Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas II Andalucía – Junio de 2008

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

18 de junio de 2008

Opción A

Ejercicio 1 ***(*2'5 puntos*)*** Sea f la función definida, para $x \neq 0$, por $f(x) = x\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. Determina las asíntotas de la gráfica de f.

Solución : Es claro que el dominio de f es $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y en su dominio, la función f es continua. Por tanto, sólo podría tener una asíntota vertical, que sería la recta $x = 0$. Vamos a calcular los límites laterales de f en $x = 0$. Para ello, y dado que conocemos la función de proporcionalidad inversa $x \mapsto 1/x$, sabemos que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Componiendo con la función exponencial, resulta que:

$$\lim_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \text{“}\,\mathrm{e}^{-\infty}\,\text{”} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \text{“}\,\mathrm{e}^{+\infty}\,\text{”} = +\infty.$$

De esta forma, los límites laterales de f en $x = 0$ se calculan como sigue. El límite por la izquierda no presenta indeterminación, pues los dos factores tienden a cero:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^-} x \cdot \lim_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Sin embargo, el límite por la derecha presenta una indeterminación de tipo $0 \cdot \infty$ que vamos a resolver aplicando la *regla de l'Hôpital*.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = /\ \text{Indet. } 0 \cdot \infty\ / = \lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \Big/\ \text{Indet. } \frac{\infty}{\infty}\ \Big/.$$

* Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

Como este límite presenta una indeterminación de tipo ∞/∞, calculamos el siguiente límite:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left[\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\ \right]'}{\left[\ \frac{1}{x}\ \right]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Como este límite vale $+\infty$, la *regla de L'Hôpital* nos garantiza que también existe el límite anterior y son iguales, por lo que hemos deducido que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\mathcal{L}'\mathcal{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left[\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\ \right]'}{\left[\ \frac{1}{x}\ \right]'} = +\infty.$$

Esto nos indica que la recta $x = 0$ es asíntota vertical de la función f.

Pasemos ahora a estudiar las asíntotas oblicuas. Para ello, antes de empezar, observemos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \text{y de aquí se deduce que} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Si la recta $y = mx + n$ fuese una asíntota oblicua de f (a algún lado), el coeficiente m vendría dado por la siguiente expresión (estudiamos, a la vez, lo que ocurre a la izquierda y a la derecha, porque los cálculos son idénticos):

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1.$$

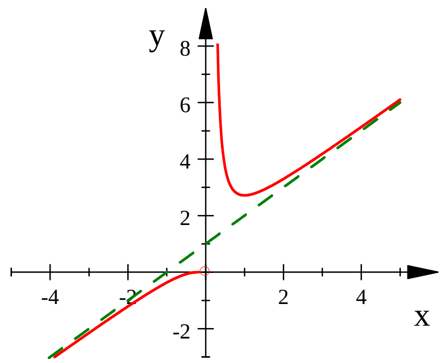
Que exista el coeficiente m no significa que ya exista la asíntota oblicua. Para determinar su posible existencia, hemos de calcular el siguiente valor (utilizando nuevamente la *regla de L'Hôpital*):

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right] = \Big/ \text{ Indet. } \infty\cdot 0 \Big/ =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \Big/ \text{ Indet. } \frac{0}{0} \Big/ \overset{\mathcal{L}'\mathcal{H}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right]'}{\left[\ \frac{1}{x}\ \right]'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Al existir los coeficientes m y n, podemos afirmar que la recta de ecuación $y = x + 1$ es asíntota oblicua de f a ambos lados. Esto acaba el estudio de las asíntotas, pues al poseer asíntota oblicua a ambos lados, ya no puede tener ninguna asíntota horizontal. ■

Aunque no se pide, la gráfica de la función f anterior posee la siguiente forma.



Ejercicio 2 *(***2'5 puntos***)* Calcula $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2-x)(x-1)}$.

Solución : Llamemos I a la integral definida indicada en el ejercicio. Vamos a calcularla utilizando la *regla de Barrow*, por lo que necesitaremos una integral indefinida de la función racional que hay en el integrando. Obsérvese que podemos aplicar dicha regla ya que la función integrando es continua en el intervalo $[-2,-1]$, pues su denominador sólo se anula en $x=0$ y en $x=1$. Como ésta sólo posee raíces reales, la descomponemos en fracciones simples de la siguiente manera:

$$\frac{1}{(x^2-x)(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}.$$

Igualando los numeradores, tenemos que encontrar tres números A, B y C que cumplan:

$$A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx = 1, \qquad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Evaluamos la expresión anterior en $x=0$ y $x=1$, encontrando dos coeficientes:

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad A=1,$$
$$x=1 \quad \Rightarrow \quad C=1.$$

