Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas II Andalucía – Septiembre de 2008

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

17 de septiembre de 2008

Opción A

Ejercicio 1 Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x, & \text{si} \quad x \leq 2, \\ x^2 - bx - 4, & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

(a) *(**1'5 puntos**)* Halla a y b sabiendo que f es derivable en $\mathbb{R}$.

(b) *(**1 punto**)* Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

SOLUCIÓN : **Apartado (a).** Dado que f es derivable en $\mathbb{R}$, también es continua en $\mathbb{R}$, y su primera derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3, & \text{si} \quad x \leq 2, \\ 2x - b, & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

En particular, f es continua y derivable en el punto $x = 2$ donde se unen los dos trozos de la función, por lo que los dos límites laterales, tanto de f como de f', deben ser iguales en dicho punto. Esto nos lleva a establecer un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución está formada por los valores de a y b que hacen que f sea derivable en $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(ax^2 + 3x \right) = 4a + 6 \\ f(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(x^2 - bx - 4 \right) = 4 - 2b - 4 = -2b \end{array} \right\} \Rightarrow \quad 4a + 6 = -2b;$$

* Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2ax+3) = 4a+3 \\ f'(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x-b) = 4-b \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 4a+3 = 4-b.$$

La única solución del sistema $\left\{\begin{array}{l} 4a+2b=-6, \\ 4a+b=1. \end{array}\right.$ es :

$$\boxed{a=2 \quad y \quad b=-7.}$$

Así, la función f es:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 2x^2+3x, & \text{si} \quad x\le 2, \\ x^2+7x-4, & \text{si} \quad x>2. \end{array}\right.$$

Apartado (b). En el punto $x_0=3$ sabemos que $f(3)=9+21-4=26$ y $f'(3)=6+7=13$. Entonces la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x_0=3$ es:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y-26=13(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad y=13x-39+26 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y=13x-13.}$$

Igualmente, como $f'(3)=13\neq 0$, la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto $x_0=3$ es:

$$y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y-26=\frac{-1}{13}(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad 13y-338=-x+3 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x+13y=341.}$$

■

Ejercicio 2 Dada la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=2x+\left|x^2-1\right|$,

(a) *(**1 punto**)* Esboza la gráfica de g.

(b) *(**1'5 puntos**)* Calcula $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx$.

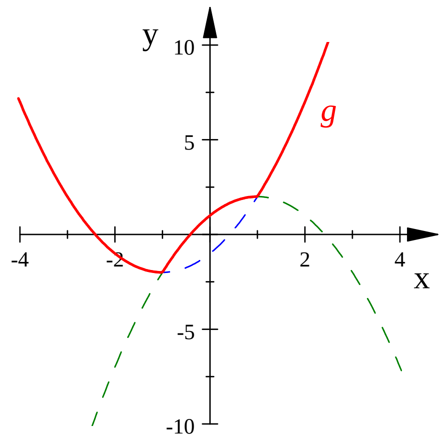
Solución : **Apartado (a).** Es claro que la función g es continua en $\mathbb{R}$ ya que es suma y composición de funciones continuas en $\mathbb{R}$ (como es el valor absoluto). Dado que las soluciones de la ecuación $x^2-1=0$ son $x=\pm 1$, podemos expresar g a trozos de la siguiente manera:

$$g(x)=\left\{\begin{array}{ll} 2x+\left(x^2-1\right), & \text{si} \quad x\le -1, \\ 2x-\left(x^2-1\right), & \text{si} \quad -1<x<1, \\ 2x+\left(x^2-1\right), & \text{si} \quad x\ge 1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} x^2+2x-1, & \text{si} \quad x\le -1, \\ -x^2+2x+1, & \text{si} \quad -1<x<1, \\ x^2+2x-1, & \text{si} \quad x\ge 1. \end{array}\right.$$

En cada trozo, g coincide con una parábola. Podemos entonces hacer una tabla de valores para cada parábola, representarlas conjuntamente y elegir los trozos adecuados que conformarán la gráfica de g.

x	x^2+2x-1
-4	7
-3	2
-2	-1
-1	-2
0	-1
1	2
2	7

x	$-x^2+2x+1$
-2	-7
-1	-2
0	1
1	2
2	1
3	-2
4	-7



Apartado (b). Por otro lado, como g viene dada a trozos, la integral solicitada se divide en dos intervalos y se calcula aplicando la *regla de Barrow* de la siguiente forma.

$$\int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx + \int_1^2 g(x)\,dx = \int_0^1 \left(-x^2+2x+1\right)dx + \int_1^2 \left(x^2+2x-1\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{x=0}^{x=1} + \left(\frac{x^3}{3}+x^2-x\right]_{x=1}^{x=2} =$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{3}+1+1\right)-0\right] + \left[\left(\frac{8}{3}+4-2\right)-\left(\frac{1}{3}+1-1\right)\right] =$$

$$= \frac{5}{3} + \left(\frac{14}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}+\frac{13}{3} = 6$$

De esta forma, la integral buscada vale 6. ■

Ejercicio 3 Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=a-1, \\ 2x+y+az=a, \\ x+ay+z=1. \end{cases}$$

(a) *(**1'5 puntos**)* Discútelo según los valores del parámetro a.

