Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas II Andalucía – Junio de 2009

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

17 de junio de 2009

Opción A

Ejercicio 1 (2'5 puntos) Calcula el siguiente límite (ln significa logaritmo neperiano):

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{2}{x^2-1}\right).$$

SOLUCIÓN: Llamemos L al límite buscado. Desarrollamos la diferencia e intentamos evaluar la expresión resultante, encontrando una indeterminación $0/0$:

$$L=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)-2\ln x}{\left(x^2-1\right)\ln x}=\left[\text{ Indet. }\frac{0}{0}\right].$$

Como las funciones numerador y denominador son derivables, intentamos aplicar la *regla de L'Hôpital* para resolver la indeterminación. Para ello, tratamos de calcular el siguiente límite (en el que derivamos el numerador y el denominador separadamente):

$$L_1=\lim_{x\to 1}\frac{\left[\left(x^2-1\right)-2\ln x\right]'}{\left[\left(x^2-1\right)\ln x\right]'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-\frac{2}{x}}{2x\ln x+\left(x^2-1\right)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x^2-2}{x}}{\frac{2x^2\ln x+x^2-1}{x}}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{2x^2\ln x+x^2-1}=\left[\text{ Indet. }\frac{0}{0}\right].$$

Nuevamente se nos plantea una indeterminación $0/0$, y volvemos a intentar aplicar la *regla de L'Hôpital*, calculando el siguiente límite:

$$L_2=\lim_{x\to 1}\frac{\left[2x^2-2\right]'}{\left[2x^2\ln x+x^2-1\right]'}=\lim_{x\to 1}\frac{4x}{4x\ln x+2x^2\cdot\frac{1}{x}+2x}=\lim_{x\to 1}\frac{4x}{4x\ln x+2x+2x}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{4x}{4x\ln x+4x}=\lim_{x\to 1}\frac{4x}{4x\left(\ln x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1}=\frac{1}{1+0}=1.$$

* Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

Como este último límite existe y vale 1, la *regla de L'Hôpital* nos dice que también existe L_1 y vale 1 y, de nuevo aplicando la misma regla, podemos afirmar que existe el límite L y vale 1.

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{2}{x^2-1}\right)=1.}$$

■

Ejercicio 2 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x\,|x-1|$.

(a) **(0'5 puntos)** Esboza la gráfica de f.

(b) **(0'75 puntos)** Comprueba que la recta de ecuación $y=x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

(c) **(1'25 puntos)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente.

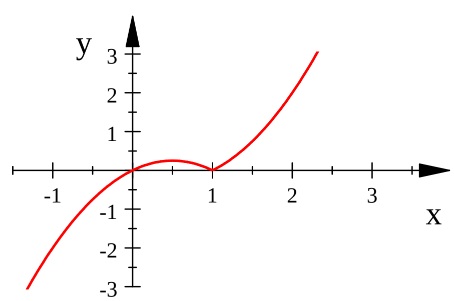
Solución : **Apartado (a).** Cuando se trabaja con una función que lleva valor absoluto, es usual partirla a trozos para quitar el valor absoluto. Como la única solución de la ecuación $x-1=0$ es $x=1$, dividimos la recta real en dos subintervalos, en los que evaluamos el signo de la expresión $x-1$:

$$\begin{array}{lcc} \text{signo}\,(x-1) & - & + \\ \hline & \multicolumn{2}{c}{1} \end{array}$$

Por tanto, en el intervalo $]-\infty,1[$ debemos cambiar el signo de $x-1$, y en $[1,+\infty[$ no hace falta cambiar su signo. De esta forma, la función f puede expresarse como:

$$f(x)=x\,|x-1|=\left\{\begin{array}{ll} x\,(-x+1)\,, & \text{si } x<1, \\ x\,(x-1)\,, & \text{si } x\geq 1 \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{ll} -x^2+x, & \text{si } x<1, \\ x^2-x, & \text{si } x\geq 1. \end{array}\right.$$

Sabiendo ahora que, a trozos, son dos parábolas con vértice en $x=-b/(2a)=1/2$, con una simple tabla de valores podemos dibujar la función f.