Elegimos ahora el valor $x=2$ sabiendo que $A=C=1$:

$$x=2 \quad \Rightarrow \quad A+2B+2C=1 \quad \Leftrightarrow \quad 1+2B+2=1 \quad \Leftrightarrow \quad B=-1.$$

Por tanto, hemos llegado a la descomposición:

$$\frac{1}{(x^2-x)(x-1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Integrando esta suma de fracciones simples, tenemos una integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{(x^2-x)(x-1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx =$$
$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int (x-1)^{-2}\, dx = \ln|\,x\,| - \ln|\,x-1\,| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C =$$
$$= \ln|\,x\,| - \ln|\,x-1\,| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Aplicando finalmente la *regla de Barrow*, tenemos:

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2-x)(x-1)} = \left(\ln|\,x\,| - \ln|\,x-1\,| - \frac{1}{x-1} \right]_{x=-2}^{x=-1} =$$
$$= \left(\ln 1 - \ln 2 - \frac{1}{-2} \right) - \left(\ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{-3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ln 3 - 2\ln 2 = \frac{1}{6} + \ln 3 - 2\ln 2.$$

Aproximadamente, este valor es de $-0'121$. ■

Ejercicio 3 Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.

a) *(**1'25 puntos**)* ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?

b) *(**1'25 puntos**)* Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuántos billetes hay de cada tipo.

Solución : Llamemos x, y y z al número de billetes de 10, de 20 y de 50 euros que contiene el cajero, respectivamente. Como hay 130 billetes, sabemos que $x+y+z=130$, y como entre todos suman 3000 euros, encontramos la ecuación $10x+20y+50z=3000$, que se simplifica a la relación $x+2y+5z=300$. Restando ambas ecuaciones, llegamos al sistema indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+z=130, \\ \\ x+2y+5z=300 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=130, \\ \\ y+4z=170. \end{array} \right.$$

Si el número de billetes de 10 euros fuese triple que el de 50, sabríamos que $x=3z$. Sustituyendo en la primera ecuación, llegaríamos a que $3z+y+z=130$, o lo que es lo mismo, $y+4z=130$. Sin embargo esto es imposible pues la segunda ecuación nos dice que $y+4z=170$. Por tanto, deducimos que el cajero no puede contener triple número de billetes de 10 que de 50 euros.

Supongamos ahora que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, es decir, $x=2z$. Unimos esta ecuación a las dos anteriores y el sistema es muy sencillo de resolver haciendo una simple sustitución.

$$\begin{cases} x+y+z=130, \\ y+4z=170, \\ x=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z+y+z=130, \\ y+4z=170, \\ x=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+3z=130, \\ y+4z=170, \\ x=2z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=40, \\ y+4z=170, \\ x=2z. \end{cases}$$

De la primera ecuación, $z=40$; de la tercera, $x=80$; y de la segunda, $y=10$. Por consiguiente, concluimos que, en este caso, el cajero contiene 80 billetes de 10 euros, 10 billetes de 20 euros y 40 billetes de 50 euros. ■

Ejercicio 4 Dada la recta r definida por $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$.

a) *(**1'25 puntos**)* Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.

b) *(**1'25 puntos**)* Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r.

Solución: La recta r está dada en forma continua, y de su expresión podemos deducir, de forma inmediata, que la recta pasa por el punto $A_r\,(1,-1,2)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u}_r\,(2,3,1)$. Llamemos π al plano que pasa por el origen $O\,(0,0,0)$ y contiene a r. Este plano está completamente determinado sabiendo que pasa por el punto $A_r\,(1,-1,2)$ (porque π contiene a r) y lleva la dirección de los vectores $\vec{u}_r\,(2,3,1)$ (nuevamente porque π contiene a r) y $\vec{v}=\overrightarrow{OA_r}=(1,-1,2)$ (pues π contiene a los puntos O y A_r). Entonces el vector normal al plano π es:

$$\vec{n}_\pi=\vec{u}_r\times\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-3\\-5\end{pmatrix}.$$

Esto nos lleva a que una ecuación implícita para π es $7x-3y-5z+D=0$. El número D se puede calcular sabiendo que el plano π contiene al origen de coordenadas, y resulta que $D=0$. Por tanto, una ecuación implícita del plano que pasa por el origen y contiene a r es $\pi\equiv 7x-3y-5z=0$.