(b) *(**1 punto**)* Resuélvelo en el caso $a=2$.

Solución: **Apartado (a).** Calculamos el determinante de la matriz del sistema:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (1+a+2a) - \left(1+2+a^2\right) = -\left(a^2-3a+2\right) = -(a-1)(a-2)\,.$$

Por consiguiente, los únicos valores para los que se anula este determinante son $a = 1$ y $a = 2$. Si este determinante es distinto de cero, lo cual ocurre si $a \in \mathbb{R}\setminus\{1, 2\}$, entonces el sistema es de *Cràmer* y posee una única solución (S.C.D.). Estudiemos por separado estos dos casos particulares.

Si $a = 1$, entonces resolvemos el sistema aplicando el método de *Gauss-Jordan*.

$$\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ 2x + y + z &= 1, \\ x + y + z &= 1. \end{aligned}\right. \qquad \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|$$

La última ecuación es $0x + 0y + 0z = 1$, lo que demuestra que, en este caso, el sistema no tiene solución (S.I.).

Finalmente, supongamos que $a = 2$ y apliquemos el mismo método.

$$\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ 2x + y + 2z &= 2, \\ x + 2y + z &= 1. \end{aligned}\right. \qquad \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

Como el rango de la matriz del sistema es 2 y el rango de la matriz ampliada también es dos, pero hay tres incógnitas:

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = 2 < 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas},$$

el sistema posee (según el teorema de *Rouché-Frobënius*) infinitas soluciones. De hecho, es compatible indeterminado uniparamétrico. Por tanto, la clasificación completa del sistema es la siguiente:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccl} a \in \mathbb{R}\setminus\{1, 2\} & \Rightarrow & \text{sistema compatible determinado,} \\ a = 1 & \Rightarrow & \text{sistema incompatible,} \\ a = 2 & \Rightarrow & \text{sistema compatible indeterminado (uniparamétrico).} \end{array}\right.}$$

Apartado (b). Si $a = 2$, hemos llegado, aplicando el método de *Gauss-Jordan*, al sistema equivalente $\{x + y + z = 1,\ y = 0\}$. Por tanto, llamando $\lambda = z$, las infinitas soluciones de dicho sistema son las siguientes:

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} x &= 1 - \lambda, \\ y &= 0, \\ z &= \lambda, \end{aligned}\right. \qquad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

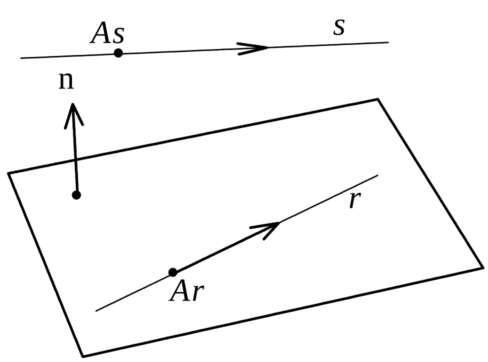
■

Ejercicio 4 Sea la recta s dada por $\left\{\begin{array}{l} x-z=-1, \\ 2y+z=3. \end{array}\right.$

(a) *(**1'25 puntos**)* Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a la recta s y que contiene a la recta r, dada por $x-1=-y+2=z-3$.

(b) *(**1'25 puntos**)* Estudia la posición relativa de la recta s y el plano π_2, de ecuación $x+y=3$, y deduce la distancia entre ambos.

SOLUCIÓN: **Apartado (a).** Tenemos un gráfico como el siguiente.



Buscamos un punto y un vector director para la recta s resolviendo el sistema de ecuaciones que la define, llamando $y=\lambda$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-z=-1, \\ 2y+z=3. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y=\lambda, \\ z=-2y+3=-2\lambda+3, \\ x=z-1=-2\lambda+3-1=-2\lambda+2 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad s \equiv \left\{\begin{array}{l} x=-2\lambda+2, \\ y=\lambda, \\ z=-2\lambda+3. \end{array}\right.$$

Así, un vector director de s es $\vec{u}_s=(2,-1,2)$. Por otro lado, buscamos un punto A_r y un vector director $\vec{u}_r$ para la recta r poniéndola en forma continua:

$$x-1=-y+2=z-3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A_r\,(1,2,3)\,, \\ \vec{u}_r\,(1,-1,1)\,. \end{array}\right.$$