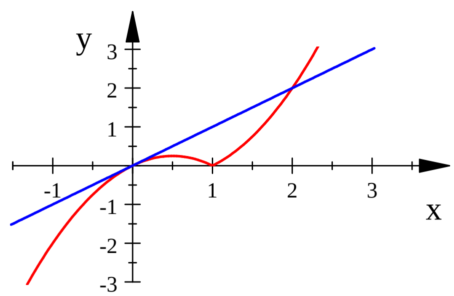
Apartado (b). La ecuación de la recta tangente a f en $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0)(x - 0) = f'(0)\,x$. Es claro que $f(0) = 0$, y la derivada de f, para puntos distintos de $x = 1$, es:

$$x \neq 1, \quad f'(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{si } x < 1, \\ 2x - 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Por tanto, $f'(0) = 0 + 1 = 1$. De esta forma, la ecuación de la recta tangente a f en $x = 0$ es:

$$y - f(0) = f'(0)\,x \quad \Leftrightarrow \quad y - 0 = 1 \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = x.}$$

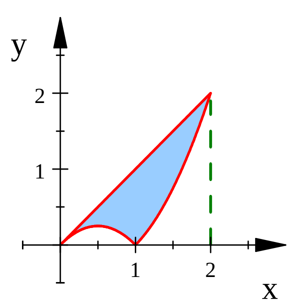
Apartado (c). Dibujamos en el gráfico anterior la recta tangente a f en $x = 0$.



Está claro que un punto de corte entre f y la recta tangente es $x = 0$. El otro punto está más allá de $x = 1$, por lo que resolvemos la ecuación:

$$x > 1, \qquad x^2 - x = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \overset{x>1}{\Leftrightarrow} \quad x = 2$$

El área buscada es la de la siguiente figura.



El área solicitada se divide en dos integrales para evitar el valor absoluto, y la calculamos aplicando la *regla de Barrow*:

$$\mathcal{A} = \int_0^2 (x - x\,|x-1|)\,dx = \int_0^1 \left(x - (-x^2 + x)\right) dx + \int_1^2 \left(x - (x^2 - x)\right) dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \left(2x - x^2\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} + \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{x=1}^{x=2} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left[\left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

El recinto indicado posee un área de 1 unidad cuadrada de superficie.

■

Ejercicio 3 Sean F_1, F_2 y F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

(a) **(0'5 puntos)** El determinante de B^{-1}.

(b) **(0'5 puntos)** El determinante de $\left(B^t\right)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

(c) **(0'5 puntos)** El determinante de $2B$.

(d) **(1 punto)** El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.

Solución : Enunciamos todas las propiedades que vamos a utilizar, para después hacer referencia a ellas.

(P1) Si una matriz cuadrada A posee determinante distinto de cero, entonces A posee inversa y el determinante de su inversa es el inverso del determinante de A.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

(P2) El determinante de un producto de dos matrices cuadradas del mismo orden es el producto de sus determinantes. En particular, si A es una matriz cuadrada, entonces el determinante de A^n (siendo $n \in \mathbb{N}$) es $(\det A)^n$.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B, \qquad \det(A^n) = (\det A)^n.$$

(P3) Una matriz cuadrada y su traspuesta poseen el mismo determinante.

$$\det A^t = \det A.$$

(P4) Si A es una matriz cuadrada de orden n y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un número real, entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

(P5) Si multiplicamos todos los elementos de una fila de una matriz por un número real, el determinante queda multiplicado por ese mismo número real.

$$\det(F_1, \ldots, F_{i-1}, \lambda F_i, F_{i+1}, \ldots, F_n) = \lambda \det(F_1, \ldots, F_{i-1}, F_i, F_{i+1}, \ldots, F_n).$$

(P6) Si a una fila de un determinante le sumamos cualquier otra fila distinta multiplicada por un número real, el determinante no cambia.

$$\det(F_1,\ldots,F_i,\ldots,F_j,\ldots,F_n)=\det(F_1,\ldots,F_i+\lambda F_j,\ldots,F_j,\ldots,F_n).$$

(P7) Si intercambiamos dos filas distintas de una matriz, su determinante cambia de signo.

$$\det(F_1,\ldots,F_i,\ldots,F_j,\ldots,F_n)=-\det(F_1,\ldots,F_j,\ldots,F_i,\ldots,F_n).$$

Aplicando estas propiedades, y sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 con determinante -2, resolvemos de manera inmediata cada apartado.