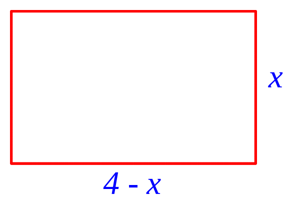
Llamemos ahora π' al plano que pasa por el origen y es perpendicular a r. Este plano viene determinado por el hecho de que pasa por el origen de coordenadas O y su vector normal es el vector director de la recta r (porque r es perpendicular a π'). Como $\vec{n}_{\pi'}=\vec{u}_r=(2,3,1)$, una posible ecuación implícita para π' es $2x+3y+z+D'=0$, y nuevamente, razonando que π'

contiene al origen de coordenadas, deducimos que $D' = 0$. Por consiguiente, concluimos que una ecuación implícita del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r es $2x + 3y + z = 0$. ■

Opción B

Ejercicio 1 ***(2'5 puntos)*** De entre todos los rectángulos de perímetro 8 *cm*, Determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

Solución : Llamemos x e y a las medidas (en cm) del ancho y del largo de un rectángulo de 8 cm de perímetro. Entonces $2x + 2y = 8$, de donde podemos despejar $y = 4 - x$. Por ello, si un lado mide x, el otro mide $4 - x$.



Como un lado no puede tomar un valor negativo, sabemos que $x \geq 0$ y que $4 - x \geq 0$, de donde $0 \leq x \leq 4$. La función que indica la longitud de la diagonal del rectángulo es, aplicando el *teorema de Pitágoras*,

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (4-x)^2} = \sqrt{x^2 + 16 - 8x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16}, \qquad \text{para cada } x \in [0, 4].$$

Esta función está bien definida en $[0, 4]$ ya que el radicando es no negativo, pues $2x^2 - 8x + 16 = x^2 + (4-x)^2 \geq 0$ (de hecho, no puede valer cero). Su primera derivada es:

$$f'(x) = \frac{4x - 8}{2\sqrt{2x^2 - 8x + 16}} = \frac{2x - 4}{\sqrt{2x^2 - 8x + 16}}, \qquad \text{para cada } x \in [0, 4],$$

que sólo se anula en $x = 2$. Así, el único punto crítico de f es $x = 2$, y completamos una tabla como la siguiente para estudiar su monotonía.

f'		$-$	mín	$+$	
f	0	$\searrow$	2	$\nearrow$	4

Como f es estrictamente decreciente en $]0, 2[$ y estrictamente creciente en $]2, 4[$, y continua en $[0, 4]$, deducimos que alcanza un único mínimo absoluto, que se sitúa en $x = 2$. Y si un lado mide 2 cm, el otro lado mide $y = 4 - x = 4 - 2 = 2$ cm. Resulta entonces que de entre todos los rectángulos de perímetro 8 cm, el que posee una diagonal de menor longitud es el cuadrado de 2 cm de lado. ■

Nota 1 *Podríamos haber resuelto el ejercicio anterior sin utilizar la derivación de funciones. Basta con darse cuenta de que una función f no negativa en un intervalo alcanza un mínimo en un punto si, y sólo si, su función al cuadrado, $F = f^2$, alcanza también un mínimo en ese mismo punto. Por tanto, podríamos haber trabajado con la función:*

$$F(x) = f(x)^2 = 2x^2 - 8x + 16, \qquad \textit{definida para } x \in [0, 4].$$

Como se trata de una función parabólica convexa, alcanza un único mínimo absoluto, que se sitúa en su vértice, cuya abscisa es:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{4} = 2,$$

y hubiésemos llegado al mismo resultado.

Ejercicio 2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.

a) *(**1 punto**)* Justifica que la recta de ecuación $y = -2\,\mathrm{e}\,x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -\dfrac{1}{2}$.

b) *(**1'5 puntos**)* Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.

Solución : La función f es claramente derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo que podemos garantizar que existe su recta tangente en cualquier punto. En particular, en $x = -1/2$, la ecuación de la recta tangente a f es:

$$y - f\left(\frac{-1}{2}\right) = f'\left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{-1}{2}\right).$$

Calculamos los datos que nos faltan:

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \mathrm{e}^{-2\cdot\frac{-1}{2}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e},$$

$$f'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R},$$

$$f'\left(\frac{-1}{2}\right) = -2\,\mathrm{e}^{-2\cdot\frac{-1}{2}} = -2\,\mathrm{e}^1 = -2\,\mathrm{e}\,.$$

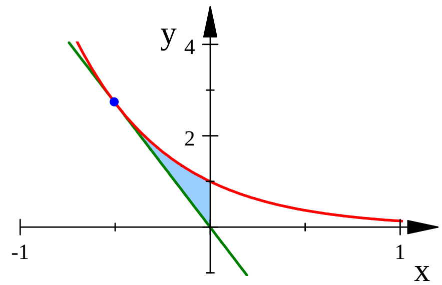
Con estos datos, la ecuación de la recta tangente a f en el punto de abscisa $x = -1/2$ es:

$$y - \mathrm{e} = -2\,\mathrm{e}\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = \mathrm{e} - 2\,\mathrm{e}\,x - \mathrm{e} \quad \Leftrightarrow \quad y = -2\,\mathrm{e}\,x.$$

