Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas II
Andalucía – Junio de 2007

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

20 de junio de 2007

Opción A

Ejercicio 1 Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Solución : Llamemos x e y a los dos números positivos. La condición $x+y=10$ nos lleva a que $y=10-x$. La función que debemos optimizar es el producto de sus cuadrados, es decir,

$$x^2 \cdot y^2 = x^2 (10-x)^2 = x^2 \left(x^2 - 20x + 100\right) = x^4 - 20x^3 + 100x^2 = F(x).$$

El dominio de esta función es el intervalo $]0,10[$, pues x toma valores positivos ($x>0$) pero $y=10-x$ también ($y=10-x>0$ equivale a decir que $x<10$). Para buscarle un máximo a esta función, buscamos sus puntos críticos (puntos en los que se anula la primera derivada):

$$F'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x = 4x\left(x^2 - 15x + 50\right).$$

De entrada, $x=0$ sería un punto crítico si estuviese en el dominio (que no es el caso). Buscamos otros puntos en los que se anule la primera derivada:

$$x^2 - 15x + 50 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 4\cdot 50}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{5, 10\}.$$

Como $x=10$ tampoco está en el dominio, deducimos que el único punto crítico de la función F, considerada en el intervalo $]0,10[$, es $x=5$. Estudiamos la monotonía de F en la siguiente tabla:

F'		$+$	Máx	$-$	
F	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	10

* Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

Como la función F es estrictamente creciente antes de $x = 5$ y es estrictamente decreciente después, concluímos que F alcanza un único máximo, que es absoluto, en $x = 5$. Su valor correspondiente es $y = 10 - x = 10 - 5 = 5$. Por consiguiente, los números positivos, x e y, que suman 10 y cuyo producto de cuadrados es máximo son $x = y = 5$. ■

Nota 1 *En el ejercicio anterior también sería aceptable considerar como dominio de F el intervalo cerrado $[0, 10]$, ya que si bien el enunciado establece que los números deben ser* positivos, *probablemente se ha elegido esta palabra con la intención de no confundir al alumnado con la expresión* no negativos. *Lo que no sería correcto es considerar la función F definida sobre $\mathbb{R}$, porque en este caso no tendría máximo, ya que:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x^4 - 20x^3 + 100x^2\right) = +\infty.$$

Por ejemplo, los números 20 y -10 suman 10 y el producto de sus cuadrados ya supera el máximo del ejercicio anterior.

Ejercicio 2 Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 3.$$

a) Esboza las gráficas de f y de g calculando sus puntos de corte.

b) Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de f y g.

Solución: En primer lugar, encontramos los puntos de corte entre f y g utilizando el método de *Ruffini*:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & -1 & -3 \\
1 & & 1 & 4 & -3 \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & -3 & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

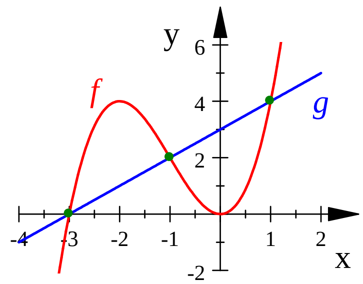
$$\begin{aligned}
f(x) = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 + 3x^2 = x + 3 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1)(x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \{-3, -1, 1\}.
\end{aligned}$$

La función g es muy sencilla de dibujar, pues es una recta de pendiente 1 y ordenada en el origen 3. Merece la pena estudiar al menos la monotonía de f para poder dibujarla mejor:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2) \qquad \begin{array}{c|ccccc}
f' & + & \text{Máx} & - & \text{Mín} & + \\
\hline
f & \nearrow & -2 & \searrow & 0 & \nearrow
\end{array}$$

Haciendo una simple tabla de valores, ya estamos en condiciones de dibujar las funciones f y g (interesa principalmente el intervalo $[-3,1]$ porque es donde se cortan):

x	$f(x)$	$g(x)$
-3	0	0
-2	4	1
-1	2	2
0	0	3
1	4	4



Como se observa, los puntos de corte entre f y g son $(-3,0)$, $(-1,2)$ y $(1,4)$.

