sqrt{2}}{3} \approx 1'0572 \text{ u.c.s.}}$$

■

Ejercicio 3 (a) **(1'75 puntos)** Discute según los valores del parámetro λ el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 3x & + & \lambda y & & & = & 0 \\ x & & & + & \lambda z & = & \lambda \\ x & + & y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right\}$$

(b) **(0'75 puntos)** Resuélvelo para $\lambda = 0$.

Solución: **Apartado (a).** Calculamos el determinante de la matriz del sistema:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \left(0 + \lambda^2 + 0\right) - (0 + 3\lambda + 3\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda = \lambda\,(\lambda - 6)\,.$$

Si λ es cualquier número real distinto de 0 y de 6 ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$), este determinante no se anula. Por tanto, el rango de la matriz del sistema es tres. Este rango coincide con el rango de la matriz ampliada y con el número de incógnitas, por lo que en este caso el sistema es compatible determinado. Estudiamos los casos que nos quedan por analizar, aplicando el *método de Gauss* a la matriz ampliada.

Si $\lambda = 6$, nos queda:

$$\left\|\begin{array}{cccc} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & -18 & -18 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right\|$$

Se observa que el rango de la matriz del sistema es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3. Por tanto, el *teorema de Rouché-Fröbenius* nos garantiza que el sistema es incompatible.

Finalmente, supongamos que $\lambda = 0$ y aplicamos el mismo proceso.

$$\left\|\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \qquad \left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ y + 3z = 1. \end{array}\right.$$

En este caso, la matriz de coeficientes del sistema y la matriz ampliada tienen rango 2, y como hay tres incógnitas, el sistema es compatible indeterminado (uniparamétrico). Hemos llegado, pues, a la siguiente clasificación.

$$\begin{cases} \bullet \text{ Si } \lambda \in \mathbb{R}\diagdown\{0,6\}, \text{ el sistema es compatible determinado.} \\ \bullet \text{ Si } \lambda = 6, \text{ el sistema es incompatible.} \\ \bullet \text{ Si } \lambda = 0, \text{ el sistema es compatible indeterminado.} \end{cases}$$

Apartado (b). Supongamos que $\lambda = 0$. Ya hemos visto que el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y + 3z = 1. \end{cases}$$

Llamemos $m = z$. Entonces $y = 1 - 3z = 1 - 3m$. De esa forma,

$$\boxed{\text{la solución del sistema, cuando } \lambda = 0, \text{ es } \begin{cases} x = 0, \\ y = 1 - 3m, \quad \text{donde } m \in \mathbb{R}. \\ z = m, \end{cases}}$$

■

Ejercicio 4 Considera el punto $P\,(1,0,0)$, la recta r definida por $x - 3 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$ y la recta s definida por $(x,y,z) = (1,1,0) + \lambda\,(-1,2,0)$.

(a) (1'25 puntos) Estudia la posición relativa de r y s.

(b) (1'25 puntos) Halla la ecuación del plano que pasando por P es paralelo a r y s.

Solución: **Apartado (a).** Un punto concreto de la recta r es $A_r\,(3,0,-1)$ y un posible vector director es $\overrightarrow{u_r} = (1,2,-2)$. De la misma forma, un punto concreto de la recta s es $A_s\,(1,1,0)$ y un posible vector director es $\overrightarrow{u_s} = (-1,2,0)$. El vector $\overrightarrow{A_rA_s}$ es:

$$\overrightarrow{A_rA_s} = A_s - A_r = (1,1,0) - (3,0,-1) = (-2,1,1)\,.$$

Calculamos el rango del conjunto de vectores $\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{A_rA_s}\}$ aplicando el *método de Gauss*:

$$\text{rg}\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{A_rA_s}\} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3.$$

Como el conjunto de vectores $\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{A_rA_s}\}$ posee rango 3, las rectas se cruzan en el espacio.

$$\boxed{\text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ se cruzan en el espacio.}}$$

Apartado (b). Llamemos π al plano que pasa por P y es paralelo a r y s. Por ser paralelo a r y s, los vectores independientes $\overrightarrow{u_r} = (1, 2, -2)$ y $\overrightarrow{u_s} = (-1, 2, 0)$ generan su dirección. Por tanto, un vector normal a este plano se obtiene calculando su producto vectorial:

$$\overrightarrow{n_\pi} \parallel \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si éste es un vector perpendicular al plano π, su ecuación debe ser de la forma $2x + y + 2z = k$. Para que este plano pase por el punto $P(1, 0, 0)$, debe ocurrir que $k = 2 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 0 = 2$. Por consiguiente,

$$\boxed{\text{el plano paralelo a } r \text{ y } s \text{ que pasa por } P \text{ posee ecuación } 2x + y + 2z = 2.}$$