Como sabemos que π_1 contiene a r y es paralelo a s, el plano π_1 viene descrito por ser el plano que pasa por $A_r\,(1,2,3)$ y cuya dirección viene dada por la de los vectores $\vec{u}_s=(2,-1,2)$ y $\vec{u}_r=(1,-1,1)$. Por consiguiente, un vector normal a π_1 es:

$$\vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, una ecuación implícita para π_1 posee la expresión $x - z = k$, y para que π_1 contenga a A_r, debe ser $k = 1 - 3 = -2$. Concluimos, pues, que el plano π_1 viene determinado por la ecuación implícita:

$$\boxed{\pi_1 \equiv \quad x - z = -2.}$$

Apartado (b). Estudiamos la posición relativa de s y $\pi_2 \equiv x + y = 3$ determinando su intersección, que se calcula resolviendo el sistema que se obtiene uniendo todas sus ecuaciones implícitas.

$$\left\{\begin{array}{l} x - z = -1, \\ 2y + z = 3, \\ x + y = 3. \end{array}\right. \qquad \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right\|$$

De aquí se deduce que el sistema es compatible determinado, y su única solución es

$$z = 5, \quad y = 4 - 5 = -1, \quad x = 5 - 1 = 4.$$

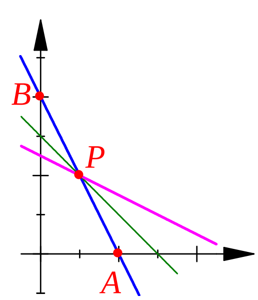
Por consiguiente, podemos afirmar que la recta s y el plano π_2 se cortan en un único punto (son secantes) y, consecuentemente, su distancia es cero. ■

Opción B

Ejercicio 1 *(**2'5 puntos**)* De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto $(1, 2)$, encuentra aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Halla el área de dicho triángulo.

Solución: Llamemos $P = (1, 2)$ y sean $A\,(x, 0)$ y $B\,(0, y)$ los puntos en los que la recta corta a las partes positivas de los ejes de coordenadas (lo que significa que $x, y > 0$). Obsérvese que para que la recta pase por P y corte a las partes positivas de los ejes de coordenadas, debe ser $x > 1$ e $y > 2$. Además, es claro que el área del triángulo que se forma con la parte positiva de los ejes coordenados vale:

$$\mathcal{A} = \frac{xy}{2}.$$



Este área depende de dos variables, y vamos a eliminar una de ellas estudiando la relación que existe entre las mismas. Dado que los puntos A, B y P están alineados, los vectores:

$$\overrightarrow{PA} = (x, 0) - (1, 2) = (x - 1, -2) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{PB} = (0, y) - (1, 2) = (-1, y - 2)$$

son proporcionales (linealmente dependientes). Así, su determinante vale cero:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -1 & y-2 \end{vmatrix} = (x-1)(y-2) - 2 = xy - 2x - y + 2 - 2 = xy - 2x - y.$$

De la ecuación $xy - y - 2x = 0$ despejamos y de manera que:

$$(x-1)\,y = 2x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2x}{x-1}.$$

Obsérvese que y está bien definido ya que $x > 1$. Sustituyendo esta expresión en la del área, encontramos:

$$\mathcal{A}(x) = \frac{xy}{2} = \frac{x}{2}\,\frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1},$$

donde la función $\mathcal{A}$ está definida en el intervalo $]1,+\infty[$. Buscamos entonces un mínimo absoluto de esta función en el intervalo $]1,+\infty[$. Es trivial que la función $\mathcal{A}$ es derivable en $]1,+\infty[$. Su primera derivada es:

$$\forall x \in \,]1,+\infty[\,, \qquad \mathcal{A}'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Esta derivada sólo se anula en $x = 0$ (que no está en el dominio) y en $x = 2$. Estudiamos su signo con la siguiente tabla:

f'		$-$		$+$
f	1	$\searrow$	2	$\nearrow$

Dado que f es continua en $]1,+\infty[$, estrictamente decreciente en $]1,2[$ y estrictamente creciente en $]2,+\infty[$, f posee un único mínimo absoluto, situado en $x = 2$. Para este valor de x, su valor de y correspondiente es:

$$y = \frac{2x}{x-1} = y = \frac{4}{2-1} = 4,$$

y la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,0)$ y $(0,4)$ es:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{2x + y = 4.}$$

Ésta es la recta que pasa por P y consigue área menor con las partes positivas de los ejes coordenados. El área que determina con los mismos es:

$$\mathcal{A} = \frac{xy}{2} = \frac{2\cdot 4}{2} = \boxed{\text{4 unidades cuadradas de superficie.}}$$

■

Ejercicio 2 Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = 2x + 2.$$

(a) *(**0'5 puntos**)* Esboza las gráficas de f y g.