Calculemos ahora las dos áreas que encierran las funciones f y g. Para ello, utilizamos la *regla de Barrow*. Por si las integrales saliesen negativas, las ponemos en valor absoluto (aunque podríamos conocer su signo de antemano restando la función que va *por encima* menos la que va *por debajo*):

$$A_1 = \left|\int_{-3}^{-1}(f-g)\right| = \left|\int_{-3}^{-1}\left(x^3+3x^2-x-3\right)dx\right| = \left|\left(\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{x=-3}^{x=-1}\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3\right)-\left(\frac{81}{4}-27-\frac{9}{2}+9\right)\right| = \left|\frac{7}{4}-\left(-\frac{9}{4}\right)\right| = |4| = 4 \text{ u.c.s.}$$

Utilizando la misma primitiva, calculamos el área de la otra región:

$$A_2 = \left|\int_{-1}^{1}(f-g)\right| = \left|\int_{-1}^{1}\left(x^3+3x^2-x-3\right)dx\right| = \left|\left(\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{x=-1}^{x=1}\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3\right)\right| = \left|-\frac{9}{4}-\frac{7}{4}\right| = |-4| = 4 \text{ u.c.s.}$$

Resulta entonces que las dos regiones tienen la misma área: 4 unidades cuadradas de superficie.

■

Ejercicio 3 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

a) Determina la matriz $B = A^2 - 2A$.

b) Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.

c) Calcula B^{-1} para $\lambda = 1$.

Solución : La matriz B es:

$$B = A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\lambda - 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 - \lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

Para que la matriz B tenga inversa, su determinante ha de ser distinto de cero. El determinante de B es:

$$\det B = \begin{vmatrix} -2 & 1 - \lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{vmatrix} = -2\left(\lambda^2 - 2\lambda - 1\right) - (\lambda - 1)(1 - \lambda) =$$

$$= -2\lambda^2 + 4\lambda + 2 - \left(\lambda - \lambda^2 - 1 + \lambda\right) = -\lambda^2 + 2\lambda + 3.$$

Calculamos los valores de λ que anulan al determinante de B:

$$\det B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \{-1, 3\}.$$

Los únicos valores de λ que anulan al determinante de B son -1 y 3, y en estos casos B no tiene inversa (es singular). Sin embargo, en todos los demás casos, es decir, si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$, el determinante de B no se anula y la matriz B tiene inversa (es regular).

Finalmente, si $\lambda = 1$, la matriz B es:

$$B = \left. \begin{pmatrix} -2 & 1 - \lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{pmatrix} \right|_{\lambda = 1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I_2,$$

por lo que su inversa es:

$$B^{-1} = \frac{1}{-2} I_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

■

Ejercicio 4 Considera los planos de ecuaciones $x - y + z = 0$ y $x + y - z = 2$.

a) Determina la recta que pasa por el punto $A(1, 2, 3)$ y no corta a ninguno de los planos dados.

b) Determina los puntos que equidistan de $A(1, 2, 3)$ y $B(2, 1, 0)$ y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.

Solución : Llamemos r a la recta que buscamos, de la que sabemos que pasa por A y que no corta a los planos dados. Para que esto ocurra, la recta r debe ser paralela, a la vez, a los dos planos (si no fuese paralela a alguno, lo cortaría), y, por tanto, debe ser paralela a la recta intersección entre los dos planos. Esto nos indica que su vector director debe ser el mismo que el de la intersección entre los planos.

Llamemos π y π' a los planos dados ($\pi \equiv x - y + z = 0$ y $\pi' \equiv x + y - z = 2$) y llamemos s a su recta intersección, que vamos a calcular en forma paramétrica. En efecto, si sumamos las dos ecuaciones, resulta que $2x = 2$, de donde $x = 1$. Con esta variable fija, las dos ecuaciones se reducen a $y - z = 1$. Si llamamos $m = z$, resulta que $y = z + 1 = m + 1$, por lo que la recta $s = \pi \cap \pi'$ es:

$$s = \pi \cap \pi' \equiv \begin{cases} x = 1, \\ y = m + 1, \qquad m \in \mathbb{R}. \\ z = m, \end{cases}$$

Como la recta que buscamos (r) es paralela a ésta (s), sus vectores directores son iguales:

$$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} = (0, 1, 1)\,.$$

Por tanto, la recta r es la recta que pasa por el punto $A\,(1, 2, 3)$ y lleva la dirección del vector $\overrightarrow{u_r} = (0, 1, 1)$. Dada en ecuaciones paramétricas, la recta solicitada es la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1, \\ y = m + 2, \qquad m \in \mathbb{R}. \\ z = m + 3, \end{cases}$$

