Resolución del examen de Matemáticas II de Selectividad Andalucía – Septiembre de 2006

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

2 de mayo de 2007

Opción A

Ejercicio 1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$.

(a) **[0'75 puntos]** Estudia la derivabilidad de f.

(b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

(c) **[0'75 puntos]** Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).

Solución : La función $x \mapsto x^2$ es continua y derivable (tantas veces como se quiera), y la función $x \mapsto |x|$ es continua en $\mathbb{R}$ pero derivable únicamente en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por tanto, la suma de ambas, que es f, es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esto ya resuelve el apartado **(a)**, pero vamos a demostrarlo también analíticamente expresándola como una función a trozos.

La función valor absoluto puede expresarse de la forma:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0, \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Entonces la función f es:

$$f(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 + x, & \text{si } x < 0, \\ x^2 - x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

* Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

En los intervalos abiertos $\mathbb{R}^{\pm}$, f posee expresiones polinómicas, por lo que es continua en ambos. El único punto en el que podría haber alguna discontinuidad es el $x=0$, pero en este punto los límites laterales coinciden entre sí y con el valor de la función:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}$. Para estudiar su derivabilidad, sabemos que:

$$x \neq 0, \quad f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x<0, \\ 2x-1, & \text{si } x>0. \end{cases}$$

En el punto $x=0$ no coinciden las derivadas laterales, ya que

$$f'\left(0^-\right) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x+1) = 1, \qquad f'\left(0^+\right) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x-1) = -1.$$

Por tanto, f es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Todo esto nos confirma lo que ya sabíamos, pero además nos sirve para estudiar la monotonía y los extremos relativos de f. En efecto, los puntos críticos de f son:

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} 2x+1=0, & \text{con } x<0 \\ 2x-1=0, & \text{con } x>0 \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

La siguiente tabla nos sirve para estudiar la monotonía de f y sus extremos relativos; en ella incluímos el punto $x=0$ porque en él f no es derivable:

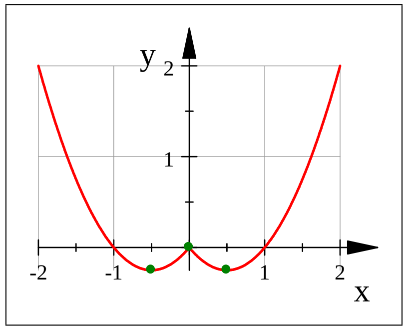
f'	$-$	Mín	$+$	Máx	$-$	Mín	$+$
f	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$

Como $f\left(\pm\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ y $f(0)=0$, también sabemos que f posee dos mínimos (que son absolutos) en los puntos $\left(\pm\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ y un máximo relativo en $(0,0)$. Resumimos la información que hemos obtenido.

$$\text{Monotonía} \begin{cases} f \text{ creciente en } \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[, \\ f \text{ decreciente en } \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right[. \end{cases} \quad \text{Extremos} \begin{cases} \text{Mínimos abs. en } \left(\pm\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), \\ \text{Máximo rel. en } (0,0). \end{cases}$$

■

Aunque no se nos pida explícitamente en el ejercicio, podemos dibujar la función f, ya que es la yuxtaposición par de dos parábolas.



Ejercicio 2 Calcula

(a) **[1'5 puntos]** $\displaystyle\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} dx.$

(b) **[1 punto]** $\displaystyle\int (2x-3)\cdot \operatorname{tg}\left(x^2 - 3x\right) dx$, siendo tg la función tangente.