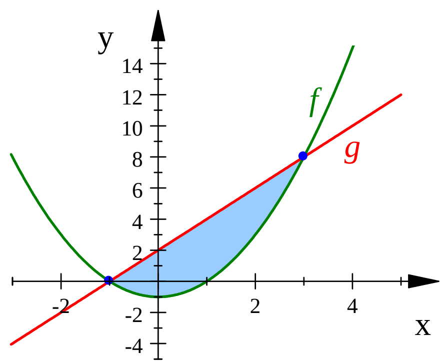
(b) *(**2 puntos**)* Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

SOLUCIÓN : **Apartado (a).** Estudiamos los puntos en los que se cortan las funciones:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Hacemos unas sencillas tablas de valores, que incluyan estos puntos de corte, y las representamos gráficamente.

x	$f(x)$	$g(x)$
-2	3	-2
-1	0	0
0	-1	2
1	0	4
2	3	6
3	8	8
4	15	10



Apartado (b). En el mismo gráfico ya hemos representado el área solicitada, que se calcula aplicando la *regla de Barrow* a la función $g - f$ (ya que $g \geq f$ en el intervalo $[-1, 3]$):

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{3} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-1}^{3} \left[(2x+2) - \left(x^2 - 1\right)\right] dx = \int_{-1}^{3} \left(-x^2 + 2x + 3\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{x=-1}^{x=3} = (-9 + 9 + 9) - \left(-\frac{-1}{3} + 1 - 3\right) = 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{32}{3} \text{ unidades cuadradas de superficie.}}$$

■

Ejercicio 3 Sabemos que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

tiene las mismas soluciones que el que resulta al añadirle la ecuación $ax + y + 7z = 7$.

(a) *(**1'25 puntos**)* Determina el valor de a.

(b) *(**1'25 puntos**)* Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

SOLUCIÓN : **Apartado (a).** Añadir una ecuación al sistema (al que llamamos (S)) y obtener el mismo conjunto de soluciones significa que la última ecuación depende linealmente de las dos del sistema (S) o, lo que es lo mismo, que los rangos de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ a & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

son iguales. La primera matriz tiene rango dos (su primer menor principal es distinto de cero), por lo que la segunda también debe poseer rango dos. En particular, todos sus menores de orden tres deben anularse. Elegimos uno de ellos que involucre al parámetro a y establecemos que valga cero:

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 7 \end{vmatrix} = (28 + a + 3) - (6a - 7 - 2) = 40 - 5a.$$

Por tanto, el único valor posible para a es

$$\boxed{a = 8.}$$

Apartado (b). Si le añadimos al sistema (S) la ecuación $x + y + z = 1$, podemos resolverlo por el método de *Gauss-Jordan*:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x + 2y - z = 2, \\ x + y + z = 1. \end{cases} \quad \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{matrix} \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{matrix} \right\|$$

Por tanto, el sistema es compatible determinado y su única solución es:

$$z = \frac{-2}{5}, \qquad y = 2z + 1 = \frac{-4}{5} + 1 = \frac{1}{5}, \qquad x = 1 - y - z = 1 - \frac{1}{5} - \frac{-2}{5} = \frac{6}{5}.$$

$$\boxed{x = \frac{6}{5}, \qquad y = \frac{1}{5}, \qquad z = \frac{-2}{5}.}$$

■

Ejercicio 4 Dados los puntos $A\,(1, 1, 0)$, $B\,(1, 1, 2)$ y $C\,(1, -1, 1)$.

(a) *(**1'5 puntos**)* Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan.

(b) *(**1 punto**)* Halla la ecuación del plano que contiene al punto A y es perpendicular a la recta determinada por B y C.

Solución : **Apartado (a).** Los vectores

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,2) - (1,1,0) = (0,0,2) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{AC} = (1,-1,1) - (1,1,0) = (0,-2,1)$$

no son proporcionales (linealmente dependientes) ya que podemos formar con sus coordenadas un menor distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Por tanto, los puntos A, B y C no están alineados. Además, el área del triángulo que determinan viene dada por la fórmula:

$$A = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 4 =$$

$$= \boxed{\text{2 unidades cuadradas de superficie.}}$$

Apartado (b). La recta determinada por B y C posee como vector director al vector:

$$\overrightarrow{BC} = (1,-1,1) - (1,1,2) = (0,-2,-1) \ \parallel \ (0,2,1)\,.$$

Este vector director sirve como vector normal al plano que buscamos, luego una posible ecuación implícita para éste es $2y + z = k$. Finalmente, como el punto $A\,(1,1,0)$ pertenece a este plano, deducimos que $k = 2 \cdot 1 + 0 = 2$ de donde concluimos que una ecuación implícita del plano buscado es:

$$\boxed{2y + z = 2.}$$

■