(a) $\det B^{-1} \overset{\mathbf{P1}}{=} \dfrac{1}{\det B}=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}.$

(b) $\det\left(\left(B^t\right)^4\right) \overset{\mathbf{P2}}{=} \left(\det B^t\right)^4 \overset{\mathbf{P3}}{=} (\det B)^4=(-2)^4=16.$

(c) $\det(2B) \overset{\mathbf{P4}}{=} 2^3\det B=2^3(-2)=-16.$

(d) $\det(5F_1-F_3,3F_3,F_2) \overset{\mathbf{P5}}{=} 3\det(5F_1-F_3,F_3,F_2) \overset{\mathbf{P6}}{=} 3\det(5F_1,F_3,F_2) \overset{\mathbf{P5}}{=}$

$$\overset{\mathbf{P5}}{=} 15\det(F_1,F_3,F_2) \overset{\mathbf{P7}}{=} -15\det(F_1,F_2,F_3)=-15\cdot(-2)=30.$$

(a) $\det B^{-1}=-\dfrac{1}{2}.$	**(b)** $\det\left(\left(B^t\right)^4\right)=16.$
(c) $\det(2B)=-16.$	**(d)** $\det(5F_1-F_3,3F_3,F_2)=30.$

■

Ejercicio 4 (2'5 puntos) Se considera la recta r definida por $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=\lambda-2, \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} x=\mu, \\ y=\mu-1, \\ z=-1. \end{cases}$ Halla la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

Solución: Como un punto cualquiera P_r de la recta r es de la forma:

$$(x,y,z)=P_r(1,1,\lambda-2)=(1,1,-2)+\lambda(0,0,1),$$

de manera que $\overrightarrow{u_r}=(0,0,1)$ es un vector director de la recta r. De la misma forma, un punto arbitrario P_s de la recta s es:

$$(x,y,z)=P_s(\mu,\mu-1,-1)=(0,-1,-1)+\mu(1,1,0),$$

y así podemos tomar el vector $\overrightarrow{u_s} = (1, 1, 0)$ como vector director de la recta s. La perpendicular común a r y a s es la recta que pasa por dos puntos, P_r de r y P_s de s, de manera que el vector $\overrightarrow{P_r P_s}$ es, a la vez, perpendicular a $\overrightarrow{u_r}$ y a $\overrightarrow{u_s}$. De esta forma, dado que dos vectores no nulos son perpendiculares si, y sólo si, su producto escalar es nulo, tratamos de calcular P_r y P_s para que:

$$\overrightarrow{P_r P_s} \perp \overrightarrow{u_r} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_r P_s} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0; \qquad \overrightarrow{P_r P_s} \perp \overrightarrow{u_s} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_r P_s} \cdot \overrightarrow{u_s} = 0.$$

Como:

$$\overrightarrow{P_r P_s} = P_s - P_r = (\mu, \mu - 1, -1) - (1, 1, \lambda - 2) = (\mu - 1, \mu - 2, 1 - \lambda),$$

tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\overrightarrow{P_r P_s} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mu - 1, \mu - 2, 1 - \lambda) \cdot (0, 0, 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \lambda = 0,$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} \cdot \overrightarrow{u_s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mu - 1, \mu - 2, 1 - \lambda) \cdot (1, 1, 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\mu - 3 = 0.$$

De manera inmediata, $\lambda = 1$ y $\mu = 3/2$, por lo que los puntos P_r y P_s son:

$$P_r|_{\lambda=1} = (1, 1, \lambda - 2)|_{\lambda=1} = (1, 1, -1), \quad P_s|_{\mu=3/2} = (\mu, \mu - 1, -1)|_{\mu=3/2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right).$$

La recta perpendicular común a r y a s es la recta que pasa por estos dos puntos. Vamos a ponerla en ecuaciones paramétricas. Un posible vector director es:

$$\overrightarrow{P_r P_s} = P_s - P_r = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) - (1, 1, -1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \parallel (1, -1, 0).$$

Como esta perpendicular común pasa por el punto $P_r\,(1, 1, -1)$ y lleva la dirección del vector $\overrightarrow{u}\,(1, -1, 0)$, podemos concluir lo siguiente.

$$\boxed{\text{La recta perpendicular común a } r \text{ y a } s \text{ viene dada por } \left\{\begin{array}{l} x = 1 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = -1. \end{array}\right.}$$

■

Opción B

Ejercicio 1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{x - 1}, & \text{si} \quad x < 0, \\ x^2 - 3x - 1, & \text{si} \quad x \geq 0. \end{array}\right.$$

(a) **(0'75 puntos)** Estudia su continuidad y derivabilidad.

