Resolución del examen de Selectividad de
Matemáticas II
Andalucía – Septiembre de 2007

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

19 de septiembre de 2007

Opción A

Ejercicio 1 Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$.

(a) *(**1'5 puntos**)* Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) *(**1 punto**)* Calcula el punto de inflexión de la gráfica de f.

Solución : Calculamos la primera derivada de la función f y la simplificamos:

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - (3x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{3\sqrt{x} - \dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{6x - (3x+1)}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2x\sqrt{x}}.$$

El único punto en el que se anula f' es en $x = 1/3$, y hacemos una tabla como la siguiente para estudiar la monotonía de f.

f'		$\ominus$	mín	$\oplus$
f	0	$\searrow$	$1/3$	$\nearrow$

Por consiguiente, f es creciente en $]1/3, +\infty[$ y decreciente en $]0, 1/3[$, y su único extremo es un mínimo (absoluto) en el punto $\left(1/3, 2\sqrt{3}\right)$.

*Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

Para determinar su punto de inflexión, calculamos su derivada segunda, pero antes expresamos la primera derivada de otra forma para que resulte más sencillo derivar:

$$f'(x) = \frac{3x-1}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2x\cdot x^{1/2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3x-1}{x^{3/2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3x^{3/2}-(3x-1)\ \dfrac{3}{2}\ x^{1/2}}{\left(x^{3/2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3x\sqrt{x}-\dfrac{3(3x-1)}{2}\ \sqrt{x}}{x^3} =$$

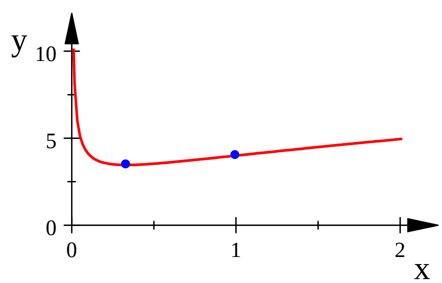
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(6x-\ 3(3x-1))\ \sqrt{x}}{2x^3} = \frac{3-3x}{4x^2\sqrt{x}} = \frac{3(1-x)}{4x^2\sqrt{x}}.$$

Por consiguiente, el único punto que anula a la segunda derivada es $x=1$. Comprobamos que se trata de un punto de inflexión con la siguiente tabla:

f''		$\oplus$	PI	$\ominus$
f	0	$\cup$	1	$\cap$

Como en $x=1$ hay un cambio en la curvatura de f, esta función posee un punto de inflexión en $x=1$, y como $f(1)=4$, concluimos que el punto de inflexión de f es $(1,4)$. ■

Aunque no se solicita, con la información que tenemos podríamos dibujar la función f.



Ejercicio 2 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x\,|x-2|$.

(a) *(**1 punto**)* Estudia la derivabilidad de f en $x=2$.

(b) *(**0'5 puntos**)* Esboza la gráfica de f.

(c) *(**1 punto**)* Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

SOLUCIÓN: Dado que el valor absoluto es una función continua en $\mathbb{R}$, la función f puede ser expresada como composición de funciones continuas, por lo que ya podemos afirmar que es una función continua en $\mathbb{R}$. No obstante, lo que tenemos que hacer es estudiar su derivabilidad. Dado que la expresión que hay dentro del valor absoluto sólo se anula en $x = 2$, podemos expresar la función f a trozos de la siguiente manera:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x(-x+2), & \text{si } x < 2, \\ x(x-2), & \text{si } x \geq 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} -x^2+2x, & \text{si } x < 2, \\ x^2-2x, & \text{si } x \geq 2. \end{array} \right.$$

Entonces su función primera derivada es, al menos,

$$x \neq 2, \qquad f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -2x+2, & \text{si } x < 2, \\ 2x-2, & \text{si } x > 2. \end{array} \right.$$

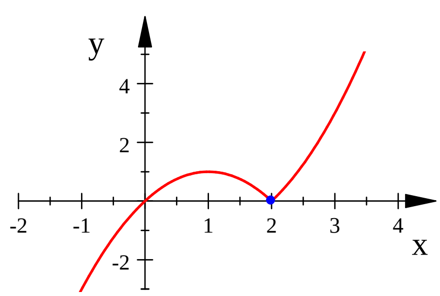
Estudiamos la derivabilidad de f en $x = 2$ mediante los límites laterales de la derivada:

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-2x+2) = -2 \\ f'(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x-2) = 2 \end{array} \right\} \quad f'\left(2^-\right) \neq f'\left(2^+\right).$$

Como las derivadas laterales son distintas, la función f no es derivable en $x = 2$, y ya podemos concluir que f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Haciendo una sencilla tabla de valores y teniendo en cuenta que f está expresada a trozos como funciones parabólicas, la podemos dibujar sencillamente.

x	$f(x)$
-1	-3
0	0
1	1
2	0
3	3
4	8



Finalmente, el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas es:

$$A = \left| \int_0^2 f(x)\, dx \right| = \left| \int_0^2 \left(-x^2+2x\right)\, dx \right| = \left| \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{x=0}^{x=2} \right| =$$

$$= \left| \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2 \right) - 0 \right| = \left| \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3} \text{ u.c.s.}$$

Obsérvese que hemos puesto el valor absoluto por si el resultado de la integral hubiese sido negativo, y preferimos curarnos en salud. ■

Ejercicio 3 Sean I la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) *(**1'25 puntos**)* Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A-I)^2 = 0$, donde 0 es la matriz nula de orden 2.