■

Opción B

Ejercicio 1 (2'5 puntos) De entre todos los rectángulos cuya área mide 16 cm^2, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

Solución: Llamemos x e y a los lados del rectángulo. Como su área es de 16 cm^2, sabemos que $xy = 16$, de donde $y = 16/x$. Por otro lado, la diagonal es:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}.$$

El dominio de la función $d = d(x)$ es $]0, +\infty[$, ya que x, siendo positivo, puede ser tan grande como se quiera. Como d es una función continua y derivable en $]0, +\infty[$, y además es positiva ($d(x) > 0$ para cada $x \in]0, +\infty[$), encontrar un mínimo de d es lo mismo que encontrar un mínimo de d^2. Por ello, nuestra función a minimizar es:

$$f(x) = d(x)^2 = x^2 + \frac{256}{x^2}, \qquad \text{para cada } x \in]0, +\infty[.$$

Su primera derivada es:

$$f'(x) = 2x - \frac{256 \cdot 2x}{x^4} = 2x - \frac{512}{x^3} = \frac{2x^4 - 512}{x^3} = \frac{2\left(x^4 - 256\right)}{x^3}, \qquad \text{para cada } x \in]0, +\infty[.$$

Sabiendo que $x > 0$, calculamos sus puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 256 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[4]{256} = 4.$$

Completamos una tabla como la siguiente para estudiar el signo de f' y, consecuentemente, la monotonía de f.

$$\begin{array}{c|cccc} f' & & - & \text{mín} & + \\ \hline f & 0 & \searrow & 4 & \nearrow \end{array} \qquad f'(1) = -510 < 0; \quad f'(5) = 5'904 > 0.$$

Por consiguiente, la función f es estrictamente decreciente en $]0,4[$ y estrictamente creciente en $]4,+\infty[$. Esto demuestra que f posee un único mínimo, que es absoluto y está situado en $x = 4$. En este caso, $y = 16/x = 16/4 = 4$, por lo que realmente se trata de un cuadrado.

Entre los rectángulos de área 16 cm^2, el de diagonal menor es el cuadrado de 4 cm de lado.

■

Ejercicio 2 (2'5 puntos) Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$$

Halla la primitiva de F que cumple $F(0) = 3$ (sugerencia: utiliza el cambio de variable $t = \frac{3}{2}x^2$).

Solución: En primer lugar, vamos a calcular la integral indefinida de f. Observemos que:

$$t = \frac{3}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2t = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad 4t^2 = 9x^4.$$

Por otro lado, diferenciamos la expresión que indica el cambio de variable:

$$t = \frac{3}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad dt = 3xdx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dt}{3} = xdx.$$

Calculamos ahora la integral:

$$\begin{aligned} F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{x\;dx}{\sqrt{4-9x^4}} = \int \frac{dt/3}{\sqrt{4-4t^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{4(1-t^2)}} = \\ = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{6}\arcsin t + C = \frac{1}{6}\arcsin\left(\frac{3x^2}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Dado que $\arcsin 0 = 0$, sabemos que:

$$F(0) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}\arcsin 0 + C = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C = 3.$$

Por consiguiente,

la primitiva buscada es $F(x) = 3 + \frac{1}{6}\arcsin\frac{3x^2}{2}$.

■

Ejercicio 3 (2'5 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determina la matriz X que verifica $AX - B^t = 2C$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

Solución : El determinante de la matriz A es:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1 - 2 + 0) - (-1 - 4 + 0) = 4.$$

Como este determinante es distinto de cero, sabemos que la matriz A posee inversa, y su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Como A posee inversa, podemos despejar X de la ecuación matricial:

$$AX - B^t = 2C \quad \Leftrightarrow \quad AX = 2C + B^t \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}\left(2C + B^t\right).$$

La matriz $2C + B^t$ es:

$$2C + B^t = 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$X = A^{-1}\left(2C + B^t\right) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -5 & -18 \\ -7 & -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz buscada es:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}.}$$

■

Ejercicio 4 Considera la recta r definida por

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+3 & = & 0 \\ x+y-z-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

y la recta s definida por

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2y+1 & = & 0 \\ x-2z+3 & = & 0 \end{array}\right.$$

(a) **(1'5 puntos)** Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

(b) **(1 punto)** ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s? Razona la respuesta.