Para la segunda parte, ya hemos encontrado la intersección de los dos planos, $s = \pi \cap \pi'$. Un punto genérico de esta recta es de la forma $P_s\,(1, m + 1, m)$ donde $m \in \mathbb{R}$ es un número real. Imponemos la condición de que este punto equidiste de los puntos A y B, y determinamos los posibles valores que puede tomar el parámetro m:

$$\begin{aligned} \mathsf{d}\,(P_s, A) = \mathsf{d}\,(P_s, B) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathsf{d}\,(P_s, A)^2 = \mathsf{d}\,(P_s, B)^2 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (1-1)^2 + (m+1-2)^2 + (m-3)^2 = (1-2)^2 + (m+1-1)^2 + (m-0)^2 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (m-1)^2 + (m-3)^2 = 1 + m^2 + m^2 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad m^2 - 2m + 1 + m^2 - 6m + 9 = 1 + 2m^2 \quad \Leftrightarrow \quad -8m = -9 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Esto nos indica que sólo hay un único punto en la intersección $s = \pi \cap \pi'$ que equidista de A y de B, que es el punto:

$$P_s\,(1, m+1, m)\Big|_{m=\frac{9}{8}} = \left(1, \frac{17}{8}, \frac{9}{8}\right).$$

■

Nota 2 *Hay una forma mucho más sencilla de resolver el apartado* **a)** *del ejercicio anterior sin hacer casi ningún esfuerzo. Queremos encontrar la recta r que pasa por A y no corta a los* *planos dados π y π'. Consiste en buscar dos planos paralelos a éstos, π_1 y π_1', que pasen por el punto A, lo que se consigue cambiando únicamente la constante del segundo miembro de cada ecuación:*

$$\begin{aligned} A(1,2,3) \in \pi_1 \parallel \pi \quad &\Rightarrow \quad \pi_1 \equiv x - y + z = 1 - 2 + 3 = 2, \\ A(1,2,3) \in \pi_1' \parallel \pi' \quad &\Rightarrow \quad \pi_1' \equiv x + y - z = 1 + 2 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Como π_1 es paralelo a π (y distinto), ambos no se cortan, y lo mismo ocurre entre π_1' y π'. Por tanto, un punto que pertenezca a la intersección entre π_1 y π_1' no puede estar ni en π ni en π'. Como esta intersección es una recta y contiene claramente al punto A, debe ser la recta buscada.

$$r = \pi_1 \cap \pi_1' \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 2, \\ x + y - z = 0. \end{array} \right.$$

Si bien este método es más rápido, probablemente sea más complicado a la hora de imaginarlo.

*También el apartado **b)** se puede resolver de otra forma igual de sencilla. Para ello, se calcula el plano mediador entre los puntos A y B (el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de A y de B):*

$$\begin{aligned} \mathsf{d}(P,A) = \mathsf{d}(P,B) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathsf{d}(P,A)^2 = \mathsf{d}(P,B)^2 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-3)^3 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 2x - 2y - 6z = -9, \end{aligned}$$

y ahora el punto que buscamos es la intersección entre la recta r y este plano:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 2, \\ x + y - z = 0, \\ 2x - 2y - 6z = -9 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad x = 1, \quad y = \frac{17}{8}, \quad z = \frac{9}{8}.$$

Opción B

Ejercicio 1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

Solución: En primer lugar, encontramos el punto de inflexión de f sabiendo que viene determinado por anular a la segunda derivada:

$$f'(x) = 6x^2 + 24x + a, \quad f''(x) = 12x + 24,$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12x + 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2.$$

Como $f'''(-2) = 12 \neq 0$, confirmamos que f posee en $x = -2$ un punto de inflexión, es que $(-2, f(-2))$. Como en este punto la recta tangente es $y = 2x + 3$, su pendiente $f'(-2)$ ha de valer 2, pero además sabemos que la función ha de pasar por el punto $(-2, y(-2)) = (-2, -1)$ porque la función y la recta tangente se cortan en el punto de tangencia. Así, llegamos al sistema:

$$-1 = (2x+3)|_{x=-2} = f(-2) = -16 + 48 - 2a + b \quad \Leftrightarrow \quad 2a - b = 33,$$

$$2 = \left.\frac{d(2x+3)}{dx}\right|_{x=-2} = f'(-2) = 24 - 48 + a \quad \Leftrightarrow \quad a = 48 - 24 + 2 = 26.$$

De aquí se deduce que $a = 26$ y de la primera ecuación se llega a $b = 2a - 33 = 19$. Así, los valores buscados de a y b son $a = 26$ y $b = 19$. ■