(b) (1'25 puntos) Determina sus asíntotas y sus extremos relativos.

(c) (0'5 puntos) Esboza la gráfica de f.

SOLUCIÓN: **Apartado (a).** En el intervalo abierto $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[$, la función f está definida de forma hiperbólica (un trozo de hipérbola), de manera que el denominador no se anula en todo este intervalo (sólo lo hace en $x = 1$), por lo que f es continua y derivable en este intervalo. De la misma forma, en el intervalo abierto $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$, la función f está definida de forma parabólica (un trozo de parábola), por lo que f también es continua y derivable en este otro intervalo. Hemos deducido, pues, que f es continua y derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, y queda por estudiar qué ocurre en $x = 0$.

- $f(0) = 0 - 0 - 1 = -1$;
- $$\left.\begin{cases} f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{0-1} = -1 \\[2ex] f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2 - 3x - 1\right) = 0 - 0 - 1 = -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -1;$$
- $f(0) = -1 = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

De las tres propiedades anteriores deducimos que f es continua en $x = 0$ y, por tanto, es continua en $\mathbb{R}$. Estudiamos a continuación su derivabilidad en $x = 0$. En puntos distintos de cero su primera derivada se obtiene derivando cada trozo:

$$x \neq 0, \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0, \\[2ex] 2x - 3, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Estudiamos si existen los límites laterales de la función primera derivada en $x = 0$:

- $f'\left(0^-\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(0-1)^2} = -1;$
- $f'\left(0^+\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x - 3) = 0 - 3 = -3.$

Como estos límites existen y son finitos, pero son distintos, la función f no es derivable en $x = 0$. Por tanto, concluimos lo siguiente.

$$\boxed{\text{La función } f \text{ es continua en } \mathbb{R} \text{ y derivable en } \mathbb{R}\setminus\{0\}.}$$

Apartado (b). Como f es continua en $\mathbb{R}$, no posee ninguna asíntota vertical. A la izquierda (en $-\infty$), f coincide con una función hiperbólica, por lo que posee una asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{-x-1} = 0.$$

Por tanto, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal de f a la izquierda (en $-\infty$). A la derecha (en $+\infty$), la función f está definida de forma parabólica, por lo que no posee ninguna asíntota (ni horizontal ni oblicua):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x-3-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \text{“}(+\infty)\cdot 1\text{”} = +\infty.$$

Esta cuenta demuestra que f no posee ninguna asíntota (ni horizontal ni oblicua) a la derecha.

Por otro lado, sabemos que f es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Estudiamos el signo de la primera derivada para determinar la monotonía de f y, de paso, sus extremos relativos. Recordemos que:

$$x \neq 0, \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0, \\ 2x-3, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

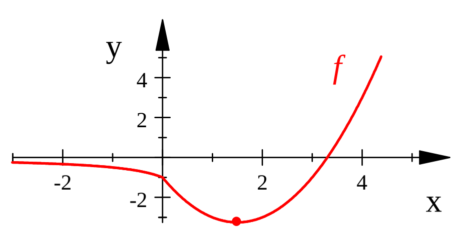
En el intervalo $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[$, f' es claramente negativa, pues $f'(x) = -1/(x-1)^2 < 0$, para cada $x \in]-\infty, 0[$. En el intervalo $]0, +\infty[$, f' sólo se anula si $2x - 3 = 0$, es decir, en $x = 3/2$. Con la siguiente tabla deducimos su monotonía:

f'	$-$		$-$	mín	$+$
f	$\searrow$	0	$\searrow$	3/2	$\nearrow$

Como f es continua en $\mathbb{R}$, deducimos que f es estrictamente decreciente en $]-\infty, 3/2[$ y estrictamente creciente en $]3/2, +\infty[$. Obsérvese que en $x = 0$, f no es derivable, pero es continua en dicho punto y es estrictamente decreciente antes y después de $x = 0$, por lo que realmente también es estrictamente decreciente en $x = 0$. De esta forma, f posee un único mínimo, que es absoluto, en $x = 3/2$, cuya imagen por f es $f(3/2) = (3/2)^2 - 3(3/2) - 1 = -13/4$.