(b) *(**1'25 puntos**)* Para $m = 2$, halla la matriz X tal que $AX - 2A^T = 0$, donde A^T denota la matriz traspuesta de A.

Solución: La condición $(A-I)^2 = 0$ nos lleva rápidamente al valor de m, ya que:

$$(A-I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

y para que esta matriz sea la matriz nula inevitablemente ha de ocurrir que $m = 0$.

Por otro lado, si $m = 2$, la matriz A tiene inversa, pues su determinante es no nulo, y ésta es sencilla de calcular:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A^T = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, podemos despejar X rápidamente, pues:

$$AX - 2A^T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AX = 2A^T \quad \Leftrightarrow \quad X = 2A^{-1}A^T,$$

y ahora la cuenta es muy sencilla:

$$X = 2A^{-1}A^T = 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Ejercicio 4 (a) *(**1'25 puntos**)* Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$ en tres partes iguales.

(b) *(**1'25 puntos**)* Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio.

Solución: Aunque se puede razonar vectorialmente, lo sencillo es observar que los puntos C y D que dividen al segmento AB en tres partes iguales se pueden calcular con las siguientes expresiones:

$$C = \frac{2A+B}{3} = \frac{(2,4,2)+(-1,0,3)}{3} = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right),$$

$$D = \frac{A+3B}{3} = \frac{(1,2,1)+(-2,0,6)}{3} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

Llamemos M al punto medio entre A y B y llamemos π al plano perpendicular al segmento AB que pasa por M. Es sencillo determinar el punto M:

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,2,1)+(-1,0,3)}{2} = (0,1,2)\,.$$

El vector normal $\overrightarrow{n_\pi}$ al plano π ha de ser paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$, por lo que:

$$\overrightarrow{n_\pi} \parallel \overrightarrow{AB} = (-1,0,3)-(1,2,1) = (-2,-2,2) \;\parallel\; (1,1,-1)\,.$$

Si tomamos como vector normal $\overrightarrow{n_\pi} = (1,1,-1)$, el plano π debe poseer la ecuación general $x+y-z+k=0$, y para que $M\,(0,1,2) \in \pi$, debe ser $k=1$, de donde concluimos que $\pi \equiv x+y-z+1=0$. ■

Opción B

Ejercicio 1 *(***2'5 puntos***)* Determina una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que su derivada viene dada por $f'(x) = x^2+x-6$ y que el valor que alcanza f en su punto de máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto de mínimo (relativo).

Solución : Integrando la primera derivada, sabemos que f debe tener la expresión:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es la constante que debemos determinar con la condición que nos indica el problema. Para determinarla, buscamos primeramente los extremos relativos de f :

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x-6=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1=-3,\; x_2=2.$$

Como $f''(x) = 2x+1$, sabemos que $f''(-3) = -5 < 0$ y $f''(2) = 5 > 0$, lo que significa que f posee un máximo relativo en $x=-3$ y un mínimo relativo en $x=2$. Entonces la condición del enunciado se traduce en que $f(-3) = 3f(2)$, y ya sólo debemos sustituir:

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} - 6(-3) + C = \frac{27}{2} + C,$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 6\cdot 2 + C = -\frac{22}{3} + C,$$

$$(-3) = 3f(2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{27}{2} + C = 3\left(-\frac{22}{3}+C\right) \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{71}{4}.$$

Por tanto, la función f viene dada por la expresión:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{71}{4}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

Ejercicio 2 Sea $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \text{Ln}\,(x+1)$ (Ln denota la función logaritmo neperiano).

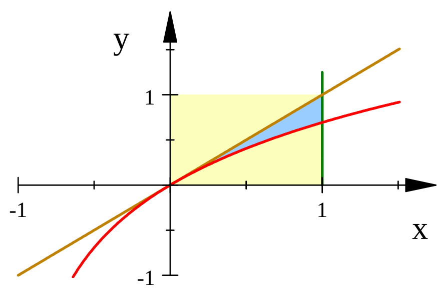
(a) *(**1 punto**)* Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

(b) *(**1'5 puntos**)* Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta $x = 1$.

SOLUCIÓN: Para calcular la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ sólo necesitamos $f(0) = \text{Ln}\,1 = 0$ y $f'(0) = 1$ ya que $f'(x) = \frac{1}{x+1}$. Entonces dicha ecuación es:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \quad \Leftrightarrow \quad y - 0 = 1x \quad \Leftrightarrow \quad y = x.$$

Para calcular el área solicitada, dibujamos f y la recta tangente anterior, teniendo en cuenta que $f(x) = \text{Ln}\,(x+1)$ es la traslación a la izquierda en una unidad de la función logaritmo neperiano.