Ejercicio 2 Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathrm{Ln}\left(1 + x^2\right)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas (Ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución: Buscamos una integral indefinida utilizando el método de integración por partes:

$$\int \mathrm{Ln}\left(1+x^2\right) dx = \left\| \begin{array}{ll} u = \mathrm{Ln}\left(1+x^2\right) & du = \dfrac{2x}{1+x^2} \\ dv = 1 & v = x \end{array} \right\| =$$

$$= x\,\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right) - \int x\,\frac{2x}{1+x^2}\,dx.$$

La nueva integral que aparece es un cociente de polinomios del mismo grado, por lo que dividimos, quedando:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -2x^2-2 & 2 \\ \hline -2 & \end{array} \qquad\qquad \frac{2x^2}{1+x^2} = 2 - \frac{2}{1+x^2}.$$

Entonces la integral buscada es:

$$\begin{aligned} \int \mathrm{Ln}\left(1+x^2\right) dx &= x\,\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = \\ &= x\,\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right) - \int \left(2 - \frac{2}{1+x^2}\right) dx = \\ &= x\,\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right) - 2x + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \\ &= x\,\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right) - 2x + 2\,\mathrm{arctg}\,x + C, \end{aligned}$$

donde C es una constante de integración. Para que esta función pase por el origen de coordenadas, obligatoriamente $F(0) = 0$, lo que obliga a que $C = 0$, y la primitiva buscada es:

$$F(x) = x\,\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right) - 2x + 2\,\mathrm{arctg}\,x.$$

■

Ejercicio 3 **a)** Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior,

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y & = & 1 \\ y+z & = & -2 \\ x+z & = & 3 \end{array}\right\}.$$

Solución : El determinante de la matriz A es:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1+1+0) - (0+0+0) = 2 \neq 0,$$

por lo que sabemos que, efectivamente, la matriz A tiene inversa. Su matriz de menores de orden dos es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cambiando los signos de los coeficientes que ocupan *posición par*, tenemos la matriz adjunta de A:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si dividimos su traspuesta entre su determinante, tenemos la matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, \widetilde{A}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, el sistema de ecuaciones dado se expresa en forma matricial como:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y & = & 1 \\ y+z & = & -2 \\ x+z & = & 3 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b} \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot X = b.$$

Como A es una matriz regular, el sistema es compatible determinado y su única solución es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

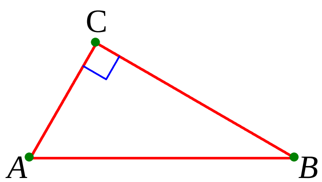
Por tanto, la única solución del sistema es $x = 3$, $y = -2$ y $z = 0$. ■

Ejercicio 4 Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,5)$.

a) Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices $A(0,3,-1)$, $B(0,1,5)$ y $C(x,4,3)$ tiene un ángulo recto en C.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0,1,5)$ y $(3,4,3)$ y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ 2x+y & = & 3 \end{array}\right.$

SOLUCIÓN: Para que el triángulo ABC posea un ángulo recto en C, los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ han de ser perpendiculares, y ello sólo ocurre si su producto escalar es cero:



$$0=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(x,1,4)\cdot(x,3,-2)=x^2+3-8=x^2-5.$$

Por tanto, los únicos valores de x que consiguen que el triángulo sea rectángulo en C son $x_1=\sqrt{5}$ y $x_2=-\sqrt{5}$.

Por otro lado, llamemos $D(0,1,5)$ y $E(3,4,3)$ a los puntos dados, llamemos r a la recta del enunciado y llamemos π al plano que estamos buscando. Este plano contiene a los puntos D y E, por lo que una de sus direcciones será la del vector $\overrightarrow{DE}=(3,3,-2)$. Por otro lado, al ser r paralela a π, el vector director de r también debe ser una dirección de π. Vamos a calcularla como el producto vectorial:

$$\overrightarrow{u_r}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Como los vectores $\overrightarrow{DE}=(3,3,-2)$ y $\overrightarrow{u_r}=(-1,2,3)$ generan la dirección del plano π, buscamos un vector perpendicular a éstos que sirva como vector normal al plano π, y utilizamos su producto vectorial:

$$\overrightarrow{n_\pi}=\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-7\\9\end{pmatrix}.$$

Esto significa que el plano π posee la forma $13x-7y+9z=k$, donde k es una constante. Como el punto $D(0,1,5)$ pertenece al plano π, debe verificar su ecuación, y así determinamos el valor de k:

$$k=13\cdot 0-7\cdot 1+9\cdot 5=38.$$

Podemos entonces concluir que el plano π que contiene a los puntos D y E y es paralelo a la recta r es el plano de ecuación:

$$\pi \equiv \quad 13x - 7y + 9z = 38.$$

■