Solución: **Apartado (a).** Llamemos π al plano que contiene a r y es paralelo a s. Vamos a resolver los sistemas dados para determinar puntos concretos y vectores directores de los dos rectas.

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x-y=-3 \\ x+y-z=1 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{l} x-y=-3 \\ 2y-z=4 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{l} x=m-3, \\ y=m, \\ z=2m-4. \end{array}\right.$$

$$s \equiv \left\{\begin{array}{l} 2y=-1 \\ x-2z=-3 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{l} x=2n-3, \\ y=-1/2, \\ z=n. \end{array}\right.$$

Esto significa que un punto concreto de la recta r es $A_r\,(-3,0,-4)$ y un posible vector director es $\overrightarrow{u_r}=(1,1,2)$. De la misma forma, un punto concreto de la recta s es $A_s\,(-3,-1/2,0)$ y un posible vector director es $\overrightarrow{u_s}=(2,0,1)$. Como el plano π contiene a la recta r, el punto $A_r\,(-3,0,-4)$ está sobre el plano π y el vector $\overrightarrow{u_r}=(1,1,2)$ está en la dirección de π. Por otro lado, como π es paralelo a s, el vector $\overrightarrow{u_s}=(2,0,1)$ también está en la dirección de π. Esto significa que los vectores $\overrightarrow{u_r}=(1,1,2)$ y $\overrightarrow{u_s}=(2,0,1)$ generan la dirección del plano π. Por tanto, un vector normal a este plano se obtiene calculando su producto vectorial:

$$\overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}.$$

Si éste es un vector perpendicular al plano π, su ecuación debe ser de la forma $x+3y-2z=k$. Para que este plano pase por el punto $A_r\,(-3,0,-4)$, debe ocurrir que $k=-3+3\cdot 0-2\cdot(-4)=5$. Por consiguiente,

$$\boxed{\text{el plano que contiene a } r \text{ y es paralelo a } s \text{ posee ecuación } x+3y-2z=5.}$$

Apartado (b). Supongamos que existiese un plano perpendicular a s que contuviese a la recta r. Si contiene a la recta r, el vector $\overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2)$ está en la dirección de ese plano. Y si el plano es perpendicular a s, el vector director de s, es decir, $\overrightarrow{u_s} = (2, 0, 1)$, es un vector perpendicular al plano. Tenemos que $\overrightarrow{u_s} = (2, 0, 1)$ es perpendicular al plano y $\overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2)$ está sobre el plano. En este caso, estos vectores serían perpendiculares, pero esto no es cierto ya que su producto escalar no es cero, sino:

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 2) \cdot (2, 0, 1) = 2 + 0 + 2 = 4.$$

Por consiguiente, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ no son perpendiculares, y concluimos que:

$$\boxed{\text{no existe ningún plano que contenga a } r \text{ y sea perpendicular a } s.}$$

[**Otra forma de resolver el apartado (b)**] Si un plano así existiese, al ser perpendicular a s, su vector normal sería paralelo al vector director $\overrightarrow{u_s} = (2, 0, 1)$. Así, su ecuación sería de la forma $2x + z = k$. Para que este plano contenga a r, debe contener todos los puntos de r. Elijamos dos puntos distintos de r; por ejemplo, $A_r\,(-3, 0, -4)$ y, tomando $m = 3$ en la expresión paramétrica de r, $B_r\,(0, 3, 2)$. Para que el punto $A_r\,(-3, 0, -4)$ esté sobre el plano anterior, el parámetro k debe valer:

$$k = 2x + z = 2\,(-3) + (-4) = -10.$$

Igualmente, para que el punto $B_r\,(0, 3, 2)$ esté sobre el plano anterior, el parámetro k debe valer:

$$k = 2x + z = 2 \cdot 0 + 2 = 2.$$

Como es imposible que el parámetro k tome dos valores distintos en un mismo plano de ecuación $2x + z = k$, deducimos que

$$\boxed{\text{no existe ningún plano que contenga a } r \text{ y sea perpendicular a } s.}$$

■