Entonces el área buscada es:

$$A = \left| \int_0^1 \left[\; x - \text{Ln}\,(x+1) \; \right] dx \right| = \left| \; \int_0^1 x \; dx - \int_0^1 \text{Ln}\,(x+1)\, dx \; \right| =$$

$$= \left| \; \frac{1}{2} - \int_0^1 \text{Ln}\,(x+1)\, dx \; \right| .$$

La primera integral vale $1/2$ porque es el área de un triángulo rectángulo de base 1 y altura 1. Para determinar la segunda, integramos por partes:

$$\int \text{Ln}\,(x+1)\, dx = \left\| \begin{array}{ll} u = \text{Ln}\,(x+1) & du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = x \; dx & v = x \end{array} \right\| = x\,\text{Ln}\,(x+1) - \int \frac{x}{x+1}\; dx =$$

$$= x\,\text{Ln}\,(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}\; dx = x\,\text{Ln}\,(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= x\,\text{Ln}\,(x+1) - x + \int \frac{dx}{x+1} = x\,\text{Ln}\,(x+1) - x + \text{Ln}\,(x+1) + C =$$

$$= (x+1)\,\text{Ln}\,(x+1) - x + C.$$

Entonces:

$$\int_0^1 \operatorname{Ln}(x+1)\,dx = \Big((x+1)\operatorname{Ln}(x+1) - x \Big]_{x=0}^{x=1} = (2\operatorname{Ln}2 - 1) - 0 = 2\operatorname{Ln}2 - 1.$$

Por consiguiente, el área buscada es:

$$A = \left|\frac{1}{2} - \int_0^1 \operatorname{Ln}(x+1)\,dx\right| = \left|\frac{1}{2} - \Big(2\operatorname{Ln}2 - 1\Big)\right| = \left|\frac{3}{2} - 2\operatorname{Ln}2\right| = \frac{3}{2} - 2\operatorname{Ln}2,$$

cuyo valor aproximado es de $0'11371$. ■

Ejercicio 3 Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{array}\right\}.$$

(a) *(**1'5 puntos**)* Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

(a) *(**1 punto**)* Resuelve el sistema que se obtiene para $a = -2$.

Solución : Calculemos el determinante de la matriz del sistema:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & -a-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & -(a+1) \end{vmatrix} = -(a+1)(a-1).$$

Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, el rango de la matriz del sistema es 3, al igual que el de la matriz ampliada, y el sistema es compatible determinado. Como buscamos que el sistema sea compatible indeterminado, debemos estudiar los casos $a = 1$ y $a = -1$. Si $a = 1$, el sistema es:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 4, \\ x - y + z = 1, \\ x + y + z = 3, \end{array}\right.$$

y la primera y la tercera ecuaciones son incompatibles. Por tanto, pasamos al caso $a = -1$, que resolvemos con el *método de Gauss-Jordan*:

$$\left\|\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\Bigg\| \qquad \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1, \\ -2x = 3. \end{array}\right.$$

Aunque no hemos triangulado la matriz, la ecuación segunda ha quedado muy sencilla, y nos dice que $x = -3/2$. Entonces, de la primera, $y + z = 1 + 3/2 = 5/2$, y si llamamos $z = m$, tenemos las soluciones expresadas de la forma:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-3}{2}, \\ y = \dfrac{5}{2} - m, \\ z = m, \end{cases}$$

donde $m \in \mathbb{R}$ es cualquier número real.

Si ahora suponemos que $a = -2$, sabemos que el sistema es compatible determinado, y vamos a resolverlo con el *método de Gauss-Jordan* (también sería sencillo aplicar la *regla de Cràmer*).

$$\left\| \begin{array}{cccc} -2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right\|$$

Por tanto, la única solución en este caso es:

$$x = -\frac{4}{3}, \quad y = 1, \quad z = \frac{1}{3}.$$

■

Ejercicio 4 Considera los vectores $\vec{u} = (1, 1, m)$, $\vec{v} = (0, m, -1)$ y $\vec{w} = (1, 2m, 0)$.

(a) *(**1'25 puntos**)* Determina el valor de m para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

(b) *(**1'25 puntos**)* Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución: Para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes, su rango no puede ser tres, y entonces su determinante debe anularse:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} = -1 - \left(m^2 - 2m\right) = -\left(m^2 - 2m + 1\right) = -\left(m - 1\right)^2.$$

Por tanto, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes únicamente si $m = 1$. En este caso, podemos expresar $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. para determinar estos coeficientes, igualamos las componentes de los vectores:

$$\begin{aligned} \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad &\Leftrightarrow \quad a\,(1,1,1) + b\,(0,1,-1) = (1,2,0) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} a = 1 \\ a + b = 2 \\ a - b = 0 \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 1. \end{aligned}$$

Por consiguiente, en este caso, se tiene que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. ■