Para calcular el área que se solicita en el segundo apartado, dibujamos primeramente la función f, que expresamos de la siguiente forma:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x} = \left(\mathrm{e}^{-2}\right)^x = \left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)^x, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Resulta entonces que la función f es la función exponencial en base $1/\mathrm{e}^2$, que es un número comprendido entre 0 y 1. Esto nos permite dibujarla fácilmente, prestando especial atención al hecho de que $f(-1/2) = \mathrm{e}$ y $f(0) = 1$. Por otro lado, la recta tangente $y = -2\,\mathrm{e}\,x$ pasa por el origen de coordenadas y por el punto de tangencia $(-1/2, \mathrm{e})$. Podemos, así, dibujar tanto f como su recta tangente, y determinar el recinto del cual nos piden su área.



El área del recinto dibujado se calcula utilizando la *regla de Barrow* de la siguiente forma:

$$A = \int_{-1/2}^{0} \left[\ \mathrm{e}^{-2x} - (-2\,\mathrm{e}\,x)\ \right] dx = \int_{-1/2}^{0} \left(\ \mathrm{e}^{-2x} + 2\,\mathrm{e}\,x\ \right) dx = \left(\ \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2} + \mathrm{e}\,x^2\ \right]_{x=-1/2}^{x=0} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 0\right) - \left(\frac{\mathrm{e}}{-2} + \frac{\mathrm{e}}{4}\right) = \frac{-2 + 2\,\mathrm{e} - \mathrm{e}}{4} = \frac{\mathrm{e} - 2}{4}.$$

Aproximadamente, éste área es de $0'17957$ unidades cuadradas de superficie. ■

Ejercicio 3 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$.

a) *(**1 punto**)* Halla los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3.

b) *(**1'5 puntos**)* Estudia si el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de m obtenidos en el apartado anterior.

Solución : El determinante de la matriz A se calcula fácilmente aplicando la *regla de Sarrus*:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} = \left(m^4 + m^3 + m^2\right) - \left(m^3 + m^3 + m^3\right) =$$

$$= m^4 - 2m^3 + m^2 = m^2\left(m^2 - 2m + 1\right) = m^2\,(m-1)^2\,.$$

Por consiguiente, el determinante de m se anula si, y sólo si, $m \in \{0, 1\}$. Si el determinante de A no se anula, su rango es máximo, es decir, 3. Y para que el rango no sea 3, su determinante debe valer cero. Concluimos entonces que los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3 son $m = 0$ y $m = 1$.

Si $m = 0$, el sistema dado es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1, \\ \\ 0x + 0y + 0z = 1. \end{array} \right.$$

No obstante, la ecuación $0x + 0y + 0z = 1$ no tiene ninguna solución, y el sistema es, en este caso, incompatible.

Supongamos ahora que $m = 1$. Entonces las tres ecuaciones del sistema son la misma.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x + y + z = 1.$$

Se trata, pues, de un sistema compatible indeterminado biparamétrico, es decir, que posee un plano afín de soluciones (en particular, hay infinitas de ellas). Esto concluye el ejercicio. ■

Ejercicio 4 ***(2'5 puntos)*** Dados los puntos $A(2,1,1)$ y $B(0,0,1)$, halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

Solución : Es conocido por la teoría algebraica elemental que el área de un triángulo en el espacio se puede calcular como la mitad del área de un paralelogramo adecuado, y ésta última es igual al módulo de un cierto vector que se construye como producto vectorial de otros dos en $\mathbb{R}^3$. En concreto, si A, B y C son tres puntos del espacio y fijamos B como origen, dos de los lados del triángulo ABC son los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, y el área de dicho triángulo es:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \right|.$$

Como el punto C está sobre el eje OX, debe ser de la forma $C(a,0,0)$, donde $a \in \mathbb{R}$. Entonces $\overrightarrow{BA} = (2,1,0)$ y $\overrightarrow{BC} = (a,0,-1)$, por lo que:

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -a \end{pmatrix}.$$

Su módulo es:

$$\left| \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \right| = \sqrt{1 + 4 + a^2} = \sqrt{5 + a^2}.$$

Como el problema nos indica que el área de triángulo de vértices A, B y C es 2, resolvemos la ecuación:

$$\frac{1}{2}\sqrt{5 + a^2} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \right| = \mathcal{A}(ABC) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{5 + a^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad 5 + a^2 = 16 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2 = 11 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\sqrt{11}.$$

Por consiguiente, los dos puntos que consiguen que el área indicada sea 2 son $\left(\sqrt{11},0,0\right)$ y $\left(-\sqrt{11},0,0\right)$. ■