SOLUCIÓN: La primera integral es la de una función racional. Como el grado del numerador es igual al grado del denominador, lo primero que hacemos es dividir los polinomios:

$$\begin{array}{rrr|l} 5x^2 & -x & -160 & x^2-25 \\ \cline{4-4} -5x^2 & & +125 & 5 \\ \cline{1-3} & -x & -35 & \end{array} \qquad \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} = 5 - \frac{x+35}{x^2-25}.$$

Así, debemos calcular la integral de la segunda fracción. Para ello, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+35}{x^2-25} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-5} = \frac{A\,(x-5) + B\,(x+5)}{x^2-25} = \frac{(A+B)\,x + (5B-5A)}{x^2-25}.$$

La única solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} A+B = 1, \\ 5B - 5A = 35, \end{array}\right. \qquad \text{es } A = -3 \text{ y } B = 4.$$

Por tanto la primera integral es:

$$\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} dx = \int \left(5 - \frac{x+35}{x^2-25}\right) dx = 5x - \int \left(\frac{-3}{x+5} + \frac{4}{x-5}\right) dx =$$

$$= 5x + 3\ln|\,x+5\,| - 4\ln|\,x-5\,| + C,$$

donde C es la constante de integración.

Para calcular la segunda integral, observamos que el producto $2x-3$ es la derivada del argumento de la función tangente, por lo que conviene hacer el cambio de variable $u = x^2 - 3x$. Por tanto, $du = (2x-3)\,dx$ y expresamos la integral:

$$\int (2x-3)\cdot \operatorname{tg}\left(x^2-3x\right) dx = \int \operatorname{tg} u \; du = \int \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\, du = -\ln|\cos u| + C =$$

$$= -\ln\left|\cos\left(x^2-3x\right)\right| + C,$$

donde nuevamente C es una constante de integración. ■

Ejercicio 3 Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcc} \lambda x - y - z & = & -1 \\ x + \lambda y + z & = & 4 \\ x + y + z & = & \lambda + 2 \end{array}\right\}$$

(a) **[1'5 puntos]** Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) **[1 punto]** Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.

Solución: Llamemos (S) al sistema anterior y calculemos el determinante de la matriz A del sistema (S) desarrollándolo con la *regla de Sarrus*:

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 - 1 + \lambda + 1 - \lambda = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)\,.$$

Esto significa que si $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$, el determinante de la matriz del sistema es no nulo, por lo que posee rango tres, y como la matriz ampliada también poseería rango tres, el *teorema de Rouché-Fröbenius* nos garantiza que, en este caso, el sistema es compatible determinado. Queda sólo por analizar los casos $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$.

Si $\lambda = 1$, las dos últimas ecuaciones son $x+y+z=4$ y $x+y+z=3$, que son claramente incompatibles. Por eso, en este caso, el sistema es incompatible.

Si $\lambda = -1$, utilizamos el método de *Gauss-Jordan*:

$$\left\| \begin{array}{cccc} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Como los rangos de las matrices del sistema y ampliada coinciden entre sí (son 2), el *teorema de Rouché-Fröbenius* nos garantiza que, en este caso, el sistema es compatible indeterminado uniparamétrico. Resumimos la clasificación del sistema:

$$\begin{cases} \bullet \text{ Si } \lambda \in \mathbb{R}\diagdown\{\pm 1\} & \Rightarrow \quad (S) \text{ es compatible determinado.} \\ \bullet \text{ Si } \lambda = 1 & \Rightarrow \quad (S) \text{ es incompatible.} \\ \bullet \text{ Si } \lambda = 1 & \Rightarrow \quad (S) \text{ es compatible indeterminado uniparamétrico.} \end{cases}$$

Si $\lambda = 2$, ya sabemos que el sistema es compatible determinado. Calculamos su solución con el método de *Gauss-Jordan*:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right\| \sim \Bigg/ \begin{array}{c} F_1' = F_3 \\ F_2' = F_2 - F_3 \\ F_3' = F_3 + F_1 \end{array} \Bigg/ \sim \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right\|$$

De aquí se deduce que $y = 0$ y $x = 1$, y de la primera ecuación, $z = 3$. Por tanto, la única solución del sistema es $x = 1$, $y = 0$ y $z = 3$. ■

Ejercicio 4 [2'5 puntos] Determina los puntos de la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-3}{2} \end{cases}$ que equidistan del plano π de ecuación $x + z = 1$ y del plano π' de ecuación $y - z = 3$.