La función f posee una única asíntota, que es horizontal. Se trata de la recta $y = 0$, que es asíntota horizontal de f a la izquierda (en $-\infty$). Ademas, posee un único extremo relativo, en el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{-13}{4}\right)$, el cual es un mínimo absoluto.

Apartado (c). Con estos datos y una sencilla tabla de valores, dibujamos la función f.



■

Ejercicio 2 Considera la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$.

(a) **(0'5 puntos)** Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = -1$.

(b) **(2 puntos)** Calcula el área del recinto limitado por la curva dada y la recta $y = 2$.

SOLUCIÓN : **Apartado (a).** Como y es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ (por ser polinómica), f posee recta tangente en todos sus puntos. La ecuación de la recta tangente a y en $x = -1$ es:

$$y - y(0) = y'(0)(x - (-1)) \quad \Leftrightarrow \quad y - y(0) = y'(0)(x + 1).$$

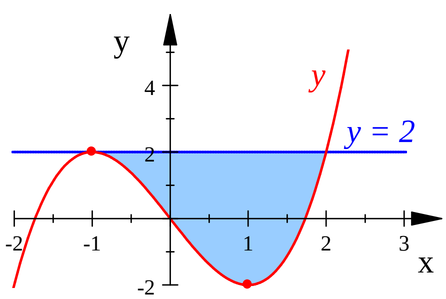
Como $y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$, $y'(x) = 3x^2 - 3$ e $y'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = -1$ es:

$$y - 2 = 0(x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = 2.}$$

Apartado (b). Representamos la curva $y = y(x)$ y la recta horizontal $y = 2$ para tener una idea del recinto delimitado por estas curvas. Como $y'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3(x - 1)(x + 1)$, su primera derivada sólo se anula en los puntos de abscisas $x = \pm 1$. La siguiente tabla nos da su monotonía:

y'	$+$	máx	$-$	mín	$+$
y	$\nearrow$	-1	$\searrow$	1	$\nearrow$

Como $y(-1) = 2$ e $y(1) = -2$, y observando que f es una función simétrica impar, podemos dibujarla sin dificultad.



Está claro que un punto de corte entre ambas funciones tiene abscisa $x = -1$. Buscamos el otro resolviendo la ecuación $y(x) = 2$, es decir, $x^3 - 3x = 2$, o lo que es lo mismo, $x^3 - 3x - 2 = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3 & -2 \\
-1 & & -1 & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & \boxed{0} & \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

El *método de Ruffini* nos dice que las únicas soluciones de la ecuación $x^3-3x-2 = 0$ son $x_1 = -1$ (doble) y $x_2 = 2$ (simple). Por consiguiente, el área buscada viene dada por la siguiente integral:

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} \left(2 - \left(x^3 - 3x\right)\right) dx = \int_{-1}^{2} \left(2 - x^3 + 3x\right) dx = \left(2x - \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right]_{x=-1}^{x=2} =$$
$$= (4 - 4 + 6) - \left(-2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = 6 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{4}.$$

De esta forma,

$$\boxed{\text{El recinto indicado posee un área de } \frac{27}{4} \text{ unidades cuadradas de superficie.}}$$

■

Ejercicio 3 (2'5 puntos) Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros, respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30 % de las cajas.

Solución : Entendemos que en el primer mercado compra cajas con un precio unitario de 30 €, en el segundo mercado, de 20 €, y en el tercero, de 40 €. Llamemos x, y y z al número de cajas de 30, 20 y de 40 €, respectivamente, que ha comprado la empresa envasadora. Como ha comprado un total de 1500 cajas, sabemos que $x+y+z = 1500$. Como el precio total ha sido de 40500 €, sabemos que $30x + 20y + 40z = 40500$. Finalmente, el enunciado dice que en el primer mercado se ha comprado el 30 % de las cajas, de donde $x = \frac{30}{100} \cdot 1500 = 450$. Así, tenemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1500, \\ 30x + 20y + 40z = 40500, \\ x = 450. \end{array}\right.$$

Realmente, una incógnita ya está despejada: $x = 450$, lo que significa que se ha comprado 450 cajas de 30 €. Las dos primeras ecuaciones quedan:

$$\begin{cases} y + z = 1050, \\ 20y + 40z = 27000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2z = -2100, \\ 2y + 4z = 2700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 600, \\ y + z = 1050. \end{cases}$$

De aquí, $z = 300$ e $y = 750$. Esto significa que se ha comprado, en total, 450 cajas de 30 € (en el primer mercado), 750 cajas de 20 € (en el segundo mercado) y 300 cajas de 40 € (en el tercer mercado). Por tanto, tenemos la siguiente solución.