Solución : De la segunda ecuación que cumple la recta r sabemos que:

$$y - 1 = \frac{z-3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2y - 2 = z - 3 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2y + 1.$$

Si llamamos $\lambda = y$, un punto genérico de la recta r es de la forma:

$$P_r\,(x, y, z) = (0, \lambda, 2\lambda + 1)\,, \quad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calculamos entonces la distancia de P_r a los planos $\pi \equiv x + z - 1 = 0$ y $\pi' \equiv y - z - 3 = 0$ con la fórmula usual:

$$\mathsf{d}\,(P_r, \pi) = \frac{|0 + (2\lambda + 1) - 1|}{\sqrt{1^1 + 1^1}} = \frac{|2\lambda|}{\sqrt{2}},$$

$$\mathsf{d}\,(P_r, \pi') = \frac{|\lambda - (2\lambda + 1) - 3|}{\sqrt{1^1 + 1^1}} = \frac{|-\lambda - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{|\lambda + 4|}{\sqrt{2}}.$$

Para que P_r equidiste de π y de π', esta dos distancias deben ser iguales y, por tanto:

$$\mathsf{d}\,(P_r, \pi) = \mathsf{d}\,(P_r, \pi') \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|2\lambda|}{\sqrt{2}} = \frac{|\lambda + 4|}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad |2\lambda| = |\lambda + 4| \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{o bien } 2\lambda = \lambda + 4, \\ \text{o bien } 2\lambda = -\lambda - 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{o bien } \lambda = 4, \\ \text{o bien } \lambda = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Estos dos valores para el parámetro λ nos conducen a los puntos

$$P_1\,(0, 4, 9) \qquad \text{y} \qquad P_2\left(0, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right),$$

que son los puntos de la recta r que equidistan de los planos π y π'. ■

0.1. Opción B

Ejercicio 1 [2'5 puntos] Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima.

Solución: Dividamos el alambre de longitud 1 en dos partes, una de longitud x y la otra de longitud $1-x$. Con la primera de ellas hacemos un cuadrado, y como el perímetro es x, el lado mide $x/4$ y su área es $A_1(x) = x^2/16$. Con la segunda de ellas, que mide $1-x$, hacemos una circunferencia; si queremos que su perímetro sea $1-x$, su radio ha de ser $r = (1-x)/2\pi$, y entonces su área es $A_2(x) = \pi r^2 = (1-x)^2/4\pi$. Por tanto, la suma de las dos áreas es:

$$A(x) = A_1(x) + A_2(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(1-x)^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4\left(x^2 - 2x + 1\right)}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 8x + 4}{16\pi}.$$

Esta función está definida en el intervalo $x \in [0,1]$, y le buscamos un mínimo. Como se trata de una parábola convexa, su mínimo absoluto está en su vértice (si éste está en el dominio):

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{2(4+\pi)} = \frac{4}{4+\pi} \approx 0'56 \in \left]0,1\right[.$$

Por tanto, para que el área sea mínima, debemos cortar el alambre de longintud 1 de tal forma que una parte mida $\frac{4}{4+\pi}$ (para hacer con ella el cuadrado) y la otra $1 - \frac{4}{4+\pi} = \frac{\pi}{4+\pi}$ (para hacer con ella la circunferencia). ■

Ejercicio 2 [2'5 puntos] Halla la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.

Solución: Integrando, sabemos que $f'(x) = 6x^2 - 6x + A$ y después, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + Ax + B$, donde A y B son números reales que debemos determinar. Para ello utilizamos la segunda condición. Si la recta $y = 4x - 7$ es la recta tangente en el punto $x = 2$, entonces debe verificarse:

$$f(2) = y|_{x=2} = 1, \qquad f'(2) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 4.$$

Teniendo estos datos, ya podemos hallar las constantes A y B, ya que

$$4 = f'(2) = 24 - 12 + A \quad \Rightarrow \quad A = -8,$$

$$1 = f(2) = 16 - 12 - 8\cdot 2 + B \quad \Rightarrow \quad B = 13.$$

Por tanto, la función f es $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 13$. ■

Ejercicio 3 [2'5 puntos] Resuelve $A\,B^t\,X = -2C$, siendo B^t la matriz traspuesta de B y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN : Calculamos primeramente:

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dado que el determinante de esta matriz es no nulo, posee inversa, y podemos despejar:

$$X = \left(A \cdot B^t\right)^{-1} \cdot (-2C) = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{-28} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ -5 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -1 \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

■

Nota 1 Obsérvese que no es correcto el razonamiento

$$X = \left(B^t\right)^{-1} \cdot A^{-1} \cdot (-2C),$$

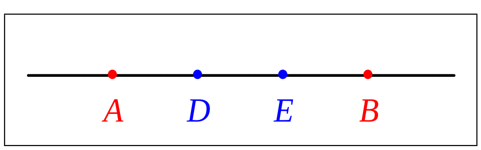
porque las matrices A y B^t no son cuadradas y, por tanto, carecen de matriz inversa. Sin embargo, la matriz $A \cdot B^t$ es cuadrada de orden dos y como su determinante es no nulo, posee inversa.

Ejercicio 4 Considera los puntos $A\,(1, 0, -2)$ y $B(-2, 3, 1)$.

(a) **[1 punto]** Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales.

(b) **[1'5 puntos]** Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C, donde C es un punto de la recta de ecuación $-x = y - 1 = z$. ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C?

SOLUCIÓN : Llamemos D y E a los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales (siendo D el más cercano a A).



Utilizando la noción de $vector = extremo - origen$, podemos establecer que:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad D - A = \frac{B - A}{3} \quad \Leftrightarrow \quad D = A + \frac{B - A}{3} = \frac{2A + B}{3}.$$

Utilizando las coordenadas de A y B:

$$D = \frac{2A + B}{3} = \frac{1}{3}\left[2\,(1, 0, -2) + (-2, 3, 1) \right] = \frac{1}{3}\,(0, 3, -3) = (0, 1, -1)\,.$$

Igualmente se demuestra que:

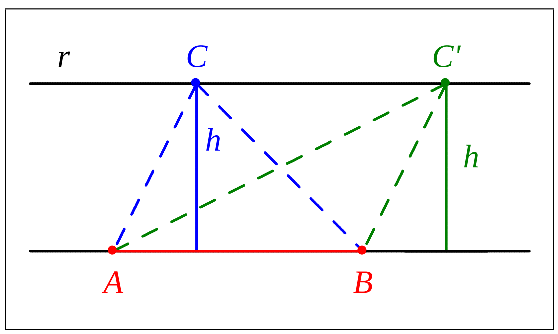
$$E = \frac{A+2B}{3} = \frac{1}{3}\left[\ (1,0,-2)+2\,(-2,3,1)\ \right] = \frac{1}{3}\ (-3,6,0) = (-1,2,0)\,.$$

Por tanto, los puntos buscados son $D\,(0,1,-1)$ y $E\,(-1,2,0)$.

Llamemos ahora r a la recta de ecuaciones $-x = y-1 = z$. Claramente, un punto de r es $P_r = (0,1,0)$ y su vector director es $\overrightarrow{u_r} = (-1,1,1)$. Observemos que el vector

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,3,1)-(1,0,-2) = (-3,3,3)\ \parallel\ (-1,1,1) = \overrightarrow{u_r}.$$

Así, el vector que une los puntos A y B es paralelo a la recta r, y esto tiene importantes consecuencias en el ejercicio, ya que si C es cualquier punto de r, el área del triángulo ABC viene dada como la mitad de la base (que se puede tomar como el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$) por la altura (que es la distancia entre las rectas paralelas r y la que pasa por A y por B). Así, este área no depende del punto C que se elija sobre r ya que la base es siempre $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ y su altura es la distancia entre dos rectas paralelas (que no dependen de la elección de C).



Podemos entonces elegir $C = P_r = (0,1,0)$ y el área del triángulo ABC es:

$$\mathcal{A}\,(ABC) = \frac{1}{2}\ \left|\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\ \right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\ \left|\ (3,3,0)\ \right| =$$

$$= \frac{3}{2}\ \left|\ (1,1,0)\ \right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Este área no depende del punto C elegido sobre la recta r. ■