> La empresa envasadora ha gastado 13500 € en el primer mercado, 15000 € en el segundo mercado y 12000 € en el tercer mercado.

■

Ejercicio 4 Considera la recta r definida por $\begin{cases} x + y = 2, \\ y + z = 0, \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A\,(2,1,0)$ y $B\,(1,0,-1)$.

(a) **(1 punto)** Estudia la posición relativa de ambas rectas.

(b) **(1'5 puntos)** Determina un punto C de la recta r tal que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ sean perpendiculares.

Solución: **Apartado (a).** Si llamamos $\lambda = z$, de la recta r sabemos que $y = -z = -\lambda$ y que $x = 2 - y = 2 - (-\lambda) = 2 + \lambda$. Así, un punto arbitrario P_r de la recta r es de la forma:

$$(x, y, z) = P_r\,(2 + \lambda, -\lambda, \lambda) = (2, 0, 0) + \lambda\,(1, -1, 1)\,.$$

De esta forma, un punto concreto de r es $A_r\,(2,0,0)$ y su vector director es $\overrightarrow{u_r}\,(1,-1,1)$. Igualmente, un vector director de la recta s es paralelo a $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{u_s} \parallel \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 0, -1) - (2, 1, 0) = (-1, -1, -1) \parallel (1, 1, 1)\,.$$

Podemos elegir el vector $\overrightarrow{u_s}\,(1,1,1)$ como vector director de la recta s. Como la recta s pasa por el punto $A_s = A\,(2,1,0)$, estudiamos el rango del conjunto de vectores $\{\ \overrightarrow{u_r},\ \overrightarrow{u_s},\ \overrightarrow{A_rA_s}\ \}$ para estudiar la posición relativa de las rectas r y s. Como:

$$\overrightarrow{A_rA_s} = A_s - A_r = (2, 1, 0) - (2, 0, 0) = (0, 1, 0)\,,$$

estudiamos el rango de la siguiente matriz:

$$\operatorname{rg}(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Como el conjunto de vectores $\{\ \overrightarrow{u_r},\ \overrightarrow{u_s},\ \overrightarrow{A_rA_s}\ \}$ posee rango dos, las rectas r y s están en el mismo plano, y como sus vectores directores no son paralelos, son rectas que se cortan en el espacio.

$$\boxed{\text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ se cortan en un único punto en el espacio.}}$$

Apartado (b). Sea $C = P_r\,(2+\lambda, -\lambda, \lambda)$ un punto arbitrario de la recta r. Lo buscamos con la condición de que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ sean perpendiculares, es decir, los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares. Para ello, su producto escalar debe ser cero. Como:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} &= A - C = (2,1,0) - (2+\lambda, -\lambda, \lambda) = (-\lambda, \lambda+1, -\lambda)\,, \\ \overrightarrow{CB} &= B - C = (1,0,-1) - (2+\lambda, -\lambda, \lambda) = (-\lambda-1, \lambda, -\lambda-1)\,, \end{aligned}$$

su producto escalar es:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= (-\lambda, \lambda+1, -\lambda) \cdot (-\lambda-1, \lambda, -\lambda-1) = \\ &= \lambda\,(\lambda+1) + \lambda\,(\lambda+1) + \lambda\,(\lambda+1) = 3\lambda\,(\lambda+1)\,. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\overline{CA} \perp \overline{CB} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\lambda\,(\lambda+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \{-1, 0\}\,.$$

Esto significa que hay dos posibilidades para λ, lo que nos lleva a dos posibles soluciones para C:

$$C|_{\lambda=-1} = (2+\lambda, -\lambda, \lambda)|_{\lambda=-1} = (1,1,-1)\,, \qquad C|_{\lambda=0} = (2+\lambda, -\lambda, \lambda)|_{\lambda=0} = (2,0,0)\,.$$

$$\boxed{\text{El punto } C \text{ puede ser el punto } (1,1,-1) \text{ o el punto } (2,0,0).}$$

■